arXiv:2302.02059v2 [math.DS] 4 May 2023

齐次对称康托集与其平移的并集

Derong Kong[a]、Wenxia Li[b]、Zhiqiang Wang[b]、Yuanyuan Yao[c,*]、Yunxiu Zhang[d]

[a]重庆大学数学与统计学院，中国重庆 401331[b]华东师范大学数学科学学院、上海市偏微分方程与数学物理重点实验室，中国上海 200062

[c]华东理工大学数学学院，中国上海 200237[d]南京林业大学应用数学系，中国南京 210037

摘要

固定一个正整数 N 和一个实数 $0<\beta<1/(N+1)$。设 Γ 是由以下迭代函数系生成的齐次对称康托集

$$\Big\{\phi_i(x)=\beta x+i\frac{1-\beta}{N}:i=0,1,\cdots,N\Big\}.$$

对于 $m\in\mathbb{Z}_+$，我们证明存在无穷多个平移向量 $\mathsf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)$，满足 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$，使得并集 $\bigcup_{j=0}^m(\Gamma+t_j)$ 是一个自相似集。此外，对于 $0<\beta<1/(2N+1)$，我们给出了完整刻画，说明在何种条件下并集 $\bigcup_{j=0}^m(\Gamma+t_j)$ 是一个自相似集。我们的刻画依赖于确定某个相关有向图是否无环，或者某个相关邻接矩阵是否幂零。

关键词：自相似集、迭代函数系、齐次对称康托集、康托集的并

2020 年 MSC：主分类 28A80，次分类 28A78

1. 引言

自相似集是分形几何研究中的一个基本对象（参见 [4]）。完备度量空间 X 中的非空紧集 E 称为自相似集，若存在有限个压缩相似变换 $\mathcal{F}=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 使得 $E=\bigcup_{i=1}^n f_i(E)$。压缩相似变换的集合 $\mathcal{F}$ 称为该自相似集的迭代函数系（简称

*通讯作者电子邮箱：derongkong@126.com（Derong Kong）、wxli@math.ecnu.edu.cn（Wenxia Li）、zhiqiangwzy@163.com（Zhiqiang Wang）、yaoyuanyuan@ecust.edu.cn（Yuanyuan Yao）、zhyunxiu@163.com（Yunxiu Zhang）

迭代函数系，IFS） E （见 [6]）。本文将研究自相似集与其平移的并何时仍为自相似集。

固定一个正整数 N和一个实数 $0<\beta<1/（N+1）$。令$\Gamma=\Gamma_{\beta,\{0,1,\cdots,N\}}$为由迭代函数系在 $\mathbb{R}$中生成的自相似集

$$\Big\{\phi_i(x)=\beta x+i\frac{1-\beta}{N}:i=0,1,\cdots,N\Big\}.$$

那么， Γ是满足以下条件的唯一非空紧集

$$\Gamma=\bigcup_{i=0}^{N}\phi_i(\Gamma),$$

并且它可以写成

$$\Gamma=\left\{\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty}j_k\beta^{k-1}:j_k\in\{0,1,\cdots,N\}\ \forall k\geq 1\right\}. \tag{1.1}$$

显然， Γ 是对称的，即 $\Gamma=1-\Gamma$。

文献中，人们对康托集与其平移的交集进行了大量研究。当 $N=1$时，Kraft [8] 完整描述了交集$\Gamma_{\beta,\{0,1\}}\cap(\Gamma_{\beta,\{0,1\}}+t)$ 何时为单点，Li 和 Xiao [9] 计算了该交集的 Hausdorff 维数和装箱维数。在 [2] ，Deng、He 和 Wen 研究了中三分康托集与其平移的交集的自相似性，并给出了该交集为自相似集的充要条件。随后，Li、Yao 和 Zhang 在 [10] 将这一结果推广到齐次对称康托集$\Gamma_{\beta,\{0,1,\ldots,N\}}$，其中 $0<\beta\leq 1/（2N+1）$；Kong、Li 和 Dekking[7] 则将其推广到$\Gamma_{\beta,\{0,1,\ldots,N\}}$，其中 $1/（2N+1）<\beta<1/（N+1）$。

另一方面，我们对 Γ 与其平移的并集的自相似性知之甚少。更准确地说，对于平移向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$，我们关心并集是否

$$\Gamma_{\mathbf{t}}:=\bigcup_{j=0}^{m}(\Gamma+t_j)$$

是一个自相似集，其中对于集合 X和 $a,b\in\mathbb{R}$，我们记 $aX+b:=\{ax+b:\ x\in X\}$。注意，自相似性在平移下是不变的。换言之，如果 $E\subset\mathbb{R}$ 是一个自相似集，那么对任意 $t\in\mathbb{R}$，其平移 $E+t$ 也同样是自相似集。因此，在全文中不妨假设平移向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$始终满足 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$。注意，$\Gamma=\bigcup_{i=0}^{N}\phi_i(\Gamma)=\bigcup_{i=0}^{N}\big(\beta\Gamma+\phi_i(0)\big)$。然后

$$\beta^{-n}\Gamma=\bigcup_{i_1\cdots i_n\in\{0,1,\cdots,N\}^n}\big(\Gamma+\beta^{-n}\phi_{i_1\cdots i_n}(0)\big),$$

其中 $\phi_{i_1\cdots i_n}=\phi_{i_1}\circ\cdots\circ\phi_{i_n}$表示映射的复合。由此可得，若 $m=N^n-1$且平移向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)$取值为 $\big\{\beta^{-n}\phi_{\mathbf{i}}(0):\mathbf{i}\in$

$\{0,1,\cdots,N\}^n\}$，则并集 $\Gamma_{\mathbf{t}}=\beta^{-n}\Gamma$ 是一个自相似集。然而，对于其他 $m\in\mathbb{Z}_+$，我们能否找到 $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{m+1}$，使得 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是一个自相似集？我们的第一个结果对此给出了肯定的回答。

定理 1.1. 假设 $0<\beta<1/(N+1)$。那么，对于任意 $m\in\mathbb{Z}_+$，都存在无穷多个平移向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$，满足 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$，使得$\Gamma_{\mathbf{t}}=\bigcup_{j=0}^m(\Gamma+t_j)$ 是一个自相似集。

接下来，我们考察对于哪些平移向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$，并集$\Gamma_{\mathbf{t}}=\bigcup_{j=0}^m(\Gamma+t_j)$ 是一个自相似集。注意，$\Gamma_{\mathbf{t}}$的迭代函数系可能包含压缩比为负数的相似变换。这使得我们对 $\Gamma_{\mathbf{t}}$自相似性的刻画更加复杂。为了描述 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 的自相似性，我们先引入可容许平移向量的记号（见下文定义 1.2）。

Set

$$T:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{n}j_k\beta^{-k}:j_k\in\{0,1,\cdots,N\}\ \forall 1\le k\le n\right\}. \tag{1.2}$$

对于平移向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in T^{m+1}$，令 $\tau_{\mathbf{t}}$ 为满足以下条件的最小整数：每个 t_j，$0\le j\le m$ 都可以写成

$$t_j=\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\tau_{\mathbf{t}}}t_{j,k}\beta^{-k}\text{ with }t_{j,k}\in\{0,1,\cdots,N\}. \tag{1.3}$$

那么对于 $n\ge\tau_{\mathbf{t}}$，我们定义

$$\Omega_{\mathbf{t}}^n:=\left\{i_1\cdots i_n\in\{0,1,\cdots,N\}^n:i_{n+1-k}\le N-s_k\text{ for }1\le k\le\tau_{\mathbf{t}}\right\}, \tag{1.4}$$

及其共轭

$$\hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^n:=\left\{i_1\cdots i_n\in\{0,1,\cdots,N\}^n:i_{n+1-k}\ge s_k\text{ for }1\le k\le\tau_{\mathbf{t}}\right\}, \tag{1.5}$$

其中 $s_k=\max_{0\le j\le m}t_{j,k}$ 对于 $1\le k\le\tau_{\mathbf{t}}$。显然，$i_1i_2\cdots i_n\in\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 当且仅当 $(N-i_1)(N-i_2)\cdots(N-i_n)\in\Omega_{\mathbf{t}}^n$。注意，对于任意 $\mathbf{i}=i_1\cdots i_n\in\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 和 $0\le j\le m$，我们有

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{i}}(t_j)=\beta^nt_j+\phi_{\mathbf{i}}(0)&=\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\tau_{\mathbf{t}}}t_{j,k}\beta^{n-k}+\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{n}i_{n+1-k}\beta^{n-k}\\&=\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\tau_{\mathbf{t}}}(t_{j,k}+i_{n+1-k})\beta^{n-k}+\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=\tau_{\mathbf{t}}+1}^{n}i_{n+1-k}\beta^{n-k}\in\Gamma.\end{aligned}$$

$\hat{}$ 类似地，对于任意 $\mathbf{i}=i_1\ldots i_n\in\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 和 $0\le j\le m$,

$$\phi_{\mathbf{i}}(-t_j)=-\beta^nt_j+\phi_{\mathbf{i}}(0)=\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\tau_{\mathbf{t}}}(i_{n+1-k}-t_{j,k})\beta^{n-k}+\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=\tau_{\mathbf{t}}+1}^{n}i_{n+1-k}\beta^{n-k}\in\Gamma.$$

ˆ分别令 $\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n$ 和 $\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n$ 为表示集合 $\{\phi_{\mathbf{i}}(t_j) : \mathbf{i} \in \Omega_{\mathbf{t}}^n;\ 0 \le j \le m\}$ 和 $\{\phi_{\mathbf{i}}(-t_j) : \mathbf{i} \in \hat{}\Omega_{\mathbf{t}}^n;\ 0 \le j \le m\}$ 的块集:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n &= \{i_1 \cdots i_{n-\tau_{\mathbf{t}}}(i_{n+1-\tau_{\mathbf{t}}} + t_{j,\tau_{\mathbf{t}}}) \cdots (i_{n-1} + t_{j,2})(i_n + t_{j,1}) : \mathbf{i} \in \Omega_{\mathbf{t}}^n,\ 0 \le j \le m\},\\ \hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}^n &= \{i_1 \cdots i_{n-\tau_{\mathbf{t}}}(i_{n+1-\tau_{\mathbf{t}}} - t_{j,\tau_{\mathbf{t}}}) \cdots (i_{n-1} - t_{j,2})(i_n - t_{j,1}) : \mathbf{i} \in \hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^n,\ 0 \le j \le m\}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

现在我们定义

$$\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^n := \mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n \cup \hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}^n. \tag{1.7}$$

ˆ ˆ 根据 $\Omega_{\mathbf{t}}^n$和 $\Omega_{\mathbf{t}}^n$的定义可知，$\Omega_{\mathbf{t}}^n = \{0, 1, \cdots, N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}} \times \Omega^{\tau_{\mathbf{t}}}$且 $\Omega_{\mathbf{t}}^n = \hat{}$ $\{0, 1, \cdots, N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}} \times \Omega^{\tau_{\mathbf{t}}}$。这意味着

$$\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^n = \{0, 1, \cdots, N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}} \times \mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}} \quad \forall n \ge \tau_{\mathbf{t}}. \tag{1.8}$$

定义 1.2. 若向量 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ 满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$，则称其为可容许平移向量，当且仅当 $\mathbf{t} \in T^{m+1}$ 且存在 $\ell \ge \tau_{\mathbf{t}}$ 使得

$$\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell} \{0, 1, \ldots, N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}} \times \mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}} \times \{0, 1, \ldots, N\}^{\ell-n} = \{0, 1, \ldots, N\}^{\ell}.$$

根据定义 1.2，要验证平移向量 $\mathbf{t}$ 的可容许性并不容易。下面我们通过构造一个有向图，给出一种更易操作的方法。

给定 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_m) \in T^{m+1}$，令 $G_{\mathbf{t}} = (V_{\mathbf{t}}, E_{\mathbf{t}})$ 为如下定义的有向图。令 $V_{\mathbf{t}} = \{0, 1, \cdots, N\}^{\tau_{\mathbf{t}}} \setminus \mathcal{W}^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}$。对于两个顶点 $\mathbf{i} = i_1 i_2 \cdots i_{\tau_{\mathbf{t}}}$、$\mathbf{j} = j_1 j_2 \cdots j_{\tau_{\mathbf{t}}} \in V_{\mathbf{t}}$，若 $i_2 \cdots i_{\tau_{\mathbf{t}}} = j_1 \cdots j_{\tau_{\mathbf{t}}-1}$，则从 $\mathbf{i}$ 到 $\mathbf{j}$ 画一条有向边。于是，$E_{\mathbf{t}}$ 是所有此类有向边的集合。若存在一条从某个顶点出发并最终回到该顶点的有向路径，我们就称 $G_{\mathbf{t}}$ 含有一个环。为方便起见，我们称空图不含环。对于有向图 $G_{\mathbf{t}}$，我们用 $A_{\mathbf{t}}$表示其邻接矩阵。于是，$A_{\mathbf{t}}$ 是一个大小为 $\#V_{\mathbf{t}} \times \#V_{\mathbf{t}}$ 的 0-1矩阵，其中 $A_{\mathbf{t}}$ 中的一个元素 1 对应于 $G_{\mathbf{t}}$ 中的一条有向边。若对于某个幂次 $\ell \in \mathbb{Z}_+$，$A_{\mathbf{t}}^{\ell} = 0$，则称 $A_{\mathbf{t}}$ 为幂零。

命题 1.3. 设 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_m) \in T^{m+1}$。以下陈述等价。

(i) $\mathbf{t}$ 是可容许的;
(ii) $G_{\mathbf{t}}$ 没有环;
(iii) $A_{\mathbf{t}}$ 是幂零的。

证明。（i）⇒（iii）。假设 $A_{\mathbf{t}}$ 不是幂零的。那么对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_+$，矩阵 $A_{\mathbf{t}}^{\ell} \ne 0$。这意味着，对于任意 $\ell \ge \tau_{\mathbf{t}}$，有向图 $G_{\mathbf{t}}$中都存在一条长度为 ℓ 的路径。

根据 $G_{\mathbf{t}}$ 的构造可知，对于任意 $\ell \geq \tau_{\mathbf{t}}$ ，都存在一个长度为 ℓ的词 i，使得 i 中每个长度为 $\tau_{\mathbf{t}}$ 的子词都属于$V_{\mathbf{t}} = \{0,1,\ldots,N\}^{\tau_{\mathbf{t}}} \setminus \mathcal{W}^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}$。因此，

$$\mathbf{i} \in \{0,1,\ldots,N\}^{\ell} \setminus \bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell} \{0,1,\ldots,N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}} \times \mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}} \times \{0,1,\ldots,N\}^{\ell-n},$$

这意味着，根据定义 1.2，t 不可容许。

(iii) $\Rightarrow$ (ii)。直接观察可知， $A_{\mathbf{t}}^{\ell}$ （例如，第 i 行、第 j 列）中的一个元素对应于从顶点 i 到 j 的长度为 ℓ 的路径数。

(ii) $\Rightarrow$(i)。假设 $G_{\mathbf{t}}$没有环。若 $V_{\mathbf{t}} = \emptyset$，则 $\mathcal{W}^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}} = \{0,1,\ldots,N\}^{\tau_{\mathbf{t}}}$，由定义 1.2 可知 t 是可容许的。现在，对于 $V_{\mathbf{t}} \neq \emptyset$ ，令 $\ell = \tau_{\mathbf{t}} + \#V_{\mathbf{t}}$。任取一个词 $\mathbf{i} = i_1 \ldots i_\ell \in \{0,1,\ldots,N\}^{\ell}$，只需证明

$$i_{n_0} i_{n_0+1} \ldots i_{n_0+\tau_{\mathbf{t}}-1} \in \mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}} \quad \text{for some } 1 \leq n_0 \leq \ell - \tau_{\mathbf{t}} + 1. \tag{1.9}$$

反设 i 中任意长度为 $\tau_{\mathbf{t}}$ 的块都不属于 $\mathcal{W}^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}$ 。那么$i_n i_{n+1} \ldots i_{n+\tau_{\mathbf{t}}-1} \in V_{\mathbf{t}}$ 对所有 $1 \leq n \leq \ell - \tau_{\mathbf{t}} + 1$均成立，这就给出了 $G_{\mathbf{t}}$中一条长度为$\ell - \tau_{\mathbf{t}} = \#V_{\mathbf{t}}$ 的有向路径。由鸽巢原理可知， $G_{\mathbf{t}}$ 含有一个环，这与我们的假设矛盾。由此即得所需的 (1.9)。 □

注 1.4. 我们指出，命题 1.3 中对可容许性的刻画更易于处理。例如，使用深度优先搜索可以检测有向图中是否存在环（见 [1]）。

对于平移向量 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ with $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$，我们将其共轭定义为 $\hat{\mathbf{t}} = (\hat{t}_0, \hat{t}_1, \cdots, \hat{t}_m)$，其中 $\hat{t}_j = t_m - t_{m-j}$ for $0 \leq j \leq m$。那么，向量 t 中的 $\hat{}$ 元素也按严格递增顺序排列。此外，t 和 $\hat{\mathbf{t}}$ 互为共轭，由 Γ 的对称性可得

$$(1 + t_m) - \Gamma_{\mathbf{t}} = \bigcup_{j=0}^{m} \big((1 - \Gamma) + (t_m - t_j)\big) = \bigcup_{j=0}^{m} \big(\Gamma + \hat{t}_j\big) = \Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}. \tag{1.10}$$

注意， $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是自相似集，当且仅当 $\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}$ 是自相似集。根据可容许平移向量的定义，我们给出并集$\Gamma_{\mathbf{t}} = \bigcup_{j=0}^{m} (\Gamma + t_j)$ 为自相似集的一个充要条件。

定理 1.5。设 $0 < \beta < 1/(2N+1)$，且 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ 满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$。那么，当且仅当 t 或其共轭 $\hat{\mathbf{t}}$ 是可容许平移向量时， $\Gamma_{\mathbf{t}} = \bigcup_{j=0}^{m} (\Gamma + t_j)$ 是一个自相似集。

作为应用，我们给出 $\Gamma \cup (\Gamma + t)$ 的自相似性的显式刻画。对于 $x \in \mathbb{R}$ ，令 $\lfloor x \rfloor$ 表示其整数部分。

推论 1.6. 设 $0<\beta<1/(2N+1)$ 且 $t>0$。那么， $\Gamma\cup(\Gamma+t)$ 是自相似集，当且仅当

$$t=\frac{j(1-\beta)}{N}\beta^{-k}$$

对某些 $j\in\{1,2,\cdots,\lfloor\frac{N+1}{2}\rfloor\}$ 和 $k\in\mathbb{N}$。

请注意，文献 [3,中的定理 1.1]得到了一个与推论 1.6 类似的结果，该结果适用于满足 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 3}$ 的 $N=1$ 和 $\beta=1/k$ 。

本文其余部分安排如下。下一节将给出一些示例。第 3 节将描述 $\Gamma_{\mathbf{t}}$的生成迭代函数系。定理 1.1 和 1.5 的证明将在第 4 节给出。

2. 示例

本节将给出一些示例，以说明我们的主要结果。

例 2.1. 固定一个正整数 N 和一个实数 $0<\beta<1/(2N+1)$。对于$m\in\mathbb{Z}_+$，令 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$，其中 $t_0=0$，且对于 $1\leq j\leq m$,

$$t_j=\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{j}\beta^{-k}.$$

显然，$\mathbf{t}\in T^{m+1}$。经计算可得 $\tau_{\mathbf{t}}=m$、$\Omega_{\mathbf{t}}^m=\{0,1,\cdots,N-1\}^m$ 和 $\hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^m=\{1,2,\cdots,N\}^m$。因此

$$\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^m=\bigcup_{k=0}^{m}\{0,1,\cdots,N-1\}^{m-k}\times\{1,2,\cdots,N\}^k,$$

and

$$\hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}^m=\bigcup_{k=0}^{m}\{1,2,\cdots,N\}^{m-k}\times\{0,1,\cdots,N-1\}^k.$$

注意到 $\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^m=\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^m\cup\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^m$和 $V_{\mathbf{t}}=\{0,1,\cdots,N\}^m\setminus\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^m$。讨论分为三种情况。

情况 (i)： $m=1$。由推论 1.6，集合 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是一个自相似集。

情况 (ii)： $m=2$。容易验证 $\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^m=\{0,1,\cdots,N\}^m$。这意味着 $G_{\mathbf{t}}$是一个空图。由命题 1.3 和定理 1.5，我们得出集合 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是一个自相似集。

情形 (iii)： $m\geq 3$。令 $m'=\lfloor m/2\rfloor$。若 m为奇数，则有 $(0N)^{m'}0,N(0N)^{m'}\notin\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^m$，且环 $(0N)^{m'}0\to N(0N)^{m'}\to(0N)^{m'}0$属于 $G_{\mathbf{t}}$；若 m为偶数，则有 $(0N)^{m'},(N0)^{m'}\notin\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^m$，且环 $(0N)^{m'}\to(N0)^{m'}\to(0N)^{m'}$属于 $G_{\mathbf{t}}$。注意，共轭 $\hat{\mathbf{t}}\in T^{m+1}$。我们可以验证 $\mathcal{W}_{\hat{\mathbf{t}}}^m=\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^m$，因此 $G_{\hat{\mathbf{t}}}=G_{\mathbf{t}}$ 有一个环。由命题 1.3 和定理 1.5 可得，对于所有 $m\geq 3$， $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 都不是自相似集。

例 2.2。令 $N=1$ 和 $0<\beta<1/3$。取 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^4$，其中 $t_0=0$，并且

$$t_1=(1-\beta)(\beta^{-1}+\beta^{-2}),\ t_2=(1-\beta)(\beta^{-1}+\beta^{-3}),\ t_3=(1-\beta)(\beta^{-1}+\beta^{-4}).$$

显然，$\mathbf{t}\in T^4$。经计算可得 $\tau_{\mathbf{t}}=4$、$\Omega^4_{\mathbf{t}}=\{0000\}$ 和 $\hat{}\Omega^4_{\mathbf{t}}=\{1111\}$。由此可知

$$\mathcal{A}^4_{\mathbf{t}}=\{0000,0011,0101,1001\},\ \hat{\mathcal{A}}^4_{\mathbf{t}}=\{1111,1100,1010,0110\}.$$

注意，$\mathcal{W}^4_{\mathbf{t}}=\mathcal{A}^4_{\mathbf{t}}\cup\hat{}\mathcal{A}^4_{\mathbf{t}}$，且

$$V_{\mathbf{t}}=\{0,1\}^4\setminus\mathcal{W}^4_{\mathbf{t}}=\{0001,0010,0100,0111,1000,1011,1101,1110\}.$$

有向图

$$G_{\mathbf{t}}:\quad \begin{array}{cccc} 0001 & \succ 0010 & 0111 & \succ 1110 \\ \prec & & \prec & \\ 1000 & \prec 0100 & 1011 & \prec 1101 \end{array}$$

有两个环。注意，$\hat{}\mathbf{t}\notin T^4$。由命题 1.3 和定理 1.5 可知，集合 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 不是自相似集。

3. 并集 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 的生成迭代函数系

给定一个自相似集 $E\subset\mathbb{R}$，任何满足 $0<|r_i|<1$ 和 $b_i\in\mathbb{R}$，且满足 $E=\bigcup_{i=1}^n f_i(E)$ 的 IFS $\{f_i(x)=r_ix+b_i\}_{i=1}^n$ 都称为 E 的生成 IFS（参见 [5]）。显然，一个自相似集有无穷多个生成 IFS。本节将描述 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 的生成迭代函数系。

命题 3.1。设 $0<\beta<1/(2N+1)$，且 $\Gamma_{\mathbf{t}}=\bigcup_{j=0}^m(\Gamma+t_j)$ 是一个自相似集，其中 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$ with $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$。若 $r\Gamma_{\mathbf{t}}+b\subset\Gamma_{\mathbf{t}}$ with $0<|r|<1$，则对于某个 $q\in\mathbb{Z}_+$，有 $|r|=\beta^q$。

我们证明命题 3.1 的策略如下：首先证明 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ or $\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}=1+t_m-\Gamma$ 中至少有一个存在生成迭代函数系，其中包含一个相似变换 $g(x)=rx$ with $0<r<1$，见引理 3.2；接着证明对于某个 $q\in\mathbb{Z}_+$，有 $r=\beta^q$，且 $\mathbf{t}\in T^{m+1}$ or $\hat{}\mathbf{t}\in T^{m+1}$，见引理 3.5 和引理 3.6；最后，我们给出 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 的所有生成迭代函数系的完整刻画，见引理 3.7、3.8 和 3.9。

引理 3.2. 设 $0<\beta<1/(N+1)$，且 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$ 满足 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$。若 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是自相似集，则 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 或 $\Gamma_{\hat{}\mathbf{t}}$ 具有一个包含相似变换 $g(x)=rx$ 的生成 IFS，且满足 $0<r<1$。

证明。设 $\{f_i(x)=r_ix+b_i\}_{i=1}^n$ 是 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 的生成 IFS。注意到 $0\in\Gamma\subset\Gamma_{\mathbf{t}}$ 和 $1+t_m=\max\Gamma_{\mathbf{t}}\in\Gamma_{\mathbf{t}}$。不失一般性，我们假设

$$0\in f_1(\Gamma_{\mathbf{t}})=r_1\Gamma_{\mathbf{t}}+b_1\quad\text{and}\quad 1+t_m\in f_n(\Gamma_{\mathbf{t}})=r_n\Gamma_{\mathbf{t}}+b_n. \tag{3.1}$$

若 $r_1 > 0$，则 (3.1) 蕴含 $b_1 = \min f_1(\Gamma_{\mathbf{t}}) = 0$，因此取 $g(x) = f_1(x) = r_1 x$ 即可得证。若 $r_1 < 0$，则我们考虑两种情况： $r_n > 0$，或 $r_n < 0$。

情形 (I)： $r_1 < 0$ 和 $r_n > 0$。由 (3.1) 可得 $1+t_m = f_n(1+t_m) = r_n(1+t_m)+b_n$，因此

$$(1 - r_n)(1 + t_m) - b_n = 0. \tag{3.2}$$

由于 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是一个由 $\{f_i(x) = r_i x + b_i\}_{i=1}^n$ 生成的自相似集，根据 (1.10) 可知 th at

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}} = (1 + t_m) - \Gamma_{\mathbf{t}} &= \bigcup_{i=1}^{n} (1 + t_m - b_i - r_i \Gamma_{\mathbf{t}}) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \Big(r_i(1 + t_m - \Gamma_{\mathbf{t}}) + (1 - r_i)(1 + t_m) - b_i \Big) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \Big(r_i \Gamma_{\hat{\mathbf{t}}} + (1 - r_i)(1 + t_m) - b_i \Big).
\end{aligned}$$

那么 $\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}$ 是由迭代函数系生成的自相似集

$$\left\{ \hat{f}_i(x) = r_i x + (1 - r_i)(1 + t_m) - b_i \right\}_{i=1}^{n}.$$

ˆ 注意，由 (3.2) 可知 $f_n(x) = r_n x + (1 - r_n)(1 + t_m) - b_n = r_n x$。取 ˆ$g(x) = f_n(x) = r_n x$ 即得结论。

情形 (II)： $r_1 < 0$ 和 $r_n < 0$。由 (3.1) 可得 $0 = f_1(1 + t_m)$ 和$1 + t_m = f_n(0)$。这意味着 $f_1 \circ f_n(0) = 0$，因此 $f_1 \circ f_n(x) = r_1 r_n x$，其中 $r_1 r_n > 0$。注意， $\{f_i \circ f_j(x) = r_i r_j x + r_i b_j + b_i\}_{1 \le i,\ j \le n}$ 也是 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 的一个生成 IFS。因此，取 $g(x) = f_1 \circ f_n(x) = r_1 r_n x$ 即得结论。 □

对于有限数字集 $D \subset \mathbb{Z}$，令

$$\Gamma_{\beta,D} := \left\{ \frac{1 - \beta}{N} \sum_{k=1}^{\infty} j_k \beta^{k-1} : j_k \in D \ \forall k \ge 1 \right\}. \tag{3.3}$$

那么，每个 $x \in \Gamma_{\beta,\ D}$ 都可写成 $x = \frac{1-\beta}{N} \sum_{k=1}^{\infty} j_k \beta^{k-1}$，其中 $j_k \in D$；无限序列 $(j_k) = j_1 j_2 \cdots \in D^{\mathbb{Z}_+}$ 称为 x 的 D-编码。一般来说，$\Gamma_{\beta,\ D}$ 中的点可能有多个 D-编码。

在本节余下部分中，我们始终假设

$$0 < \beta < \frac{1}{2N + 1}.$$

我们证明的关键是关于唯一编码的以下结果。

引理 3.3. 每个 $x \in \Gamma_{\beta,\{0,1,\cdots,N\}} \subset \Gamma_{\beta,\{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,2N\}}$都有唯一的 $\{-N, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 2N\}$ 编码，且与其 $\{0, 1, \cdots, N\}$ 编码一致。

证明. 设 $x \in \Gamma_{\beta,\{0,1,\cdots,N\}}$。由于 $0<\beta<1/(2N+1)$， x有唯一的 $\{0,1,\cdots,N\}$ 编码，记为 (i_k)。注意到 x 也属于 $\Gamma_{\beta,\{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,2N\}}$。于是 x 有一个 $\{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,2N\}$ 编码，记为 (j_k)。只需证明对所有 $k\geq 1$， $j_k = i_k$。

对于 $k\geq 1$，定义 $j_k' := -\min\{j_k, 0\}$。于是， $x + \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty} j_k'\beta^{k-1}$ 可写为

$$\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty}(i_k + j_k')\beta^{k-1} = \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty}(j_k + j_k')\beta^{k-1}. \tag{3.4}$$

由于 i_k、 $j_k' \in \{0,1,\cdots,N\}$，我们对所有 $k\geq 1$都有 $i_k + j_k' \in \{0,1,\cdots,2N\}$。注意，当 $j_k \geq 0$时 $j_k + j_k' = j_k$；当 $j_k < 0$时 $j_k + j_k' = 0$。因此，对于所有 $k\geq 1$，我们也有 $j_k + j_k' \in \{0,1,\cdots,2N\}$。由于 $0<\beta<1/(2N+1)$，Γ_β中的每个点，$\{0,1,\cdots,2N\}$都有唯一的 $\{0,1,\cdots,2N\}$ 编码。于是，由（3.4）可知，对于所有 $k\geq 1$都有 $i_k + j_k' = j_k + j_k'$。所以，对于所有 $k\geq 1$都有 $j_k = i_k$。 □

引理 3.4。

(i) 若 $x+y, 2x+y, \cdots, Nx+y \in \Gamma$ 满足某个 $y\in\Gamma$，则 $x \in \Gamma_{\beta,\{-1,0,1\}}$。(ii) 若 $x, 2x, \cdots, Nx \in \Gamma$，则 $x \in \Gamma_{\beta,\{0,1\}}$。

证明。(i) 取 $y \in \Gamma = \Gamma_{\beta,\{0,1,\ldots,N\}}$。那么我们可以将其写为

$$y = \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty} y_k\beta^{k-1} \text{ with each } y_k \in \{0,1,\cdots,N\}. \tag{3.5}$$

由于 $x+y\in\Gamma$，我们有 $x \in \Gamma - y \subset \Gamma - \Gamma = \Gamma_{\beta,\{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,N\}}$，这可以写为

$$x = \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty} x_k\beta^{k-1} \text{ with each } x_k \in \{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,N\}. \tag{3.6}$$

首先有

$$x+y = \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)\beta^{k-1} \in \Gamma_{\beta,\{0,1,\ldots,N\}}.$$

注意，由 (3.5) 和 (3.6) 可知，$(x_k+y_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 $x+y$ 的一个 $\{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,2N\}$-编码。因此，根据引理 3.3 可得，对所有 $k\geq 1$， $x_k+y_k \in \{0,1,\cdots,N\}$。

接下来，注意到

$$2x+y = \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty}(2x_k+y_k)\beta^{k-1} \in \Gamma_{\beta,\{0,1,\ldots,N\}}.$$

由于对所有 $k\geq 1$ 都有 $x_k+y_k \in \{0,1,\cdots,N\}$，由 (3.6) 可知 $(2x_k+y_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 $2x+y$ 的一个 $\{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,2N\}$ 编码。因此，由引理 3.3 可得，对所有 $k\geq 1$ 都有 $2x_k+y_k \in \{0,1,\cdots,N\}$。

重复这一论证 N 次，我们得出对所有 $k \geq 1$ 都有 $Nx_k + y_k \in \{0, 1, \cdots, N\}$。注意，由 (3.5) 可知 $y_k \in \{0, 1, \cdots, N\}$。因此，对所有 $k \geq 1$ 都有 $x_k \in \{-1, 0, 1\}$。也就是说，$x \in \Gamma_{\beta, \{-1,0,1\}}$。

(ii) 取 $y = 0$，由 (i) 可得 $x \in \Gamma_{\beta,\{-1,0,1\}}$。由于 x 也属于 $\Gamma = \Gamma_{\beta,\{0,1,\ldots,N\}}$，由引理 3.3 可知 $x \in \Gamma_{\beta,\{0,1,\ldots,N\}} \cap \Gamma_{\beta,\{-1,0,1\}} = \Gamma_{\beta,\{0,1\}}$。 □

引理 3.5. 设 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ 且满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$。若 $r\Gamma_{\mathbf{t}} \subset \Gamma_{\mathbf{t}}$ 且满足 $0 < r < 1$，则存在某个 $q \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $r = \beta^q$。

证明. 注意到，由 (1.1) 可知，对 $k \geq 0$ 和 $j \in \{1, \cdots, N\}$，$j(1-\beta)\beta^k/N \in \Gamma$。取充分大的 k，使得 $r(1-\beta)\beta^k < t_1$。由于 $r\Gamma_{\mathbf{t}} \subset \Gamma_{\mathbf{t}} = \bigcup_{j=0}^{m}(\Gamma + t_j)$ 且满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$，可知对所有 $j \in \{1, \cdots, N\}$，$jr(1-\beta)\beta^k/N \in \Gamma$。由引理 3.4 (ii)，我们得出 $r(1-\beta)\beta^k/N \in \Gamma_{\beta,\{0,1\}}$。注意到 $0 < r < 1$。由 (3.3) 可知

$$r = \beta^q + \sum_{k=q+1}^{\infty} j_k \beta^k \quad \text{with} \quad j_k \in \{0, 1\},$$

其中 $q \in \mathbb{Z}_+$。因此，只需证明对于所有 $k \geq q+1$，$j_k = 0$。

反设存在 $q' > q$ 使得

$$r = \beta^q + \beta^{q'} + \sum_{k=q'+1}^{\infty} j_k \beta^k. \tag{3.7}$$

注意，对于任意 $n \geq 0$，$(1-\beta)\beta^n(\beta^q + \beta^{q'}) \in \Gamma$。取充分大的 n，使得$r(1-\beta)\beta^n(\beta^q + \beta^{q'}) < t_1$。于是得到

$$y := r(1-\beta)\beta^n(\beta^q + \beta^{q'}) \in \Gamma = \Gamma_{\beta,\{0,1,\cdots,N\}}. \tag{3.8}$$

另一方面，由 (3.7) 可知

$$\begin{aligned} y &= (1-\beta)\beta^n(\beta^q + \beta^{q'})\left(\beta^q + \beta^{q'} + \sum_{k=q'+1}^{\infty} j_k \beta^k\right) \\ &= \frac{(1-\beta)\beta^n}{N}\left(N\beta^{2q} + 2N\beta^{q+q'} + N\beta^{2q'} + \sum_{k=q'+1}^{\infty} j_k N\beta^{k+q} + \sum_{k=q'+1}^{\infty} j_k N\beta^{k+q'}\right), \end{aligned}$$

根据 (3.8)，它的 $\{-N, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 2N\}$-编码与其 $\{0, 1, \cdots, N\}$-编码不同。这与引理 3.3 矛盾。 □

回顾

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{n} j_k \beta^{-k} : j_k \in \{0, 1, \cdots, N\}\ \forall 1 \leq k \leq n\right\}.$$

引理 3.6。设 $\Gamma_{\mathbf{t}} = \bigcup_{j=0}^{m}(\Gamma + t_j)$ 是一个自相似集，其中 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ 满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$。那么，要么 $\mathbf{t} \in T^{m+1}$，要么其共轭 $\hat{\mathbf{t}} \in T^{m+1}$。此外，对于所有 $0 \le j < m$，$t_{j+1} - t_j > 1$。

证明。我们首先假设 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 有一个生成 IFS，其中包含一个满足$0 < r < 1$的相似变换 rx。那么由引理 3.5，存在 $q \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\beta^q\Gamma_{\mathbf{t}} \subset \Gamma_{\mathbf{t}}$。取充分大的 u，使得 $\beta^{uq}(1 + t_m) < t_1$。于是我们得到

$$\beta^{uq}\Gamma_{\mathbf{t}} \subset \Gamma. \tag{3.9}$$

由于对每个 $0 \le j \le m$都有 $t_j \in \Gamma + t_j \subset \Gamma_{\mathbf{t}}$，由 (3.9) 可得 $\beta^{uq}t_j \in \Gamma$。结合 (1.1)，这意味着

$$t_j = \frac{1-\beta}{N}\beta^{-uq}\sum_{k=1}^{\infty} t_{j,k}\beta^{k-1} \quad \text{with} \quad t_{j,k} \in \{0, 1, \cdots, N\}. \tag{3.10}$$

因此，要证明 $t_j \in T$，只需证明对所有 $k > uq$，$t_{j,k} = 0$。

反设对某个 $k_1 > uq$，有$t_{j,k_1} \neq 0$。注意到

$$y := \frac{1-\beta}{N}(N + 1 - t_{j,k_1})\beta^{k_1-uq-1} + t_j \in \Gamma_{\mathbf{t}}.$$

于是由 (3.9) 可得$\beta^{uq}y \in \Gamma = \Gamma_{\beta,\{0,1,\cdots,N\}}$。另一方面，由 (3.10) 可得

$$\begin{aligned}\beta^{uq}y &= \frac{1-\beta}{N}(N + 1 - t_{j,k_1})\beta^{k_1-1} + \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty} t_{j,k}\beta^{k-1}\\ &= \frac{1-\beta}{N}\bigg(\sum_{k\ge1,k\neq k_1} t_{j,k}\beta^{k-1} + (N+1)\beta^{k_1-1}\bigg),\end{aligned}$$

它的 $\{-N, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 2N\}$ 编码与其 $\{0, 1, \cdots, N\}$ 编码不同。这与引理 3.3 矛盾。因此,

$$t_j = \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{uq} t_{j,k}\beta^{k-uq-1} \in T \quad \text{for all } 0 \le j \le m.$$

取 $j \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$，并令 $k_2 = \min\{1 \le k \le uq : t_{j+1,k} \neq t_{j,k}\}$。由于 $t_{j+1} > t_j$，利用 $0 < \beta < 1/(2N+1)$ 可得 $t_{j+1,k_2} > t_{j,k_2}$。因此,

$$t_{j+1} - t_j \ge \frac{1-\beta}{N}\beta^{k_2-uq-1} - \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=k_2+1}^{uq} N\beta^{k-uq-1} = 1 + \beta^{k_2-uq}\Big(\frac{1-\beta}{N\beta} - 1\Big) > 1,$$

正如所需。

接下来，我们假设 $\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}$ 有一个生成 IFS，其中包含一个满足$0 < r < 1$的相似变换 rx。根据上述论证，我们得出 $\hat{}\mathbf{t} \in T^{m+1}$，且对于所有 $0 \le j < m$，$\hat{} t_{j+1} - \hat{}t_j > 1$。注意，对于所有 $0 \le j \le m$，$\hat{} t_j = t_m - t_{m-j}$。因此，对于所有 $0 \le j < m$，我们还有$t_{j+1} - t_j = \hat{}t_{m-j} - \hat{} t_{m-j-1} > 1$。

由引理 3.2 可知，$\Gamma_{\mathbf{t}}$ 或 $\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}$ 有一个生成 IFS，其中包含一个相似变换 rx，且满足 $0 < r < 1$。因此，我们得出 $\mathbf{t} \in T^{m+1}$ 或其共轭 $\hat{}\mathbf{t} \in T^{m+1}$。无论哪种情况，对于所有 $0 \le j < m$，都有 $t_{j+1} - t_j > 1$。 □

下面的引理指出，$\Gamma_{\mathbf{t}} = \bigcup_{j=0}^{m}(\Gamma + t_j)$是自相似集，当且仅当 Γ可以写成若干个 $\Gamma_{\mathbf{t}}$的相似副本之并。

引理 3.7。设 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$，且满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$。那么，$\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是自相似集，当且仅当存在一个由相似变换构成的有限集 $\mathcal{G}$，使得

$$\bigcup_{g \in \mathcal{G}} g(\Gamma_{\mathbf{t}}) = \Gamma. \tag{3.11}$$

证明。充分性较容易，因为如果某个有限集 $\mathcal{G}$满足式 (3.11)，那么

$$\bigcup_{j=0}^{m} \{g(x) + t_j : g \in \mathcal{G}\}$$

是 $\bigcup_{j=0}^{m}(\Gamma + t_j) = \Gamma_{\mathbf{t}}$ 的一个生成 IFS。

为证明必要性，假设 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是由 IFS $\mathcal{F} = \{f_i(x) = r_i x + b_i\}_{i=1}^{n}$ 生成的自相似集。由引理 3.6，得

$$\delta := \min_{0 \le j < m} (t_{j+1} - t_j - 1) = \min_{0 \le j_1 < j_2 \le m} \operatorname{dist}(\Gamma + t_{j_1}, \Gamma + t_{j_2}) > 0.$$

注意，对任意 $p \ge 1$,

$$\left\{ f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_p}(x) : 1 \le i_1, i_2, \cdots, i_p \le n \right\}$$

又是 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 的一个生成 IFS。不失一般性，我们可以假设所有相似比都足够小，从而对所有 $1 \le i \le n$，$|r_i| < \delta/(1 + t_m)$。于是 $\operatorname{diam}\big(f_i(\Gamma_{\mathbf{t}})\big) = |r_i| \cdot \operatorname{diam}(\Gamma_{\mathbf{t}}) < \delta$。因此，对每个 $f \in \mathcal{F}$，存在唯一的 $j \in \{0, 1, \cdots, m\}$ 使得 $f(\Gamma_{\mathbf{t}}) \subset \Gamma + t_j$。令 $\mathcal{G}$: $= \{f \in \mathcal{F}: f(\Gamma_{\mathbf{t}}) \subset \Gamma\}$。那么 $\bigcup_{g \in \mathcal{G}} g(\Gamma_{\mathbf{t}}) = \Gamma$，即得所需结论。 □

回顾一下，对于平移向量 $\mathbf{t} \in T^{m+1}$，集合 $\Omega_{\mathbf{t}}^{n}$ 和 $\hat{}\Omega_{\mathbf{t}}^{n}$ 是为 $n \ge \tau_{\mathbf{t}}$在 (1.4) 和 (1.5) 中定义的。

引理 3.8. 设 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \cdots, t_m) \in T^{m+1}$ 且 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$，并假设$g(x) = rx + b$ 且 $0 < r < 1$。若 $g(\Gamma_{\mathbf{t}}) \subset \Gamma$，则存在某个 $\mathbf{i} \in \Omega_{\mathbf{t}}^{n}$，使得 $g(x) = \phi_{\mathbf{i}}(x)$，其中 $n \ge \tau_{\mathbf{t}}$。

证明. 注意到 $r\Gamma_{\mathbf{t}}+b\subset\Gamma$ 和 $0\in\Gamma_{\mathbf{t}}$。由此可得 $b\in\Gamma$，记作

$$b=\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\beta^{k-1}\text{ with }b_k\in\{0,1,\cdots,N\}. \tag{3.12}$$

注意，对于所有 $1\le j\le N$ 和 $r\Gamma_{\mathbf{t}}+b\subset\Gamma$，$j(1-\beta)/N\in\Gamma\subset\Gamma_{\mathbf{t}}$。因此，对于所有 $1\le j\le N$，我们有$jr(1-\beta)/N+b\in\Gamma$。根据引理 3.4 (i)，我们有 $r(1-\beta)/N\in\Gamma_{\beta,\{-1,0,1\}}$。注意，$0<r\le\text{diam}(\Gamma)/\text{diam}(\Gamma_{\mathbf{t}})=1/(1+t_m)<1/2$，且 $0<\beta<1/(2N+1)\le 1/3$。由 (3.3) 可得

$$r=\beta^n+\sum_{k=n+1}^{\infty}r_k\beta^k\text{ with }r_k\in\{-1,0,1\}, \tag{3.13}$$

其中 $n\in\mathbb{Z}_+$。鉴于 (3.12) 和 (3.13)，我们将证明分为以下三个步骤：(i) 我们在 (3.12) 中证明，对于所有 $k\ge n+1$，$b_k=0$，进而得到$b=\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{n}b_k\beta^{k-1}$；(ii) 我们在 (3.13) 中证明，对于所有 $k\ge n+1$，$r_k=0$，进而得到 $r=\beta^n$，因此$g(x)=rx+b=\phi_{b_1b_2\cdots b_n}(x)$；(iii) 我们证明 $n\ge\tau_{\mathbf{t}}$ 且 $b_1b_2\cdots b_n\in\Omega^n_{\mathbf{t}}$。

步骤 1。我们将在 (3.12) 中证明，对所有 $k\ge n+1$，$b_k=0$。固定 $k_1\ge n+1$。注意，$(1-\beta)\beta^{k_1-n-1}\in\Gamma\subset\Gamma_{\mathbf{t}}$ 且 $r\Gamma_{\mathbf{t}}+b\subset\Gamma$。由此可得

$$y:=r(1-\beta)\beta^{k_1-n-1}+b\in\Gamma=\Gamma_{\beta,\{0,1,\cdots,N\}}.$$

由 (3.12) 和 (3.13) 可得

$$y=\frac{1-\beta}{N}\bigg(\sum_{k=1}^{k_1-1}b_k\beta^{k-1}+(N+b_{k_1})\beta^{k_1-1}+\sum_{k=k_1+1}^{\infty}(Nr_{k+n-k_1}+b_k)\beta^{k-1}\bigg).$$

由引理 3.3，我们有 $N+b_{k_1}\in\{0,1,\cdots,N\}$。这意味着 $b_{k_1}=0$。由于 k_1 是任意的，我们得出

$$b=\frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{n}b_k\beta^{k-1}\text{ with }b_k\in\{0,1,\cdots,N\}. \tag{3.14}$$

步骤 2。我们将证明 $r=\beta^n$，即在 (3.13) 中，对所有 $k\ge n+1$，$r_k=0$。

首先，假设存在 $k_2\ge n+1$ 使得 $r_{k_2}=-1$。注意 $1-\beta\in\Gamma\subset\Gamma_{\mathbf{t}}$且 $r\Gamma_{\mathbf{t}}+b\subset\Gamma$。由此可得 $r(1-\beta)+b\in\Gamma=\Gamma_{\beta,\ \{0,1,\cdots,N\}}$。另一方面，由 (3.13) 和 (3.14) 可得

$$r(1-\beta)+b=\frac{1-\beta}{N}\bigg(\sum_{k=1}^{n}b_k\beta^{k-1}+N\beta^n+\sum_{k=n+1}^{\infty}Nr_k\beta^k\bigg),$$

它的 $\{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,2N\}$ 编码与其 $\{0,1,\cdots,N\}$ 编码不同。这与引理 3.3 矛盾。因此，对于所有 $k\ge n+1$，我们有 $r_k\in\{0,1\}$。

接下来，假设存在 $k_3 \geq n+1$ 使得

$$r = \beta^n + \beta^{k_3} + \sum_{k=k_3+1}^{\infty} r_k \beta^k \text{ with } r_k \in \{0,1\}. \tag{3.15}$$

注意到 $(1-\beta)(\beta^n+\beta^{k_3}) \in \Gamma \subset \Gamma_{\mathbf{t}}$ 和 $r\Gamma_{\mathbf{t}} + b \subset \Gamma$。由此可得 $z := r(1-\beta)(\beta^n+\beta^{k_3}) + b \in \Gamma = \Gamma_{\beta,\ \{0,1,\cdots,N\}}$。另一方面，由 (3.14) 和 (3.15) 可得

$$\begin{aligned} z &= (1-\beta)(\beta^n+\beta^{k_3})\left(\beta^n+\beta^{k_3}+\sum_{k=k_3+1}^{\infty} r_k\beta^k\right)+b \\ &= \frac{1-\beta}{N}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\beta^{k-1} + N\beta^{2n} + 2N\beta^{n+k_3} + N\beta^{2k_3} + \sum_{k=k_3+1}^{\infty} r_k\beta^{k+n} + \sum_{k=k_3+1}^{\infty} r_k\beta^{k+k_3}\right), \end{aligned}$$

其 $\{-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,2N\}$-编码与其 $\{0,1,\cdots,N\}$-编码不同。这与引理 3.3 矛盾。因此我们得出结论： $r = \beta^n$。

步骤 3。根据 $\tau_{\mathbf{t}}$ 的定义，存在 $1 \leq j_1 \leq m$ 使得 $t_{j_1,\ \tau_{\mathbf{t}}} \neq 0$。于是我们有

$$t_{j_1} = \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{\tau_{\mathbf{t}}} t_{j_1,k}\beta^{-k} \geq \frac{1-\beta}{N}\beta^{-\tau_{\mathbf{t}}}.$$

注意到 $t_{j_1} \in \Gamma_{\mathbf{t}}$ 和 $r\Gamma_{\mathbf{t}} + b \subset \Gamma$。由此可得 $rt_{j_1} + b \in \Gamma \subset [0,1]$。因此， $\frac{1-\beta}{N}\beta^{n-\tau_{\mathbf{t}}} \leq rt_{j_1} \leq rt_{j_1} + b \leq 1$。利用 $0 < \beta < 1/(2N+1)$，可推出 $n \geq \tau_{\mathbf{t}}$。注意到

$$g(x) = \beta^n x + \frac{1-\beta}{N}\sum_{k=1}^{n} b_k\beta^{k-1} = \phi_{b_1b_2\cdots b_n}(x).$$

剩下要证明的是 $b_1b_2\cdots b_n \in \Omega_{\mathbf{t}}^n$，也就是说，对所有 $1 \leq k \leq \tau_{\mathbf{t}}$，都有 $b_{n+1-k} \leq N - s_k$。

反设存在某个 $1 \leq k_4 \leq \tau_{\mathbf{t}}$，使得 $b_{n+1-k_4} + s_{k_4} \geq N+1$。根据 s_{k_4} 的定义，存在 $1 \leq j_2 \leq m$，使得 $t_{j_2,k_4} = s_{k_4}$。于是我们有$b_{n+1-k_4} + t_{j_2,k_4} \geq N+1$。注意到

$$\begin{aligned} g(\Gamma + t_{j_2}) &= \beta^n\Gamma + \beta^n t_{j_2} + b \\ &= \beta^n\Gamma + \frac{1-\beta}{N}\left(\sum_{k=1}^{n-\tau_{\mathbf{t}}} b_k\beta^{k-1} + \sum_{k=n+1-\tau_t}^{n} (b_k + t_{j_2,n+1-k})\beta^{k-1}\right). \end{aligned}$$

根据引理 3.3，我们有 $g(\Gamma + t_{j_2}) \cap \Gamma = \emptyset$。这与 $g(\Gamma_{\mathbf{t}}) \subset \Gamma$ 矛盾。因此，我们得出结论： $b_1b_2\cdots b_n \in \Omega_{\mathbf{t}}^n$，证毕。 □

引理 3.9. 设 $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \cdots, t_m) \in T^{m+1}$ 且 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$，并假设$g(x) = -rx + b$ 且 $0 < r < 1$。若 $g(\Gamma_{\mathbf{t}}) \subset \Gamma$，则存在某个 $\hat{\mathbf{i}} \in \Omega_{\mathbf{t}}^n$，使得 $g(x) = \phi_{\hat{\mathbf{i}}}(1-x)$，其中 $n \geq \tau_{\mathbf{t}}$。

证明. 设 $b' = 1 - b$。于是我们有 $g(\Gamma_{\mathbf{t}}) = -r\Gamma_{\mathbf{t}} + b = 1 - (r\Gamma_{\mathbf{t}} + b') \subset \Gamma$。注意，$\Gamma$是对称的。因此

$$r\Gamma_{\mathbf{t}} + b' \subset 1 - \Gamma = \Gamma.$$

由引理 3.8，我们有

$$r = \beta^n,\ b' = \phi_{\mathbf{i}'}(0),$$

其中 $n \geq \tau_{\mathbf{t}}$ 且 $\mathbf{i}' = i'_1 i'_2 \cdots i'_n \in \Omega^n_{\mathbf{t}}$。

令 $\mathbf{i} = i_1 i_2 \cdots i_n$，其中 $i_k = N - i'_k$ 对所有 $1 \leq k \leq n$ 均成立。显然，我们有 $\mathbf{i} \in \Omega^n_{\mathbf{t}}$，这 d

$$\begin{aligned} g(x) &= -\beta^n x + 1 - \phi_{\mathbf{i}'}(0) \\ &= -\beta^n x + 1 - \frac{1-\beta}{N} \sum_{k=1}^{n} i'_k \beta^{k-1} \\ &= \beta^n (1-x) + \frac{1-\beta}{N} \sum_{k=1}^{n} (N - i'_k) \beta^{k-1} \\ &= \beta^n (1-x) + \phi_{\mathbf{i}}(0) \\ &= \phi_{\mathbf{i}}(1-x), \end{aligned}$$

如所需。 □

命题 3.1 的证明。设 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是一个自相似集。由引理 3.6，我们有 $\mathbf{t} \in T^{m+1}$ 或 $\hat{\mathbf{t}} \in T^{m+1}$。此外，我们有

$$\delta := \min_{0 \leq j < m} (t_{j+1} - t_j - 1) = \min_{0 \leq j_1 < j_2 \leq m} \operatorname{dist}(\Gamma + t_{j_1}, \Gamma + t_{j_2}) > 0.$$

记 $g(x) = rx + b$。于是，对所有 $n \geq 1$，都有 $g^n(\Gamma_{\mathbf{t}}) \subset \Gamma_{\mathbf{t}}$。取足够大的 n，使得 $|r|^n \cdot \operatorname{diam}(\Gamma_{\mathbf{t}}) < \delta$。那么存在 $j_1, j_2 \in \{0, 1, \cdots, m\}$，使得

$$g^n(\Gamma_{\mathbf{t}}) \subset \Gamma + t_{j_1},\ g^{n+1}(\Gamma_{\mathbf{t}}) \subset \Gamma + t_{j_2}. \tag{3.16}$$

若 $\mathbf{t} \in T^{m+1}$，令 $g_1(x) = r^n x + g^n(0) - t_{j_1}$，且 $g_2(x) = r^{n+1} x + g^{n+1}(0) - t_{j_2}$。由 (3.16) 得 $g_1(\Gamma_{\mathbf{t}}) = g^n(\Gamma_{\mathbf{t}}) - t_{j_1} \subset \Gamma$，且 $g_2(\Gamma_{\mathbf{t}}) = g^{n+1}(\Gamma_{\mathbf{t}}) - t_{j_2} \subset \Gamma$。由引理3.8和引理3.9可知，$|r|^n = \beta^{q_1}$ 且 $|r|^{n+1} = \beta^{q_2}$，其中 $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+$。因此，对于某个 $q \in \mathbb{Z}_+$，有 $|r| = \beta^q$。

若 $\hat{\mathbf{t}} \in T^{m+1}$，令 $g_3(x) = -r^n x + g^n(1 + t_m) - t_{j_1}$，以及 $g_4(x) = -r^{n+1} x + g^{n+1}(1 + t_m) - t_{j_2}$。注意到 $\Gamma_{\mathbf{t}} = 1 + t_m - \Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}$。由 (3.16) 可得 $g_3(\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}) = g^n(1 + t_m - \Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}) - t_{j_1} = g^n(\Gamma_{\mathbf{t}}) - t_{j_1} \subset \Gamma$，以及 $g_4(\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}) = g^{n+1}(1 + t_m - \Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}) - t_{j_2} = g^{n+1}(\Gamma_{\mathbf{t}}) - t_{j_2} \subset \Gamma$。由引理3.8和引理3.9，我们得出 $|r|^n = \beta^{q_3}$ 和 $|r|^{n+1} = \beta^{q_4}$，其中某些 $q_3, q_4 \in \mathbb{Z}_+$。因此，对某个 $q \in \mathbb{Z}_+$，有 $|r| = \beta^q$。 □

4. 定理 1.1 和 1.5 的证明

本节将证明我们的主要定理。首先证明定理 1.5。回顾定义 1.2 中的可容许平移向量。下面我们在命题 1.3 中为可容许平移向量补充一个等价条件。

引理 4.1. 假设 $0<\beta<1/(N+1)$。向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$ with $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ 是可容许平移向量，当且仅当 $\mathbf{t}\in T^{m+1}$，并且存在有限集 $\mathcal{I}_1\subset\bigcup_{n\geq\tau_{\mathbf{t}}}\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 和 $\mathcal{I}_2\subset\bigcup_{n\geq\tau_{\mathbf{t}}}\Omega_{\mathbf{t}}^n$，使得

$$\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_2}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}})=\Gamma.$$

证明。假设 $\mathbf{t}\in T^{m+1}$。回顾 (1.3)，对于 $0\leq j\leq m$，我们有

$$t_j=\beta^{-\tau_{\mathbf{t}}}\phi_{t_{j,\tau_{\mathbf{t}}}\cdots t_{j,2}t_{j,1}}(0).$$

Take $\mathbf{i}=i_1i_2\cdots i_n\in\Omega_{\mathbf{t}}^n$，对于 $n\geq\tau_{\mathbf{t}}$。根据 (1.4) 中 $\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 的定义，我们有

$$i_1i_2\cdots i_{n-\tau_{\mathbf{t}}}(i_{n+1-\tau_{\mathbf{t}}}+t_{j,\tau_{\mathbf{t}}})\cdots(i_{n-1}+t_{j,2})(i_n+t_{j,1})\in\{0,1,\cdots,N\}^n$$

对所有 $0\leq j\leq m$ 均成立。因此

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})=\bigcup_{j=0}^m\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma+t_j)&=\bigcup_{j=0}^m\big(\beta^n\Gamma+\beta^nt_j+\phi_{\mathbf{i}}(0)\big)\\&=\bigcup_{j=0}^m\big(\beta^n\Gamma+\beta^{n-\tau_{\mathbf{t}}}\phi_{t_{j,\tau_{\mathbf{t}}}\cdots t_{j,2}t_{j,1}}(0)+\phi_{\mathbf{i}}(0)\big)\\&=\bigcup_{j=0}^m\big(\beta^n\Gamma+\phi_{i_1i_2\cdots i_{n-\tau_{\mathbf{t}}}(i_{n+1-\tau_{\mathbf{t}}}+t_{j,\tau_{\mathbf{t}}})\cdots(i_{n-1}+t_{j,2})(i_n+t_{j,1})}(0)\big)\\&=\bigcup_{j=0}^m\phi_{i_1i_2\cdots i_{n-\tau_{\mathbf{t}}}(i_{n+1-\tau_{\mathbf{t}}}+t_{j,\tau_{\mathbf{t}}})\cdots(i_{n-1}+t_{j,2})(i_n+t_{j,1})}(\Gamma).\end{aligned}$$

回顾（1.6）中 $\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n$ 的定义，因此我们有

$$\bigcup_{\mathbf{i}\in\Omega_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})=\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma).$$

ˆ 同理，对于 $\mathbf{i}=i_1i_2\cdots i_n\in\Omega_{\mathbf{t}}^n$，其中 $n\geq\tau_{\mathbf{t}}$，由 Γ 的对称性可得

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}})=\bigcup_{j=0}^m\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma-t_j)&=\bigcup_{j=0}^m\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma-t_j)\\&=\bigcup_{j=0}^m\big(\beta^n\Gamma-\beta^nt_j+\phi_{\mathbf{i}}(0)\big)\\&=\bigcup_{j=0}^m\phi_{i_1i_2\cdots i_{n-\tau_{\mathbf{t}}}(i_{n+1-\tau_{\mathbf{t}}}-t_{j,\tau_{\mathbf{t}}})\cdots(i_{n-1}-t_{j,2})(i_n-t_{j,1})}(\Gamma).\end{aligned}$$

ˆ 回顾 (1.6) 中 $\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n$ 的定义，因此我们得到

$$\bigcup_{\mathbf{i}\in\hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})=\bigcup_{\mathbf{i}\in\hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma).$$

ˆ 注意，我们令 $\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^n=\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n\cup\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^n$。因此，对于 $n\geq\tau_{\mathbf{t}}$，我们得到

$$\bigcup_{\mathbf{i}\in\Omega_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}})=\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma)\subset\Gamma. \tag{4.1}$$

对于必要性，我们取 $\mathcal{I}_1=\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 和 $\mathcal{I}_2=\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\hat{}\Omega_{\mathbf{t}}^n$。回忆一下，在 (1.8) 中，$\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^n=\{0,1,\cdots,N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}}\times\mathcal{W}^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}$。由 (4.1)，我们有

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_2}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}})&=\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma)\\
&=\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^n\times\{0,1,\cdots,N\}^{\ell-n}}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma)\\
&=\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\bigcup_{\mathbf{i}\in\{0,1,\cdots,N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}}\times\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}}\times\{0,1,\cdots,N\}^{\ell-n}}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma)\\
&=\bigcup_{\mathbf{i}\in\{0,1,\cdots,N\}^{\ell}}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma)\\
&=\Gamma,
\end{aligned}$$

正如所需。

接下来，我们证明充分性。首先有 $\mathbf{t}\in T^{m+1}$。令 ℓ 为 $\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2$中词的最大长度。显然，我们有 $\mathcal{I}_1\subset\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 和 $\mathcal{I}_2\subset\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\hat{}\Omega_{\mathbf{t}}^n$。由此可得

$$\Gamma=\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_2}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}})\subset\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\Big(\bigcup_{\mathbf{i}\in\Omega_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}})\Big).$$

结合 (4.1)，我们有

$$\Gamma=\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\Big(\bigcup_{\mathbf{i}\in\Omega_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^n}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}})\Big)=\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\bigcup_{\mathbf{i}\in\{0,1,\cdots,N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}}\times\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}}\times\{0,1,\cdots,N\}^{\ell-n}}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma). \tag{4.2}$$

由于 $0<\beta<1/(N+1)$ 是 Γ 的生成 IFS，

$$\Big\{\phi_i(x)=\beta x+i\frac{1-\beta}{N}:i=0,1,\cdots,N\Big\}$$

满足强分离条件。因此，等式 (4.2) 意味着

$$\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\{0,1,\cdots,N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}}\times\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}}\times\{0,1,\cdots,N\}^{\ell-n}=\{0,1,\cdots,N\}^{\ell}.$$

因此，$\mathbf{t}$ 是一个可容许平移向量。证明完毕。 □

首先，我们证明定理 1.5 的充分性。

引理 4.2. 假设 $0<\beta<1/(N+1)$。若 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$ with $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ 是一个可容许平移向量，则 $\Gamma_{\mathbf{t}}=\bigcup_{j=0}^{m}(\Gamma+t_j)$ 是一个自相似集。

证明. 由引理 4.1，存在有限集 $\mathcal{I}_1\subset\bigcup_{n\geq\tau_{\mathbf{t}}}\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 和 $\mathcal{I}_2\subset\bigcup_{n\geq\tau_{\mathbf{t}}}\Omega_{\mathbf{t}}^n$，使得

$$\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_2}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}})=\Gamma.$$

令 $f_{\mathbf{i}}(x):=\phi_{\mathbf{i}}(x)$，其中 $\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1$；并令 $g_{\mathbf{i}}(x):=\phi_{\mathbf{i}}(1-x)$，其中 $\mathbf{i}\in\mathcal{I}_2$。于是我们有

$$\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}f_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_2}g_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})=\Gamma.$$

这表明 $\Gamma_{\mathbf{t}}=\bigcup_{j=0}^{m}(\Gamma+t_j)$ 是由以下迭代函数系生成的自相似集

$$\big\{f_{\mathbf{i}}(x)+t_j:\ \mathbf{i}\in\mathcal{I}_1,\ 0\leq j\leq m\big\}\cup\big\{g_{\mathbf{i}}(x)+t_j:\ \mathbf{i}\in\mathcal{I}_2,\ 0\leq j\leq m\big\}.$$

证明完成。 □

定理 1.5 的证明。注意，$\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是自相似集，当且仅当 $\Gamma_{\hat{\mathbf{t}}}$ 是自相似集。充分性由引理 4.2 得出。下面证明必要性。

假设 $\Gamma_{\mathbf{t}}$ 是自相似集。由引理 3.6 可知，我们有 $\mathbf{t}\in T^{m+1}$，或其共轭 $\hat{\mathbf{t}}\in T^{m+1}$。不失一般性，可设 $\mathbf{t}\in T^{m+1}$。由引理 3.7，存在一个由相似变换组成的有限集 $\mathcal{G}$，使得

$$\bigcup_{g\in\mathcal{G}}g(\Gamma_{\mathbf{t}})=\Gamma. \tag{4.3}$$

由引理3.8和引理3.9，对于每个 $g\in\mathcal{G}$，存在某个 $\mathbf{i}\in\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\infty}\Omega_{\mathbf{t}}^n$，使得 $g(x)=\phi_{\mathbf{i}}(x)$；或者存在某个 $\mathbf{i}\in\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\infty}\hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^n$，使得 $g(x)=\phi_{\mathbf{i}}(1-x)$。令 $\mathcal{I}_1=\{\mathbf{i}:\ g(x)=\phi_{\mathbf{i}}(x)\in\mathcal{G}\}$，并令$\mathcal{I}_2=\{\mathbf{i}:\ g(x)=\phi_{\mathbf{i}}(1-x)\in\mathcal{G}\}$。那么 $\mathcal{I}_1$ 和 $\mathcal{I}_2$ 分别是 $\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\infty}\Omega_{\mathbf{t}}^n$ 和 $\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\infty}\hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^n$的有限子集。此外，我们有

$$\Gamma=\bigcup_{g\in\mathcal{G}}g(\Gamma_{\mathbf{t}})=\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}\phi_{\mathbf{i}}(\Gamma_{\mathbf{t}})\cup\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_2}\phi_{\mathbf{i}}(1-\Gamma_{\mathbf{t}}).$$

由引理 4.1，$\mathbf{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_m)$ 是一个可容许平移向量。 □

接下来我们证明定理 1.1。

引理 4.3. 假设 $0<\beta<1/(N+1)$，并令 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in T^{m+1}$ 满足$0=t_0<t_1<\cdots<t_m$。若对于某个 $q\in\mathbb{Z}_+$，有 $\beta^q\mathbf{t}\in T^{m+1}$，则 $\mathbf{t}$ 是可容许平移向量，当且仅当 $\beta^q\mathbf{t}$ 是可容许平移向量。

证明。记 $\mathbf{t}'=\beta^q\mathbf{t}$，即 $\mathbf{t}=\beta^{-q}\mathbf{t}'$。注意到 $\mathbf{t},\ \mathbf{t}'\in T^{m+1}$。我们有 $\tau_{\mathbf{t}}=\tau_{\mathbf{t}'}+q$。容易验证，$\Omega^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}=\Omega^{\tau_{\mathbf{t}'}}{}_{\mathbf{t}'}\times\{0,1,\cdots,N\}^q$，以及 $\hat{}\Omega^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}=\hat{}\Omega^{\tau_{\mathbf{t}'}}{}_{\mathbf{t}'}\times\{0,1,\cdots,N\}^q$。于是我们还得到 $\mathcal{A}^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}=\mathcal{A}^{\tau_{\mathbf{t}'}}{}_{\mathbf{t}'}\times\{0,1,\cdots,N\}^q$以及 $\hat{}\mathcal{A}^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}=\hat{}_{\mathcal{A}^{\tau_{\mathbf{t}'}}{}_{\mathbf{t}'}}\times\{0,1,\cdots,N\}^q$。因此

$$\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}}=\mathcal{W}_{\mathbf{t}'}^{\tau_{\mathbf{t}'}}\times\{0,1,\cdots,N\}^q.$$

因此，对于 $\ell\geq\tau_{\mathbf{t}}$，下面三个等式是等价的:

- $\bigcup_{n=\tau_{\mathbf{t}}}^{\ell}\{0,1,\cdots,N\}^{n-\tau_{\mathbf{t}}}\times\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}}\times\{0,1,\cdots,N\}^{\ell-n}=\{0,1,\cdots,N\}^{\ell}$;
- $\bigcup_{n'=\tau_{\mathbf{t}'}}^{\ell-q}\{0,1,\cdots,N\}^{n'-\tau_{\mathbf{t}'}}\times\mathcal{W}_{\mathbf{t}'}^{\tau_{\mathbf{t}'}}\times\{0,1,\cdots,N\}^{\ell-n'}=\{0,1,\cdots,N\}^{\ell}$;
- $\bigcup_{n'=\tau_{\mathbf{t}'}}^{\ell-q}\{0,1,\cdots,N\}^{n'-\tau_{\mathbf{t}'}}\times\mathcal{W}_{\mathbf{t}'}^{\tau_{\mathbf{t}'}}\times\{0,1,\cdots,N\}^{\ell-q-n'}=\{0,1,\cdots,N\}^{\ell-q}$.

我们得出，$\mathbf{t}$ 是可容许平移向量，当且仅当 $\mathbf{t}'=\beta^q\mathbf{t}$ 是可容许平移向量。

□

定理 1.1 的证明。由引理 4.2 可知，只需证明对于 $m\in\mathbb{Z}_+$，存在无穷多个可容许平移向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$，使得 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$。由引理 4.3 可知，若 $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{m+1}$ 是一个可容许平移向量，则对于所有 $k\geq1$，$\beta^{-k}\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{m+1}$ 也是一个可容许平移向量。因此，我们只需证明对于 $m\in\mathbb{Z}_+$，存在一个可容许平移向量 $\mathbf{t}=(t_0,t_1,\cdots,t_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$，使得 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$。

对于 $m=1$，取 $\mathbf{t}=(0,\frac{1-\beta}{N\beta})\in T^2$，于是有 $\Gamma_{\mathbf{t}}=\Gamma\cup(\Gamma+\frac{1-\beta}{N\beta})$。容易计算得 $\tau_{\mathbf{t}}=1$ 且 $\Omega^{\tau_{\mathbf{t}}}{}_{\mathbf{t}}=\{0,1,\cdots,N-1\}$。于是我们有

$$\bigcup_{i\in\Omega_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}}}\phi_i(\Gamma_{\mathbf{t}})=\bigcup_{i\in\Omega_{\mathbf{t}}^{\tau_{\mathbf{t}}}}\Big(\beta\Gamma+i\frac{1-\beta}{N}\Big)\cup\Big(\beta\Gamma+(i+1)\frac{1-\beta}{N}\Big)=\bigcup_{i=0}^{N}\phi_i(\Gamma)=\Gamma.$$

由引理 4.1，$\mathbf{t}\in T^2$ 是一个可容许平移向量。

对于 $m\geq2$，存在 $\ell\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $2^\ell\leq m<2^{\ell+1}$。注意到 $2^\ell+1\leq m+1\leq2^{\ell+1}$。我们可以找到一个子集 $S\subset\{0,1\}^{\ell+1}$，满足 $\#S=m+1$，使得 $0^{\ell+1}$、$1^{\ell+1}\in S$，且对于任意

$i_1 i_2 \cdots i_{\ell+1} \in \{0,1\}^{\ell+1}$，我们有 $i_1 i_2 \cdots i_{\ell+1} \in S$或 $(1-i_1)\ (1-i_2)\ \cdots (1-i_{\ell+1}) \in S$。令 $\mathsf{t} = (t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_m)$，其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$取值为

$$\left\{ \frac{1-\beta}{N} \sum_{k=1}^{\ell+1} i_k \beta^{-k} : i_1 i_2 \cdots i_{\ell+1} \in S \right\}.$$

显然，我们有 $\mathsf{t} \in T^{m+1}$。注意到 $1^{\ell+1} \in S$。对于所有$1 \le k \le \ell+1$，我们有 $\tau_{\mathbf{t}} = \ell+1$ 和 $s_k = 1$。由此可得 $\Omega_{\mathbf{t}}^{\ell+1} = \{0,1,\cdots,N-1\}^{\ell+1}$ 以及 $\hat{}\Omega_{\mathbf{t}}^{\ell+1} = \{1,2,\cdots,N\}^{\ell+1}$。因此，我们有

$$\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^{\ell+1} = \big\{ (j_1 + i_{\ell+1}) \cdots (j_\ell + i_2)(j_{\ell+1} + i_1) : j_1 j_2 \cdots j_{\ell+1} \in \Omega_{\mathbf{t}}^{\ell+1}, i_1 i_2 \cdots i_{\ell+1} \in S \big\},$$

and

$$\hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}^{\ell+1} = \big\{ (j_1 - i_{\ell+1}) \cdots (j_\ell - i_2)(j_{\ell+1} - i_1) : j_1 j_2 \cdots j_{\ell+1} \in \hat{\Omega}_{\mathbf{t}}^{\ell+1}, i_1 i_2 \cdots i_{\ell+1} \in S \big\}.$$

取 $r_1 r_2 \cdots r_{\ell+1} \in \{0,1,\cdots,N\}^{\ell+1}$。那么存在 $j_1 j_2 \cdots j_{\ell+1} \in \{0,1,\cdots,N-1\}^{\ell+1}$和 $i_1 i_2 \cdots i_{\ell+1} \in \{0,1\}^{\ell+1}$ 使得

$$r_1 r_2 \cdots r_{\ell+1} = (j_1 + i_{\ell+1}) \cdots (j_\ell + i_2)(j_{\ell+1} + i_1).$$

若 $i_1 i_2 \cdots i_{\ell+1} \in S$，则有 $r_1 r_2 \cdots r_{\ell+1} \in \mathcal{A}_{\mathbf{t}}^{\ell+1}$；若 $(1-i_1)(1-i_2)\cdots(1-i_{\ell+1}) \in S$，则对某个 $i_1' i_2' \cdots i_{\ell+1}' \in S$，有 $i_1 i_2 \cdots i_{\ell+1} = (1-i_1')(1-i_2')\cdots(1-i_{\ell+1}')$，并且我们有

$$r_1 r_2 \cdots r_{\ell+1} = (j_1 + 1 - i_{\ell+1}') \cdots (j_\ell + 1 - i_2')(j_{\ell+1} + 1 - i_1') \in \hat{\mathcal{A}}_{\mathbf{t}}^{\ell+1}.$$

因此我们得出 $\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\ell+1} = \mathcal{A}_{\mathbf{t}}^{\ell+1} \cup \hat{}\mathcal{A}_{\mathbf{t}}^{\ell+1} = \{0,1,\cdots,N\}^{\ell+1}$。这意味着 $G_{\mathbf{t}}$ 是一个空图，其中没有环。根据命题 1.3，$\mathsf{t} \in \mathbb{R}^{m+1}$ 是一个可容许平移向量。证明完毕。 □

最后我们证明推论 1.6。

推论 1.6 的证明。设 $\mathsf{t} = (t_0, t_1)$，其中 $0 = t_0 < t_1$。注意，$\hat{}\mathsf{t} = \mathsf{t}$。根据定理 1.5，$\Gamma_{\mathbf{t}} = \Gamma \cup (\Gamma + t_1)$ 是自相似集，当且仅当 t 是一个可容许平移向量。我们假设 $t_1 \in T$ 并写作

$$t_1 = \frac{1-\beta}{N} \sum_{k=1}^{\tau} s_k \beta^{-k} \text{ with } s_k \in \{0,1,\cdots,N\}$$

其中 $\tau \in \mathbb{Z}_+$，且 $s_\tau \neq 0$。经计算可得 $\tau_{\mathbf{t}} = \tau$，并且

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau} = &\big\{ i_1 i_2 \cdots i_\tau \in \{0,1,\cdots,N\}^\tau : i_{\tau+1-k} \le N - s_k \text{ for } 1 \le k \le \tau \big\} \\ &\cup \big\{ i_1 i_2 \cdots i_\tau \in \{0,1,\cdots,N\}^\tau : i_{\tau+1-k} \ge s_k \text{ for } 1 \le k \le \tau \big\}. \end{aligned}$$

关于 t 是否为可容许平移向量的讨论分为三种情况。

情况 I： $\tau = 1$。于是我们有 $\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau} = \{0, 1, \cdots, N - s_1\} \cup \{s_1, s_1 + 1, \cdots, N\}$。在这种情况下，$G_{\mathbf{t}}$ 没有环当且仅当 $\mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau} = \{0, 1, \cdots, N\}$。因此，根据命题 1.3，t 是可容许平移向量当且仅当 $s_1 \in \left\{1, \cdots, \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor\right\}$。

情形 II： $\tau \geq 2$，且对所有 $1 \leq k \leq \tau - 1$， $s_k = 0$。注意到 $\beta^{\tau-1} t_1 = \frac{1-\beta}{N} s_\tau \beta^{-1} \in T$。由引理 4.3，t 是可容许平移向量当且仅当 $\beta^{\tau-1}$t 是。由情形 I 可知，t 是可容许平移向量当且仅当 $s_\tau \in \left\{1, \cdots, \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor\right\}$。

情形 III： $\tau \geq 2$，且存在 $1 \leq k \leq \tau - 1$ 使得 $s_k \neq 0$。令 $q = \min\{1 \leq k \leq \tau - 1 : s_k \neq 0\}$。注意到

$$\beta^{q-1} t_1 = \frac{1-\beta}{N} \sum_{k=q}^{\tau} s_k \beta^{q-k-1} \in T.$$

由引理 4.3，t 是可容许平移向量当且仅当 β^{q-1}t 是。因此我们可以假设 $s_1 \neq 0$。

对于 $i_1 i_2 \cdots i_\tau \in \mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau}$，我们有 $i_1 \leq N - s_\tau$、 $i_\tau \leq N - s_1$ 或 $i_1 \geq s_\tau$、 $i_\tau \geq s_1$。由此可得，要么 i_1、 $i_\tau \leq N-1$，要么 i_1、 $i_\tau \geq 1$。因此，若 $(i_1, i_\tau) = (0, N)$，或 $(i_1, i_\tau) = (N, 0)$，则有 $i_1 i_2 \cdots i_\tau \notin \mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau}$。注意， $V_{\mathbf{t}} = \{0, 1, \cdots, N\}^\tau \setminus \mathcal{W}_{\mathbf{t}}^{\tau}$位于有向图$G_{\mathbf{t}} = (V_{\mathbf{t}}, E_{\mathbf{t}})$中。下面的环

$$0^{\tau-1}N \to 0^{\tau-2}N^2 \to \cdots \to 0N^{\tau-1} \to N^{\tau-1}0 \to N^{\tau-2}0^2 \to \cdots \to N0^{\tau-1} \to 0^{\tau-1}N$$

属于 $G_{\mathbf{t}}$。根据命题 1.3，t 不是可容许平移向量。

因此，我们得出结论： $\Gamma \cup (\Gamma + t)$与 $t > 0$ 构成自相似集，当且仅当

$$t = \frac{j(1-\beta)}{N} \beta^{-k},$$

其中 $j \in \left\{1, 2, \cdots, \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor\right\}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$。

□

致谢

第一作者获得了国家自然科学基金委员会项目（编号：11971079）的资助。第二作者获得了国家自然科学基金委员会项目（编号：12071148）和上海市科学技术委员会（STCSM）项目（编号：18dz2271000）的资助。

参考文献

[1] T. H. Cormen、C. E. Leiserson、R. L. Rivest、C. Stein，《算法导论》第三版。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，2009。

[2] G.-T. Deng、X.-G. He 和 Z.-X. Wen. 三进制康托尔集交集上的自相似结构. 《数学分析及其应用杂志》, 337(1):617–631, 2008.

[3] G.-T. Deng 和 C. Liu. 康托集的并的自相似性. J. Math., 31(5):847– 852, 2011.
[4] K. Falconer. 分形几何：数学基础与应用. John Wiley & Sons Ltd., 奇切斯特, 1990.[5] D.-J. Feng 和 Y. Wang. 关于康托集生成迭代函数系统的结构. Adv. Math., 222(6):1964–1981, 2009.[6] J. E. Hutchinson. 分形与自相似性. Indiana Univ. Math. J., 30(5):713–747, 1981.[7] D. Kong、W. Li 和 M. Dekking. 齐次康托集的交集与 β-展开. Nonlinearity, 23(11):2815–2834, 2010.[8] R. L. Kraft. 中间-α 康托集的单点交集. Ergodic Theory Dynam. Systems, 14(3):537–549, 1994.[9] W. Li 和 D. Xiao. 中间-α 康托集平移的交集. 载于《分形及其拓展》（瓦莱塔，1998），第 137–148 页. World Sci. Publ., 里弗埃奇, 新泽西州, 1998.[10] W. Li、Y. Yao 和 Y. Zhang. 齐次对称康托集交集上的自相似结构. Math. Nachr., 284(2-3):298–316, 2011.