arXiv:2302.02063v1 [math.AP] 4 Feb 2023

半线性三阶演化方程的临界指数与尖锐寿命估计

Wenhui Chen*[1]

[1]广州大学数学与信息科学学院，中国广州 510006

摘要

我们研究了带有分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\sigma}$ 和幂次非线性项 $|u|^p$ 的半线性三阶（时间）演化方程，该方程由 Bezerra-Carvalho-Santos [2] 最近提出。本文得到了新的临界指数 $p = p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma) := 1 + \frac{6\sigma}{\max\{3n-4\sigma, 0\}}$ 对应于 $n \leqslant \frac{10}{3}\sigma$。具体而言，我们证明了在~~超临界情形~~ $p > p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma)$ 下小初值 Sobolev 解的全局（时间）存在性；而当 $1 < p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma)$ 时，即使初值很小，弱解也会在有限时间内爆破。此外，为了更准确地描述爆破时间，我们在亚临界情形和临界情形下推导出了新的、尖锐的寿命上界和下界估计。

关键词：三阶演化方程，分数阶拉普拉斯算子，临界指数，小数据解的整体存在性，解的爆破，寿命估计。

2020 年 AMS 分类35L76, 35L30, 35B33, 35A01, 35B44

1 引言

本文考虑如下三阶（时间）演化方程的柯西问题（该方程最近由 Bezerra-Carvalho-Santos [2] 提出）：

$$\begin{cases} u_{ttt} + \mathscr{A}u + \eta\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}u_{tt} + \eta\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}u_t = f(u), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(0,x) = \epsilon u_0(x),\ u_t(0,x) = \epsilon u_1(x),\ u_{tt}(0,x) = \epsilon u_2(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

其中常数 η 为正常数，幂次非线性项为 $f(u) := |u|^p$ 带有 $p > 1$，其中算子 $\mathscr{A}^{\alpha}$ 带有分数阶拉普拉斯算子 $\mathscr{A} := (-\Delta)^{\sigma}$ 带有 $\sigma \in (0, \infty)$，其定义如下

$$\mathscr{A}^{\alpha}u = (-\Delta)^{\sigma\alpha}u := \mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(|\xi|^{2\sigma\alpha}\,\mathscr{F}_{x\to\xi}(u)(t,\xi)\Big) \quad \text{with} \quad \alpha \in [0,1].$$

在上述模型 (1) 中，$\epsilon > 0$ 是描述初始数据大小的正参数。请注意，除非另有说明，本文将始终采用设定 $\mathscr{A} = (-\Delta)^{\sigma}$ 和 $f(u) = |u|^p$。我们的首要目的是确定带有分数阶拉普拉斯算子 $\mathscr{A} = (-\Delta)^{\sigma}$ 且具有 $\sigma \in (0, \infty)$ 的非线性三阶（时间）演化方程 (1) 的临界指数。这里，临界指数是指关于指数 p 的阈值条件：它决定小初值下是否存在全局（时间）Sobolev 解，以及局部（时间）弱解是否发生爆破。具体而言，在对初始数据施加额外的 L^1

*Wenhui Chen (wenhui.chen.math@gmail.com)

可积性假设后，对于具有 $\eta \in (1, \infty)$ 的非线性柯西问题 (1)，所得的新临界指数为

$$p = p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma) := 1 + \frac{6\sigma}{(3n - 4\sigma)_+} \quad \text{for} \quad 1 \leqslant n \leqslant \frac{10}{3}\sigma. \tag{2}$$

本工作的另一目的，是为非线性柯西问题 (1) 中满足 $\eta \in (1, \infty)$ 的局部（时间）解推导尖锐寿命估计，其中解的寿命 T_ϵ 定义为

$$\begin{aligned} T_\epsilon := \sup \Big\{ & T > 0 : \text{存在唯一的局部（时间）解 } u \text{，使其满足非线性} \\ & \text{Cauchy problem (1) on } [0, T) \text{ with a fixed parameter } \epsilon > 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

我们将严格证明这些新寿命估计的尖锐性

$$T_\epsilon \begin{cases} \simeq C\epsilon^{-\frac{2\sigma}{6\sigma p' - (3n+2\sigma)}} & \text{if} \quad p < p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma), \\ \simeq \exp(C\epsilon^{-(p-1)}) & \text{if} \quad p = p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma), \\ = \infty & \text{if} \quad p > p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma), \end{cases}$$

其中 C 是与 ϵ 无关的正常数。在最后一个幂次中，我们用 p' 表示 $p > 1$ 的 Hölder 共轭指数，使得 $p' = \frac{p}{p-1}$。值得一提的是，当 $\eta \in (0, 1)$ 时，具有 Sobolev 数据的对应线性化柯西问题局部（时间）不适定；这一点将在我们的手稿中证明。

现在我们回顾一下与模型 (1) 相关的一些背景。首先，[13, 1] 的作者研究了三阶（时间）线性演化方程 (1) 在 $\eta = 0$ 和 $f(u) \equiv 0$ 条件下的近似，其初始数据属于某些可分希尔伯特空间。文献 [2] 刻画了与这些算子相关的分数阶幂阶空间的部分尺度。随后，近期论文 [2] 通过分析其预解算子的特征值，找到了线性化模型 (1) 在 $f(u) \equiv 0$ 条件下稳定性的阈值 $\eta = 1$。此外，[2] 的作者给出了边值问题 (1) 在 $\sigma = 1$、$\eta \in (1, \infty)$ 条件下的局部（时间）可解性，并考虑了满足增长条件 $|f'(s)| \lesssim 1 + |s|^{p-1}$ 且当 $n \geqslant 3$ 时具有 $1 < p < \frac{3n+4}{3n-8}$ 的连续可微非线性项。然而，据作者所知，由于高阶时间导数和非局部算子 A，非线性模型 (1) 的全局（时间）存在性或解的爆破仍不清楚。

更重要的是，在含幂次非线性 $f(u) = |u|^p$ 的半线性演化方程中，临界指数和尖锐寿命估计是前沿研究课题，例如，著名的藤田指数 $p_{\mathrm{Fuj}}(n) := 1 + \frac{2}{n}$ 对于反应扩散方程 [14, 11, 12, 15]，经典阻尼波动方程 [26, 32, 34, 18, 25, 10] 以及一些具有有效阻尼的波动方程 [33, 6, 4, 27]，相关研究可参见其中的参考文献。这些研究促使我们研究带有 $f(u) = |u|^p$ 的半线性柯西问题 (1) 的临界指数和尖锐寿命估计。注意，式 (2) 中提出的临界指数 $p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma)$ 并非藤田指数 $p_{\mathrm{Fuj}}(n)$ 的推广。最后，我们也请感兴趣的读者参阅另一类重要的三阶（时间）偏微分方程，即所谓的 Jordan-Moore-Gibson-Thompson 方程 [23, 29, 3, 24, 31]，该方程近期用于研究热黏性流动中的非线性声学模型。

为探究半线性柯西问题 (1) 的临界指数，我们首先在第3节运用傅里叶分析，研究线性化柯西问题

(14) 的解的一些稳定性、尖锐估计和渐近剖面，并陈述新的阈值 $\eta = 1$ 和 $\eta = 3$ （见图1）。接着，在第4节中，通过构造合适的时间加权索伯列夫空间，我们证明当 $p > p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 时小数据解的全局（时间）存在性。另一方面，当 $1 < p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 时，在满足一项关于初始数据的条件下，每个非平凡弱解都会在有限时间内爆破；这一点将在第5节中证明。由此可推得临界指数 (2)。

为推导半线性柯西问题 (1) 的尖锐寿命估计，我们将讨论分为几种情形。通过分别沿用第 4 节和第 5 节中的证明，可以得到 $1 < p < p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 时的上界估计，以及 $1 < p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 时的尖锐下界估计。为完成临界情形 $p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 下的尖锐上界估计，受半线性经典阻尼波相关结果 [19, 10] 的启发，我们针对分数阶拉普拉斯算子 $\mathrm{A}^{\alpha} = (-\Delta)^{\alpha\sigma}$，引入经过适当缩放的测试函数 (56)。第 6 节中的这些结果立即得出寿命估计的尖锐性。

记号：

首先， c 和 C 表示一些正常数，这些常数可能在不同推导步骤中发生变化。 B_R 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心、半径为 R 的球。若存在正常数 C 使得 $f \leqslant Cg$，则记作 $f \lesssim g$ 。此外， $f \simeq g$ 表示 $f \lesssim g$ 和 $g \lesssim f$ 同时成立。

日式括号记作 $\mathrm{h}x\mathrm{i} := \sqrt{1+|x|^2}$. 此外，我们记 $(x)_+ := \max\{x,0\}$, 且 $^1{}_{(x)_+} := \infty$ if $x \leqslant 0$. 我们将 $[x]$ 取为 $x \in \mathbb{R}_+$的整数部分。

我们在傅里叶空间 $(0 < \varepsilon_0 \ll 1)$ 中定义两个区域:

$$\mathscr{Z}_{\mathrm{int}}(\varepsilon_0) := \{|\xi| \leqslant \varepsilon_0\} \quad \text{and} \quad \mathscr{Z}_{\mathrm{ext}}(\varepsilon_0) := \{|\xi| \geqslant \varepsilon_0\}.$$

相应的 C^{∞} 截断函数 $\chi_{\mathrm{int}}(\xi)$ 和 $\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)$ 的支集分别位于区域 $\mathrm{Z}_{\mathrm{int}}(\varepsilon_0)$ 和 $\mathrm{Z}_{\mathrm{ext}}(\varepsilon_0/2)$ 中，使得对所有 $\xi \in \mathbb{R}^n$，都有 $\chi_{\mathrm{ext}}(\xi) = 1 - \chi_{\mathrm{int}}(\xi)$。

给定函数 $g = g(x)$ 属于 Gevrey-索伯列夫空间 $G^{m,s}$ ，如果存在参数 $m \in \mathbb{R}_+$ 和 $s \in \mathbb{R}$ 使得（例如，参见 [30]）

$$\exp\left(c\langle\xi\rangle^{\frac{1}{m}}\right)\langle\xi\rangle^{s}\mathscr{F}(g) \in L^2$$

其中 c 为正常数。最后，我们引入具有额外 L^1 可积性的索伯列夫空间，作为如下的初始数据空间:

$$\mathscr{B}_{\sigma} := \left(H^{\frac{4}{3}\sigma} \cap L^1\right) \times \left(H^{\frac{2}{3}\sigma} \cap L^1\right) \times \left(L^2 \cap L^1\right) \tag{4}$$

一般而言，满足 $\sigma \in (0, \infty)$。

2 主要结果及其说明

2.1 临界指数的结果与讨论

下面陈述由（2）引入、具有初始数据空间（4）的超临界情形 $p > p_{\mathrm{crit}}(n, \sigma)$ 下的全局（时间）存在性结果。

定理 2.1。 设 $\frac{4}{3}\sigma < n \leqslant \frac{10}{3}\sigma$ 满足 $\sigma \in (0,\infty)$。考虑半线性柯西问题(1)，其中 $\eta \in (1,\infty)$ 且 $(u_0, u_1, u_2) \in \mathscr{B}_{\sigma}$。设指数 p 满足

$$p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma) < p \leqslant \frac{3n}{(3n-8\sigma)_+}. \tag{5}$$

那么，存在一个常数 $C>0$ 和一个参数 $0<\epsilon\ll 1$，使得对所有 $\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}\leqslant C$，都存在唯一确定的 *Sobolev* 解

$$u\in \mathscr{C}\Big([0,\infty),H^{\frac{4}{3}\sigma}\Big). \tag{6}$$

因此，解的寿命由 $T_\epsilon=\infty$ 给出。此外，该解满足以下估计：

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2}\lesssim \begin{cases}\epsilon\ln(\mathrm{e}+t)\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} & \text{if } n=\frac{8}{3}\sigma \text{ when } \eta\in(3,\infty),\\ \epsilon(1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} & \text{otherwise,}\end{cases}$$

and

$$\|u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}\lesssim \epsilon(1+t)^{-\frac{3n}{4\sigma}}\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}.$$

注 2.1。 定理 *2.1* 中的限制 $n\leqslant\frac{10}{3}\sigma$ 有助于确定指数 p 的下界，使得 $p>p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 符合我们研究临界指数的目的。注意，(5) 非空。实际上，对于参数 σ、n、 p 的其他取值范围，我们也可以证明全局（时间）存在性结果。例如，当

$$p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)<p\leqslant\frac{3n}{(3n-8\sigma)_+}\quad and\quad p\geqslant 2,$$

在 $\frac{4}{3}\sigma<n<4\sigma$ 的情况下，若 $\eta\in(1,3],$，其中 $p\geqslant 2$ 源自分数阶 *Gagliardo-Nirenberg* 不等式的应用（见第 *4.2* 小节），则全局（时间）*Sobolev* 解 *(6)* 唯一存在。关于 $4\sigma\leqslant n\leqslant\frac{16}{3}\sigma$ 的另一个例子将在注 *4.1* 中说明。不过，这超出了本文的讨论范围。

注 2.2. 经过冗长但直接的推导，在指数p 满足与(5)相同的条件时，全局（时间上）解(6) 的正则性可以通过以下方式得到改进：

$$u\in \mathscr{C}\Big([0,\infty),H^{\frac{4}{3}\sigma}\Big)\cap\mathscr{C}^1\Big([0,\infty),H^{\frac{2}{3}\sigma}\Big)\cap\mathscr{C}^2\Big([0,\infty),L^2\Big)$$

并对解的时间导数给出一些估计。进一步的解释将在稍后的注 *4.3* 中给出。

注 2.3. 定理 *2.1* 中的一些推导所得增长/衰减率与相应线性化柯西问题(14) 在命题 *3.2–3.4* 中 $\eta\in(1,\infty)$ 时的增长/衰减率一致，这验证了增长/衰减没有损失这一现象。注意，只有在定理 *2.1* 中 $\frac{8}{3}\sigma<n<\frac{10}{3}\sigma$ 时，解本身才呈多项式衰减。特别地，命题 *3.5* 严格证明了线性化问题(14) 的$(L^2\cap L^1)-L^2$ 型估计是尖锐的，因此我们推测定理 *2.1* 中的一些推导估计也是尖锐的。但是，当 $\eta\in(3,\infty)$时， $n=\frac{8}{3}\sigma$在技术上存在对数损失。

现在我们来讨论第三初始数据满足符号条件时，亚临界情形 $p<p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)$ 以及临界情形 $p=p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)$ 下的爆破结果。

定理 2.2. 考虑半线性柯西问题 (1)，其中 $\eta\in(1,\ \infty)$， $\sigma\in(0,\ \infty)$，以及 u_0、u_1、$u_2\in L^1$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}u_2(x)\mathrm{d}x>0. \tag{7}$$

设指数 p 满足 $1<p\leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$。那么，根据定义 (50)，半线性模型 (1) 的每个非平凡局部（时间意义下）弱解都会在有限时间内爆破。

注 2.4。 当.....时，爆破结果仍然成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\eta \mathscr{A}^{\frac{2}{3}} u_0(x) + \eta \mathscr{A}^{\frac{1}{3}} u_1(x) + u_2(x)\Big)\,\mathrm{d}x > 0$$

我们采用的不是单一符号条件 (7)，而是假设 $\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}u_0$、$\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}u_1, u_2 \in L^1$ 满足 $\mathscr{A} = (-\Delta)^{\sigma}$。也就是说，即使 (7) 不成立， $1 < p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 也提供了另一种获得爆破结果的符号条件。证明只需对 (51) 的左端稍作修改。

注 2.5. 回顾记号 (2)，定理 *2.2* 中的条件 $1 < p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 包含这样一个特殊情形：当 $n \leqslant \frac{4}{3}\sigma$ 且$\sigma \in (0,\infty)$时，对于任意 $p > 1$ ，每个非平凡弱解都会爆破。这正是定理 *2.1* 的全局（时间）存在性结果中施加一般限制 $n > \frac{4}{3}\sigma$ 的原因。

作为本小节的结尾，我们分析半线性三阶（时间）演化方程 (1) 的柯西问题所对应的新临界指数。根据定理 2.1 和定理 2.2，我们可以立即得出，当 $n \leqslant \frac{10}{3}\sigma$ 且 $\eta \in (1,\infty)$ 时，由 (2) 给出的临界指数为 $p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$。高维情形的临界指数，即 $n > \frac{10}{3}\sigma$，可以通过使用更一般的 $L^r - L^q$ 估计 $1 \leqslant r \leqslant q \leqslant \infty$ 得到，但这超出了本文的讨论范围。

例 2.1。 考虑半线性问题(1)，其中 $\sigma = 3$ 和 $\eta \in (1,\infty)$，即，

$$\begin{cases} u_{ttt} - \Delta^3 u - \eta\Delta u_{tt} + \eta\Delta^2 u_t = |u|^p, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(0,x) = \epsilon u_0(x),\ u_t(0,x) = \epsilon u_1(x),\ u_{tt}(0,x) = \epsilon u_2(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8}$$

其中，该方程可理解为热算子作用于半线性结构阻尼板模型 *[28, 4]*，如下所示：

$$(\partial_t - \Delta)\Big(u_{tt} + \Delta^2 u - (\eta-1)\Delta u_t\Big) = |u|^p.$$

结合定理 *2.1* 和定理 *2.2*，我们假设满足 $0 < \epsilon \ll 1$ 的小初值为

$$(u_0,u_1,u_2) \in (H^4 \cap L^1) \times (H^2 \cap L^1) \times (L^2 \cap L^1) \quad and \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_2(x)\mathrm{d}x > 0. \tag{9}$$

那么，(8) 的临界指数为

$$p = p_{\mathrm{crit}}(n,3) = 1 + \frac{6}{(n-4)_+}$$

当 $n = 1$，.....，10 对所有 $\eta \in (1,\infty)$均成立时。

2.2 尖锐寿命估计的结果与讨论

正如我们在定理 2.2 中所说明的，在关键条件 $1 < p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)$ 下，每个非平凡的局部（时间）解都会在有限时间内爆破，这促使我们进一步详细研究式 (3) 中定义的寿命 T_ϵ。

在研究寿命 T_ϵ 的下界估计之前，我们先将半线性柯西问题 (1) 的温和解定义为满足以下算子等式的解，其中 $T > 0$ for $u \in \mathsf{C}([0,T], H^{\frac{4}{3}\sigma})$：

$$u(t,x) = \epsilon \sum_{j=0,1,2} E_j(t,x) *_{(x)} u_j(x) + \int_0^t E_2(t-\tau,x) *_{(x)} |u(\tau,x)|^p \mathrm{d}\tau \tag{10}$$

其中 $t \in [0,T]$。在上述方程中， $E_j(t,x)$（ $j=0,1,2$）是相应线性化柯西问题 (14) 的基本解，其初始数据为 $v_j(x) = \delta_0$ 和 $v_k(x) = 0$ 携带$k \neq j$。这里， δ_0 是位于 $x=0$ 处的狄拉克分布。记 $T_{\epsilon,\mathrm{m}}$ 为温和解 $u = u(t,x)$ 的寿命。接下来的定理给出了 $T_{\epsilon,\mathrm{m}}$ 的下界估计。

定理 *2.3*。设 $\frac{4}{3}\sigma < n \leqslant \frac{10}{3}\sigma$ *if* $\eta \in (1,3) \cup (3,\infty)$，且 $n \leqslant \frac{10}{3}\sigma$ *if* $\eta = 3$ *with* $\sigma \in (0,\infty)$。考虑半线性柯西问题 *(1)*，其中 $\eta \in (1,\infty)$ 且 $(u_0,u_1,u_2) \in B_\sigma$。设指数 p 满足 $2 \leqslant p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$。那么，存在一个常数 ϵ_1，使得对于任意 $\epsilon \in (0,\epsilon_1]$，由定义 *(10)* 给出的温和解的寿命 $T_{\epsilon,\mathrm{m}}$ 满足

$$T_{\epsilon,\mathrm{m}} \geqslant \begin{cases} C\epsilon^{-\frac{2\sigma}{6\sigma p' - (3n+2\sigma)}} & \text{if } p < p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma), \\ \exp(C\epsilon^{-(p-1)}) & \text{if } p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma), \end{cases} \tag{11}$$

其中 C 是一个正的常数，与 ϵ 无关，并取决于 p、n、σ、η，以及 $\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}$.

注 2.6. 条件 $n \leqslant \frac{10}{3}\sigma$ 对非空集合 $2 \leqslant p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 有所贡献，因为定理 *2.1* 中提出的寿命 $T_\epsilon = \infty$ 当 $p > p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 时成立。这里，下界 $p \geqslant 2$ 同样来自分数阶 *Gagliardo-Nirenberg* 不等式的应用，而采用具有 $1 \leqslant r \leqslant q \leqslant \infty$ 的更一般的 $L^r - L^q$ 估计可以改进该下界。

为确保所得寿命估计 (11) 的尖锐性，我们必须从上方对其进行估计。因此，在下一个定理中，我们转而给出弱解寿命 $T_{\epsilon,\mathrm{w}}$ 的上界估计。

定理 2.4. 考虑半线性柯西问题 (1)，其中 $\eta \in (1,\infty)$，且初始数据满足符号条件 (7)。

- 在亚临界情形 $1 < p < p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$下，假设 $u_0,u_1,u_2 \in L^1$ 和 $\sigma \in (0,\infty)$，弱解的寿命$T_{\epsilon,\mathrm{w}}$ 满足

$$T_{\epsilon,\mathrm{w}} \leqslant C\epsilon^{-\frac{2\sigma}{6\sigma p' - (3n+2\sigma)}}. \tag{12}$$

- 在临界情形 $p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$下，假设 $u_0,u_1,u_2 \in \mathscr{C}_0^\infty$和 $\sigma \in 3\mathbb{N}$，弱解的寿命 $T_{\epsilon,\mathrm{w}}$ 满足

$$T_{\epsilon,\mathrm{w}} \leqslant \exp(C\epsilon^{-(p-1)}). \tag{13}$$

这里， C 是一个正 的常数，与 ϵ 无关，并且取决于 p,n,σ,η 以及 $\|u_2\|_{L^1}$.

注 2.7. 在临界情形下，技术性假设 $\sigma \in 3\mathbb{N}$ 源于对算子 $\mathscr{A}^{\frac{1}{3}} = (-\Delta)^{\frac{1}{3}\sigma}$的处理。一般参数 $\sigma \in (0,\infty)$ 下，当 $p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$时，尖锐上界估计 (13) 的问题仍未解决。

根据标准稠密性论证（例如，参见 $[20,$ 命题 3.1$]$），若 u 是半线性柯西问题 (1) 的温和解，则 u 也是该问题的弱解。因此，关系 $T_{\epsilon,\ \mathrm{m}} \leqslant T_\epsilon \leqslant T_{\epsilon,\ \mathrm{w}}$ 成立。下面总结下界估计 (11) 和上

界估计 (12)-(13)。我们可以断言，半线性柯西问题 (1) 中 $p \geqslant 2$ 条件下局部（时间上的）解 T_ϵ 的尖锐寿命估计为

$$T_\epsilon \simeq \begin{cases} C\epsilon^{-\frac{2\sigma}{6\sigma p' - (3n+2\sigma)}} & \text{if } \ p < p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma), \\ \exp\left(C\epsilon^{-\frac{6\sigma}{(3n-4\sigma)_+}}\right) & \text{if } \ p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma), \end{cases}$$

对于某些参数 n， σ，其中正常数 C 与 ϵ无关。

例2.2。 考虑半线性柯西问题 (8)。结合定理*2.3*和定理*2.4*，我们假设小初值满足 (9)，其中 $0 < \epsilon \ll 1$ 为正常数；此外，若 $p = p_{\mathrm{crit}}(n, 3) = 1 + \frac{6}{(n-4)_+}$，则初始数据具有 $\mathscr{C}_0^\infty$正则性且支集有界。于是，具有 $p \geqslant 2$ 的 (8) 的尖锐寿命估计为

$$T_\epsilon \simeq \begin{cases} C\epsilon^{-\frac{2}{6p' - (n+2)}} & \textit{if } \ p < 1 + \frac{6}{(n-4)_+}, \\ \exp\left(C\epsilon^{-\frac{6}{(n-4)_+}}\right) & \textit{if } \ p = 1 + \frac{6}{(n-4)_+}, \end{cases}$$

当 $n = 5$ 时，……，10；若 $\eta \in (1,\ 3) \cup (3,\ \infty)$，以及 $n = 1$，……，10 当 $\eta = 3$ 时。

3 线性化的三阶（时间）演化方程

为研究半线性柯西问题 (1) 并探讨参数 η 的某些影响，本节考虑相应的右端为零的线性化三阶（时间）演化方程，即，

$$\begin{cases} v_{ttt} + \mathscr{A}v + \eta\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}v_{tt} + \eta\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}v_t = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ v(0,x) = v_0(x),\ v_t(0,x) = v_1(x),\ v_{tt}(0,x) = v_2(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\mathscr{A} = (-\Delta)^\sigma$，满足 $\sigma \in (0,\ \infty)$ 和 $\eta \in (0,\ \infty)$。特别地，我们将引入两个阈值：$\eta = 1$ 用于 Sobolev 稳定性， $\eta = 3$ 用于解的各种渐近剖面。详情可参见后文的注3.1、注3.8以及图1。

3.1 Sobolev 解的稳定性分析

我们对线性化柯西问题 (14) 关于空间变量作部分傅里叶变换，得到

$$\begin{cases} \widehat{v}_{ttt} + |\xi|^{2\sigma}\widehat{v} + \eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}\widehat{v}_{tt} + \eta|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}\widehat{v}_t = 0, & \xi \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \widehat{v}(0,\xi) = \widehat{v}_0(\xi),\ \widehat{v}_t(0,\xi) = \widehat{v}_1(\xi),\ \widehat{v}_{tt}(0,\xi) = \widehat{v}_2(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{15}$$

其特征方程为

$$(\lambda + |\xi|^{\frac{2}{3}\sigma})\left(\lambda^2 + (\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}\lambda + |\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}\right) = 0$$

具有依赖于 $|\xi|$ 的根

$$\lambda_1 = -|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma} \ \text{ and } \ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(1 - \eta \pm \sqrt{\eta^2 - 2\eta - 3}\right)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}. \tag{16}$$

由此，我们可以证明在不同的 η 大小和初始数据正则性条件下，线性化柯西问题 (14) 的 Sobolev 解适定与否的结论。

命题 3.1. 考虑线性化柯西问题 (14)，其中 $\eta \in (0,\infty)$ 以及$\sigma \in (0,\infty)$。

(1) 假设初始数据具有 *Gevrey-Sobolev* 正则性 $v_j \in G^{\frac{3}{2\sigma},\, s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}$且满足 $j=0$、1、2，则存在唯一的 *Sobolev* 解

$$v \in \mathscr{C}\Big([0,\infty), H^{s+\frac{4}{3}\sigma}\Big) \cap \mathscr{C}^1\Big([0,\infty), H^{s+\frac{2}{3}\sigma}\Big) \cap \mathscr{C}^2\Big([0,\infty), H^{s}\Big) \tag{17}$$

对于任意 $s \in [0,\infty)$，柯西问题 (14) 在 $\eta \in (0、1)$ 条件下的解。然而，若假设初始数据具有任意 *Sobolev* 正则性，则柯西问题 (14) 在 $\eta \in (0、1)$ 条件下适定性不良。

(2) 假设初始数据具有 *Sobolev* 正则性 $v_j \in H^{s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}$ 且满足 $j=0$、1、2，则对于任意 $s \in [0,\infty)$，存在唯一的 *Sobolev* 解 (17)，它是柯西问题 (14) 在 $\eta = 1$ 条件下的解。

（*3*）假设初始数据 $v_j \in H^{s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}$ 具有 *Sobolev* 正则性，其中 $j=0$，1，2，则存在唯一的 *Gevrey-Sobolev* 解

$$v \in \mathscr{C}\Big([0,\infty), G^{\frac{3}{2\sigma},s+\frac{4}{3}\sigma}\Big) \cap \mathscr{C}^1\Big([0,\infty), G^{\frac{3}{2\sigma},s+\frac{2}{3}\sigma}\Big) \cap \mathscr{C}^2\Big([0,\infty), G^{\frac{3}{2\sigma},s}\Big)$$

对于柯西问题 (14)，其中 $\eta \in (1,\ \infty)$，对任意 $s \in [0,\infty)$，均存在该解。

证明。根据 η 的大小以及特征根 $\lambda_{2,\,3}$ 的取值，我们将讨论分为若干种情形。为开始证明，先推导在 η 取不同大小时解在傅里叶空间中的表示式。

当 $\eta \in (0,\ 3)$ 时解的表示式： 由于 $\eta^2 - 2\eta - 3 < 0$ 当 $\eta \in (0,\ 3)$ 时成立，由取 $\lambda_{2,\,3} = \mu_{\mathrm{R}} \pm i\mu_{\mathrm{I}}$，并赋予

$$\mu_{\mathrm{R}} := \frac{1}{2}(1-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma} \begin{cases} > 0 & \text{if } \ \eta \in (0,1), \\ = 0 & \text{if } \ \eta = 1, \\ < 0 & \text{if } \ \eta \in (1,3), \end{cases} \quad \text{and } \ \mu_{\mathrm{I}} := \frac{1}{2}\sqrt{3+2\eta-\eta^2}\,|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma},$$

初值问题（15）的解 $\widehat{v} = \widehat{v}(t,\ \xi)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \widehat{v} &= \frac{-(\mu_{\mathrm{I}}^2+\mu_{\mathrm{R}}^2)\widehat{v}_0 + 2\mu_{\mathrm{R}}\widehat{v}_1 - \widehat{v}_2}{2\mu_{\mathrm{R}}\lambda_1 - \mu_{\mathrm{I}}^2 - \mu_{\mathrm{R}}^2 - \lambda_1^2}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \frac{(2\mu_{\mathrm{R}}\lambda_1 - \lambda_1^2)\widehat{v}_0 - 2\mu_{\mathrm{R}}\widehat{v}_1 + \widehat{v}_2}{2\mu_{\mathrm{R}}\lambda_1 - \mu_{\mathrm{I}}^2 - \mu_{\mathrm{R}}^2 - \lambda_1^2}\cos(\mu_{\mathrm{I}}t)\,\mathrm{e}^{\mu_{\mathrm{R}}t} \\ &\quad + \frac{\lambda_1(\mu_{\mathrm{R}}\lambda_1 + \mu_{\mathrm{I}}^2 - \mu_{\mathrm{R}}^2)\widehat{v}_0 + (\mu_{\mathrm{R}}^2 - \mu_{\mathrm{I}}^2 - \lambda_1^2)\widehat{v}_1 - (\mu_{\mathrm{R}} - \lambda_1)\widehat{v}_2}{\mu_{\mathrm{I}}(2\mu_{\mathrm{R}}\lambda_1 - \mu_{\mathrm{I}}^2 - \mu_{\mathrm{R}}^2 - \lambda_1^2)}\sin(\mu_{\mathrm{I}}t)\,\mathrm{e}^{\mu_{\mathrm{R}}t} \\ &= -\frac{|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}\widehat{v}_0 + (\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}\widehat{v}_1 + \widehat{v}_2}{(\eta-3)|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}}\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t} \\ &\quad + \frac{(\eta-2)|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}\widehat{v}_0 + (\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}\widehat{v}_1 + \widehat{v}_2}{(\eta-3)|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}}\cos(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t} \\ &\quad + \frac{\eta|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}\widehat{v}_0 + (\eta+1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}\widehat{v}_1 + \widehat{v}_2}{2C_\eta|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}}\sin(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t} \end{aligned} \tag{18}$$

其中常数为 $C_\eta := \frac{1}{2}\sqrt{3+2\eta-\eta^2} > 0$，而 $\eta \in$ 属于 $(0,3)$。

当 $\eta \in (3,\ \infty)$时的解表示式： 由于特征根两两不同，

我们可以采用如下的一般表示式（它对任意 $\eta \neq 3$ 也成立）：

$$\widehat{v} = \widehat{K}_0\widehat{v}_0 + \widehat{K}_1\widehat{v}_1 + \widehat{K}_2\widehat{v}_2$$

傅里叶空间中的核满足 $k=1$，2，3，从而

$$\widehat{K}_0 := \sum_{j=1,2,3} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_j t}\prod\limits_{k\neq j}\lambda_k}{\prod\limits_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k)},\quad \widehat{K}_1 := -\sum_{j=1,2,3} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_j t}\sum\limits_{k\neq j}\lambda_k}{\prod\limits_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k)},\quad \widehat{K}_2 := \sum_{j=1,2,3} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_j t}}{\prod\limits_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k)}.$$

注意，(18) 是由与共轭根 $\lambda_{2,\ 3}$相关的最后几个核推导得出的。结合特征根，并记 D_η:
$= \frac{1}{2}\sqrt{\eta^2-2\eta-3} > 0$ 为 $\eta \in (3,\ \infty)$，其满足关系 $D_\eta + \frac{1}{2}(1-\eta) < 0$，则 $\eta \in (3,\ \infty)$ 在傅里叶空间中的显式解表示式为

$$\begin{aligned}
\widehat{v} = &\left[\frac{\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{3-\eta} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{2D_\eta}\left(\frac{2D_\eta-1+\eta}{3-\eta+2D_\eta}\mathrm{e}^{D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t} + \frac{2D_\eta+1-\eta}{3-\eta-2D_\eta}\mathrm{e}^{-D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)\right]\widehat{v}_0\\
&+\left[\frac{(\eta-1)\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{(3-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{2D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}}\left(\frac{2D_\eta+1+\eta}{3-\eta+2D_\eta}\mathrm{e}^{D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t} + \frac{2D_\eta-1-\eta}{3-\eta-2D_\eta}\mathrm{e}^{-D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)\right]\widehat{v}_1\\
&+\left[\frac{\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{(3-\eta)|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{D_\eta|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}}\left(\frac{1}{3-\eta+2D_\eta}\mathrm{e}^{D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t} - \frac{1}{3-\eta-2D_\eta}\mathrm{e}^{-D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)\right]\widehat{v}_2. \qquad (19)
\end{aligned}$$

当 $\eta=3$: 时的解表示式：最后，当 $\eta=3$ 时，相同的特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}$ 意味着

$$\widehat{v} = \left[\widehat{v}_0 + \left(|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}\widehat{v}_0 + \widehat{v}_1\right)t + \frac{1}{2}\left(|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}\widehat{v}_0 + 2|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}\widehat{v}_1 + \widehat{v}_2\right)t^2\right]\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}.$$

众所周知，柯西问题的适定性由大频率部分决定，因此我们可以应用前述解的表示式，得到傅里叶空间中的以下逐点估计：

$$\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)|\widehat{v}| \lesssim \begin{cases}
\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\,\mathrm{e}^{c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\widehat{v}_0| + \langle\xi\rangle^{-\frac{2}{3}\sigma}|\widehat{v}_1| + \langle\xi\rangle^{-\frac{4}{3}\sigma}|\widehat{v}_2|\right) & \text{if } \eta\in(0,1),\\
\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\left(|\widehat{v}_0| + \langle\xi\rangle^{-\frac{2}{3}\sigma}|\widehat{v}_1| + \langle\xi\rangle^{-\frac{4}{3}\sigma}|\widehat{v}_2|\right) & \text{if } \eta=1,\\
\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\,\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\widehat{v}_0| + \langle\xi\rangle^{-\frac{2}{3}\sigma}|\widehat{v}_1| + \langle\xi\rangle^{-\frac{4}{3}\sigma}|\widehat{v}_2|\right) & \text{if } \eta\in(1,3)\cup(3,\infty),\\
\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\,\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\widehat{v}_0| + t|\widehat{v}_1| + t^2|\widehat{v}_2|\right) & \text{if } \eta=3,
\end{cases} \qquad (20)$$

其中 $c>0$ 为某些正常数，这里我们使用了 $y\mathrm{e}^{-2y} \lesssim \mathrm{e}^{-y}$。下面我们将在几种情况下讨论适定性。

情形 1： $\eta \in (0,1)$。若假设初始数据具有任意 Sobolev 正则性，由于高频 $\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\exp(c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)$（其中 $c>0$）呈指数增长，Sobolev 解是不稳定的。这导致线性化柯西问题 (14) 不适定，这与[2, 定理 3.1]完全一致。尽管如此，若假设初始数据具有 Gevrey-Sobolev 正则性 $v_j \in G^{\frac{3}{2\sigma},\ s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}$，其中 $j=0,\ 1$，2，即 $\exp(c\langle\xi\rangle^{\frac{2}{3}\sigma})\langle\xi\rangle^{s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}\widehat{v}_j \in L^2$，则可以得到

$$\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\langle\xi\rangle^{s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}\partial_t^j\widehat{v} \in L^2 \quad \text{with} \quad j=0,1,2. \qquad (21)$$

下文中， L^2 空间涉及变量 ξ。因此，当 $\eta \in (0,\ 1)$ 时，可以直接证明具有Gevrey-Sobolev数据的适定性结果。

情形2： $\eta = 1$。取 $v_j \in H^{s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}$，即 $\mathrm{h}\xi\mathrm{i}^{s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}\widehat{v_j} \in L^2$，对于 $j = 0,\ 1,\ 2$，我们注意到 (21) 仍然成立，这意味着当 $\eta = 1$ 且给定 Sobolev数据时，柯西问题 (14) 是适定的。

情形3： $\eta \in (1,\ \infty)$。与情形2类似，只需假设 $v_j \in H^{s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}$ 且 $j = 0,\ 1,\ 2$，即可轻易得到 Sobolev 解的适定性。此外，借助指数传播子 $\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\exp(-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)$，我们可以推出

$$\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\,\mathrm{e}^{c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\langle\xi\rangle^{s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}\partial_t^j\widehat{v} \in L^2 \quad \text{with} \quad j = 0, 1, 2.$$

这带来了从 Sobolev数据到一般 Gevrey解的平滑效应，并且当 $\eta \in (1,\ \infty)$ 时，柯西问题 (14) 是适定的。

综上所述，我们的证明至此完全完成。 □

注3.1。取适当正则的*Sobolev*数据时， $\eta = 1$ 是线性化柯西问题(14)的*Sobolev*稳定性的重要阈值；换言之，当$\eta \in (0,1)$ 时模型不稳定，而当 $\eta \in [1,\infty)$时模型稳定。参见图*1*。这一现象最早由*{v14>*在半群框架下发现。

注3.2。让我们考察*Gevrey*数据的临界指标，这是近年来一个有趣的话题，例如二维*Prandtl*方程的 G^2 初始数据 *[16, 9]*。根据命题 *3.1*的第一条结论，我们还可以证明，即使当 $\eta \in (0,1)$时，采用适当的*Gevrey-Sobolev*数据 $v_j \in G^{\rho,s+\frac{2(2-j)}{3}\sigma}$ 且满足 $j = 0, 1, 2$ 携带 $0 < \rho \leqslant \frac{3}{2\sigma}$，由$(20)$ 以及以下事实可知

$$\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\exp\left(c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t - c|\xi|^{\frac{1}{\rho}}t\right) \lesssim 1 \quad \textit{only when} \quad \rho \leqslant \frac{3}{2\sigma}.$$

也就是说，当 *Gevrey* 指标为 $\rho > \frac{3}{2\sigma}$ 时，带有 $\eta \in (0,1)$ 和 *Gevrey-Sobolev*数据的线性化柯西问题(14) 的 *Sobolev* 解会再次变得不稳定，这意味着 $\rho = \frac{3}{2\sigma}$ 是 *Gevrey-Sobolev*数据的临界指标。

注记3.3。当 $\eta \in (1,\infty)$ 时，线性化柯西问题(14)从 *Sobolev*数据到 *Gevrey-Sobolev* 解会出现*Gevrey*平滑效应，其中 $\sigma = \frac{3}{2}$ 是区分不同平滑效应程度的阈值，即，当$\sigma \in (0,\ 32)$时，存在*Gevrey*解；当 $\sigma = \frac{3}{2}$时，存在解析解；当 $\sigma \in (32,\infty)$时，存在超解析解。

3.2 Some 当 $\eta \in (1,\infty$ 时解的尖锐估计与渐近剖面)

在本小节中，我们推导线性化柯西问题 (14) 在 L^2 数据或 $L^2 \cap L^1$ 数据下解的一些尖锐 L^2 估计，这将有助于定理 2.1 的证明。在此之前，我们先陈述一些预备知识。

引理 3.1。设 $n > -2s$ 和 $\sigma \in (0,\infty)$。以下估计成立：

$$\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^s\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{3(2s+n)}{4\sigma}}. \tag{22}$$

证明。 应用极坐标并作变量代换 $\omega = r^{\frac{2}{3}\sigma}t$，可直接得到

$$\begin{aligned}\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^{s}\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}^2 &\lesssim \int_0^{\varepsilon_0} r^{2s+n-1}\mathrm{e}^{-2cr^{\frac{2}{3}\sigma}t}\mathrm{d}r\\ &\lesssim t^{-\frac{3(2s+n)}{2\sigma}}\int_0^{\infty}\omega^{\frac{3(2s+n-1)}{2\sigma}}\mathrm{e}^{-2c\omega}\mathrm{d}\omega^{\frac{3}{2\sigma}} \lesssim t^{-\frac{3(2s+n)}{2\sigma}}\end{aligned}$$

当 $t\in[1,\infty)$ 时，由于 $2s+n-1>-1$，且 $t\in[0,1]$ 有界估计成立。于是，证明完成。

□

引理 3.2. 设 $n>\frac{4}{3}\sigma$ 和 $\sigma\in(0,\infty)$。有以下估计：

$$\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\left(\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}-\cos(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)\right\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}, \tag{23}$$

$$\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\sin(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}, \tag{24}$$

其中 $\eta\in(1,3)$ 且 $C_\eta>0$。

证明。 根据 $1-\cos y=2\sin^2\frac{y}{2}$，注意到

$$\begin{aligned}&|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\left(\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}-\cos(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)\\ &=|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\eta-3)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}-1\right)+2|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\sin^2\left(\frac{C_\eta}{2}|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\\ &=\frac{(\eta-3)t}{2|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(3-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t\tau}\mathrm{d}\tau+2t^2\left|\frac{\sin(\frac{C_\eta}{2}|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)}{|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right|^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}.\end{aligned}$$

由于 $|\sin y|\lesssim|y|$，可得

$$\text{LHS of (23)}\lesssim t\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^{-\frac{2}{3}\sigma}\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}+t^2\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}$$

其中 $n>\frac{4}{3}\sigma$，这里我们在 $s=-\frac{2}{3}\sigma$ 和 $s=0$ 的条件下应用了引理 3.1。类似地，

$$\text{LHS of (24)}\lesssim t\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^{-\frac{2}{3}\sigma}\frac{\sin(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)}{|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}},$$

再次使用 $n>\frac{4}{3}\sigma$。证明结束。 □

引理 3.3. 在分别满足引理 *3.1* 和引理 *3.2* 中相应条件时，上述所有大时间估计对于 $t\gg1$ 都是尖锐的。

证明。 上界估计已在引理 3.1 和引理 3.2 中推导得出。因此，当 $t\gg1$ 时，我们只需得到与上界具有相同时间依赖系数的下界估计。再次使用变量 $\omega=r^{\frac{2}{3}\sigma}t$，我们估计

$$[\text{LHS of (22)}]^2\gtrsim t^{-\frac{3(2s+n)}{2\sigma}}\int_0^{\varepsilon_0^{\frac{2}{3}\sigma}t}\omega^{\frac{3(2s+n)}{2\sigma}-1}\mathrm{e}^{-2c\omega}\mathrm{d}\omega\gtrsim t^{-\frac{3(2s+n)}{2\sigma}}$$

对于大时间 $t\gg 1$，使得 $\varepsilon_0^{\frac{2}{3}\sigma}t\geqslant 1$，其中我们将定义域 $(0,\ \varepsilon_0^{\frac{2}{3}\sigma}t)$ 缩小为 $(0,\ 1)$，并利用了引理 3.1 的假设中的 $2s+n>0$。类似地，我们知道

$$\begin{aligned}[\text{LHS of (23)}]^2&\gtrsim\int_0^{\varepsilon_0} r^{-\frac{8}{3}\sigma+n-1}\left(\mathrm{e}^{-r^{\frac{2}{3}\sigma}t}-\cos(C_\eta r^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)r^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)^2\mathrm{d}r\\&\gtrsim t^{-\frac{3n-8\sigma}{2\sigma}}\int_0^{\varepsilon_0^{\frac{2}{3}\sigma}t}\omega^{\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}-1}\omega^{-2}\left(\mathrm{e}^{-\omega}-\cos(C_\eta\,\omega)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)\omega}\right)^2\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\omega\downarrow 0}\omega^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\omega}-\cos(C_\eta\,\omega)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)\omega}\right)=\frac{1}{2}(\eta-3)<0,$$

存在 $\varepsilon_0^*>0$，使得对于 $t\gg 1$，有 $0<\omega<\varepsilon_0^*<\varepsilon_0^{\frac{2}{3}\sigma}t$

$$[\text{LHS of (23)}]^2\gtrsim t^{-\frac{3n-8\sigma}{2\sigma}}\int_0^{\varepsilon_0^*}\omega^{\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}-1}\mathrm{d}\omega\gtrsim t^{-\frac{3n-8\sigma}{2\sigma}},$$

其中我们在引理 3.2 中采用了假设 $3n-4\sigma>0$。最后，同样的思路可得

$$[\text{LHS of (24)}]^2\gtrsim t^{-\frac{3n-8\sigma}{2\sigma}}\int_0^{\varepsilon_0^{\frac{2}{3}\sigma}t}\omega^{\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}-1}\left|\frac{\sin(C_\eta\,\omega)}{C_\eta\,\omega}\right|^2\mathrm{e}^{-2c\omega}\mathrm{d}\omega\gtrsim t^{-\frac{3n-8\sigma}{2\sigma}}$$

当 $t\gg 1$ 且 $3n-4\sigma>0$ 时。因此，证明完毕。 □

由于不同大小的 $\eta\in(1,\ \infty)$ 所对应的解的表示式不同，接下来我们将分别陈述 $\eta\in(1,\ 3)$、$\eta\in(3,\ \infty)$ 以及 $\eta=3$ 情形下解的尖锐估计和渐近剖面。我们将在命题 3.5 的证明中推迟对这些估计的尖锐性的证明。回顾一下在 (4) 中引入的数据空间 B_σ。我们首先研究 $\eta\in(1,\ 3)$ 的情形。

命题 3.2. 设 $n\geqslant 1$ 和 $n>\frac{4}{3}\sigma$ 满足 $\sigma\in(0,\infty)$。考虑具有 $\eta\in(1,3)$ 和 $(v_0,v_1,v_2)\in\mathscr{B}_\sigma$ 的线性化柯西问题(14)。其解满足以下估计：

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma},\tag{25}$$

$$\|v(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}.\tag{26}$$

此外，渐近 当 $\eta\in(1,3)$ 时的渐近轮廓由 $w_{(1,3)}=w_{(1,3)}(t,x)$ 描述，其中

$$\begin{aligned}w_{(1,3)}(t,x):=&\,\mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\left(-\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}+\cos(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)\right]\frac{v_2(x)}{\eta-3}\\&+\mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\sin(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right]\frac{v_2(x)}{2C_\eta}\end{aligned}$$

以精细估计的意义

$$\|v(t,\cdot)-w_{(1,3)}(t,\cdot)\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n-4\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma},\tag{27}$$

$$\|v(t,\cdot)-w_{(1,3)}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n+4\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}.\tag{28}$$

假设 $v_0\equiv 0\equiv v_1$，解满足以下有界估计：

$$\|v(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}\lesssim\|v_2\|_{L^2}.\tag{29}$$

证明。 回顾表示式 (18) 中的 $\eta \in (1,3)$，我们可以推导出

$$\begin{aligned}\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)\widehat{v}(t,\xi)\|_{L^2} \lesssim{}& \left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)\,\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}\|\widehat{v}_0\|_{L^\infty} + \left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^{-\frac{2}{3}\sigma}\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}\|\widehat{v}_1\|_{L^\infty}\\ &+\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\left(\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}-\cos(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)\right\|_{L^2}\|\widehat{v}_2\|_{L^\infty}\\ &+\left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}\sin(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\eta-1)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}\|\widehat{v}_2\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

借助引理 3.1 中的 $s=0$，$-\frac{2}{3}\sigma$、引理 3.2 中的 (23)-(24)，以及豪斯多夫-杨不等式 $\mathrm{k}\widehat{v}_j\mathrm{k}_{L^\infty} \lesssim \mathrm{k}v_j\mathrm{k}_{L^1}$ with $j=0$，1，2，可以估计

$$\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)\widehat{v}(t,\xi)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{L^1\times L^1\times L^1},$$

其中 $n>\frac{4}{3}\sigma$。另一方面，显然

$$\begin{aligned}\|\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\widehat{v}(t,\xi)\|_{L^2} &\lesssim \left\|\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\,\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(\widehat{v}_0(\xi)+\langle\xi\rangle^{-\frac{2}{3}\sigma}\widehat{v}_1(\xi)+\langle\xi\rangle^{-\frac{4}{3}\sigma}\widehat{v}_2(\xi)\right)\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \mathrm{e}^{-ct}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{L^2\times L^2\times L^2}.\end{aligned}$$

利用与后两个估计相关的帕塞瓦尔等式，即可完成 (25) 的证明。对于所需的估计 (26)，我们采用与上述类似的方法，得到

$$\begin{aligned}\|v(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}} \lesssim{}& \left\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)\,\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^2}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{L^1\times L^1\times L^1}\\ &+\left\|\chi_{\mathrm{ext}}(\xi)\,\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right\|_{L^\infty}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{H^{\frac{4}{3}\sigma}\times H^{\frac{2}{3}\sigma}\times L^2}\\ \lesssim{}& (1+t)^{-\frac{3n}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{L^1\times L^1\times L^1}+\mathrm{e}^{-ct}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{H^{\frac{4}{3}\sigma}\times H^{\frac{2}{3}\sigma}\times L^2},\end{aligned}$$

其中我们在 $s=0$ 下应用了引理 3.1。此外，取 $\widehat{v}_0\equiv 0\equiv\widehat{v}_1$，可得

$$|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}|\widehat{v}| \lesssim \left(1+|\cos(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)|+|\sin(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)|\right)\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}|\widehat{v}_2| \lesssim |\widehat{v}_2|,$$

这立即推出 (29)。最后，利用表示式 (18)，我们知道 w

$$|\widehat{v}-\widehat{w}_{(1,3)}| \lesssim \mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\widehat{v}_0|+|\xi|^{-\frac{2}{3}\sigma}|\widehat{v}_1|\right).$$

通过应用引理 3.1 与 $s=-\frac{2}{3}\sigma$，可以直接证明所需的精细估计 . □

注 3.4。 分别比较(25)、(26) 与(27) 和(28)，我们注意到，通过在 L^2 和 $\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}$ 范数中减去函数 $w_{(1,3)}(t,\cdot)$，衰减率得到了改善$(1+t)^{-1}$。换言之，一般的扩散波函数 $w_{(1,3)}$ 是 v 对线性化柯西问题(14) （其中 $\eta\in(1,\ 3)$）的渐近剖面。

接下来讨论第二种情形 $\eta\in(3,\ \infty)$，根据维数的大小将其分为两个结果。

命题 3.3. 设 $n \geqslant 1$ 和 $n > \frac{8}{3}\sigma$ 满足 $\sigma \in (0,\ \infty)$。考虑线性化柯西问题 (14)，其中 $\eta \in (3,\ \infty)$ 且 $(v_0,\ v_1,\ v_2) \in \mathscr{B}_\sigma$。解满足估计(25)-(26)。此外，当 $\eta \in (3,\ \infty)$ 时，渐近剖面由 $w_{(3,\infty)} = w_{(3,\infty)}(t,\ x)$ 描述，使得

$$w_{(3,\infty)}(t,x) := \mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[\frac{\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{(3-\eta)|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-\eta)|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{D_\eta|\xi|^{\frac{4}{3}\sigma}}\left(\frac{\mathrm{e}^{D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{3-\eta+2D_\eta} - \frac{\mathrm{e}^{-D_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}}{3-\eta-2D_\eta}\right)\right] v_2(x)$$

就精细估计而言

$$\begin{aligned}\|v(t,\cdot) - w_{(3,\infty)}(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{3n-4\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma},\\ \|v(t,\cdot) - w_{(3,\infty)}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}} &\lesssim (1+t)^{-\frac{3n+4\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}.\end{aligned}$$

假设 $v_0 \equiv 0 \equiv v_1$，解满足估计 (29)。

证明。 表示式 (19) 给出了如下逐点估计

$$\begin{aligned}|\widehat{v}| &\lesssim \mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\widehat{v}_0| + |\xi|^{-\frac{2}{3}\sigma}|\widehat{v}_1| + |\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}|\widehat{v}_2|\right),\\ |\widehat{v} - \widehat{w}_{(3,\infty)}| &\lesssim \mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\widehat{v}_0| + |\xi|^{-\frac{2}{3}\sigma}|\widehat{v}_1|\right).\end{aligned} \tag{30}$$

采用与命题 3.2 类似的方法，我们完成证明。 □

注 3.5。 我们注意到，通过在 L^2 范数和 $\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}$ 范数中减去函数 $w_{(3,\infty)}(t,\cdot)$，衰减率得到了改善$(1+t)^{-1}$。由于傅里叶乘子 $\exp(\alpha_0|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)$ 满足$\alpha_0 = -1$ 和 $\alpha_0 = \frac{1}{2}(1-\eta) \pm D_\eta < 0$，一般扩散函数 $w_{(3,\infty)}$ 是 v 对于线性化柯西问题 (14) （其中 $\eta \in (3,\infty)$）的渐近剖面。

推论 3.1。 设 $n \geqslant 1$ 和 $\frac{4}{3}\sigma < n \leqslant \frac{8}{3}\sigma$，其中 $\sigma \in (0,\infty)$。考虑线性化柯西问题 (14)，其中 $\eta \in (3,\infty)$ 且 $(v_0, v_1, v_2) \in \mathscr{B}_\sigma$。解满足以下估计：

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \begin{cases}(1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} & \text{if } \frac{4}{3}\sigma < n < \frac{8}{3}\sigma,\\ \ln(\mathrm{e}+t)\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} & \text{if } n = \frac{8}{3}\sigma.\end{cases}$$

证明。 对式 (19) 求时间导数，可得

$$|\widehat{v}_t| \lesssim \mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}|\widehat{v}_0| + |\widehat{v}_1| + |\xi|^{-\frac{2}{3}\sigma}|\widehat{v}_2|\right),$$

这立即表明

$$\|v_t(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{3n-4\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}$$

假设 $n > \frac{4}{3}\sigma$，由引理 3.1 可知 $s = -\frac{2}{3}\sigma$。由于关系式 $v(t,x) = \int_0^t v_t(\tau,x)\mathrm{d}\tau + v_0(x)$，可得

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \int_0^t \|v_t(\tau,\cdot)\|_{L^2}\mathrm{d}\tau + \|v_0\|_{L^2} \lesssim \left(1 + \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{3n-4\sigma}{4\sigma}}\mathrm{d}\tau\right)\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}.$$

F由 $\frac{4}{3}\sigma < n \leqslant \frac{8}{3}\sigma$，即 $0 < \frac{3n-4\sigma}{4\sigma} \leqslant 1$，我们得到了所需的估计。 □

备注 3.6. 与扩散波情形 $\eta \in (1,3)$相比，由于扩散情形 $\eta \in (3,\infty)$的解公式中缺少振荡项$\sin(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)$和$\cos(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)$，在极限情形$n=\frac{8}{3}\sigma$下会出现对数损失，但对于其余情形 $n\in(\frac{4}{3}\sigma,\frac{8}{3}\sigma)\cup(\frac{8}{3}\sigma,\infty)$，命题 *3.3* 和推论 *3.1* 中的估计与命题 *3.2* 中的估计完全相同。

我们聚焦于最后一种情形 $\eta=3$。

命题 3.4。 设 $n\geqslant 1$，其中 $\sigma\in(0,\infty)$。考虑线性化柯西问题 (14)，其中 $\eta=3$ 以及 $(v_0,v_1,v_2)\in\mathscr{B}_\sigma$。该解满足估计 (25)-(26)。此外，当 $\eta=3$ 时，渐近剖面由 $w_{[3]}=w_{[3]}(t,x)$ 描述，使得

$$w_{[3]}(t,x):=\frac{t^2}{2}\mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\mathrm{e}^{-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\right)v_2(x)$$

在精细估计的意义下

$$\|v(t,\cdot)-w_{[3]}(t,\cdot)\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n-4\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma},$$
$$\|v(t,\cdot)-w_{[3]}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}\lesssim(1+t)^{-\frac{3n+4\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}.$$

假设 $v_0\equiv 0\equiv v_1$，该解满足估计 (29)。

证明。 由逐点估计

$$|\widehat{v}|\lesssim\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\widehat{v}_0|+t|\widehat{v}_1|+t^2|\widehat{v}_2|\right),$$
$$|\widehat{v}-\widehat{w}_{[3]}|\lesssim\mathrm{e}^{-c|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t}\left(|\widehat{v}_0|+t|\widehat{v}_1|\right),$$

利用引理 3.1即可轻松完成证明。 □

注 3.7。 由于当 $\eta=3$ 时，解的表示式在低频处的奇异性 $|\xi|^{-\frac{2}{3}\sigma}$ 和 $|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}$ 消失，因此我们可以去除关于 σ 的 n 限制；此外，渐近剖面 $w_{[3]}$ 不包含任何奇异分量。

注3.8。 结合命题 *3.2–3.4* 和推论 *3.1*，我们发现，当 $n\geqslant 1$ 时，线性化柯西问题 (14) 的解满足相同的$(L^2\cap L^1)-L^2$ 型估计(25)-(26) 以及 L^2-L^2 型估计 (29)，但维数需满足限制

$$\begin{cases} n>\dfrac{4}{3}\sigma & \text{if } \eta\in(1,3),\\ n>0 & \text{if } \eta=3,\\ n>\dfrac{4}{3}\sigma \quad \text{but} \quad n\neq\dfrac{8}{3}\sigma & \text{if } \eta\in(3,\infty), \end{cases} \tag{31}$$

对任意 $\sigma\in(0,\infty)$。这一现象是由

- 一般扩散剖面 $w_{(3,\infty)}(t,x)$ 在 $\eta\in(3,\infty)$ 时具有强奇异性$|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}$；
- 一般扩散波剖面 $w_{(1,3)}(t,x)$具有强奇异性 $|\xi|^{-\frac{4}{3}\sigma}$，并且当 $\eta\in(0,3)$时，还具有振荡$\sin(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)$ 以及$\cos(C_\eta|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t)$；
- 是不含任何奇异性的通常扩散剖面 $w_{[3]}(t,x)$，其中 $\eta=3$。

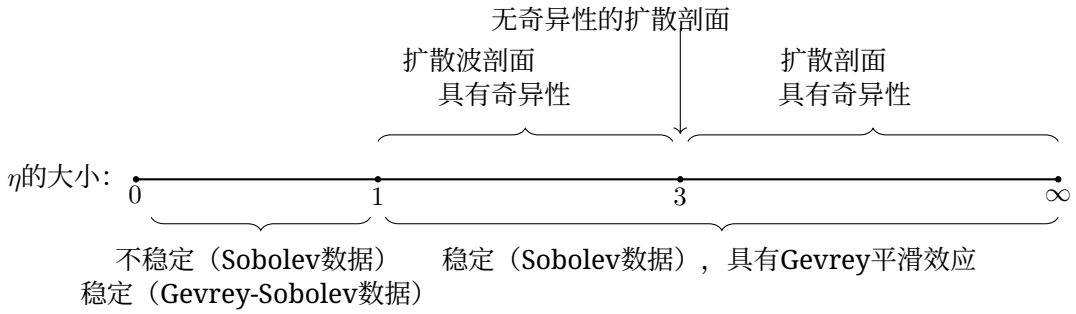


图1：关于 η的两个阈值

也就是说， $\eta = 3$ 是区分不同类型渐近剖面的阈值（具体见图*1*）。需要注意的是，对于较小的 $|\xi|$，不同的渐近剖面将产生不同程度的奇异性。

最后，本节将指出，命题 3.2–3.4中推导出的（$L^2\cap L^1$）型估计确实是尖锐的，因为上界估计和下界估计具有相同的大时间行为。证明的思路受到 [21, 22]的启发。

命题 3.5。 设 $n \geqslant 1$ 和 $\sigma \in (0,\ \infty)$。考虑线性化柯西问题(14)，其中 $n > \frac{4}{3}\sigma$（当 $\eta \in (1,\ 3)$时），$n > 0$（当 $\eta = 3$时），$n > \frac{8}{3}\sigma$（当 $\eta \in (3,\ \infty)$时），且$(v_0,\ v_1,\ v_2)\in \mathscr{B}_\sigma$。该解满足以下尖锐估计：

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^2} \simeq t^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}} \quad and \quad \|v(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}} \simeq t^{-\frac{3n}{4\sigma}} \tag{32}$$

对于大时间 $t \gg 1$ 若 $P_{v_2} :\ = \int_{\mathbb{R}^n} v_2\ (x)\ \mathrm{d}x \neq 0$。

证明。 我们将渐近剖面改写为

$$w_\Xi(t,x) = \mathscr{L}_\Xi(t,x)v_2(x)$$

其中 $\Xi \in \{(1,\ 3), [3], (3,\ \infty)\}$。换言之，命题 3.2–3.4 已证明

$$\Big\|\Big(v - \mathscr{L}_\Xi v_2\Big)(t,\cdot)\Big\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}-1}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}. \tag{33}$$

应用拉格朗日定理

$$|\mathscr{L}_\Xi(t,x-y) - \mathscr{L}_\Xi(t,x)| \lesssim |y|\,|\nabla\mathscr{L}_\Xi(t,x-\theta_1 y)|$$

其中 $\theta_1 \in (0,\ 1)$，我们可以得到

$$\begin{aligned}\|\mathscr{L}_\Xi(t,D)v_2(\cdot) - \mathscr{L}_\Xi(t,\cdot)P_{v_2}\|_{L^2} \lesssim{}& \left\|\int_{|y|\leqslant t^{\alpha_1}} \Big(\mathscr{L}_\Xi(t,\cdot-y) - \mathscr{L}_\Xi(t,\cdot)\Big)v_2(y)\mathrm{d}y\right\|_{L^2}\\ &+ \left\|\int_{|y|\geqslant t^{\alpha_1}} \Big(|\mathscr{L}_\Xi(t,\cdot-y)| + |\mathscr{L}_\Xi(t,\cdot)|\Big)|v_2(y)|\mathrm{d}y\right\|_{L^2}\\ \lesssim{}& t^{\alpha_1}\|\nabla\mathscr{L}_\Xi(t,\cdot)\|_{L^2}\|v_2\|_{L^1} + \|\mathscr{L}_\Xi(t,\cdot)\|_{L^2}\|v_2\|_{L^1(|x|\geqslant t^{\alpha_1})}\end{aligned}$$

其中 $0 < \alpha_1 \ll 1$ 为一个正的小常数。由于 $v_2 \in L^1$ 蕴含 $\mathrm{k}v_2\mathrm{k}_{L^1(|x|\geqslant t^{\alpha_1})} = o(1)$，利用引理 3.1 和 3.2，我们推得

$$\|\mathscr{L}_\Xi(t,D)v_2(\cdot) - \mathscr{L}_\Xi(t,\cdot)P_{v_2}\|_{L^2} = o(t^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}) \tag{34}$$

当 $t \gg 1$ 时。根据 (33)-(34) 和闵可夫斯基不等式，可得

$$\begin{aligned}\|v(t,\cdot)\|_{L^2} &\gtrsim \|\mathscr{L}_\Xi(t,\cdot)\|_{L^2}|P_{v_2}| - \Big\|\big(v-\mathscr{L}_\Xi P_{v_2}\big)(t,\cdot)\Big\|_{L^2}\\ &\gtrsim \|\chi_{\mathrm{int}}(D)\mathscr{L}_\Xi(t,\cdot)\|_{L^2}|P_{v_2}| - o(t^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}})\end{aligned}$$

在大时间下 $t \gg 1$。回顾 $\mathrm{L}_\Xi(t,x)$ 对 $\Xi \in \{(1,3),[3],(3,\infty)\}$ 的表示式，我们发现，引理 3.3 中已导出下界，使得

$$\|\chi_{\mathrm{int}}(\xi)\widehat{\mathscr{L}_\Xi}(t,\xi)\|_{L^2} \gtrsim t^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}},$$

这立即导出

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^2} \gtrsim t^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}|P_{v_2}|$$

对于 $t \gg 1$。因此，我们完成了解本身的尖锐估计。按照相同的思路，可以类似地证明 (32) 中第二个估计的尖锐性。 □

注 3.9。考虑一般情形 $\eta \in (1,\infty)$。根据 (32)，我们发现 $\sigma = \frac{3}{8}n$ 是解本身衰减估计的阈值。也就是说，当 $\sigma \in (0,\frac{3}{8}n)$ 时，解本身具有最优多项式衰减；当 $\sigma = \frac{3}{8}n$ 时，具有尖锐有界估计；当 $\sigma \in (\frac{3}{8}n,\infty)$ 时，解本身在 L^2 范数下具有最优多项式增长。

4 半线性柯西问题的全局（时间）适定性

4.1 我们方法的理念与主要工具

对于任意 $T>0$，当 (31) 成立时，我们引入分数阶演化空间

$$X(T) := \mathscr{C}\Big([0,T],H^{\frac{4}{3}\sigma}\Big) \ \text{ with } \ \sigma \in (0,\infty), \tag{35}$$

并赋予其加权范数

$$\|u\|_{X(T)} := \sup_{t\in[0,T]}\Big((1+t)^{\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|u(t,\cdot)\|_{L^2} + (1+t)^{\frac{3n}{4\sigma}}\|u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}\Big). \tag{36}$$

请注意，剩余情形 $n = \frac{8}{3}\sigma$ when $\eta \in (3,\infty)$ 不包含在 (31) 中，我们将在注4.2中讨论这一情形。时间加权 Sobole夫范数 (36) 的构造主要受到线性化柯西问题 (14) 在 $\eta \in (1,\infty)$ 条件下的尖锐 $(L^2\cap L^1) - L^2$ 型估计的启发，具体而言，即命题 3.2–3.4 和推论 3.1。随后，我们引入算子 N，使得

$$\mathscr{N}:\ u(t,x) \in X(T) \to \mathscr{N}u(t,x) := u^{\mathrm{lin}}(t,x) + u^{\mathrm{nlin}}(t,x),$$

其中，$u^{\mathrm{lin}}(t,x) \equiv v(t,x)$ 表示对应线性化柯西问题的解，其初始数据的大小为 ϵ，而 u^{nlin} (14) (t,x) 定义为

$$u^{\mathrm{nlin}}(t,x) := \int_0^t E_2(t-\tau,x) *_{(x)} |u(\tau,x)|^p \mathrm{d}\tau,$$

其中， $E_2 = E_2(t,x)$ 是线性化柯西问题 (14) 的基本解，其初始数据为 $v_0(x) = v_1(x) = 0$ 和 $v_2(x) = \delta_0$，其中 δ_0 是关于空间变量的位于 $x = 0$ 处的狄拉克分布。特别地，

$$\mathscr{F}_{x\to\xi}\Big(E_2(t,x)\Big) = \widehat{K}_2(t,|\xi|) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1,2,3} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_j t}}{\displaystyle\prod_{k=1,2,3,\ k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k)} & \text{when } \ \eta \neq 3, \\ \dfrac{1}{2}t^2\exp(-|\xi|^{\frac{2}{3}\sigma}t) & \text{when } \ \eta = 3, \end{cases}$$

结合特征根（16），这些特征根已在第3节中得到充分研究。当（31）成立时，对命题 3.2–3.4和推论 3.1 的简要总结表明，估计如下：

$$\|E_2(t,\cdot) *_{(x)} g(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|g(t,\cdot)\|_{L^2\cap L^1}, \tag{37}$$

$$\|E_2(t,\cdot) *_{(x)} g(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}} \lesssim (1+t)^{-\frac{3n}{4\sigma}}\|g(t,\cdot)\|_{L^2\cap L^1}, \tag{38}$$

$$\|E_2(t,\cdot) *_{(x)} g(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}} \lesssim \|g(t,\cdot)\|_{L^2}, \tag{39}$$

对于 $\eta \in (1,\ \infty)$ 以及满足（31）的维数 n。

我们将通过证明算子 N 的唯一不动点（即对所有 $T>0$，$\mathrm{N}\ u \in X(T)$）来证明半线性三阶（时间）演化方程（1）在 $\eta \in (1,\ \infty)$ 下小初值索obolev解的全局（时间）存在性和唯一性。具体而言，我们将严格证明关于 T 一致成立的以下两个重要估计：

$$\|\mathcal{N}u\|_{X(T)} \lesssim \epsilon\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} + \|u\|^p_{X(T)}, \tag{40}$$

$$\|\mathcal{N}u - \mathcal{N}\bar{u}\|_{X(T)} \lesssim \|u-\bar{u}\|_{X(T)}\Big(\|u\|^{p-1}_{X(T)} + \|\bar{u}\|^{p-1}_{X(T)}\Big), \tag{41}$$

分别地，在幂 p 满足某些条件，并且初始数据空间 B_σ 在（4）中定义的情况下。在我们所需的估计（41）中，u 和 $\bar{u}$ 是带有$\eta \in (1,\ \infty)$的半线性柯西问题（1）的两个解。因此，假设 $\mathrm{k}(u_0,\ u_1,\ u_2)\mathrm{k}_{\mathscr{B}_\sigma} \leqslant C$ 且参数 $0<\epsilon\ll 1$ 足够小，我们可以将（40）与（41）结合起来，利用巴拿赫不动点定理，断言存在一个全局（时间）小初值 Sobolev 解$u^* = u^*(t,\ x) \in X(\infty)$。

作为本小节的结尾，我们回顾一下分数阶 Gagliardo-Nirenberg 不等式 [17]，稍后将用到它。

引理 4.1。设 $p, p_0, p_1 \in (1,\infty)$ 和 $\kappa \in [0,s)$ 满足 $s \in (0,\infty)$。那么，对于所有 $f \in L^{p_0}\cap H^s_{p_1}$，以下插值成立：

$$\|g\|_{\dot{H}^\kappa_p} \lesssim \|g\|^{1-\beta}_{L^{p_0}}\|g\|^{\beta}_{\dot{H}^s_{p_1}},$$

其中 $\beta = (\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}+\frac{\kappa}{n})\Big/(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}+\frac{s}{n})$ 和 $\beta \in [\frac{\kappa}{s},1]$。

4.2 定理 2.1 的证明：Sobolev 解的全局（时间）存在性

首先，根据命题 3.1 的第三个结论、命题 3.2–3.4 中的一些估计以及推论 3.1，我们可以断言存在 $u^{\mathrm{lin}} \in X(T)$，使得

$$\|u^{\mathrm{lin}}\|_{X(T)} \lesssim \epsilon\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma}. \tag{42}$$

由于 $\mathbf{N}\,u = u^{\mathrm{lin}} + u^{\mathrm{nlin}}$，我们的首要目标是证明

$$\|u^{\mathrm{nlin}}\|_{X(T)} \lesssim \|u\|_{X(T)}^{p} \ \text{ uniformly } \ T,$$

在指数 p 满足某些条件时。为此，我们现在需要分别估计非线性项 $|u(\tau,\cdot)|^p$ 在 L^1 和 L^2 范数中的取值。应用分数阶 Gagliardo-Nirenberg 不等式（见引理 4.1），可得

$$\| \, |u(\tau,\cdot)|^p \|_{L^1} \lesssim \|u(\tau,\cdot)\|_{L^2}^{(1-\beta_1)p} \|u(\tau,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}^{\beta_1 p} \lesssim (1+\tau)^{-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+\frac{3n}{2\sigma}} \|u\|_{X(T)}^{p}$$

对于 $\tau \in [0,T]$ 满足 $\beta_1 := \frac{3n}{4\sigma}\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\big) \in [0,1]$，即 $2 \leqslant p \leqslant \frac{6n}{(3n-8\sigma)_+}$。类似地，

$$\| \, |u(\tau,\cdot)|^p \|_{L^2} \lesssim \|u(\tau,\cdot)\|_{L^2}^{(1-\beta_2)p} \|u(\tau,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}^{\beta_2 p} \lesssim (1+\tau)^{-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+\frac{3n}{4\sigma}} \|u\|_{X(T)}^{p} \tag{43}$$

对于 $\tau \in [0,T]$ 满足 $\beta_2 := \frac{3n}{4\sigma}\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}\big) \in [0,1]$，即 $1 < p \leqslant \frac{3n}{(3n-8\sigma)_+}$。因此可得

$$\| \, |u(\tau,\cdot)|^p \|_{L^2\cap L^1} \lesssim (1+\tau)^{-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+\frac{3n}{2\sigma}} \|u\|_{X(T)}^{p}, \tag{44}$$

其中我们作了限制

$$2 \leqslant p \leqslant \frac{3n}{(3n-8\sigma)_+} \ \text{ if } \ 1 \leqslant n \leqslant \frac{16}{3}\sigma. \tag{45}$$

限制条件 (45) 是由一些应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式的技术性原因所致。为了在 L^2 范数中估计解本身，我们将推导出的 $(L^2\cap L^1)-L^2$ 估计 (37) 应用于 $[0,t]$，并结合幂次非线性估计 (44)，得到

$$\begin{aligned}(1+t)^{\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|u^{\mathrm{nlin}}(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}(1+\tau)^{-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+\frac{3n}{2\sigma}}\mathrm{d}\tau\,\|u\|_{X(T)}^{p}\\ &\lesssim \int_0^{t/2}(1+\tau)^{-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+\frac{3n}{2\sigma}}\mathrm{d}\tau\,\|u\|_{X(T)}^{p} + (1+t)^{\frac{9n-8\sigma}{4\sigma}-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p}\int_{t/2}^t (1+t-\tau)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\mathrm{d}\tau\,\|u\|_{X(T)}^{p}.\end{aligned}$$

由假设

$$p > p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma) = 1+\frac{6\sigma}{3n-4\sigma} \ \text{ with } \ \frac{4}{3}\sigma < n < 4\sigma, \tag{46}$$

可推出

$$-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+\frac{3n}{2\sigma} < -1 \ \text{ and } \ -\frac{3n-8\sigma}{4\sigma} > -1,$$

从而得到

$$(1+t)^{\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|u^{\mathrm{nlin}}(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{X(T)}^{p}. \tag{47}$$

将条件 (45) 与 (46) 结合，可得

$$p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma) = \max\big\{2, p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)\big\} < p \leqslant \frac{3n}{(3n-8\sigma)_+} \tag{48}$$

取 $\frac{4}{3}\sigma < n \leqslant \frac{10}{3}\sigma$。注意，维数应满足 (31)。接下来，我们将推导出的 $(L^2\cap L^1) - \dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}$估计 (38) 用于与 (44) 相关的 $[0,t/2]$ 中，并将 $L^2-\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}$估计 (39) 用于与 (43) 相关的 $[t/2,t]$中，从而得到

$$\begin{aligned}(1+t)^{\frac{3n}{4\sigma}}\|u^{\mathrm{nlin}}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}} &\lesssim \int_0^{t/2}(1+\tau)^{-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+\frac{3n}{2\sigma}}\mathrm{d}\tau\,\|u\|_{X(T)}^p + (1+t)^{\frac{3n}{2\sigma}-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p}\int_{t/2}^t \mathrm{d}\tau\,\|u\|_{X(T)}^p \\ &\lesssim \|u\|_{X(T)}^p \end{aligned} \tag{49}$$

在条件 (48) 下。因此，结合 (42)、(47) 以及 (49)，即可立即完成

$$\|u^{\mathrm{lin}}\|_{X(T)} + \|u^{\mathrm{nlin}}\|_{X(T)} \lesssim \epsilon\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} + \|u\|_{X(T)}^p,$$

即关键估计 (40) 的推导。

为了证明 (41)，我们注意到

$$\|\mathscr{N}u - \mathscr{N}\bar{u}\|_{X(T)} = \left\| \int_0^t E_2(t-\tau,\cdot)*_{(x)}\left(|u(\tau,\cdot)|^p - |\bar{u}(\tau,\cdot)|^p\right)\mathrm{d}\tau\right\|_{X(T)}.$$

由霍尔德不等式可得

$$\|\,|u(\tau,\cdot)|^p - |\bar{u}(\tau,\cdot)|^p\|_{L^m} \lesssim \|u(\tau,\cdot)-\bar{u}(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}\Big(\|u(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}^{p-1} + \|\bar{u}(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}^{p-1}\Big),$$

其中 $m=1$,2。最后，利用分数阶 Gagliardo-Nirenberg 不等式估计前一个不等式右端的三项，我们便可推导出所需的估计 (41)。至此，证明完成。

注 4.1. 关于另一种情形

$$p > \max\left\{\frac{9n-8\sigma}{2(3n-4\sigma)_+}, p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)\right\} \quad and \quad 2\leqslant p\leqslant \frac{3n}{(3n-8\sigma)_+},$$

我们还可以证明(47)，因为 $4\sigma\leqslant n\leqslant\frac{16}{3}\sigma$

$$(1+t)^{\frac{9n-8\sigma}{4\sigma}-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p}\int_{t/2}^t(1+t-\tau)^{-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\mathrm{d}\tau\lesssim 1.$$

然而，这并不能推出临界指数为 $p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$时的下界，而一般的全局（时间）存在性结果超出了本文的研究范围。

注 4。 **2.** 当 $\eta\in(3,\infty)$时，对于 $n=\frac{8}{3}\sigma$，我们只需将范数(36) 修改为

$$\|u\|_{X(T)} := \sup_{t\in[0,T]}\Big([\ln(\mathrm{e}+t)]^{-1}\|u(t,\cdot)\|_{L^2} + (1+t)^2\|u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}\Big)$$

受推论 *3.1* 的启发。此时，估计式(37) 将变为

$$\|E_2(t,\cdot)*_{(x)}g(t,\cdot)\|_{L^2}\lesssim \ln(\mathrm{e}+t)\|g(t,\cdot)\|_{L^2\cap L^1}$$

对于 $n=\frac{8}{3}\sigma$ 当 $\eta\in(3,\infty)$ 时。再次应用命题 *4.1*，我们得到

$$\begin{aligned}\|\,|u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^2\cap L^1} &\lesssim [\ln(\mathrm{e}+\tau)]^2(1+\tau)^{-2(p-2)}\|u\|_{X(T)}^p, \\ \|\,|u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^2} &\lesssim [\ln(\mathrm{e}+\tau)](1+\tau)^{-2(p-1)}\|u\|_{X(T)}^p,\end{aligned}$$

在限制条件 (45)下。然后，采用与上述相同的方法，我们还可以证明(40)，前提是指数 p 满足 (48)。

注 4.3. 若关注全局（时间）解 u 的正则性，在与命题 *3.2–3.4* 和推论 *3.1* 相同的条件下，若 (31) 成立，则可以容易地证明线性化柯西问题(14) 的以下估计：

$$\begin{aligned}\|\partial_t^j v(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-j-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma},\\ \|\partial_t^j v(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{2}{3}\sigma(2-j)}} &\lesssim (1+t)^{-\frac{3n}{4\sigma}}\|(v_0,v_1,v_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma},\end{aligned}$$

其中 $j=0,1,2$，这是命题 *3.2–3.4* 的推广。因此，我们可以引入解空间

$$Y(T):=\mathscr{C}\Big([0,T],H^{\frac{4}{3}\sigma}\Big)\cap\mathscr{C}^1\Big([0,T],H^{\frac{2}{3}\sigma}\Big)\cap\mathscr{C}^2\Big([0,T],L^2\Big)$$

对于 $T>0$ 以及任意 $\sigma\in(0,\infty)$，赋予时间加权 *Sobole*夫范数

$$\|u\|_{Y(T)}:=\sup_{t\in[0,T]}\left((1+t)^{j+\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|\partial_t^j u(t,\cdot)\|_{L^2}+(1+t)^{\frac{3n}{4\sigma}}\sum_{j=0,1}\|\partial_t^j u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{2}{3}\sigma(2-j)}}\right).$$

通过重复我们在第*4.2*小节中处理$\|u^{\mathrm{nlin}}(t,\cdot)\|_{L^2}$和$\|u^{\mathrm{nlin}}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}}$时所采用的类似步骤，我们可以在 $Y(T)$ 中证明 (40)-(41)，而不是在 $X(T)$ 中。也就是说，经过冗长但直接的计算，在指数 p 和小初值正则性满足相同条件时，三阶（时间）演化方程(1) 在 $\eta\in(1,\infty)$下存在唯一确定的 *Sobolev* 解 $u\in Y(\infty)$。此外，该解满足以下估计：

$$\begin{aligned}\|\partial_t^j u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \epsilon(1+t)^{-j-\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma},\\ \|\partial_t^j u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{2}{3}\sigma(2-j)}} &\lesssim \epsilon(1+t)^{-\frac{3n}{4\sigma}}\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma},\end{aligned}$$

其中 $j=0,1,2$。

5 半线性柯西问题的爆破

5.1 分数阶拉普拉斯算子的预备知识

在证明分数阶拉普拉斯算子下半线性问题 **(1)** 的弱解发生爆破之前，我们先回顾文献 [8, 5] 中推导的一些辅助引理。

引理 5.1. 设 $q>n$ 和 $\sigma\in(0,\infty)$。令 $\tilde{\sigma}=\sigma-[\sigma]$，则有

$$|(-\Delta)^\sigma\langle x\rangle^{-q}|\lesssim\langle x\rangle^{-q_\sigma}\quad for\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

其中，若 σ 是整数，则 $q_\sigma=q+2\sigma$；否则为 $q_\sigma=n+2\tilde{\sigma}$。

引理 5.2. 令 $\phi(x):=\langle x\rangle^{-q}$ 和 $\phi_R(x):=\phi(R^{-1}x)$ 对任意 $R>0$，则有

$$(-\Delta)^\gamma(\phi_R)(x)=R^{-2\gamma}\Big((-\Delta)^\gamma\phi\Big)(R^{-1}x)$$

对于任意数值 $\gamma\geqslant 0$。

下面定义一些尺度合适的测试函数，它们高度依赖于方程 (1) 的新伴随算子，即

$$-\partial_t^3 + \mathscr{A} + \eta \mathscr{A}^{\frac{1}{3}} \partial_t^2 - \eta \mathscr{A}^{\frac{2}{3}} \partial_t.$$

首先，我们设 $\varphi(x) := \mathrm{h}x\mathrm{i}^{-n-2s_\sigma}$，其中 $s_\sigma \in (0,1)$ 取为任意常数（若$\sigma \in \mathbb{N}$），若 $\sigma \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$，则取满足 $s_\sigma \in (0, \sigma - [\sigma])$ 的小常数。其次，我们引入$\zeta \in \mathsf{C}^\infty$，其支集 $\zeta(t) \subset [0,1]$满足：若 $t \in [0, \frac{1}{2}]$，则 $\zeta(t) = 1$，且单调不增；若$t \in [1, \infty$，则 $\zeta(t) = 0$。最后，我们构造新的测试函数

$$\varphi_R(x) := \langle R^{-1} K^{-1} x \rangle^{-n-2s_\sigma} \quad \text{and} \quad \zeta_R(t) := \zeta(R^{-\frac{2}{3}\sigma} t)$$

其中常数 $K \geqslant 1$ 取值适当，参数 $R \gg 1$ 充分大。

5.2 定理 2.2 的证明：弱解爆破

首先开始证明。根据非线性项，我们引入

$$I_R := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p \varphi_R(x) \zeta_R(t) \mathrm{d}x \mathrm{d}t.$$

反设 $u = u(t,x)$ 是半线性柯西问题 (1) 关于一般参数 $\eta \in (0, \infty)$ 的全局（时间）弱解。因此，有

$$\begin{aligned} &\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \left(\eta u_0(x) \mathscr{A}^{\frac{2}{3}} \varphi_R(x) + \eta u_1(x) \mathscr{A}^{\frac{1}{3}} \varphi_R(x) + u_2(x) \varphi_R(x) \right) \mathrm{d}x + I_R \\ &\quad = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x) \left(-\partial_t^3 + \mathscr{A} + \eta \mathscr{A}^{\frac{1}{3}} \partial_t^2 - \eta \mathscr{A}^{\frac{2}{3}} \partial_t \right) \Big(\varphi_R(x) \zeta_R(t) \Big) \mathrm{d}x \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{50}$$

携带 $\mathsf{A} = (-\Delta)^\sigma$，并满足 $\sigma \in (0, \infty)$，也就是说，解 u 具有这样的性质：所有积分对于 $R > 0$ 都是良定义的。在 (50) 的第一个积分中，算子 A^α 作用于测试函数 $\varphi_R(x)$，仅涉及初始数据 $u_0(x)$ $u_1(x)$，分别得到 $R^{-\frac{4}{3}\sigma}$ 和 $R^{-\frac{2}{3}\sigma}$。通过取 $R \gg 1$，可以避免后续对 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 施加符号条件。

应用霍尔德不等式，并取 $K = 1$，我们可以估计

$$\begin{aligned} &\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \left(\eta u_0(x) \mathscr{A}^{\frac{2}{3}} \varphi_R(x) + \eta u_1(x) \mathscr{A}^{\frac{1}{3}} \varphi_R(x) + u_2(x) \varphi_R(x) \right) \mathrm{d}x + I_R \\ &\quad \lesssim \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left| u(t,x) \left(-\partial_t^3 + \mathscr{A} + \eta \mathscr{A}^{\frac{1}{3}} \partial_t^2 - \eta \mathscr{A}^{\frac{2}{3}} \partial_t \right) \Big(\varphi_R(x) \zeta_R(t) \Big) \right| \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\ &\quad \lesssim R^{-2\sigma} \int_0^{R^{\frac{2}{3}\sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)| \varphi_R(x) \Big(|\zeta_R'''(t)| + |\zeta_R(t)| + |\zeta_R''(t)| + |\zeta_R'(t)| \Big) \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\ &\quad \lesssim R^{-2\sigma} I_R^{\frac{1}{p}} \left(R^{n+\frac{2}{3}\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \tilde{x} \rangle^{-n-2s_\sigma} \mathrm{d}\tilde{x} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad \lesssim R^{\frac{3n+2\sigma}{3p'} - 2\sigma} I_R^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{51}$$

其中，我们利用引理 5.1 和 5.2 处理非局部项。由条件

$$1 < p < p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma) = \frac{3n + 2\sigma}{(3n - 4\sigma)_+} \quad \text{that is} \quad \frac{1}{p'} < \frac{6\sigma}{3n + 2\sigma},$$

可知 $R^{\frac{3n+2\sigma}{3}-2\sigma p'}\to 0$ ，而 $R\to\infty$。然后，回顾结合杨不等式得到的关键估计 (51)，我们将矛盾表述如下：

$$0\leqslant \lim_{R\to\infty} I_R \lesssim \lim_{R\to\infty}\left(R^{\frac{3n+2\sigma}{3}-2\sigma p'}-\epsilon\int_{\mathbb{R}^n} u_2(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x\right)<0, \tag{52}$$

得益于符号假设 (7)，因此可知，任何非平凡弱解都可能在有限时间内爆破。为更准确地描述该弱解的爆破时间，我们取

$$R\uparrow T_{\epsilon,\mathrm{w}}^{\frac{3}{2\sigma}} \quad \text{with} \quad \sigma\in(0,\infty)$$

代入 (52) 中。因此，只要满足

$$T_{\epsilon,\mathrm{w}}^{\frac{3}{2\sigma}\left(\frac{3n+2\sigma}{3}-2\sigma p'\right)}\leqslant C_{u_2}\epsilon,$$

从而得到

$$T_{\epsilon,\mathrm{w}}\leqslant C\epsilon^{-\frac{2\sigma}{6\sigma p'-(3n+2\sigma)}} \quad \text{if} \quad 1<p<p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma). \tag{53}$$

这就完成了亚临界情形下寿命上界估计的证明，即定理 2.4 的第一个子情形。

转向临界情形 $p=p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)$，我们首先推导出 I_R 一致有界，即 $u\in L^p([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$。此外，由 (51) 及杨不等式，我们断言

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\left(-\partial_t^3+\eta\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\partial_t^2-\eta\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}\partial_t\right)\left(\varphi_R(x)\zeta_R(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$$

这是因为当 $t\in[0,\frac{1}{2}R^{\frac{2}{3}\sigma}]$ 时，$\zeta_R(t)\equiv 1$。因此

$$\begin{aligned}
0\leqslant \lim_{R\to\infty} I_R=&\lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\left(-\partial_t^3+\eta\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\partial_t^2-\eta\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}\partial_t\right)\left(\varphi_R(x)\zeta_R(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\lim_{R\to\infty}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\mathscr{A}\varphi_R(x)\zeta_R(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\epsilon\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} u_2(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x\\
&-\epsilon\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\eta u_0(x)\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}\varphi_R(x)+\eta u_1(x)\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\varphi_R(x)\right)\mathrm{d}x\\
\lesssim& K^{n-2\sigma p'}-\epsilon\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} u_2(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中，含有 K 的项来自不含时间导数的非局部项 $\mathsf{A}\,\varphi_R(x)$，这得益于引理 5.2。最后，由于在临界情形 $p=p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)$ 下满足 (7) 和$n-2\sigma p'=-\frac{2}{3}\sigma<0$，当 $K\gg 1$ 充分大时便会导出矛盾。由于从上方估计寿命颇具挑战，我们将在下一节给出相关估计。关于解的爆破的证明至此完成。

6 半线性柯西问题的尖锐寿命估计

6.1 定理 2.3 的证明：寿命的下界估计

我们将采用第4节中的一些记号，特别是式 (35) 中引入的演化空间 $X(T)$。为了推导寿命的下界估计，我们将推导一个新的非线性

带时变系数的不等式，而不是式 (40)，这是因为 $1 < p \leqslant p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)$。我们考虑维数满足条件 (31) 的情形，而 $n = \frac{8}{3}\sigma$ 当 $\eta \in (3,\ \infty)$ 时的剩余情形可参照注4.2 类似处理。

根据式 (10) 中温和解的定义，我们可以直接表示并估计方程 (1) 的局部（时间）温和解。根据第 4 节推导出的估计 (44)，可得

$$(1+t)^{\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \epsilon\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} + \int_0^{t/2}(1+\tau)^{-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+\frac{3n}{2\sigma}}\mathrm{d}\tau\,\|u\|_{X(T)}^p + (1+t)^{1+\frac{3n}{2\sigma}-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p}\|u\|_{X(T)}^p,$$

这是由于 $n < 4\sigma$，以及应用分数阶 Gagliardo-Nirenberg 不等式得到的限制 (45)。此外，还必须满足线性化柯西问题解的尖锐估计所需的条件 (31)。记增长函数为

$$L(t) := \begin{cases} (1+t)^{1+\frac{3n}{2\sigma}-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p} & \text{if } \ 1 < p < p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma), \\ \ln(\mathrm{e}+t) & \text{if } \ p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma). \end{cases}$$

由于 $-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p + \frac{3n}{2\sigma} = -1$，如果 $p = p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)$，我们可以得到

$$(1+t)^{\frac{3n-8\sigma}{4\sigma}}\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \epsilon\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} + L(t)\|u\|_{X(T)}^p,$$

类似地,

$$(1+t)^{\frac{3n}{4\sigma}}\|u(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{4}{3}\sigma}} \lesssim \epsilon\|(u_0,u_1,u_2)\|_{\mathscr{B}_\sigma} + L(t)\|u\|_{X(T)}^p.$$

回顾式 (35) 中 $X(T)$ 的定义，可得下一个关键的非线性不等式:

$$\|u\|_{X(T)} \leqslant C_0\epsilon + C_1 L(t)\|u\|_{X(T)}^p, \tag{54}$$

其中 C_0，C_1 是两个与 ϵ，T无关的正常数，条件是

$$2 \leqslant p \leqslant \min\left\{p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma), \frac{3n}{(3n-8\sigma)_+}\right\} = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma).$$

当 $n \leqslant \frac{8}{3}\sigma$ 时，上述最小竞争显然成立，且

$$1 + \frac{6\sigma}{3n-4\sigma} = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma) \leqslant \frac{3n}{3n-8\sigma} \ \text{ when } \ \frac{8}{3}\sigma < n \leqslant \frac{10}{3}\sigma.$$

请注意，根据第4节，在超临界情形下，我们将一致估计 $L(t)$. 1 限制为$p > p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)$，以确保解的全局（时间）存在性。

现在我们引入

$$T^* := \sup\left\{T \in [0, T_{\epsilon,\mathrm{m}}) \ \text{ such that } \ \mathscr{G}(T) := \|u\|_{X(T)} \leqslant M\epsilon\right\}$$

其中 $M > 0$ 为足够大的常数，稍后确定，这意味着 G（T^*） $\leqslant M\epsilon$。将此上界与 $T = T^*$ 一起代入（54），我们断言

$$\mathscr{G}(T^*) \leqslant C_0\epsilon + C_1 L(T^*)\,\mathscr{G}(T^*)^p \leqslant \epsilon\left(C_0 + C_1 M^p \epsilon^{p-1} L(T^*)\right).$$

选取一个足够大的常数 M，使得

$$M > 4C_0 \ \text{ as well as } \ 4C_1 M^{p-1}\epsilon^{p-1}L(T^*) < 1,$$

我们可能有 $\mathsf{G}(T^*) < \frac{M}{2}\epsilon$。由于对于任意 $T \in (0, T_{\epsilon,\mathrm{m}})$，$\mathsf{G}(T)$ 都是连续函数，然而，最后一个估计验证了存在一个时刻 $T_0 \in (T^*, T_{\epsilon,\mathrm{m}})$，使得 $\mathsf{G}(T_0) \leqslant M\epsilon$。这与 T^* 的定义相矛盾，即 $\mathsf{G}(T) \leqslant M\epsilon$ 的时间上确界。也就是说，我们需要提出如下反向关系：

$$4C_1 M^{p-1}\epsilon^{p-1}L(T^*) \geqslant 1. \tag{55}$$

因此，根据 (55) 以及 $T^* \leqslant T_{\epsilon,\mathrm{m}}$ 时 $L(T^*)$ 的表达式，温和解在时间局部意义下的最大存在时间可以从下方估计为

- 当 $1 < p < p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 时，有

$$T_{\epsilon,\mathrm{m}} \geqslant C\epsilon^{-\frac{p-1}{-\frac{3n-4\sigma}{2\sigma}p+1+\frac{3n}{2\sigma}}} = C\epsilon^{-\frac{2\sigma}{6\sigma p'-(3n+2\sigma)}},$$

  其中我们使用了 Hölder 共轭指数 $p' = \frac{p}{p-1}$;

- 当 $p = p_{\text{临界}}(n,\sigma)$ 时，成立

$$T_{\epsilon,\mathrm{m}} \geqslant \exp(C\epsilon^{-(p-1)}).$$

总之，我们已经实现了获得寿命下界估计的目标。

6.2 定理 2.4 的证明：寿命的上界估计

亚临界情形 $1 < p < p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 下的寿命已在式（53）中得到估计。因此，我们将只关注临界情形$p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$ 下的寿命上界估计 $T_{\epsilon,\mathrm{w}}$。然而，与新测试函数相关的证明与定理 2.2 的证明截然不同，而且临界情形下的寿命上界估计始终是一个棘手的部分（例如，半线性经典阻尼波 [25]）。在本小节中，我们将阐明所有陈述中的 $p = p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$。

我们通过以下方式定义初始数据 $u_j \in \mathsf{C}_0^\infty$ 的支集大小

$$r_0 := \max\left\{|x| : \ x \in \bigcup_{j=0,1,2} \operatorname{supp} u_j(x)\right\}.$$

与定理 2.2 的证明不同，我们现在引入 C_0^∞测试函数 $\chi = \chi(\tau)$ 和 L^∞ 截断函数 $\chi^* = \chi^*(\tau)$，如下所示：

$$\chi(\tau) := \begin{cases} 1 & \text{if } \ \tau \in [0, \frac{1}{2}], \\ \text{decreasing} & \text{if } \ \tau \in (\frac{1}{2}, 1), \\ 0 & \text{if } \ \tau \in [1, \infty), \end{cases} \quad \text{and } \ \chi^*(\tau) := \begin{cases} 0 & \text{if } \ \tau \in [0, \frac{1}{2}), \\ \chi(\tau) & \text{if } \ \tau \in [\frac{1}{2}, \infty). \end{cases}$$

对于较大的参数 $R \in (0, \ \infty)$，我们可以定义

$$\psi_R(t,x) := \left[\chi\left(\frac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^m \ \text{ and } \ \psi_R^*(t,x) := \left[\chi^*\left(\frac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^m \tag{56}$$

其中参数 $m > 2\sigma$ 将在后文适当选取。

将测试函数 $\psi_R(t,\ x)$ 乘到方程 (1) 的两边，然后对所得结果在 $\mathbb{R}^n$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p \psi_R(t,x)\mathrm{d}x = &\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\left(-\partial_t^3 + \mathscr{A} + \eta\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\partial_t^2 - \eta\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}\partial_t\right)\psi_R(t,x)\mathrm{d}x\\ &+ \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\psi_R(t,x)\mathrm{d}x + \eta\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\psi_R(t,x)\mathrm{d}x\\ &+ \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}\psi_R(t,x)\mathrm{d}x - 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} u_t(t,x)\psi_{R,t}(t,x)\mathrm{d}x\\ &- 2\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\psi_{R,t}(t,x)\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{57}$$

其中记 $\psi_{R,\ t}(t,\ \ x) := \partial_t\psi_R(t,\ \ x)$。在构造非线性微分不等式之前，我们需要估计 (57) 右端第一项中作用于测试函数的时间导数和分数阶拉普拉斯算子。直接计算可得

$$\begin{aligned}\psi_{R,ttt}(t,x) = &\, m(m-1)(m-2)R^{-3}\left[\chi\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^{m-3}\left[\chi'\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^3\\ &+ 3m(m-1)R^{-3}\left[\chi\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^{m-2}\chi'\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\chi''\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\\ &+ mR^{-3}\left[\chi\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^{m-1}\chi'''\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right).\end{aligned}$$

根据设定 $\chi \in \mathsf{C}_0^\infty([0,\infty))$，$|\chi(\tau)| \leqslant 1$ 以及

$$0 < \left|\chi^{(k)}\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right| \lesssim 1 \quad \text{for} \quad \frac{R}{2} < t + |x|^{\frac{2}{3}\sigma} < R$$

当 $k = 1$，2，3 时，我们可以断言

$$|\psi_{R,ttt}(t,x)| \lesssim R^{-3}\left[\chi^*\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^{m-3} = R^{-3}[\psi_R^*(t,x)]^{\frac{m-3}{m}}.$$

为了控制项 $(-\Delta)^{q\sigma}\psi_R(t,\ \ x)$，其中 $q = \frac{1}{3}$，2 3，-1，受 [7, 引理 3.3], 启发，我们首先对任意多重指标 α 应用复合函数的导数公式，得到

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\alpha\chi\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right| &\lesssim \sum_{k=1}^{|\alpha|}\chi^{(k)}\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\sum_{|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_k|=|\alpha|}\left|\partial_x^{\gamma_1}\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right|\cdots\left|\partial_x^{\gamma_k}\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right|\\ &\lesssim \sum_{k=1}^{|\alpha|}\chi^{(k)}\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)|x|^{\frac{2}{3}\sigma k-|\alpha|}R^{-k}\\ &\lesssim R^{-1}|x|^{\frac{2}{3}\sigma-|\alpha|},\end{aligned}$$

其中我们采用了 $\tau = t + |x|^{\frac{2}{3}\sigma} \leqslant R$，否则 $\chi^{(k)}(\tau) = 0$ 对于 $k = 1$，……，$|\alpha|$。注意，在最后一串推导中，我们取了 $k = 1$，这是由于 $|x|^{\frac{2}{3}\sigma} \leqslant R$。由假设 $\sigma \in 3\mathbb{N}$ 可推出 $q\sigma \in \mathbb{N}$，进一步

应用此规则可得

$$\begin{aligned}|(-\Delta)^{q\sigma}\psi_R(t,x)| &\lesssim \sum_{k=1}^{2q\sigma}\left[\chi\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^{m-k}\sum_{|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_k|=2q\sigma}\left|\partial_x^{\gamma_1}\chi\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right|\cdots\left|\partial_x^{\gamma_k}\chi\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right|\\ &\lesssim \sum_{k=1}^{2q\sigma}\left[\chi^*\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^{m-k}|x|^{\frac{2}{3}\sigma k-2q\sigma}R^{-k}\\ &\lesssim R^{-3q}\left[\chi^*\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^{m-2q\sigma}=R^{-3q}[\psi_R^*(t,x)]^{\frac{m-2q\sigma}{m}},\end{aligned}$$

其中，我们在最后一行再次使用了 $\frac{R}{2}\leqslant|x|^{\frac{2}{3}\sigma}\leqslant R$。因此，类似地可得

$$\begin{aligned}|(-\Delta)^{\sigma}\psi_R(t,x)|&\lesssim R^{-3}[\psi_R^*(t,x)]^{\frac{m-2\sigma}{m}},\\ |(-\Delta)^{\frac{2}{3}\sigma}\psi_{R,t}(t,x)|&\lesssim R^{-3}[\psi_R^*(t,x)]^{\frac{m-\frac{4}{3}\sigma-1}{m}},\\ |(-\Delta)^{\frac{1}{3}\sigma}\psi_{R,tt}(t,x)|&\lesssim R^{-3}[\psi_R^*(t,x)]^{\frac{m-\frac{2}{3}\sigma-2}{m}}.\end{aligned}$$

结合 $\sigma\in3\mathbb{N}$ 对上述估计进行总结可得

$$\left|\left(-\partial_t^3+\mathscr{A}+\eta\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\partial_t^2-\eta\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}\partial_t\right)\psi_R(t,x)\right|\lesssim R^{-3}[\psi_R^*(t,x)]^{1-\frac{2\sigma}{m}}.$$

为此，对 (57) 在 $(0,\ T_{\epsilon,\ \mathrm{w}})$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p\psi_R(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\lesssim R^{-3}\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|[\psi_R^*(t,x)]^{1-\frac{2\sigma}{m}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &+\int_{\mathbb{R}^n}\left(u_{tt}(t,x)\psi_R(t,x)+2u_t(t,x)\psi_{R,t}(t,x)+u(t,x)\psi_{R,tt}(t,x)\right)\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\\ &+\int_{\mathbb{R}^n}\left(\eta u_t(t,x)\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\psi_R(t,x)+\eta u(t,x)\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\psi_{R,t}(t,x)\right)\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\\ &+\int_{\mathbb{R}^n}\left(\eta u(t,x)\mathscr{A}^{\frac{2}{3}}\psi_R(t,x)-3u_t(t,x)\psi_{R,t}(t,x)-2\eta u(t,x)\mathscr{A}^{\frac{1}{3}}\psi_{R,t}(t,x)\right)\mathrm{d}x\Big|_{t=0}^{t=T_{\epsilon,\mathrm{w}}}.\end{aligned}$$

不失一般性，假设寿命满足

$$\sqrt{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}>R_0:=\sqrt{2}r_0^{\frac{1}{3}\sigma}$$

因此，关于 $R\in[R_0^2,T_{\epsilon,\mathrm{w}})$，我们注意到

$$\frac{T_{\epsilon,\mathrm{w}}+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\geqslant1\ \text{ for }\ x\in\mathbb{R}^n,\ \text{ and }\ \frac{|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\leqslant\frac{r_0^{\frac{2}{3}\sigma}}{R_0^2}=\frac{1}{2}\ \text{ for }\ x\in B_{r_0}.$$

对于这些情形，我们知道 $\partial_t^k\psi_R(T_{\epsilon,\ \mathrm{w}},\ x)=0$，其中 $k=0,\ 1,\ 2$ 对于 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立；此外，$\psi_R(0,\ x)=1$，且 $\partial_t^k\psi_R(0,\ x)=0$，其中 $k=1,\ 2$ 对于 $x\in B_{r_0}$ 成立。得益于初始数据在球 B_{r_0} 中的支撑条件，可得

$$\begin{aligned}&\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_2(x)\mathrm{d}x+\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p\psi_R(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad\lesssim R^{-3}\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|[\psi_R^*(t,x)]^{1-\frac{2\sigma}{m}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\quad\lesssim R^{(1+\frac{3n}{2\sigma})\frac{1}{p'}-3}\left(\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p[\psi_R^*(t,x)]^{p-\frac{2\sigma p}{m}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}\tag{58}$$

其中我们使用了与.....相关的霍尔德不等式

$$\operatorname{supp}\psi_R^*(t,x)\subset\left([0,R]\times B_{R^{\frac{3}{2\sigma}}}\right)\setminus\left\{(t,x):\ t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}\leqslant\tfrac{R}{2}\right\}.$$

现在引入辅助泛函

$$Y_p(R):=\int_0^R y_p(r)r^{-1}\mathrm{d}r\ \ \text{with}\ \ y_p(r):=\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p[\psi_r^*(t,x)]^{p-\frac{2\sigma p}{m}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

令 $\tau=\frac{1}{r}(t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma})$ 为新的积分变量，根据 $\chi(\tau)$ 的支撑条件和单调不增性，我们可以推出

$$\begin{aligned}
Y_p(R)&=\int_0^R\left(\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p[\psi_r^*(t,x)]^{p-\frac{2\sigma p}{m}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)r^{-1}\mathrm{d}r\\
&\leqslant\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p\left(\int_{(t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma})/R}^{\infty}[\chi^*(\tau)]^{(m-2\sigma)p}\tau^{-1}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p\sup_{r\in(0,R)}\left[\chi^*\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{r}\right)\right]^{(m-2\sigma)p}\int_{1/2}^1\tau^{-1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant\ln 2\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p\left[\chi^*\left(\tfrac{t+|x|^{\frac{2}{3}\sigma}}{R}\right)\right]^{(m-2\sigma)p}\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

因为 $m>2\sigma$。利用 $\chi^*(\tau)\leqslant\chi(\tau)$，可得

$$Y_p(R)\lesssim\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p[\psi_R(t,x)]^{p-\frac{2\sigma p}{m}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p\psi_R(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\tag{59}$$

通过取 $m>\max\{2\sigma,n+\frac{2}{3}\sigma\}$，这是由于我们考虑的临界情形 $p=p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)$。回顾 $Y_p(R)=y_p(R)R^{-1}$，并结合目前为止的 (58) 和 (59)，我们得到

$$\left(\epsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_2(x)\mathrm{d}x+Y_p(R)\right)^p\lesssim y_p(R)=RY_p'(R)\tag{60}$$

for $R\in[R_0^2,T_{\epsilon,\mathrm{w}})$。事实上，对 (60) 中的 $[R_0,R]$ 积分，我们有 e

$$Y_p(R)\gtrsim\epsilon^{p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)}\left|\int_{\mathbb{R}^n}u_2(x)\mathrm{d}x\right|^p\int_{R_0}^R r^{-1}\mathrm{d}r\geqslant C_{u_2,p}\,\epsilon^{p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)}\ln R\tag{61}$$

在符号条件 (7) 下。(60) 的另一种观点表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[\frac{1}{1-p}[Y_p(R)]^{1-p}\right]=[Y_p(R)]^{-p}Y_p'(R)\gtrsim R^{-1}.$$

对最后一个不等式在 $[\sqrt{R},R]$ 上积分，得到

$$\ln R\lesssim\frac{1}{p-1}\left([Y_p(\sqrt{R})]^{1-p}-[Y_p(R)]^{1-p}\right)\lesssim[Y_p(\sqrt{R})]^{1-p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)}.\tag{62}$$

请记住，$p_{\mathrm{crit}}(n,\ \sigma)>1$。结合 (61) 和 (62)，可得

$$\ln R\lesssim C\epsilon^{p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)(1-p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma))}(\ln R)^{1-p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)},$$

因此，

$$\ln\sqrt{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}=\lim_{R\uparrow\sqrt{T_{\epsilon,\mathrm{w}}}}\ln R\leqslant C\epsilon^{-(p_{\mathrm{crit}}(n,\sigma)-1)}.$$

最后，对指数函数取作用，完成了我们的证明。

致谢

作者的部分研究工作得到了国家自然科学基金委员会项目（编号：12171317）的资助。

参考文献

[1] F.D.M. Bezerra, L.A. Santos，面向时间三阶抽象演化方程的算子分数次幂方法。《微分方程杂志》269（2020），第7期，5661–5679。[2] F.D.M. Bezerra, A.N. Carvalho, L.A. Santos，某些三阶演化微分方程的适定性：一种半群方法。《演化方程杂志》22（2022），第2期，论文编号53。[3] M. Bongarti, C. Sutthirut, I. Lasiecka，非线性声学中 Jordan Moore-Gibson-Thompson 方程的弛豫时间趋零动力学。《演化方程杂志》21（2021），3553–3584。[4] M. D'Abbicco, M.R. Ebert，结构阻尼半线性演化方程临界指数中的一种新现象。非线性分析149（2017），1–40。[5] M. D'Abbicco, K. Fujiwara，拉普拉斯算子分数次幂演化方程的测试函数方法。非线性分析202（2021），论文编号112114。[6] M. D'Abbicco, S. Lucente, M. Reissig，具有有效阻尼的半线性波动方程。《中国数学年刊》B辑34（2013），第3期，345-380。[7] T.A. Dao, M. Reissig， L^1 振荡积分的估计及其在具有σ-演化型结构阻尼的半线性模型中的应用。《离散与连续动力系统》39（2019），第9期，5431–5463。[8] T.A. Dao, M. Reissig，半线性结构阻尼 sigma-演化方程的爆破结果。载于：D. Cicognani, A. Parmeggiani, M. Reissig（编），《偏微分方程中的异常现象》，Springer INdAM丛书，2020。[9] H. Dietert, D. Gérard-Varet，无任何结构假设下 Prandtl方程的适定性。《偏微分方程年刊》5（2019），第1期，论文编号8。[10] M.R. Ebert, G. Girardi, M. Reissig，半线性经典阻尼波动方程中非线性项的临界正则性。《数学年刊》378（2020），第3-4期，1311–1326。[11] M. Escobedo, M.A. Herrero，半线性反应扩散系统的有界性与爆破。《微分方程杂志》89（1991），第1期，176–202。[12] M. Escobedo, H.A. Levine，弱耦合反应扩散方程组的临界爆破与整体存在指数。《理性力学与分析档案》129（1995），第1期，47–100。[13] H.O. Fattorini，《柯西问题》。载于《数学及其应用百科全书》第18卷。Addison-Wesley出版公司：马萨诸塞州雷丁，1983。[14] H. Fujita，关于 $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$柯西问题解的爆破。《东京大学理学部纪要》第一辑13（1966），109–124。[15] K. Fujiwara, M. Ikeda, Y. Wakasugi，弱耦合半线性热方程组解的寿命。《东京数学杂志》43（2020），第1期，163–180。[16] D. Gérard-Varet, E. Dormy，Prandtl方程的不适定性。《美国数学会杂志》23（2010），第2期，591–609。[17] H. Hajaiej, L. Molinet, T. Ozawa, B. Wang，分数次 Gagliardo-Nirenberg 不等式成立的充要条件及其在 Navier-Stokes 方程和广义玻色子方程中的应用，调和分析与非线性偏微分方程，159–175，RIMS Kôkyûroku Bessatsu，B26，数学科学研究所（RIMS），京都，2011。

[18] M. Ikeda, T. Ogawa，具有临界非线性项的阻尼波动方程解的寿命。《微分方程杂志》261（2016），第3期，1880–1903。[19] M. Ikeda, M. Sobajima，通过测试函数方法得到某些临界半线性抛物型、色散型和双曲型方程解寿命的精确上界。非线性分析182（2019），57–74。[20] M. Ikeda, Y. Wakasugi，不具有规范不变性的非线性薛定谔方程的 L^2-解的小数据爆破。《微分与积分方程》26（2013），第11-12期，1275–1285。[21] R. Ikehata，强阻尼波动方程的渐近剖面。《微分方程杂志》257（2014），第6期，2159–2177。[22] R. Ikehata, H. Takeda，结构阻尼波动方程解的渐近剖面。《动力系统与微分方程杂志》31（2019），第1期，537–571。[23] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, M.K. Pospieszalska，高强度超声中非线性 Jordan-Moore-Gibson-Thompson 方程的适定性与能量指数衰减。《数学模型与方法应用科学》22（2012），第11期，1250035，34页。[24] B. Kaltenbacher, V. Nikolić，三阶线性与非线性声学方程的无黏极限。《SIAM应用数学杂志》81（2021），第4期，1461–1482。[25] N.-A. Lai, Y. Zhou，高维中具有 Fujita 临界幂的半线性阻尼波动方程的精确寿命估计。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）123（2019），229–243。[26] T.T. Li, Y. Zhou，$\Box u + u_t = |u|^{1+\alpha}$解的破裂。《离散与连续动力系统》1（1995），第4期，503–520。[27] W.N. do Nascimento, A. Palmieri, M. Reissig，具有幂非线性以及尺度不变时变质量和耗散的半线性波动模型。数学消息290（2017），第11-12期，1779–1805。[28] D.T. Pham, M. Kainane Mezadek, M. Reissig，半线性结构阻尼 σ-演化模型的整体存在性。《数学分析与应用杂志》431（2015），第1期，569–596。[29] R. Racke, B. Said-Houari，三维 Jordan-Moore-Gibson-Thompson 方程柯西问题的整体适定性。《当代数学通讯》23（2021），第7期，论文编号2050069，39页。[30] L. Rodino，Gevrey 空间中的线性偏微分算子。世界科学出版公司，新泽西州里弗埃奇，1993。[31] B. Said-Houari，Besov 空间中 Jordan-Moore-Gibson-Thompson 方程的整体存在性。《演化方程杂志》22（2022），32。[32] G. Todorova, B. Yordanov，阻尼非线性波动方程的临界指数。《微分方程杂志》174（2001），第2期，464–489。[33] Y. Wakasugi，具有时空依赖阻尼的半线性波动方程的小数据整体存在性。《数学分析与应用杂志》393（2012），第1期，66–79。[34] Q.S. Zhang，阻尼非线性波动方程的一个爆破结果：临界情形。《巴黎科学院院刊》数学辑（第I辑）333（2001），第2期，109–114。