宽带毫米波 MIMO 系统中的感知辅助信道估计

Rakesh Mundlamuri*、Rajeev Gangula†、Christo Kurisummoottil Thomas‡、Florian Kaltenberger* 和 Walid Saad‡
*通信系统系，EURECOM，法国比奥
†无线物联网研究所，东北大学，美国波士顿
‡ Wireless@VT，布拉德利电气与计算机工程系，弗吉尼亚理工大学，美国弗吉尼亚州阿灵顿

arXiv:2302.02065v1 [cs.IT] 4 Feb 2023

摘要——**本文研究毫米波（mmWave）多输入多输出（MIMO）系统的上行信道估计问题。众所周知，随着天线数量和带宽的增加，信道估计所需的导频开销和计算复杂度也会增加。为此，本文提出的方法利用感知信息辅助基站进行信道估计。感知信息包含对环境中散射体位置的估计。本文提出一种同时加权正交匹配追踪（SWOMP）-稀疏贝叶斯学习（SBL）算法，可将感知信息高效地融入通信信道估计过程。该框架能够应对以下情形：a）感知信息中的散射体与通信信道无关；b）散射体位置存在误差。仿真结果表明，所提出的感知辅助信道估计算法仅需少量导频开销，即可在宽带场景下取得良好性能。最后，本文推导了 SBL 中角度估计和多径信道增益的克拉美-罗下界（CRB），为所提算法的局部可辨识性提供了有价值的见解。**

一、引言

毫米波和太赫兹频段被认为是第五代移动通信和第六代移动通信蜂窝系统的关键组成部分 [1]。然而，随着工作频率升高，路径损耗和吸收损耗也会增加。尽管存在这些缺点，这种方案能够在较小区域内部署更多天线，进而使网络利用波束成形技术来补偿在这些频段工作所造成的损耗。然而，这些多天线技术带来的增益取决于能否准确估计信道状态信息（CSI）。

在宽带上、跨多个天线估计信道系数，会因发送导频符号所占用的资源而产生显著开销。然而，研究发现，毫米波信道具有稀疏特性，在角度域和时延域中只有少数可分辨的多径 [2]和 [3]。利用这种稀疏性，已有多项研究提出基于压缩感知（CS）的方法，用于毫米波多输入多输出（MIMO）系统中的信道估计和预编码器设计[4]–[9]。然而，将这些方法用于宽带大规模 MIMO 系统时，由于需要对如此规模的天线阵列逐个子载波求逆大型矩阵，计算复杂度会更高。

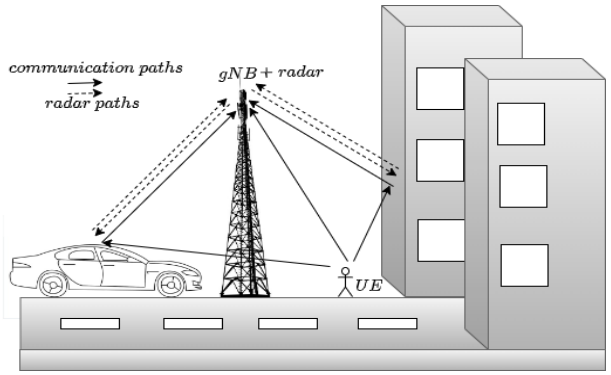

图1. 上行多径场景及共址雷达。

稀疏无线信道由少数几何多径传播参数描述，因此不禁要问：物理传播环境的信息，例如散射体或反射体的位置，能否用于信道估计？事实上， [10] 中的早期研究之一就利用了这一关键观察。作者从一个频段的 CSI测量中提取物理多径参数，然后利用这些参数构建另一个频段的 CSI。然而，该方法没有使用额外的导频来辅助信道估计，并且假设提取的多径参数是精确的。

另一方面，雷达和通感一体化技术的发展使通信设备能够实时获取动态无线电环境地图。 [11]–[16]中的已有工作利用此类雷达环境侧信息进行波束预测和波束对齐，从而缩短车载系统中的初始同步时间。近期，[17] 中的一项工作尝试利用雷达感知信息解决大规模 MIMO 系统中的信道估计问题。作者根据基站（gNB）处共址雷达采集的测量数据，获取周围环境中散射体的位置和速度。随后，从雷达感知信息中提取时延和角度等多径参数，再利用这些推断出的雷达多径参数初始化基于正交匹配追踪（OMP）的信道估计算法中的字典。然而，该方法假设从雷达中提取的多径参数不存在误差。现有关于基于雷达感知的大规模 MIMO 系统信道估计的研究存在以下局限。首先，基于感知的信道估计

算法可能具有有限的角度和时延分辨率，导致信道估计不精确，并影响系统性能。其次，为感知和通信使用独立频谱会造成资源利用效率低下。不过，可以采用全双工技术[18], 来克服这一问题，但这需要高效的信号处理来抑制自干扰分量。第三，在实践中实现基于感知的信道估计可能较为困难，因为射频（RF）组件数量不断增加，计算复杂度也随之提高；在天线众多的大规模 MIMO 系统中，这一问题尤为突出。这些局限表明，仍需进一步研究，以提升大规模 MIMO 系统中基于感知的信道估计的准确性、效率和鲁棒性。具体而言，本文提出了新颖的信号处理方法，以弥补上述角度和时延分辨率有限的问题。

本文研究宽带毫米波 MIMO 系统中的信道估计问题。在该系统中，如图1所示，gNB处的共址雷达获取的感知信息用于减少导频开销。本文的贡献总结如下：

1) 不同于 [17], ，我们假设雷达提供的感知信息可能存在误差。我们还考虑雷达检测到的散射体可能与通信信道无关的情况。

2) 为解决这些问题，我们提出一种基于同步加权正交匹配追踪（SWOMP）和稀疏贝叶斯学习（SBL）的新型信道估计方法，该方法纳入雷达提供的不完美感知信息。

3) 我们还通过推导基于SBL联合估计到达角（AoA）和路径增益的克拉美-罗下界（CRB），对使用SBL进行参数估计的局部可辨识性进行分析。

II. 系统模型

我们考虑这样一种场景：用户设备（UE）与基站（gNB）进行通信，且散射体位于两者之间。散射体表示为 $\mathcal{S}_r$ 和 $|\mathcal{S}_r| = L_r$。假设这些散射体中只有一部分（$\mathcal{S}_c \subseteq \mathcal{S}_r$、$|\mathcal{S}_c| = L_c$）会影响 UE 与 gNB 之间的通信信道。集合 $\mathcal{S}_c$ 未知，但我们假设感知系统提供了集合 $\mathcal{S}_r$ 中散射体的位置估计。这代表一种场景：散射体位于用户设备的盲区内，但可由与 gNB 共址的感知系统检测到，如图 2 所示。

A. 感知信息

我们假设在 gNB 处通过以下方式之一完成感知：使用在独立频谱 [19] 上工作的共址雷达，或采用通信感知一体化框架 [20]。gNB 处可用的感知信息表示为

$$\{(\tau_\ell^{rad} + e_\tau, \theta_l + e_\theta) \mid l = 1, 2, \ldots, L_r\},$$

其中，τ_ℓ^{rad}和 θ_ℓ 分别表示来自 gNB 的第 l 个散射体的往返时延和角度。估计参数的误差假设服从高斯分布，即 $e_\theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2)$ 和 $e_\tau \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\tau^2)$。雷达空间信息可能因噪声以及雷达无法充分分辨时延和/或角度而产生误差。

B. 通信模型

我们考虑一个毫米波正交频分复用（OFDM）系统，其中用户设备配备单根天线，gNB 配备 M 根天线。gNB 配备均匀线性阵列（ULA），相邻天线间距为半个波长。

用户设备发送 $P \ll K$ （窄带）导频，其中 K 是用于通信的子载波总数。经过下变频、零前缀移除、OFDM解调以及与导频相关后，第 k个子载波处接收到的复基带信号为

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{h}[k] + \boldsymbol{n}[k], \tag{1}$$

其中，$k = 0$ 至 $K-1$、$\boldsymbol{h}[k] \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ 表示基带信道，$\boldsymbol{n}[k] \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_M)$ 是一个圆对称复高斯分布加性噪声向量。我们将子载波 k 处接收信号的信噪比（SNR）定义为$\|\boldsymbol{h}[k]\|^2/\sigma^2$。接下来，我们介绍毫米波信道模型生成，该模型是多径分量的参数化函数。

C. 信道模型

考虑具有 N_c个时延抽头和 $L_c + 1$ 条路径 [7] 的频率选择性几何信道模型。该信道由视距（LoS）分量以及由前文所述散射体产生的 L_c 个（尚未知的）反射组成。第 d个时延抽头建模为

$$\boldsymbol{h}_d = \sqrt{\frac{M}{L_c+1}} \sum_{\ell=0}^{L_c} \alpha_\ell p(dT_s - \tau_\ell) \boldsymbol{a}(\theta_\ell), \tag{2}$$

其中，$p(.)$ 为脉冲成形滤波器，T_s 为采样间隔，α_ℓ、τ_ℓ、θ_ℓ 分别表示第 l 条路径的路径增益、时延和到达角(AoA)。第 l 条路径的接收阵列导向矢量记为 $\boldsymbol{a}(\theta_\ell) \in \mathbb{C}^{M\times 1}$。索引 ℓ=0 始终对应视距路径。信道可简洁地表示为 $\boldsymbol{h}_d = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_d$, 其中$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}(\theta_0) \ \boldsymbol{a}(\theta_1) \ \ldots \ \boldsymbol{a}(\theta_{L_c})] \in \mathbb{C}^{M\times(L_c+1)}$ 包含接收端导向矢量，且

$$\boldsymbol{\Delta}_d = \left[\ \alpha_0 p(dT_s - \tau_0), \cdots, \alpha_{L_c} p(dT_s - \tau_{L_c})\ \right]^{\mathrm{T}}. \tag{3}$$

对时延域信道进行 K 点离散傅里叶变换 (DFT)，即可得到频域信道表示；子载波 k 上的信道可写为

$$\boldsymbol{h}[k] = \sum_{d=0}^{N_c-1} \boldsymbol{h}_d \exp\left(-\frac{j2\pi kd}{K}\right) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}[k], \tag{4}$$

且 $\boldsymbol{\Delta}[k]$ 由 $\boldsymbol{\Delta}[k] = \sum_{d=0}^{N_c-1} \boldsymbol{\Delta}_d \exp\left(-\frac{j2\pi kd}{K}\right)$ 给出。进一步将式 (3) 中的 $\boldsymbol{\Delta}_d$ 代入，可得

$$\boldsymbol{\Delta}[k] = [\beta_{k,0}\alpha_0, \beta_{k,1}\alpha_1, \ldots, \beta_{k,L_c}\alpha_{L_c}]^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

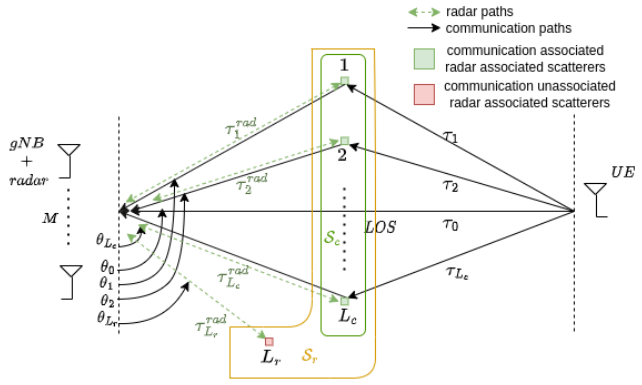

图 2. 散射体环境及感知信息。

其中 $\beta_{k,\ell}=\sum_{d=0}^{N_c-1} p(dT_s-\tau_\ell)\exp\left(-\frac{j2\pi kd}{K}\right)$。将 $\boldsymbol{\Delta}[k]$ 代入式 (4)，即可得到频域信道$\boldsymbol{h}[k]$ 的紧凑形式

$$\boldsymbol{h}[k]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_k\boldsymbol{\alpha}, \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_k$=diag$\left(\beta_{k,0},\beta_{k,1},\ldots,\beta_{k,L_c-1}\right)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{L_c}]^{\mathrm{T}}$。进一步将 $\boldsymbol{h}[k]$ 代入式 (1)，接收频域信号 $\boldsymbol{y}[k]$ 可写为

$$\boldsymbol{y}[k]=\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{n}[k], \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_k\in\mathbb{C}^{M\times(L_c+1)}$。

III. 感知辅助信道估计

本节将介绍一种信道估计框架，该框架结合了 gNB 可用的感知信息。根据式 (7)，向量化形式的接收 P 导频为

$$\boldsymbol{y}=\left[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}[0]\,\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}[1]\,\ldots\,\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}[P-1]\right]^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{y}=\underbrace{\left[\boldsymbol{\Psi}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_1^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\Psi}_{P-1}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{n}, \tag{9}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{\Omega}\in\mathbb{C}^{MP\times(L_c+1)}$ 包含多径分量的时延-角度信息，$\boldsymbol{n}$ 为向量化噪声 $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}[0]\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}[1]\cdots\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}[P-1]]^{\mathrm{T}}$。

此外，感知信息可用作多径时延和角度的初始估计。令 $\boldsymbol{\theta}=[\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{L_r}]$，其中 θ_0 是与视距路径相关的角度，而 $\theta_\ell,\ l\in[1,L_r]$ 是根据感知信息获得的第 l 条路径的到达角。gNB 与第 l 个 $l\in[1,L_r]$ 散射体之间的往返传播时延记为 τ_ℓ^{rad}。定义 $\tilde{\boldsymbol{\tau}}=[\tau_0,\tilde{\tau}_1,\tilde{\tau}_2,\ldots,\tilde{\tau}_{L_r}]$，其中 τ_0 是用户设备与 gNB 之间的时延，而第 ℓ 条通信路径的时延可利用雷达时延 τ_ℓ^{rad} 估计为

$$\tilde{\tau}_\ell=\tau_\ell^{rad}/2+\tau'_\ell, \tag{10}$$

其中，τ'_ℓ 是根据图 3 所示的三角形余弦定理得到的，

$$\tau'_\ell=\sqrt{\tau_0^2+\left(\tau_\ell^{rad}/2\right)^2-\tau_0(\tau_\ell^{rad})cos(\tilde{\theta}_\ell-\theta_0)}. \tag{11}$$

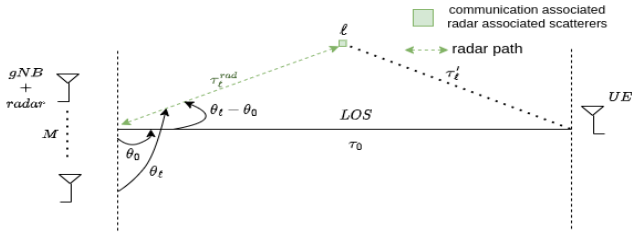

图3. 根据雷达时延估计通信时延。

与式 (9) 中的矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 类似，利用感知信息（$\tilde{\boldsymbol{\tau}}$，$\tilde{\boldsymbol{\theta}}$），我们可以构造矩阵 $\bar{\boldsymbol{\Omega}}\in\mathbb{C}^{MP\times(L_r+1)}$，该矩阵能够捕获 L_r+1 条路径的时延-角度信息。正如前文所述，L_r 个散射体中只有一部分 L_c 包含在通信信道中，而 L_c未知。可以将其数学表示为：

$$\boldsymbol{\Omega}=\bar{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}, \tag{12}$$

其中，通过选取单位矩阵 $\boldsymbol{I}_{L_r+1}$的 L_c+1 列得到 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{(L_r+1)\times(L_c+1)}$。包含在 $\boldsymbol{B}$ 中的列索引对应于通信信道和感知信息中均存在的路径。未知误差项记为 $\boldsymbol{E}$。

A. 问题表述

利用接收到的导频信号 (9) 和以 (12) 形式给出的感知信息，基于最大后验（MAP）的信道估计问题可表述为：

$$[\boldsymbol{\Omega}^*,\boldsymbol{\alpha}^*]=\arg\max_{\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\alpha}} p(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{y}), \tag{13}$$

其中，$p(.)$ 表示概率分布，$\boldsymbol{\alpha}$ 是信道增益向量。

通常而言，所讨论的优化问题难以求解，原因有二：a) 难以获得分布 $p(\boldsymbol{\Omega}\ \boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{y})$；b) 路径关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 具有组合性质，且误差未知。一种传统方法是放宽该问题，并采用压缩感知方案（例如稀疏贝叶斯学习）求解，同时考虑由精细间隔的角度和时延构成的联合字典矩阵。然而，这种方法的复杂度随字典维度呈立方增长，而字典必须采用精细间隔，才能减轻栅格失配误差。因此，我们提出一种两阶段 SWOMP-SBL算法，以克服如此高的复杂度。

IV. SWOMP-SBL算法

所提出的算法分为两个阶段。第一阶段基于感知信息，使用基于SWOMP的算法找出与通信相关的路径及其对应的到达角。随后，基于这些选定的路径，使用SBL推断算法对时延和相应的信道增益进行更精细的估计$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$。该两阶段算法的示意图如图所示。

g 4.

A. SWOMP阶段

该算法初始化时假设，感知信息中的所有L_r+1 路径均存在于$\bar{}$通信信道中。利用到达角 $\boldsymbol{\theta}$ 构建

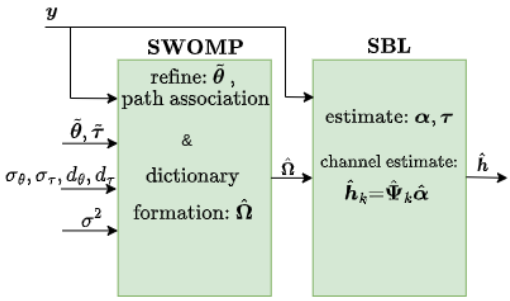

图4. SWOMP-SBL算法。

角度字典 $\boldsymbol{A}'$，如算法1的步骤2和3所述。SWOMP算法 [21] 根据接收信号 $\boldsymbol{y}$，输出与角度字典 $\boldsymbol{A}'$相对应的最大数量的相关路径 $\boldsymbol{\theta}$。噪声方差 σ^2 用作SWOMP中的停止条件，由此估计出与信道相关的所有精化角度及其对应的路径索引 $\hat{\boldsymbol{\chi}}$。然而，要进一步精化时延并估计信道增益，还需要一个字典矩阵$\boldsymbol{\Omega}$。根据估计得到的 $\boldsymbol{\chi}$可获得路径关联矩阵 $\boldsymbol{B}$，但由于路径索引已足以构建字典矩阵$\boldsymbol{\Omega}$，因此不再使用该矩阵。利用SWOMP得到的精化到达角 $\boldsymbol{\theta}$ 以及与相关时延对应的精细网格字典矩阵，构建$\boldsymbol{\Omega}$。路径关联由路径索引 $\boldsymbol{\chi}$ 给出，并将精化角度映射到对应的时延。算法详情见算法1。在下一阶段，使用稀疏贝叶斯学习，基于得到的$\boldsymbol{\Omega}$ 估计时延 $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ 及其对应的信道增益 $\boldsymbol{\alpha}$ $\hat{}$。SWOMP每次迭代的计算复杂度为$MP(d_\theta L')^2 + MPd_\theta L_r + MPd_\theta L'$。

算法1 SWOMP 阶段

要求： $\boldsymbol{y}$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}, d_\theta, d_\tau, \sigma_\theta, \sigma_\tau, \sigma^2$

1: 初始化： $\boldsymbol{\chi} = \{\}$

2: $\boldsymbol{\theta}'_l = \tilde{\theta}_l - 2\sigma_\theta : \frac{4\sigma_\theta}{d_\theta} : \tilde{\theta}_l + 2\sigma_\theta \in \mathbb{R}^{1\times d_\theta}$

3: $\boldsymbol{A}' = [a(\boldsymbol{\theta}'_0)\ \ a(\boldsymbol{\theta}'_1)\ \ \cdots\ \ a(\boldsymbol{\theta}'_{L_r})] \in \mathbb{C}^{M\times d_\theta(L_r+1)}$

4: $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{SWOMP}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}', \sigma^2)$

5: $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{1\times L'}$ $\hat{}$是 $\{\theta_\ell \mid \ell = 0, 1, \cdots, L'-1\}$

6: **路径关联：**

7: **对于** $\ell = 0 : L'-1$ **执行**

8: $p = \arg\min\{|\theta_\ell \mathbf{1} - \boldsymbol{\theta}|\}$ ▷ $\mathbf{1} \in 1^{1\times(L_r+1)}$

9: $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi} \cup p$ ▷ p = 路径索引

10: **结束循环**

11: $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\chi}) \in \mathbb{R}^{1\times L'}$是 $\{\tilde{\tau}_\ell(\boldsymbol{\chi}) \mid \ell = 0, 1, \cdots, L'-1\}$ ▷时延在第 9 步中获得的对应路径索引

12: $\hat{}\boldsymbol{\tau}_\ell = \tilde{\tau}_\ell(\boldsymbol{\chi}) - 2\sigma_\tau : \frac{4\sigma_\tau}{d_\tau} : \tilde{\tau}_\ell(\boldsymbol{\chi}) + 2\sigma_\tau \in \mathbb{R}^{1\times d_\tau}$

13: $\hat{}\boldsymbol{\tau} = [\hat{}\boldsymbol{\tau}_0\ \hat{}\boldsymbol{\tau}_1\ \cdots \hat{}\boldsymbol{\tau}_{L'-1}] \in \mathbb{R}^{1\times d_\tau L'}$

$\hat{}$ 14: 使用 $\hat{}\boldsymbol{\tau}$ 得到的 $\boldsymbol{\beta}_k$ 记为 $\boldsymbol{\beta}_k \in \mathbb{C}^{d_\tau L'\times d_\tau L'}$

15: $\hat{}\ \boldsymbol{A}_\ell = [a(\hat{}\theta_\ell)a(\hat{}\theta_\ell)\ \cdots a(\hat{}\theta_\ell)] \in \mathbb{C}^{M\times d_\tau}$ ▷ 重复 d_τ 次

16: $\hat{}\ \boldsymbol{A} = [\hat{}\boldsymbol{A}_0\ \ \hat{\boldsymbol{A}}_1\ \ \cdots\ \ \hat{\boldsymbol{A}}_{L'-1}] \in \mathbb{C}^{M\times d_\tau L'}$

17: $\hat{}\ \boldsymbol{\Psi}_k = \hat{}\boldsymbol{A}\hat{}\boldsymbol{\beta}_k \in \mathbb{C}^{M\times d_\tau L'}$

18: $\hat{}\boldsymbol{\Omega} = [\hat{}\boldsymbol{\Psi}_0^{\mathrm{T}}\hat{}\boldsymbol{\Psi}_1^{\mathrm{T}}\cdots\hat{}\boldsymbol{\Psi}_{P-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{MP\times d_\tau L'}$

B. SBL 阶段

$\hat{}$回顾使用所得 $\boldsymbol{\Omega}$ 的测量方程，$\hat{}$我们写作 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{n}$。我们使用稀疏贝叶斯学习（SBL）构建（$\boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}$）的估计方法如下。

SBL是一种II类最大似然（ML）估计方法，用于获得信道估计 [22], [23]。在该方法中，$\boldsymbol{\alpha}$ 被视为隐变量，并根据观测值求得后验统计量。SBL假设 $\boldsymbol{\alpha}$的各个元素服从复高斯先验分布，并将其写为 $p(\alpha_i) = \frac{\gamma_i^{-\gamma_i}}{\pi}(\alpha_i)^2$. 超参数 α_i 也通过推断过程进行估计。假设 γ_i 服从伽马分布，$\mathcal{G}(\gamma_i; a, b) = \Gamma((\gamma_i))^{-1}(\gamma_i)^{a-1}e^{-b\gamma_i}b^{\gamma_i}$。定义 $\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\gamma})$，其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 γ_i的向量。假设噪声服从复高斯分布，$\mathcal{CN}(0, \frac{1}{\zeta}\mathrm{I})$。假设 ζ的先验分布为伽马分布，即 $p_\zeta(\zeta) = \mathcal{G}(\zeta; c, d)$，其中 c, d为已知量。注意，在无信息先验的情况下，a 和 b 的值分别为1和0。现在需要求得 $\boldsymbol{\alpha}$ 及超参数 $\boldsymbol{\gamma}, \zeta$ 的后验分布。由于先验和噪声均为高斯分布，因此求取 $\boldsymbol{\alpha}$ 的后验统计量十分直接。但计算 $\boldsymbol{\gamma}$ 需要计算边缘概率分布 $p(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\gamma}, \zeta)$并将其最大化（或者）相对于 $\boldsymbol{\gamma}$, ζ。这一过程称为证据最大化或II型最大似然估计。

为了解决这一问题，采用期望最大化（EM）算法，通过对证据的对数 $p(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\gamma}, \zeta)$ 构造下界并迭代地将其最大化。将 $\boldsymbol{\alpha}$ 视为隐变量，在期望（E）步中，计算关于 $p(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\gamma}, \zeta)$ 的 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\alpha})$ 对数似然的期望。在最大化（M）步中，通过最大化 E 步所得函数来计算超参数 $\boldsymbol{\gamma}$, ζ。关于 SBL 和 II型最大似然估计的更多详细信息，参见 [22]。信道估计的详细步骤见算法 2。SBL算法输出信道增益的估计值 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$。利用算法 1 的第 17 步，可通过 $\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{\Psi}_k\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 获得所有 K 个子载波中第 k 个子载波处的信道 $\hat{}\hat{}\hat{}$ 估计值 $\boldsymbol{h}$。文献 [22] 对 SBL算法的收敛性质已有充分研究。简而言之，利用 [22], 中类似的论证可以证明，当噪声方差为零时，所提出的 SBL 会收敛到最稀疏解；无论噪声方差如何，它都会收敛到一个稀疏局部极小值。SBL 每次迭代的计算复杂度为 $(MP)^3 + 2(MP)^2(d_\tau L') + 2(d_\tau L')^2 MP + (d_\tau L')^2 + 4MP(d_\tau L') + (d_\tau L')$。

C. 所提出的稀疏贝叶斯学习的可辨识性：所需的最少窄带导频数?

本小节给出了感知辅助信道估计算法在采用稀疏贝叶斯学习时达到局部可辨识性的条件。此外，此处的分析还给出了使相应信道估计算法具备可辨识性所需的最少导频数。对 $\boldsymbol{\alpha}$ 进行边缘化后，$\boldsymbol{y}[k]$ 的分布可写为

算法 2SBL 阶段

要求： $\boldsymbol{y}$, $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$, $p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y} \mid \widehat{\boldsymbol{\Omega}}\ \boldsymbol{\alpha})$

1: 初始化： $t=0$, $(\widehat{\boldsymbol{\alpha}})^t$ 使用最小二乘估计。

2: **重复**

3: [估计 $\boldsymbol{\alpha}$]

4: $\boldsymbol{\Sigma}_y^t = \frac{1}{\zeta^{t-1}}\boldsymbol{I} + \widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^H$.

5: $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^t = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} - \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\widehat{\ }\boldsymbol{\Omega}^H\left(\boldsymbol{\Sigma}_y^t\right)^{-1}\widehat{\ }\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$。

6: $(\widehat{\boldsymbol{\alpha}})^t = \zeta^{t-1}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^t\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^H\boldsymbol{y}$。

7: [超参数更新]

8: $\gamma_i^t = \frac{2a-1}{\mathbb{E}((\widehat{\alpha}_i)^2)+2b}$。

9: $\zeta^t = \frac{2c-1}{\frac{\mathbb{E}(\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|^2)}{MP}+2c}$ $\widehat{\ }z_i = \boldsymbol{\Omega}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$。

10: **直至**收敛

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}[k]) = \mathcal{CN}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_k)^H + \zeta^{-1}\boldsymbol{I}). \quad (14)$$

若存在某个 $\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1} \neq \boldsymbol{\Gamma}_2^{-1}$，则式 (7) 中的信号模型不可辨识，因为$\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_k)^H$=$\boldsymbol{\Psi}_k\boldsymbol{\Gamma}_2^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_k)^H$ 。 $\boldsymbol{\Psi}_k^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{\Psi}$ 的秩记为 $R \leq (MP)$，其中 $\otimes$表示 Khatri-Rao 积。通过类似的分析[24],，我们可以证明，只要 L（ $\boldsymbol{\alpha}$中的非零元素个数）为 $\mathcal{O}(R^2)$（对于合适的 $\boldsymbol{\Psi}_k^{\mathrm{T}}$, $=\mathcal{O}((MP)^2)$），SBL算法就是可辨识的。对于毫米波系统，与现有5G-NR算法中使用的 $\mathcal{O}(K)$相比，这只需要更少的导频。

接下来，我们考察此处估计模型的克拉美-罗下界。若费舍尔信息矩阵（FIM）非奇异，则可确保基于SBL的参数估计具有局部可辨识性（除置换歧义外） [25]。首先，将估计参数定义为一个向量： $\boldsymbol{\Theta}$=$[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \zeta, \boldsymbol{\tau}]$。费舍尔信息矩阵可划分为

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\alpha}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\gamma}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}} \\ \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\theta}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau}} \\ \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\alpha}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\gamma}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\tau}} \\ \boldsymbol{J}_{\zeta\boldsymbol{\theta}} & \boldsymbol{J}_{\zeta\boldsymbol{\alpha}} & \boldsymbol{J}_{\zeta\boldsymbol{\gamma}} & \boldsymbol{J}_{\zeta\zeta} & \boldsymbol{J}_{\zeta\boldsymbol{\tau}}, \\ \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\theta}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\alpha}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\gamma}} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}$=$\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln p\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{x}\ \partial(,)\ln p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}{}\right)$。费舍尔信息矩阵的每个分块均可推导得出（此处略去详细推导，因为这些推导遵循估计理论中的经典结果）

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} = \mathbb{E}(\zeta)(\boldsymbol{\beta}_k)^H\mathbb{E}(\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}^H\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\beta}_k\mathbb{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}), \quad (16)$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\zeta} = \mathrm{diag}\left(\Re\{(\boldsymbol{\beta}_k)^H\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_k\}\mathbb{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1})\right), \quad (17)$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}} = -\mathbb{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}) + (a-1)\mathbb{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}), \quad (18)$$

$$\boldsymbol{J}_{\zeta\zeta} = -MP\mathbb{E}(\zeta^{-2}) + (c-1)\mathbb{E}(\zeta^{-1}), \quad (19)$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}} = -\mathbb{E}(\boldsymbol{\Gamma}) - (\boldsymbol{\beta}_k)^H(\boldsymbol{A})^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_k\mathbb{E}(\zeta), \quad (20)$$

$$\boldsymbol{J}_{\zeta\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial(\boldsymbol{\beta}_k)^H}{\partial \boldsymbol{\tau}}\mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})^H\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\right)\boldsymbol{\beta}_k\mathbb{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}), \quad (21)$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{E}(\zeta)\frac{\partial(\boldsymbol{\beta}_k)^H}{\partial \boldsymbol{\tau}}\mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})^H\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\right)\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_k}{\partial \boldsymbol{\tau}}\mathbb{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}), \quad (22)$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{E}(\zeta)\frac{\partial(\boldsymbol{\beta}_k)^H}{\partial \boldsymbol{\tau}}\mathbb{E}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})^H\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{\beta}_k\mathbb{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}), \quad (23)$$

和残差t of the terms result to be zero.

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{\zeta\boldsymbol{\theta}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{\zeta\zeta} & \boldsymbol{J}_{\zeta\boldsymbol{\tau}} \\ \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\theta}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

$\boldsymbol{\Theta}$ 的克拉美-罗下界可表示为 $CRB(\boldsymbol{\Theta})$=$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}}^{-1}$。如式 (27) 所推导，利用分块矩阵求逆的舒尔补可写出到达角估计和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的克拉美-罗下界，并可将其简化为

$$CRB(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = \quad (25)$$
$$\begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} - \begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}}\end{bmatrix}\boldsymbol{F}_{\zeta\boldsymbol{\tau}}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}^{-1} \end{bmatrix}.$$

通过类似的推导，可计算 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$, ζ的克拉美-罗下界。由式 (26) 可知，要使 $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\alpha}$局部可辨识，

$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} - \begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}}\end{bmatrix}\boldsymbol{F}_{\zeta\zeta}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\zeta} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$和 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$应分别可逆。

V. 仿真结果

本节通过数值仿真评估我们提出的 SWOMP-SBL 感知辅助信道估计算法的性能。此处考虑的系统参数包括：子载波间隔=120KHz、中心频率=28 GHz、采样率=30.72 MHz、采样周期 T_s=32.552ns、快速傅里叶变换长度 K=256、循环前缀长度N_{cp}=34 以及接收天线数 M=32。导频的生成方式与第五代移动通信标准 [26]中的探测参考信号 (SRS) 类似。正交频分复用网格中的导频位置按照 3GPP 标准 [26] 定义的梳状方式排列，即每隔 K_c 个子载波设置一个导频，如图 5 所示。使用射线追踪工具，根据 gNB 和用户设备的位置生成信道，时延抽头数为 N_c=N_{cp}。错误的感知信息通过 σ_θ=3°和 σ_τ=$\frac{Ts}{6}$生成。

—

在我们的场景中，使用梳状间隔 K_c=16传输大小为 P=16 的导频。利用考虑了 d_θ=500的字典矩阵，通过 SWOMP 对感知信息中的错误到达角进行修正。此外，在考虑 d_τ=50的情况下，使用稀疏贝叶斯学习估计信道增益 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$。图中将采用错误感知信息进行信道估计的过程表示为**SWOMP-SBL + 感知信息误差**。假设 gNB 可获得完美的感知信息，还使用最小二乘法估计信道增益 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$，记为**理想感知信息 + 最小二乘法**。

通过比较使用较少 P 导频时的信道归一化均方误差（NMSE）与传输全部 K = 256 导频（宽带）时得到的信道归一化均方误差，评估所提出算法的性能。使用宽带导频进行信道估计时，分别采用经典最小二乘法和 SWOMP，记为**宽带+最小二乘法** 和**宽带+SWOMP** 。这两种算法使用的字典大小均为 500，并在角度域以 $[0°, 180°]$为间隔离散化。

我们考虑一种场景，其中 $\mathcal{S}_r$ 中感知信息提供的所有散射体可能并非都与

$$CRB(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\alpha}) = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{\theta\zeta} & \boldsymbol{J}_{\theta\tau} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\gamma\gamma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\zeta\zeta} & \boldsymbol{J}_{\zeta\tau} \\ \boldsymbol{J}_{\tau\zeta} & \boldsymbol{J}_{\tau\tau} \end{bmatrix}^{-1}}_{\boldsymbol{F}_{\zeta,\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{\theta\zeta} & \boldsymbol{J}_{\theta\tau} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \right)^{-1}, \tag{27}$$

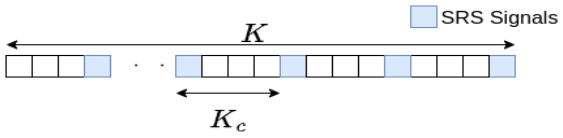

图 5. OFDM符号中的上行SRS梳状结构。

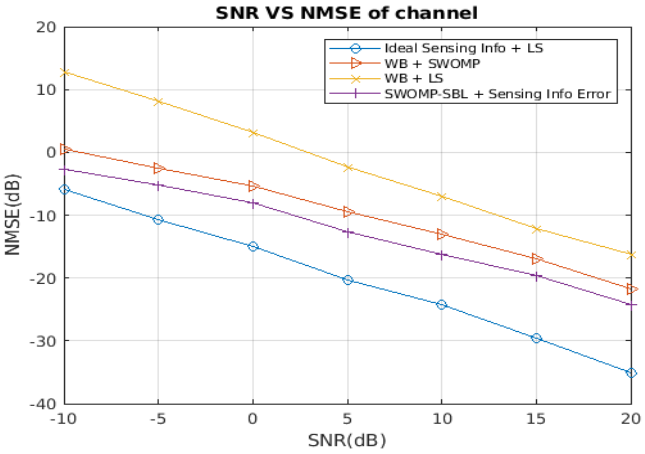

图 6. 点散射体情况下信道估计的信噪比与归一化均方误差。通信信道。仿真中选取的散射体参数为 L_r=10和 L_c=6。从图 6 可以看出，利用感知信息后，与宽带经典最小二乘法和贪婪SWOMP算法相比，基于SWOMP-SBL的信道估计算法在归一化均方误差方面有显著增益，且所需导频更少，并且能够抵御感知信息中的误差。因此，我们将导频开销从 100% 降低至 6.25%。

VI. 结论

本文研究了利用感知信息辅助毫米波MIMO系统上行信道估计的问题。与传统先进系统相比，所提出的SWOMP-SBL 算法结合感知信息，使用更少的上行导频。该方案对错误的感知信息也具有鲁棒性，包括感知信息中的未关联路径。仿真结果验证了，与传统先进算法相比，所提出的 SWOMP-SBL 方案在减少上行导频的同时性能更优。最后，本文推导了未知参数的克拉美-罗下界，并给出了局部可辨识性分析。

参考文献

[1] W. Saad、M. Bennis 和 M. Chen，《第六代移动通信无线系统展望：应用、趋势、技术与开放研究问题》，*IEEE Network*，第34卷，第3期，第134–142页，2020年。[2] S. Rangan、T. S. Rappaport 和 E. Erkip，《毫米波蜂窝无线网络：潜力与挑战》，*IEEE*论文集，第102卷，第3期，第366–385页，2014年。[3] Akdeniz等，《毫米波信道建模与蜂窝容量评估》，IEEE JSAC，第32卷，第6期，第1164–1179页，2014年。[4] P. Schniter 和 A. Sayeed，《毫米波通信的信道估计与预编码器设计：稀疏方法》，发表于 IEEE Asilomar信号、系统与计算机会议，2014年。[5] A. Alkhateeb、O. El Ayach、G. Leus 和 R. W. Heath，《毫米波蜂窝系统的信道估计与混合预编码》，IEEE JSTSP，第8卷，第5期，第831–846页，2014年。[6] J. Lee等，《毫米波通信中混合MIMO系统基于正交匹配追踪的信道估计》，IEEE通信学报，第64卷，第6期，第2370–2386页，2016年。[7] K. Venugopal、A. Alkhateeb、N. Gonz´alez Prelcic 和 R. W. Heath，《基于混合架构的宽带毫米波系统信道估计》，IEEE JSAC，第35卷，第9期，第1996–2009页，2017年。[8] H. Tang、J. Wang 和 L. He，《基于离网稀疏贝叶斯学习的毫米波大规模MIMO上行链路信道估计》，IEEE Wireless Communications Letters，第8卷，第1期，第45–48页，2019年。[9] A. Mishra、A. Rajoriya、A. K. Jagannatham 和 G. Ascheid，《毫米波混合MIMO系统中基于稀疏贝叶斯学习的信道估计》，发表于 IEEE SPAWC，2017年。[10] D. Vasisht、S. Kumar、H. Rahul 和 D. Katabi，《消除下一代蜂窝网络中的信道反馈》，发表于 ACM SIGCOMM会议，2016年。[11] A. Ali、N. Gonz´alez-Prelcic 和 R. W. Heath，《利用带外空间信息进行毫米波波束选择》，IEEE通信学报，第17卷，第2期，第1038–1052页，2018年。[12] A. Ali、N. Gonz´alez-Prelcic 和 A. Ghosh，《利用基站搭载雷达进行毫米波V2I波束训练》，发表于 IEEE雷达会议（RadarConf），2019年。[13] F. Liu、W. Yuan、C. Masouros 和 J. Yuan，《车载链路的雷达辅助预测波束成形：以感知服务通信》，IEEE通信学报，第19卷，第11期，第7704–7719页，2020年。[14] Y. Wang、M. Narasimha等，《具备态势感知的毫米波波束预测：一种机器学习方法》，发表于 IEEE SPAWC，2018年。[15] A. Klautau、N. Gonz´alez-Prelcic 和 R. W. Heath，《用于基于深度学习的毫米波波束选择的激光雷达数据》，IEEE Wireless Communications Letters，第8卷，第3期，第909–912页，2019年。[16] C. Chaccour、W. Saad等，《面向无线太赫兹系统态势感知的感知与通信一体化》，发表于 IEEE ICC，2022年。[17] S. Jiang 和 A. Alkhateeb，《感知辅助的大规模MIMO系统OTFS信道估计》，arXiv预印本 arXiv:2209.11321，2022年。[18] S. A. Hassani、V. Lampu、K. Parashar、L. Anttila、A. Bourdoux、B. v. Liempd、M. Valkama等，《带内全双工雷达通信系统》，IEEE Systems Journal，第15卷，第1期，第1086–1097页，2021年。[19] S. Rao，《毫米波感知简介：调频连续波雷达》，德州仪器（TI）毫米波培训系列，第1–11页，2017年。[20] J. A. Zhang、F. Liu、C. Masouros、R. W. Heath等，《通信与雷达感知一体化信号处理技术综述》，IEEE JSTSP，第15卷，第6期，第1295–1315页，2021年。[21] J. Rodr´ıguez-Fern´andez等，《频率选择性混合毫米波MIMO系统的频域压缩信道估计》，IEEE通信学报，第17卷，第5期，第2946–2960页，2018年。[22] D. Wipf 和 B. Rao，《用于基选择的稀疏贝叶斯学习》，IEEE Transactions on Signal Processing，第52卷，2164，2004 8，2153期，第 – 页。[23] Z. Zhang 和 B. D. Rao，《利用稀疏贝叶斯学习恢复时间相关源向量的稀疏信号》，IEEE JSTSP，第5卷，第5期，第912–926页，2011年。[24] P. Pal 和 P. P. Vaidyanathan，《稀疏贝叶斯学习中的参数可辨识性》，发表于 IEEE I CASSP，2014年。[25] M. Boizard、R. Boyer、G. Favier、J. E. Cohen 和 P. Comon，《结构化因子张量CP分解的性能估计》，发表于 IEEE ICASSP，2015年。[26]《5G-NR；物理信道与调制》，3GPP TS 38.211版本15.2.0第15版。