arXiv:2302.02058v1 [math.AT] 4 Feb 2023

作为流形的环面轨道空间

Anton Ayzenberg 和 Vladimir Gorchakov

Abstract. 我们刻画了紧致环面在光滑流形上的作用，其中轨道空间是拓扑流形（可以是闭流形，也可以带边界）。对于闭流形，这一结果最初由 Styrt 于 2009 年证明。我们为闭流形给出一种新的证明，该证明也适用于带边界的流形。在论证中，我们使用了 Provan 和 Billera 关于拟阵复形何时为伪流形的刻画结果。我们研究轨道空间为流形的环面作用的组合结构。在两个附录部分中，我们概述了与本文相关的两种理论。第一种是数理经济学中的列昂惕夫替代系统组合理论。第二种是 Atiyah 研究的狄拉克磁单极子的拓扑卡鲁扎–克莱因模型。这两部分旨在搭建不同学科之间的桥梁，并推动环面拓扑领域的进一步研究。

1. 引言

环面拓扑的经典对象是紧致环面 T 在光滑流形 X 上的作用，其拓扑轨道空间 X/T 同构于简单多面体。相关例子包括光滑射影环面簇及其拓扑推广：拟环面流形、环面流形和矩角流形。所有这些流形都是复杂度为零的环面作用的例子。一般而言，已知复杂度为零的作用的轨道空间是带角流形。

Buchstaber 和 Terzi´c [10] 开创了对正复杂度环面作用的轨道空间的研究。特别是，他们证明了 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}_{4,2}$ 上 2 平面所承载的典范环面作用，其轨道空间与一个球面同胚；对于 $\mathbb{C}^3$中完全旗标簇的典范环面作用，也有类似结果。在 [2], 中，第一作者证明了一个局部结论：在某些假设下，一般位置的复杂度一作用的轨道空间是一个闭拓扑流形。Cherepanov 后来在 [12]中推广了这一结果：非一般位置的复杂度一作用的轨道空间是带角流形。

2020 数学学科分类。 主要分类：57S12、55R55、57R91、54B15、20C35；次要分类：06A07、52B12、52B40、05B35、57M60、57R18。关键词和短语。 环面表示、轨道空间、拟阵、伪流形、霍普夫丛、卡鲁扎–克莱因模型、狄拉克磁单极子、列昂惕夫替代系统。本文是在HSE大学基础研究项目框架内完成的。

一个自然的问题由此产生：描述那些轨道空间为流形或带边界流形的流形上的环面作用。这个问题与 Vinberg [**26**], 的开创性工作以及 Mikhailova 和 Lange [**24, 19, 20, 21**] 后续的工作相呼应；他们对所有轨道空间为闭流形的有限群作用进行了分类。利用切片定理，这类问题可以归结为相应群的线性表示。我们证明了关于线性表示的以下结果。

THEOREM 1.1. 设紧环面 T 在实向量空间 V 上的表示的轨道空间与某个 m 同胚。则该表示弱等价于若干处于一般位置的复杂度一表示的乘积，并且可能还包含一个平凡表示。

THEOREM 1.2. 设紧环面 T 在实向量空间 V 上的表示的轨道空间与一个半空间 $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^{m-1}$ 同胚。则该表示弱等价于一个复杂度为零的表示，也可能再乘以若干处于一般位置的复杂度一表示以及一个平凡表示。

得出这些结果后，我们发现定理 1.1 已由 Styrt [**25**] 在更一般的情形下证明。他的证明论证与我们的基本相似。不过，在我们的情形中，由于我们引用了 Provan 和 Billera [**8**] 关于拟阵理论的一项已知结果，证明中的一个关键步骤得以简化。同一结果也用于定理 1.2 的证明。所引述的拟阵结果（见命题 3.8）最初源于对列昂惕夫替代系统的组合研究。因此，我们将定理陈述中出现的复杂度零和复杂度一表示的乘积称为 *Leontief* 表示，见定义 2.7。

本文结构如下。第 2 节给出了所有基本定义和例子，并严谨地陈述了结果。定理 1.1 和 1.2 在第 3 节中得到证明。在第 4 节和第 5 节中，我们回顾了与光滑流形上的环面作用有关的基本概念，并引入了列昂惕夫环面作用；这类作用的轨道空间本质上是一个流形（有边界或无边界）。我们研究列昂惕夫环面作用的组合结构，并将这些结果与 [**2, 12**] 关于复杂度一环面作用的研究联系起来。

本文附有两个附录，概述了与我们研究相关的两个主题。附录 A 简要介绍列昂惕夫替代系统，并解释了为何选择（略有歧义的）术语“Leontief 表示”。附录 B 专门讨论带有狄拉克磁单极子的卡鲁扎–克莱因模型的拓扑方面。从本质上说，这一模型是一个处于一般位置、复杂度一的环面作用的非常特殊的例子。该模型的重要性质是，其作用的轨道空间是一个开流形。考虑到这一点，可以将列昂惕夫环面作用视为拓扑卡鲁扎–克莱因理论在更高维度上的最一般类比。这一观察或许能成为进一步研究此类环面作用的良好动机。

2. 定义与结果

本文中， T^k 表示作为李群的紧致 k 维环面。格 $N = \mathrm{Hom}(T^k,\ S^1) \cong \mathbb{Z}^k$ 称为权格，其对偶格 $N^* = \mathrm{Hom}(S^1,\ T^k)$ 称为一维子群格。

考虑 $T = T^k$ 在 $V = \mathbb{R}^m$ 上的一个表示。它可分解为不可约表示的直和。阿贝尔群 T 的不可约表示的实维数为 1 或 2。一维表示是平凡的（无作用）。二维实表示 $V(\alpha)$ 由一个非零权 $\alpha \in N$ 确定，使得

$$V(\alpha) \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad tz = \alpha(t) \cdot z.$$

由于 $\mathbb{R}^2$ 上既未固定复结构，也未固定定向，因此权 α 仅在相差一个符号的意义下唯一确定。因此，环面 V 的任意表示都可分解为以下直和

$$V \cong V(\alpha_1) \oplus \ldots \oplus V(\alpha_r) \oplus \mathbb{R}^{m-2r}, \tag{2.1}$$

其中环面在 $\mathbb{R}^{m-2r}$ 上的作用是平凡的，而 $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r \in N$ 是权格 N 中一组非零向量，且每个向量仅在相差一个符号的意义下确定。

下文将权视为向量空间 $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^k$ 中的有理向量。此外，由于权仅在相差一个符号的意义下确定，因此可以将它们视为有理直线（一维向量子空间）。尽管一条有理直线包含无穷多个非零整向量，但选择一个代表元对我们的论证并不重要。因此，任意环面表示都完全由 $N_{\mathbb{Q}}$ 中的向量（或直线）多重集 $\alpha = \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r\}$ 确定。

注意，(2.1) 中的加项 $\mathbb{R}^{m-2r}$ 是该表示的不动点子空间。目前为止，该表示具有孤立不动点，当且仅当 $m = 2r$。

以下假设环面表示都是有效的，这意味着它们的权张成向量空间 $N_{\mathbb{Q}}$。

Definition 2.1. 考虑 $T = T^k$ 在 $V = \mathbb{R}^m$ 上的一个表示，其权系统为 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots\ldots,\ \alpha_r\}$。数 $r - k = |\alpha| - \mathrm{rk}\ \alpha$ 称为该表示的复杂度。

注意，复杂度始终是非负数，且与表示中平凡加项的维数无关。如果表示 V 具有孤立不动点，其复杂度等于 $\frac{1}{2}\dim V - \dim T$。

环面中的坐标变换促使我们定义弱等价表示。

Definition 2.2. 如果存在一个自同构 $\psi\colon T \to T$ 和一个同构 $g\colon V \to W$，使得 $g(tv) = \psi(t)g(v)$，则称 T 的两个表示 V 和 W 弱等价。

Example 2.3. 复杂度 0 的表示具有如下形式

$$V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_n) \oplus \mathbb{R}^{m-2n},$$

其中 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n\} \subset N = \mathbf{Hom}(T^n, T^1)$ 是 $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^n$ 的有理基。利用 $\mathbb{Z}$ 上的史密斯标准形，我们可以改变 T^n 中的坐标（或等价地，改变 N 中的坐标）。因此，在弱等价意义下，我们有 $\alpha_i = d_i e_i$，其中 $\{e_1, \ldots\ldots, e_n\}$ 是格 N 的基，而 d_i 是满足 $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n$ 的非零整数。假设不存在平凡分量，则复杂度零作用具有如下形式

$$(t_1, \ldots, t_n)(z_1, \ldots, z_n) = (t_1^{d_1} z_1, \ldots, t_n^{d_n} z_n),$$

对于 $z_i \in \mathbb{C}$。若对于任意 i，都有 $d_i = 1$ ，则称该表示为标准表示。这类表示已得到充分研究，并广泛应用于环面拓扑。

然而，即使对于一般的 d_i，复杂度为零的表示（不含平凡分量）的轨道空间也是一个非负锥 $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$。作为拓扑空间，它与半空间 $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 同胚。

Definition 2.4. 若表示 $T = T^{n-1}$ 在 $V \cong \mathbb{R}^{2n}$ 上的平凡部分为零，且其权 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{n-1}$ 中任意 $n-1$ 个在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，则称其为一般位置下的复杂度一表示。

对于一般位置下的复杂度一表示，集合 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset N$ 确定一个群同态

$$A = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \colon T^{n-1} \to T^n.$$

由于 α 张成 $N_{\mathbb{Q}}$，核 $\mathbf{Ker}\, A$ 是一个有限阿贝尔群。 A 的像是一个余维 1 的环面子群 $\{(t_1, \ldots\ldots, t_n) \in T^n \mid \prod_{i=1}^n t_i^{c_i} = 1\}$，其中 $c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0$ 是 $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{n-1}$ 中 n 个向量 α_i 之间唯一的（相差一个倍数的）线性关系，并且 c_i 没有非平凡公因子。任意 α_i 个 $n-1$ 彼此独立的条件，等价于对任意 i，都有 $c_i \neq 0$ 。

由于 α_i 只在相差一个符号的意义下确定，我们可以假设 c_i 是自然数。原表示的轨道空间自然地与 A 的像的轨道空间重合，由此得到以下观察。

Lemma 2.5. $V \cong \mathbb{R}^{2n}$ 上处于一般位置的 T^{n-1} 的复杂度一表示的轨道空间，与 T^n 在 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 上的标准作用所诱导的子群 $H = \{(t_1, \ldots\ldots, t_n) \in T^n \mid \prod_{i=1}^n t_i^{c_i} = 1\}$（其中 $c_i > 0$）的作用的轨道空间同胚。

请注意，原作用的稳定子子群与 H 的稳定子子群不一定相同：它们取决于上文所述的有限群 $\mathbf{Ker}\, A$ 。然而，对于轨道空间，可以利用 H 的特定模型作用证明以下结果。

Proposition 2.6 ([**2**, 引理 2。11] 或 [**25**, 定理 3。6])。 对于 $\mathbb{C}^n$ 上处于一般位置的复杂度一的 T^{n-1} 表示，我们有一个同胚 $\mathbb{C}^n/T^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$。

Definition 2.7. 考虑一组处于一般位置的复杂度一表示 $T^{n_i-1} \to \mathbf{GL}(\mathbb{C}^{n_i})$，其中 $i \in \{1, \ldots, s\}$，一个复杂度为零的表示 $T^d \to \mathbf{GL}(\mathbb{C}^d)$，以及作用于 $\mathbb{R}^l$ 上的平凡表示。则 $T^d \times$的乘积表示

$\prod_{i=1}^{s} T^{n_i-1}$ 在 $V = \mathbb{R}^l \times \mathbb{C}^d \times \prod_{i=1}^{s} \mathbb{C}^{n_i}$ 称为 里昂惕夫表示。如果满足以下条件，则称其为完全里昂惕夫： $d = 0$。

这一术语名称的由来见附录 A。对于全莱昂惕夫表示，我们有

$$V/T = \mathbb{R}^l \times \prod_{i=1}^{s} \mathbb{C}^{n_i}/T^{n_i-1} = \mathbb{R}^l \times \prod_{i=1}^{s} \mathbb{R}^{n_i+1},$$

因此，轨道空间是一个拓扑流形。同样，任意非全莱昂惕夫表示的轨道空间都是一个半空间，也就是说，是一个带边界流形。

引言中陈述的定理 1.1 和 1.2 断言，Leontief 表示穷尽了所有轨道空间为流形（开或有界）的表示。下面将这两个定理重新表述如下。

THEOREM 2.8.

(1) 设表示 $T \to \mathrm{GL}(V)$ 的轨道空间 V/T 与 $\mathbb{R}^l$ 同胚。那么，该表示与一个全莱昂惕夫表示弱等价。(2) 设表示 $T \to \mathrm{GL}(V)$ 的轨道空间 V/T 与半空间 $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^{l-1}$ 同胚。那么，该表示与一个非全莱昂惕夫表示弱等价。

第一个结果已在 [**25**, 定理 1.3] 中得到证明，其适用范围要广泛得多：Styrt 刻画了所有满足轨道空间与 $\mathbb{R}^d$ 同胚的 $G \subset \mathbf{GL}(V)$ 表示，前提是 G 的连通分支为紧环面。我们对定理 2.8 第一部分的证明，基本沿用了 [**25**] 中针对 $G = T$ 这一特殊情形的证明思路，不过我们通过引用一些关于拟阵的已知结果简化了论证。证明定理 2.8 的第 2 项时也采用了类似的方法。

3. 证明

回顾一下，在顶点集 A 上的（抽象）单纯复形是 A 的一个子集族 $K \subseteq 2^A$，满足：（1） $\varnothing \in K$；（2）若 $I \in K$ 和 $J \subset I$，则 $J \in K$。A 的元素称为顶点，K 的元素称为单形。值 $\dim I = |I| - 1$ 称为单形 I 的维数。单形的最大维数称为 K 的维数。若不存在严格包含 I 的 $J \in K$，则称单形 I 为极大（或一个面）。如果所有面维数都相同，则称单纯复形为纯的。在纯单纯复形中，若 $\dim J = \dim K - 1$，则称单形 J 为一条脊。若 $\{i\} \notin K$，则称元素 $i \in A$ 为 K 的幽灵顶点。

若 K_1, K_2 分别是顶点集 A_1, A_2 上的单纯复形，则它们的连接 $K_1 * K_2$ 是一个单纯复形 $\{I_1 \sqcup I_2 \subset A_1 \sqcup A_2 \mid I_1 \in K_1, I_2 \in K_2\}$。集合 A 上的满单纯形是由 A的所有子集构成的单纯复形 $\Delta_A = 2^A$。集合 A 上的单形的边界是由 A的所有真子集构成的单纯复形 $\partial\Delta_A = 2^{[A]} \backslash \{A\}$。集合 A 上的幽灵复形是单纯复形 $o_A = \{\varnothing\}$，其中所有顶点都是幽灵顶点。

CONSTRUCTION 3.1. 对于有理向量空间 $N_{\mathbb{Q}}$ 中的向量多重集 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$，考虑顶点集 $[r] = \{1, \dots, r\}$ 上的单纯复形 $K(\alpha)$，其单形是由线性无关向量组成的子集：

$$\{i_1, \dots, i_l\} \in K(\alpha) \Leftrightarrow \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l} \text{ are linearly independent.}$$

根据定义，$K(\alpha)$ 是由集合 α确定的线性拟阵的独立复形。由于 α 张成了 $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^k$，复形 $K(\alpha)$ 是维数为 $k-1$ 的纯复形。

REMARK 3.2. 正如 Bj¨orner [9], 所证明的，任何拟阵的独立复形都是可壳的，因此是同伦 Cohen–Macaulay 的。这意味着其几何实现 $|K(\alpha)|$ 与一个由 $(k-1)$ 维球面组成的楔和同伦等价。

回顾组合拓扑中的经典概念。

DEFINITION 3.3. 如果一个纯单纯复形 K 中的每个脊都恰好包含于两个面中，则称其为（闭）伪流形 。如果一个纯单纯复形 K 中的每个脊都包含于一个或两个面中，则称其为带边界伪流形 。

REMARK 3.4. 如果一个脊包含于一个面中，则称其为边界脊。使用“带边界伪流形”这一术语时，我们假定至少存在一个边界脊。因此，不带边界的伪流形不被视为带边界伪流形。

我们对定理 2.8 的证明本质上基于下面的引理。为方便起见，我们将定理 2.8 中第 1 项的假设称为流形情形，将第 2 项的假设称为边界情形。相应的表示分别称为流形型表示和边界型表示。

PROPOSITION 3.5. 考虑环面 $T = T^k \to \mathrm{GL}(V)$ 的一个表示，并令$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \in N_{\mathbb{Q}}$ 为定义该表示的权多重集。则有以下结论。

(1) 在流形情形下，单纯复形 $K(\alpha)$ 是一个伪流形。(2) 在边界情形下，单纯复形 $K(\alpha)$ 是一个带边界的伪流形。

对我们而言，使用同调流形而非拓扑流形会更方便。对于空间 Q，相对同调模 $H_*(Q, Q\backslash\{x\}; R)$ 称为点 $x \in Q$ 处的局部同调模，其系数取自阿贝尔群 R。回顾一下，若局部紧空间 Q 满足对任意 $x \in Q$，其局部同调模均与 $\mathbb{R}^d$的局部同调模同构，则称其为（闭） d维同调流形（系数取自R）：

$$H_s(Q, Q\backslash\{x\}; R) \cong H_s(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\backslash\{0\}; R) \begin{cases} \cong R, & \text{if } s = d; \\ = 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.1}$$

若空间 Q 的局部同调模与 $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^{d-1}$的局部同调模同构，则称其为一个 d维带边界同调流形：对于边界点，这些局部同调模均为零；对于内点，则满足 (3.1)。下一个结论可直接由相对同调群的 K¨unneth 公式得出。

LEMMA 3.6. 我们固定一个系数环 R 。
(1) 如果 Q 是闭同调流形，那么 $Q \times \mathbb{R}^s$也是。(2) 如果 Q 是带边界同调流形，那么 $Q \times \mathbb{R}^s$也是。(3) 如果 Q 不是同调流形（无论是否带边界），那么 $Q\times\mathbb{R}^s$也不是。

证明命题 3.5 需要用到下一个技术引理。

LEMMA 3.7. 考虑在 $V \cong \mathbb{R}^{2n}$, $n \geqslant 1$ 上的一个 T^1-表示，其中没有平凡分量。于是有两种可能。

(1) $n = 1$, $\mathbb{C}^1/T^1$ 与 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$同胚。(2) $n = 2$, $\mathbb{C}^2/T^1$ 与 $\mathbb{R}^3$同胚。(3) $n \geqslant 3$, $\mathbb{C}^n/T^1$ 不是关于任意 R 的同调流形（既不是闭同调流形，也不是带边界同调流形）。

PROOF. （1）显然，见例 2.3）。 （2）由命题 2.6 得出。关于（2）的补充细节见 B 节。我们重点讨论（ 3 ）。

由于没有平凡分量，我们有 $V \cong V(\alpha_1)\oplus\cdots\oplus V(\alpha_n)$，其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{Hom}(T^1, T^1)$ 是一组非零整数。在与不可约直和项 $V(\alpha_i)$ 相对应的复坐标中，该表示具有如下形式

$$t(z_1, \ldots, z_n) = (t^{\alpha_1} z_1, \ldots, t^{\alpha_n} z_n).$$

将此作用限制在单位球面 $S^{2n-1} = \{\sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\}$ 上，我们得到加权射影空间 $\mathbb{C}P^{n-1}(\alpha) = \mathbb{C}P^{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$作为轨道空间。因此， $\mathbb{C}^n/T^1$是一个开锥 $\mathbf{Cone}\ \mathbb{C}P^{n-1}(\alpha)$，其锥顶记为 0。我们有

$$H_j(\operatorname{Cone}\mathbb{C}P^{n-1}(\alpha), \operatorname{Cone}\mathbb{C}P^{n-1}(\alpha)\backslash\{0\}; R) \cong H_{j-1}(\mathbb{C}P^{n-1}(\alpha); R).$$

加权射影空间 $\mathbb{C}P^{n-1}(\alpha)$ 与普通射影空间 $\mathbb{C}P^{n-1}$具有相同的同调，其中 R [18]任意。因此，我们有一个非零的局部同调模$H_3(\mathbb{C}^n/T, (\mathbb{C}^n/T)\backslash\{0\};\ R) \cong H_2(\mathbb{C}P^{n-1}) \cong R$这对于 $(2n-1)$维空间 $\mathbb{C}^n/T$在 $n \geqslant 3$时成为同调流形构成了障碍。□

现在，我们可以将命题 3.5归约到圆群情形，从而证明它。

PROOF.由于作用的平凡分量不影响该陈述，为简单起见，我们假设不存在平凡分量。

考虑任意脊 $J = \{j_1, \ldots\ldots, j_{k-1}\} \in K(\alpha)$。回忆一下，多重集 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_r\}$线性张成 $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^k$。令 $\Pi_J \subset N_{\mathbb{Q}}$为由 $\alpha_{j_1}, \ldots\ldots, \alpha_{j_{k-1}}$张成的有理超平面。我们将所有权重指标划分为两个不相交类： $[r] = A_J \sqcup B_J$，其中一类对应于位于 Π_J中的权，另一类对应于横截于 Π_J的权：

$$A_J = \{j \in [r] \mid \alpha_j \in \Pi_J\}, \qquad B_J = [r]\backslash A_J.$$

注意，集合 B_J 由所有满足以下条件的指标 i 组成： $\{\alpha_j \mid j \in \{i\} \sqcup J\}$ 线性无关且秩为 k。因此， B_J 对在 $K(\alpha)$中将脊 J 补成面的各种方式进行了参数化。因此

$$|B_J| \text{ equals the number of facets containing } J. \tag{3.2}$$

考虑将 $V = V_A \oplus V_B$ 分解为两个对应于权的划分的加项:

$$V_A = \bigoplus_{i\in A} V(\alpha_i) \cong \mathbb{C}^{|A_J|}, \qquad V_B = \bigoplus_{i\in B} V(\alpha_i) \cong \mathbb{C}^{|B_J|}$$

注意， V_A 是 1 维环面子群的不动点集

$$G = \operatorname{Ker} \prod_{j\in J} \alpha_j \colon T^k \to T^{k-1} = \operatorname{Ker} \prod_{j\in A_J} \alpha_j \colon T^k \to T^{|A_J|}$$

（更确切地说，我们取这些核中 1 的连通分支，以避免出现不连通群。）第5节描述了一个一般事实：线性拟阵 α 的平坦与作用于 V 上的环面子群的不动点集一一对应。这里我们将这一对应关系应用于权拟阵的平坦 A_J。

现在我们可以将证明思路概括如下。取 V_A 中的一个一般点 x，其切空间分解为切向分量与法向分量之和（分别平行于 V_A 和 V_B）。那么，非正式地说， x 邻域内的 T^k-作用分解为切向分量上的“乘积” T^k/G-作用和法向分量上的 G-作用。由于 x 是 V_A 中的一般点， T^k/G 在切向分量上的作用是自由的，因此切空间的轨道空间是一个流形；根据引理 3.6，它不会影响轨道空间的局部拓扑。 G 在法向分量上的作用是 $\mathbb{C}^{|B_J|}$ 上的一个圆表示。由此我们可以应用引理 3.7。在流形情形下，该引理推出 $|B_J| = 2$；在边界情形下，则推出 $|B_J| = 1$，根据 (3.2)，这就证明了所需结论。

为论证这一点，应当应用切片定理。设 x 是 $V_A \subset V$ 中的一点，且它在该子空间中的所有坐标都非零。例如，可以取

$$x = (\underbrace{1, \dots, 1}_{A_J}, \underbrace{0, \dots, 0}_{B_J}).$$

设 $\tau_x V$、 $\tau_x V_A$和 ν_x 分别表示在点 x处的 V的切空间、 V_A的切空间，以及嵌入 $V_A \subset V$ 的法空间。显然， $\tau_x V = \tau_x V_A \oplus \nu_x$、 $\tau_x V_A \cong \mathbb{C}^{A_J}$ 和 $\nu_x \cong \mathbb{C}^{B_J}$。点 x 的稳定子 T_x 是上文引入的圆群 G，因此轨道 $T^k x$ 的维数为 $(k-1)$。切片定理指出，轨道 $T^k x$ 有一个 T^k-不变邻域 U，它与下列空间等变微分同胚:

$$T^k \times_G (\tau_x V / \tau_x T^k x)$$

令 $[x] \in V/T^k$ 表示轨道空间中点 x 的等价类。那么， $[x]$ 在 V/T^k 中有一个开邻域，等于

$$U/T^k \cong (T^k \times_G (\tau_x V/\tau_x T^k x))/T^k = (\tau_x V/\tau_x T^k x)/G. \tag{3.3}$$

注意，整个轨道 $T^k x$ 位于 V_A 内，因此 $\tau_x T^k x \subset \tau_x V_A$。此外，由于 G 是 V_A 的稳定子，整个子空间 $\tau_x V_A$ 上的 G 作用是平凡的。因此， $\tau_x V/\tau_x T^k x$ 上的 G 作用与 $\tau_x V/\tau_x V_A = \nu_x$ 上的 G 作用具有相同的权。另一方面， $\nu_x \cong \mathbb{C}^{|B_J|}$ 上的 G 作用是非平凡的（其权是 $\{\alpha_j \mid j \in B\}$ 在诱导映射 $N = \mathrm{Hom}(T^k, T^1) \to \mathrm{Hom}(G, T^1) \cong \mathbb{Z}$ 下的投影，而这些

投影根据 B 的构造均非零）。因此，将引理 3.7 应用于 (3.3) 中的表示可知，流形情形蕴含 $|B_J| = 2$，而边界情形蕴含 $|B_J| = 1$，如所需。□

根据注 3.2，任意独立复形 $K(\alpha)$ 在同伦意义上都等价于球面的楔和。此外，若它还是一个伪流形，则最高维同调群中存在一个基本类，因此楔和中必然只有一个球面。若 $K(\alpha)$ 是带边界伪流形，那么楔和中不含球面，因此在这种情况下$|K(\alpha)|$ 应当是可缩的。正如 Provan 和 Billera 在 [8]中证明的那样，同时满足拟阵和伪流形条件，会对复形的组合学施加更强的限制。

Proposition 3.8 ([8])。
(1)如果 K 是拟阵的独立复形，同时又是闭伪流形，那么 K 同构于若干单形边界的连接，并且可能还包含一个幽灵复形。(2) 如果 K 是拟阵的独立复形，同时又是带边界伪流形，那么 K 同构于一个单形、若干单形边界以及可能的一个幽灵复形的连接。

Remark 3.9. 注意，单顶点上的幽灵复形可以形式上视为零维单形的边界。因此，在命题 3.8 的表述中删去对幽灵单形的提及并无不妥。

要完成定理 2.8 的证明，还需要做一个简单的术语说明。

Remark 3.10. 回顾一下，任意一组向量（权） α 都会产生独立复形 $K(\alpha)$。单纯复形的性质转化为权重系统时如下所示。

(1) 拟阵存在直和运算。若 $\alpha \subset \mathbb{Q}^k$ 和 $\beta \subset \mathbb{Q}^l$，则直和定义为 $\alpha \sqcup \beta \subset \mathbb{Q}^k \times \mathbb{Q}^l \cong \mathbb{Q}^{k+l}$，其中 α 位于第一个直和项中，而 β 位于第二个直和项中。于是 $K(\alpha \sqcup \beta) = K(\alpha) * K(\beta)$。反过来，若 $K(\alpha)$ 分解为两个独立复形的连接，则 α 的权分成两组，分别位于横截的向量子空间中，并与连接的各因子对应。回顾一下，在我们的讨论中，环境向量空间为 $N_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}(T,\ T^1) \otimes \mathbb{Q}$，可见单纯复形上的连接运算对应于环面表示的直积。(2) 单形 Δ_A 是 $N_{\mathbb{Q}}$中线性无关集的独立复形。这种情形对应于复杂度零表示，参见例 2.3。(3) 单形 $\partial\Delta_A$ 的边界是权系 $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{|A|}$的独立复形，其中每 $|A| - 1$ 个向量都线性无关，但整个系统并非如此。根据定义 2.4，这些是在一般位置的复杂度一表示的权。

(4) 幽灵顶点类似于拟阵中的环。它们对应于零权重，换言之，对应于作用的平凡分量。根据注 3.9，在 $\mathbb{C}$ （或 $\mathbb{R}$）上的平凡环面作用可视为一般位置下复杂度为一的环面作用的退化情形。

定理 2.8 现在由命题 3.5 和 3.8 以及注 3.10 得出。

4. 环面作用

Construction 4.1. 考虑环面 T 在连通光滑流形 X 上的光滑作用。若 $H \subset T$ 是一个连通子群，则不动点子流形 X^H 的任一连通分支 Y 称为该作用的不变子流形。由于 T是交换的，不变子流形在 T 作用下保持不变。在 Y 上的一般环面轨道的维数称为不变子流形 Y 的秩。若 $Y \cap X^T \neq \varnothing$（即 Y 含有一个 T 不动点），则 Y 称为环面作用的面子流形。

X 中所有面子流形组成的集合构成一个偏序集（按秩分级），记作 $S(X)$。偏序集 $S(X)$ 有一个最大元，即流形 X 本身。所有极小元的秩均为 0，它们是 不动点集 X^T 的连通分支。

面子流形 Y 的轨道空间 Y/T 称为该作用的一个面 。面是轨道空间 X/T的子空间。显然，它们按包含关系构成偏序集，而面偏序集自然地与 $S(X)$相对应。面偏序集 $S(X)$ 包含许多关于环面作用的有用信息，下面的例子便说明了这一点。

Example 4.2. 若 X 是光滑完备环面簇，则 $S(X)$ 同构于其扇的锥按反向包含关系排序所得的偏序集。特别地， X 的贝蒂数由 $S(X)$ 的组合学决定，因为它们与相应单纯球面的 h数一致。环面簇的拓扑推广也有类似结论：拟环面流形 [**13**] 和等变形式环面流形 [**23**]。

Example 4.3. 在 [**2, 3**]中，描述了处于一般位置且具有孤立不动点的复杂度一环面作用下偏序集 $S(X)$ 的组合学与拓扑学。特别地，文献 [**3**], 证明，具有所列性质的等变形式化流形的贝蒂数由偏序集 $S(X)$决定。

Remark 4.4. 对于 X 上具有孤立不动点且等变形式化的环面作用，我们尚不清楚偏序集 $S(X)$ 是否能在一般情况下确定 X 的贝蒂数。

Remark 4.5. 第一作者在 [**4, 5**] 中开启了对具有孤立不动点的环面作用的面偏序集的一般性质的研究。 [**6**] 中出现了与正则半单 Hessenberg 簇相关的此类偏序集的非平凡实例。

面子流形应与不动点集相交这一假设，使得我们能够将对轨道空间的考察局部化到不动点附近。在不动点附近，作用可以线性化，并归结为对环面表示的研究。在关于不动点的适当假设下，我们可以证明定理 2.8 的一个光滑版本。为方便起见，我们引入如下概念。

Definition 4.6. 光滑流形 X 上的一个 T-作用称为里昂惕夫（完全里昂惕夫）作用，如果对于任意不动点 $x \in X^T$，其切表示 $\tau_x T$是一个里昂惕夫（分别为完全里昂惕夫）表示。

如果该作用是里昂惕夫作用但不是完全里昂惕夫作用，则称其为非完全里昂惕夫作用。等价地，所有不动点的切表示都是里昂惕夫表示，但其中至少有一个切表示不是完全里昂惕夫表示。

Proposition 4.7. 设环面 T 在连通闭光滑流形X上光滑作用。假设 X 的每个不变子流形都是面子流形，换言之，每个不变子流形都包含一个不动点。则以下结论成立。

(1) 当且仅当 X/T 是闭拓扑流形时，该作用是完全里昂惕夫作用。(2) 当且仅当 X/T 是带边界的拓扑流形时，该作用是非完全里昂惕夫作用。(3) 当且仅当 X/T 不是拓扑流形时，该作用是非里昂惕夫作用。

Proof.证明与 [**2**, 定理 2.10] 重复，因此我们只概述一般思路。在不动点 x附近，轨道空间与 $\tau_x X/T$ 同胚，因此结论由定理 2.8 得出。若 x' 是任意其他点，则 x' 位于某个不变子流形 Y的主轨道上。由于 Y 包含某个不动点 x，我们可以连续移动x' ，直到到达 x附近。由于 $[x]$ 在 X/T 中有一个与开圆盘（或半空间）同胚的邻域，轨道类 $[x']$也具有同样的性质。□

Remark 4.8. 假设每个不变子流形都是面子流形，这一点看起来可能复杂且难以在实践中检验。然而，大多数作用会自动满足这一性质。所有具有 $H^{\mathrm{odd}}(X) = 0$ 的作用都具有这一性质，这可由 [**23**,Lm.2.2]得出。特别地，具有孤立不动点的等变形式环面作用也具有这一性质。根据 Białynicki-Birula理论，光滑射影簇上的代数环面作用满足这一假设，详情见 [**2**]。

5. 里昂惕夫表示的面

若给定一个环面表示 $T \to \mathrm{GL}(V)$ ，那么按照构造 4.1 的含义， V的所有不变子流形都是 T-不变向量子空间 V。它们全都是面子流形，因为它们必然包含不动点 $0 \in V$。描述 V的 T-不变向量子空间成为面子流形的组合条件并不十分困难。下面回顾线性拟阵的平坦这一概念。

Construction 5.1. 设 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 是线性拟阵，即某个向量空间 W 中的一个向量多重集。子集 $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq [m]$，或相应的子多重集 $A = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}\}$，若 A 是 α 与某个向量子空间 $\Pi \subset W$ 的交，则称其为该线性拟阵的平坦。 A 的线性张成的维数称为平坦 A 的秩。拟阵 α 的平坦按包含关系构成偏序集；它们形成一个分次偏序集，称为拟阵 α 的几何格，记作 $\mathsf{Flats}(\alpha)$。

在 [**4**]中，我们观察到以下内容

PROPOSITION 5.2. 设 $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V(\alpha_i) \oplus \mathbb{R}^{m-2r}$ 是环面的一个表示，其权为 α。那么， V 的所有面子流形都具有以下形式

$$\bigoplus_{\alpha_i \in A} V(\alpha_i) \oplus \mathbb{R}^{m-2r}$$

其中 A 是权 $\alpha \subset N_{\mathbb{Q}}$ 的有理拟阵的一个平坦。因此，特别地，偏序集 $S(V)$ 与几何格 平坦(α) 同构。

这一结论已在文献 [4] 中得到证明，当时假设平凡分量 $\mathbb{R}^{m-2r}$ 消失；然而，在一般情形下，证明思路相同。

EXAMPLE 5.3. 如果 T^n 在 $V \cong \mathbb{C}^n$ 上的表示是复杂度零的表示，那么 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是 $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^n$ 的一个基。在这种情况下， α 的每个子集都是一个平坦，因此偏序集 $S(V) \cong$ 平坦(α) 是布尔格 $\mathbf{B}_n$。

EXAMPLE 5.4. 如果 T^{n-1} 在 $V = \mathbb{C}^n$ 上的表示是复杂度零的表示，那么我们有一组属于 $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{n-1}$ 的权 n、 $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$。除非 $|A| = n-1$，否则 $A \subseteq \alpha$ 的每个子集都是一个平坦。我们将由此得到的偏序集记作 $\mathbf{Sp}_{n-1}$:

$$\mathbf{Sp}_{n-1} = \{A \subseteq [n] \mid |A| \neq n-1\}.$$

该偏序集同构于去掉所有余原子的布尔格 $\mathbf{B}_n$ 。

回顾定义 2.7， $T^d \times \prod_{i=1}^{s} T^{n_i-1}$ 在 $V = \mathbb{R}^l \times \mathbb{C}^d \times \prod_{i=1}^{s} \mathbb{C}^{n_i}$ 上的乘积表示称为里昂惕夫表示。我们称其为类型为 $(d,\ n,\ l) = (d,\ \{n_1,\ \ldots\ldots,\ n_s\},\ l)$的里昂惕夫表示。由于拟阵的乘积会导出相应几何格的乘积，因此可得例 5.3 和 5.4 的以下推论。

PROPOSITION 5.5. 对于类型为 $(d、\ n、\ l)$的里昂惕夫表示 V，其面偏序集 $S(V)$同构于

$$\mathbf{B}_d \times \prod_{i=1}^{s} \mathbf{Sp}_{n_i-1}.$$

设 $D、\ N_1、\ \ldots\ldots、\ N_s$ 为基数分别为 $d、\ n_1、\ \ldots\ldots、\ n_s$ 的不相交集合。那么， V的每个面子流形均由一个字符串 $(A_0、\ A_1、\ \ldots\ldots、\ A_s)$编码，其中

$$A_0 \subseteq D,\ \textit{and for all } i \in [s] = \{1, \ldots, s\}\ \textit{we have } A_i \subseteq N_i, |A_i| \neq n_i - 1.$$

在环面拓扑中，诱导在面子流形上的环面作用的结构有时会发挥重要作用。若 T 在 X 上的有效作用的秩为 k，且 $Y \subset X$是秩为 l的面子流形，则 T 在 Y 上的诱导作用的非有效核的维数为 $k-l$。我们可以对这个非有效核取商。

需要注意的是，Leontief 表示类在取面后仍然封闭。

LEMMA 5.6. 考虑一个类型为 $(d, \{n_1, \ldots, n_s\}, l)$ 的 *Leontief* 表示 V，并令U为 V的一个面子流形，它对应于命题 *5.5* 中的字符串 $(A_0, A_1, \ldots, A_s)$。令 $\mathcal{M} = \{i \in [s] \mid |A_i| = n_i\}$。那么 U 是一个类型为

$(d', \underline{n'}, l)$，其中

$$\underline{n'} = \{n_i \mid i \in \mathcal{M}\},\ and\ d' = |A_0| + \sum_{i\in[s]\setminus\mathcal{M}} |A_i|.$$

换言之，字符串中的复杂度一分量 A_i, $i = 1$，.....， s，要么贡献给一个复杂度一分量（若 $|A_i| = n_i$），要么贡献给复杂度零分量（若 $|A_i| \leqslant n_i - 2$）。通过直接考察 Leontief 表示的权拟阵中的平坦，即可证明该引理。

引理 5.6 立即推出

COROLLARY 5.7. ***Leontief*** 作用在面子流形上诱导的作用也是 ***Leontief*** 作用。

回想一下，作用的一个面是一个面子流形的轨道空间。推论 5.7、定理 2.8 和命题 4.7 推出以下结果。

PROPOSITION 5.8. 设环面 T 在闭光滑流形 X上光滑作用。假设 X 的每个不变子流形都是面子流形。如果轨道空间 X/T 是拓扑流形（无论是闭的还是带边界的），那么该作用的每个面也都是拓扑流形（无论是闭的还是带边界的）。

EXAMPLE 5.9. 对于复杂度零的作用（这是 Leontief 作用的特殊情形），轨道空间是一个带边界流形。除 $S(X)$ 的极小元外，它的所有面也都是带边界流形。这些极小元是 X^T 的连通分支：它们是闭流形[1]。注意，孤立点被视为闭流形，而不是带边界流形。

EXAMPLE 5.10. 对于处于一般位置的复杂度一作用，所有真面子流形（除 X 本身外）都具有复杂度零。不动点附近各面的局部结构已在 [**2**] 中描述，并通过 海绵 的概念进行了公理化。

最后，我们作一个简单的观察，将 Leontief 作用与 Cherepanov [**12**] 关于非一般位置复杂度一作用的研究联系起来。

LEMMA 5.11. 每个复杂度一表示都是 ***Leontief*** 表示。

PROOF. 复杂度一表示由 n 个权 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 在 $(n-1)$ 维向量空间 $N_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{n-1}$ 中刻画。因此，存在唯一的（相差一个乘数）线性关系 $c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0$。权的子集 $\{\alpha_i \mid c_i \neq 0\}$ 对应于处于一般位置的复杂度一作用，其余的权则对应于复杂度零的作用。□

COROLLARY 5.12. 对于处于非一般位置的复杂度一作用，轨道空间是带边界的拓扑流形。它的所有面都是拓扑流形，可以是闭的，也可以带边界。

[1]滥用记号，我们将 X^T 与 X^T/T 视为相同

附录 A. 列昂惕夫替代系统

本节通过综述列昂惕夫替代系统，并将数理经济学中出现的组合理论与第 2 节所述的表示进行类比，来解释里昂惕夫表示这一术语。本节基本遵循了 [8]，的研究结果，不过我们也提供了一些细节，或许对环面拓扑领域的研究者有所帮助。

设 A 为一个具有 g 行和 f 列的实矩阵， $b \in \mathbb{R}^g$ 为一个列向量。考虑由以下系统确定的凸多面体 P

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0. \tag{A.1}$$

Definition A.1. 若 $b \geqslant 0$，且 A 的每一列至多含有一个正项，并且 P 非空，则称系统 (A.1)（及相应的多面体 P）为列昂惕夫替代系统。此外，若多面体 P 有界，则称其为全里昂惕夫替代系统。

Remark A.2. 里昂惕夫的研究影响了数理经济学领域。尤其是，线性规划的一般任务在很大程度上受到里昂惕夫模型的启发。最初， [22] 里昂惕夫系统是为以下情形而引入的。

假设有 g 种商品（“货物”）和 f 个生产场所（“工厂”）。在一个生产周期中，每家工厂消耗一些商品，并生产一种新商品，或者什么也不生产。因此，第 j 家工厂的生产周期由某个列向量 $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{g,j})^t$ 表示，其中 $a_{i,j}$ 是一个周期内第 i 种资源的产出。由于除一种资源外，所有资源都可能被工厂消耗而非生产，因此所有元素 $a_{i,j}$都可能非正，唯有一个例外。于是，以 $g \times f$矩阵 $A = (a_{i,j})$ 表示的系统 (A.1) 是一个里昂惕夫系统。它用于求出每家工厂所需的生产周期数 $x = (x_1, \dots, x_f)^t \geqslant 0$，以获得指定的商品向量 $b = (b_1, \dots, b_g)^t \geqslant 0$。里昂惕夫系统定义中的“替代”一词，指的是一种资源可以由多家工厂生产：这种资源的生产可以相互替代（这里是经济学意义上的替代，而非数学意义上的替代）。这意味着 A的多个列中可以在同一位置出现正项。

多面体 P 是方程 (A.1) 所有解的集合；如果需要通过线性函数给出的生产总成本最小化问题，它还可用于线性规划。因此，里昂惕夫系统的多面体 P 的组合结构尤为重要：例如，它有助于估算该优化问题中单纯形法的复杂度。

系统 (若其解所构成的多面体 P 是简单多面体，则称 A.1) 为非退化 .

EXAMPLE A.3. 系统 $Ax = b$，其中 $b = (1, \ldots\ldots, 1)^t$ 且 A 由下式给出

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{k_1} & \overbrace{0 \cdots 0}^{k_2} & \cdots & \overbrace{0 \cdots 0}^{k_s} & \overbrace{0 \cdots 0}^{d} \\ \underline{0} & 1 \cdots 1 & & \underline{0} & 0 \quad 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \quad \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & & 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

是列昂惕夫替代系统的最简单例子。在这种情况下，解多面体是标准单形与非负锥的笛卡尔积： $P = \Delta^{k_1-1} \times \cdots \times \Delta^{k_s-1} \times \mathbb{R}^d_{\geqslant 0}$。这个系统是非退化的。

这个例子与环面作用的关系如下。考虑指数映射 $\exp\colon \mathbb{R}^f \to T^f$，其定义为

$$\exp(x_1, \ldots, x_f) = (\exp(2\pi\sqrt{-1}x_1), \ldots, \exp(2\pi\sqrt{-1}x_f)).$$

设 Π 是上文所写矩阵 A 对应的齐次系统 $Ax = 0$ 的解。那么 $\exp(\Pi) \subset T^f$ 是由以下关系给出的子环面

$$\prod_{i=1}^{k_1} t_i = 1, \quad \prod_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} t_i = 1, \quad \cdots, \quad \prod_{i=k_1+\cdots+k_{s-1}+1}^{k_1+\cdots+k_s} t_i = 1.$$

将 T^f 在 $\mathbb{C}^f$ 上的标准表示限制到子环面 $\exp(\Pi)$，我们得到 s 个处于一般位置的复杂度为一的作用的乘积，以及秩为 d的标准表示。到目前为止，只要列昂惕夫多面体P有界，轨道空间 $\mathbb{C}^f/\exp(\Pi)$ 就是一个流形；否则， $\mathbb{C}^f/\exp(\Pi)$ 有边界。

令人惊讶的是，非退化的全列昂惕夫替代系统在组合上等价于例 A.3 中描述的系统。以下命题在 [8] 中得到了证明。

PROPOSITION A.4. *考虑一个非退化的全列昂惕夫替代系统，其可行解多面体为 P。如果 P 有界，那么 P 在组合上等价于单形的乘积。*

设 P 是一个由 (A.1) 型系统确定的解多面体。对于这个多面体，定义一个单纯神经复形 K_P。K_P 的顶点与 P 的面相对应，并且当且仅当相应的面相交时，集合 $\{i_1, \ldots, i_s\}$ 是 K_P 的一个单形：$\mathcal{F}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{i_s} \neq \varnothing$。注意，由 (A.1) 定义的多面体 P 不含直线，因为 $P \subset \mathbb{R}^g_{\geqslant 0}$。因此， P 有一个顶点。如果系统 (A.1) 是非退化的，使得 P 是某个维数为 k 的简单多面体，那么 $\dim K_P = k - 1$。神经复形 K_P 要么是单纯球面（如果 P 有界），要么是单纯圆盘（如果 P 无界）。

与由 (A.1) 给出的一般多面体不同，里昂惕夫系统的神经复形具有特定的组合学结构。

LEMMA A.5。

(1) 对于非退化全列昂惕夫系统，单纯复形 K_P 同构于若干单形边界的连接 $\Delta_{\mathcal{A}} = \partial\Delta_{A_1} * \cdots * \partial\Delta_{A_s}$。在这种情况下， K_P是一个拟阵复形。(2)对于非退化非全列昂惕夫系统，单纯复形 K_P 同构于 $\Delta_{\mathcal{A}}$ 的一个子复形，而 $\Delta_{\mathcal{A}}$ 是一个与$\Delta_{\mathcal{A}}$维数相同的分片线性球。

命题 A.4 是对该引理第一部分的重新表述。

Remark A.6. 里昂惕夫（单纯）复形在 [8]中被引入，作为非退化列昂惕夫替代系统的神经复形的一种抽象。这里不作定义，但我们注意到，在所有里昂惕夫单纯复形中，只有$\Delta_{\mathcal{A}} = \partial\Delta_{A_1} * \cdots * \partial\Delta_{A_s}$和 $\Delta_{\mathcal{A}} * \Delta^{d-1}$ 是拟阵的独立复形，见 [8, 定理 3.4]。因此，若环面表示 $T \to \mathbf{GL}(V)$ 具有权 α，则以下陈述等价：

(1) $K(\alpha)$ 是列昂惕夫复形；**(2)** V 是 Leontief 表示。

这解释了本文为此类表示提出的名称。注意，如定理 2.8 所述，上述两个陈述都等价于 V/T 是一个流形（有边界或无边界）。

附录 B. 狄拉克磁单极子与环面作用

命题 2.6 对于 $n = 2$而言广为人知且极其重要。根据引理 2.5，我们可以将讨论限制在 $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ 上由下式给出的圆群作用

$$T^1 = \{(t_1, t_2) \in T^2 \mid t_1^{c_1} t_2^{c_2} = 1\} \text{ acts by } (t_1, t_2)(z_1, z_2) = (t_1 z_1, t_2 z_2).$$

其中 c_1， c_2 均非零且互素。这个 T^1-表示可以改写为一种更方便且熟悉的形式

$$t(z_1, z_2) = (t^k z_1, t^l z_2) \tag{B.1}$$

其中 k， l 非零且互素（容易看出 $k = c_2$、 $l = c_1$）。至此，我们得到引理 3.7 中所述圆表示的一个具体例子。这里我们选定 $\mathbb{R}^4$ 的定向（以及不可约直和项的定向），使其与所选复结构相容。

将 **(B.1)** 限制在单位球面 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ 上，并对 T^1 取商，可得加权射影直线 $\mathbb{C}P^1(k, l)$。后者是一个（实）二维轨形，具有两个孤立奇点，其各向同性群分别为 $\mathbb{Z}_k$ 和 $\mathbb{Z}_l$。加权射影直线$\mathbb{C}P^1(k, l)$ 也是 $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ 在代数环面 $\mathbb{C}^\times$ 作用下的商，该作用由同一个公式 **(B.1)** 给出，因此它也是一个代数簇。 $\mathbb{C}P^1(k, l)$ 的底层拓扑空间与 S^2同胚。作为代数簇，它也与 $\mathbb{C}P^1$ 同构。关于加权射影空间拓扑学的综述，可参见 [7] 。商映射的形式为

$$p_{k,l} \colon S^3 \to S^3/T^1 = \mathbb{C}P^1(k, l) \cong S^2. \tag{B.2}$$

特别重要的情形包括 $(k,\ l)=(1,\ 1)$（霍普夫丛），以及 $(k,\ l)=(1,\ -1)$（逆霍普夫丛）。

Remark B.1. 霍普夫丛 $p_{1,\ 1}$ 是 $\pi_3(S^2)\cong\mathbb{Z}$的生成元。在这个同伦群中，以下恒等式成立：$[p_{k,\ l}]=kl[p_{1,\ 1}]\in\pi_3(S^2)$。这可以通过将$p_{1,\ 1}$与度为 kl的映射 $S^3\to S^3$, $(z_1,\ z_2)\mapsto(z_1^k,\ z_2^l)$ 复合得到。

取映射 $p_{k,\ l}$的开锥，得到映射

$$\operatorname{Cone}p_{k,l}\colon\mathbb{R}^4=\operatorname{Cone}S^3\to\mathbb{R}^4/T^1=\operatorname{Cone}\mathbb{C}P^1(k,l)\cong\mathbb{R}^3,$$

这尤其证明了命题 2.6 对 $n=2$成立。

映射 Cone $p_{1,\ 1}$，Cone $p_{1,\ -1}$: $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ 是卡鲁扎–克莱因理论中狄拉克磁单极子的局部拓扑模型。下面我们简要概述这一理论，并请参阅 [**1**, p.5] 及其中的参考文献，了解霍普夫丛在理论物理中的重要性。

Construction B.2. 考虑一个在可定向四维流形 X 上的光滑 T^1-作用，假设其所有稳定子子群均连通，且该作用的不动点都是孤立的。则轨道空间 $Q=X/T$ 是一个可定向（拓扑）三维流形。投影映射 $p\colon X\to Q$ 称为（简化的拓扑）卡鲁扎–克莱因模型。该作用的不动点称为磁单极子。

设 $x\in X^{T^1}$ 是一个不动点。切表示 τ_xX 是一个处于一般位置且具有某些非零权 k 的复杂度一T^1-表示，$l\in\mathrm{Hom}(T^1,\ T^1)$。由于 τ_xX 是定向的，这些权在同时改变符号的意义下确定。若 $|k|>1$ 或 $|l|>1$，则该表示（因而在 X 上的作用）具有不连通稳定子，详见 [**2**]。因此，我们必有 $(k,\ l)=(1,\ 1)$ 或 $(1,\ -1)$，这意味着每个切表示都是霍普夫丛或逆霍普夫丛上的锥。我们称第一种情形下的磁单极子 x 的电荷为 $+1$，第二种情形下的电荷为 -1。

Remark B.3. 这一构造的物理动机如下：3-流形 Q 被解释为物理空间，而作用其上的环面 $T^1=U(1)$ 是电磁学的规范群。除磁单极子所在处外，T^1作用是自由的，因此它在物理空间上诱导出一个主 T^1丛，从而得到一种规范理论。从历史上看，卡鲁扎–克莱因模型是更一般的杨–米尔斯理论的先驱。

狄拉克提出的磁单极子的量子理论 [**14**], 以拓扑语言重新表述，其基础是以下观察：在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\simeq S^2$上存在非平凡的 T^1丛，其中 0 是磁单极子。底空间为 S^2 的主 T^1丛由同伦类分类

$$[S^2,BT^1]=[S^2,K(\mathbb{Z},2)]\cong H^2(S^2;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$$

因此，电荷被量子化了。当电荷为 $+1$ 或 -1时，分别得到霍普夫丛或逆霍普夫丛。在这种情况下，可以将纤维化的底空间 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$和全空间都紧化，从而得到一个良定义的映射 $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$，其结果为锥$p_{1,\ 1}$或锥 $p_{1,\ -1}$。这一观察巧妙地将狄拉克量子磁单极子纳入卡鲁扎–克莱因模型，至少在拓扑层面上是如此。

然而请注意，这一观察并不适用于电荷q 不同于 ± 1的狄拉克磁单极子。若 $|q| \geqslant 2$，则相应的 S^1纤维化在 S^2上的全空间与透镜空间 $L(q$同胚； $1)$，因此在磁单极子点将其紧化会在全空间中产生一个锥 $L(q$型奇点； $1)$。在这种情况下， X不再是流形。

按照构造 B.2 的术语，以下结论成立。

Proposition B.4. 在闭合的卡鲁扎–克莱因模型中，所有磁单极子的电荷之和为零。

这一更一般的结论已在 Fintushel 的开创性著作中得到证明 [**15, 16**] ，他根据轨道数据对 4-流形上的圆作用进行了分类。整体拓扑性质 X 与 Q 之间也有相似之处。

Proposition B.5. 设卡鲁扎–克莱因模型 $X \mapsto X/T^1 = Q$ 是闭合的，且至少存在一个磁单极子。那么

(1) $\pi_1(X) = 1$ 当且仅当 Q 与 S^3 同胚；(2) X 上的 T^1-作用是等变形式化的，当且仅当 Q 是一个同调 *3*-球面 .

条目 **(1)** 可由 [**15**] 和庞加莱猜想推出。条目 **(2)** 是第一条的同调版本：在不动点孤立的假设下，等变形式化性等价于条件 $H^{\mathrm{odd}}(X;\mathbb{Z}) = 0$。对于定向 4-维流形，该条件可进一步简化为 $H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$。这一同调结论在 [**3**] 中得到证明，其背景更为一般，涉及一般位置下的复杂度一作用。在高维中，流形的等变形式化性与其轨道空间为同调球面这一事实之间仍存在对应关系。

Remark B.6. 应当指出，经典卡鲁扎–克莱因理论所考虑的 T^1-丛并非定义在 3 维流形上，而是定义在 4 维弯曲时空上，因此整个理论是 5 维的。该理论旨在将麦克斯韦方程和爱因斯坦场方程统一为时空上的一个 T^1-丛所定义的某个泛函的欧拉–拉格朗日方程。

在模型中加入时间后，磁单极子便成为世界线，它们由 1 维曲线表示。在这种情况下，磁单极子的局部模型是对 $\mathbb{R}^5$ 的圆群作用，它是一般位置下 $\mathbb{C}^4$上的复杂度一表示与 $\mathbb{R}^1$上的平凡作用的乘积。

从整体上看，这些世界线可视为 5-流形 X上 T^1-作用的不动点 X^{T^1} 的各个分支。假设磁单极子的世界线带有定向。于是，切表示的平凡分量也获得定向。接着，非平凡的横截分量也随之获得规范定向，因此霍普夫映射与其逆映射仍有区别，我们可以根据具体情况为世界线赋予电荷 ± 1。改变世界线的定向会使其电荷反转。

通常假设世界线是类时的，因此可以将其定向规范地选取为与环境时空中的因果性一致 $Y = X/T^1$。然而，若允许曲线 X^{T^1} 在某些点呈类空，则一对电荷相反的

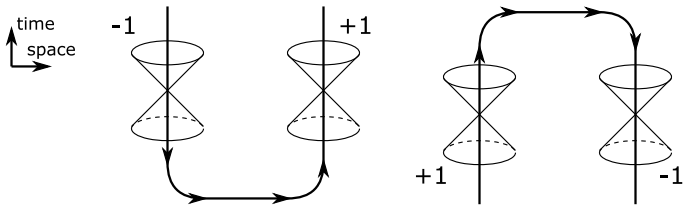


FIGURE 1.在五维卡鲁扎–克莱因模型中，两个带相反电荷的磁单极子的诞生（左）与消亡（右）。磁单极子的世界线是五维簇上的一个 T^1作用的连通分支。

磁单极子产生或湮灭的情况便自然地纳入了模型，见图 1。

前述评论促使我们进一步从拓扑角度研究一般位置下作用于五维簇的复杂度一 T^1作用。尤其是，为带有磁单极子的五维卡鲁扎–克莱因理论，找出命题 B.5 的恰当类比或许会有所启发。

REMARK B.7. 卡鲁扎–克莱因模型（无论是四维还是五维）的重要特征是：它是一种环面作用，其轨道空间是一个无边界流形，并被诠释为可观测宇宙。如果将研究范围限定于规范群为紧环面的模型，那么卡鲁扎–克莱因模型的类比应当是流形上的光滑环面作用，且其轨道空间也是流形。根据命题 4.7，这类作用恰好是全利昂惕夫作用（在对不动点作出某些假设的条件下，而这些假设可以以一种自然的方式放宽）。因此，全利昂惕夫环面作用提供了最广泛的一类拓扑模型，用以推广卡鲁扎–克莱因模型。

参考文献

[1] M. Atiyah, J. Berndt，射影平面、塞韦里簇与球面，《微分几何综述 VIII》，纪念 Calabi、Lawson、Siu 和 Uhlenbeck 论文集，1–27（2003 年）。[2] A. Ayzenberg，复杂度一的环面作用及其局部性质，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》302:1（2018 年），16–32。[3] A. Ayzenberg, M. Masuda，等变形式环面作用的轨道空间，预印本：arXiv:1912.11696。[4] A. Ayzenberg, V. Cherepanov，环面拓扑中的拟阵，预印本 https://arxiv.org/abs/2203.06282。[5] A. A. Ayzenberg, M. Masuda, G. Solomadin，图与流形有何不同？，预印本 arXiv:2203.10641。[6] A. A. Ayzenberg, V. M. Buchstaber，簇置换多面体与带有环面作用的旗簇子流形，预印本 arXiv:2203.14133。[7] A. Bahri, M. Franz, D. Notbohm, N. Ray，加权射影空间的分类，《基础数学》220（2013 年），217–226。[8] L. J. Billera, J. S. Provan，列昂惕夫替代系统与拟阵复形，《运筹学数学研究》7:1（1982 年），81–87。[9] A. Bj¨orner，拟阵与几何格的同调和可剥性，载于 N. White（编），《拟阵应用》（《数学及其应用百科全书》）（1992 年），第 226–283 页。剑桥：剑桥大学出版社。

[10] V. M. Buchstaber, S. Terzi´c，典范作用的拓扑与几何 T^4 在复格拉斯曼流形 $G_{4、2}$ 以及复射影空间 $\mathbb{C}P^5$，《莫斯科数学杂志》16:2（2016 年），237–273（预印本：arXiv:1410.2482）。[11] V. Buchstaber, T. Panov，《环面拓扑》，《数学调查与专著》204，AMS，罗得岛州普罗维登斯，2015 年。[12] V. Cherepanov：黑森堡簇上环面作用的轨道空间，《数学文摘》212:12（2021 年），115–136（预印本 arXiv:1905.02294）。[13] M. Davis, T. Januszkiewicz，凸多胞体、考克斯特奥比尔德与环面作用，《杜克数学杂志》62:2（1991 年），417–451。[14] P. Dirac，电磁场中的量子化奇点，《伦敦皇家学会会刊》A 133:60（1931 年），60–72。[15] R. Fintushel，单连通四维流形上的圆作用，《美国数学会汇刊》230（1977 年），147–171。[16] R. Fintushel，*4*-流形上圆作用的分类，《美国数学会汇刊》242（1978 年），377–390。[17] G. B. Dantzig，含替代的动态列昂惕夫模型的最优解，《计量经济学》23:3（1955 年），295–302。[18] T. Kawasaki，扭曲射影空间与透镜复形的上同调，《数学年刊》206（1973 年），243–248。[19] C. Lange，由反射和旋转生成的有限群的刻画，《拓扑学杂志》9:4（2016 年），1109–1129。[20] C. Lange，奥比尔德的底空间何时是流形？，《美国数学会汇刊》372（2019 年），2799–2828。[21] C. Lange, M. A. Mikhailova，由反射和旋转生成的有限群的分类，《变换群》21:4（2016 年），1155–1201。[22] W. W. Leontief。《美国经济的结构，1919–1939》。牛津大学出版社，纽约，1951 年，第 2 版。[23] M. Masuda, T. Panov，关于环面流形的上同调，《大阪数学杂志》43（2006 年），711–746。[24] M. A. Mikhailova，关于模去由伪反射生成的有限群作用的商空间，《消息报：数学》24:1（1985 年），99–119。[25] O. G. Styrt，具有交换连通分支的紧致线性李群的轨道空间，《莫斯科数学会汇刊》70（2009 年），171–206。[26] E. B. Vinberg，由反射生成的离散线性群 （俄文）。《消息报：数学》35（1971 年），1072–1112。

Faculty of computer science, Higher School of Economics电子邮箱地址：ayzenberga@gmail.com

Faculty of computer science, Higher School of Economics电子邮箱地址：vyugorchakov@edu.hse.ru