时序切换网络中传播过程的稀疏资源分配

Vera L. J. Somers * **Ian R. Manchester** **

*澳大利亚研究委员会优化技术、综合方法与应用培训中心（*OPTIMA*），
澳大利亚墨尔本大学（电子邮箱：*vera.somers@unimelb.edu.au*）。

**澳大利亚野外机器人中心（*ACFR*），澳大利亚悉尼大学

arXiv:2302.02079v1 [eess.SY] 4 Feb 2023

摘要： 传播过程（如流行病、野火和谣言）通常以静态网络为模型。然而，其底层网络结构（例如社交网络中不断变化的接触关系，以及野火的不同天气预报）本质上会随时间变化，这是由环境不断变化所致。因此，本文提出一种优化框架，用于在已知连通模式的时变网络中，对传播过程的控制进行稀疏资源分配。我们采用凸优化，特别是指数锥规划，以及动态规划技术，通过在每个时间步分配预算资源，限制并降低未被发现的暴发风险。通过错误信息、流行病和野火示例，我们展示了该方法如何实现有针对性的资源分配。

关键词： 大规模网络系统的优化与控制、凸优化、动态资源分配、生物系统中的估计与控制、时序切换网络、传播过程、社交网络

1. 引言

传播过程已成为我们日常生活中一个重要的组成部分。从流行病（Nowzari 等（2016））、计算机病毒（Bloem 等（2009））到野火（Karafyllidis 和 Thanailakis（1997））以及错误信息（Zareie 和 Sakellariou（2021）），如果未得到适当监测和控制，它们可能造成灾难性影响并构成重大威胁。这凸显了采用适当干预策略来降低其风险的方法的重要性及其当前局限性。这些过程或“威胁”的共同点在于，它们都可以建模为一种具有初始疫情暴发、并在网络中迅速传播的过程。

这些传播过程通常所处的自然网络和社会网络，例如流行病所涉及的全球接触与旅行网络、野火所涉及的大范围地理区域，以及计算机病毒和错误信息所涉及的社交媒体或互联网，都具有两个重要且富有挑战性的相关特征。首先，它们通常具有时序性，即网络中的交互或连通性会随时间变化；其次，它们的规模很大。这意味着很难甚至不可能在整个网络范围内迅速将资源送达各处，例如用于流行病防控的疫苗或用于野火防控的空中洒水资源分配。因此，稀疏、受预算约束且动态的资源分配方案十分重要。

传播过程通常建模为马尔可夫过程。最著名的模型是易感-感染-易感（SIS）模型和易感-感染-移除（SIR）模型，由 Kermark 和 Mckendrick (1927) 以及 Bailey (1975) 提出。这些随机模型可以近似为常微分方程（ODE）模型，而后者又可以近似为线性模型（Ahn and Hassibi (2013)）。Van Mieghem 等 (2009) 证明，这是一种上界，因此通常是研究对象。

如 Van Mieghem 等（2011）所述，通过移除网络中固定数量的链路或节点来最小化传播率，这两类问题都是 NP-困难。启发式方法或许可以解决这一问题，但除了最优性方面的妥协之外，完全移除链路或节点的策略往往并不现实。更现实的假设是，通过向节点和链路投入资源，可以降低传播率或提高恢复率。已有多种方法研究了受预算约束的资源分配（例如，参见 Nowzari 等（2016）；Bloem 等（2009）；Di Giamberardino 和 Iacoviello（2019）；Torres 等（2017）；Preciado 等（2014）；Zhang 等（2018）；Nowzari 等（2017））。

然而，所有这些方法都考虑静态网络的静态控制。也就是说，资源分配是根据网络的当前状态确定的，而没有考虑网络的时变特性。对于时变网络，更现实的做法是采用时间依赖干预。时变性也意味着可以研究传播变量的时变特性。例如，野火可能受到天气条件变化的影响；随着流行病出现不同变异株或研发出新疗法，其传播率和恢复率也会变化。此外，还可以通过改变网络结构和参数，将行为变化、接触网络的扩展或额外的外部影响纳入考量。

这也是迈向更完整系统的一步，正如 Zino 和 Cao（ 2021）所指出的。此外，Speidel 等（2017）强调，忽略网络的时变特性可能会低估地方病流行性。

Drakopoulos 等（2017）和 Scaman 等（2016）研究了静态网络上针对流行病的动态资源分配。在这些研究中，网络属性分别用于识别局限，并推导流行病消亡时间的上界和下界。近来，动态规划（Bertsekas 等（2000））， 尤其是模型预测控制（MPC），已被用于时变干预（K¨ ohler 等（2018）；Watkins 等（2019）；S´elley 等（2015））。
处理动态网络的一种方法是采用时间尺度分离。该方法假设网络动态和传播过程以不同的时间尺度演化，即一个过程远快于另一个过程。如果传播过程更快，则可以使用静态网络，因为网络结构的变化不会影响资源分配和传播。另一方面，如果网络动态变化更快，则会进入退火状态，此时可以使用“平均网络”（Zino 和 Cao（2021））。

克服这种时间尺度分离假设的一种方法是采用时序切换网络。时序切换网络使用一系列静态网络来建模时序行为。Prakash 等（2010）首次针对确定性模型提出了这一方法，并对流行病阈值进行了研究。Sanatkar 等（2015）进一步将其扩展为包括流行病传播的上界，以及任意切换网络的稳定性条件。Valdano 等（2015）将其扩展到连续时间情形，其中阈值与观测时间有关。

Par´e 等（2015，2018）研究了时变网络上异质流行病过程的稳定性分析，并给出了全局指数稳定性以及收敛到无病平衡点的条件。Gracy 等（2020）通过定义稳定性和指数收敛到无病平衡点的条件，提出了一种分布式控制策略。Nowzari 等（2015）给出了一个利用几何规划技术控制时变网络的解决方案。

然而，这些方法都没有考虑通过稀疏的定向资源分配来限制风险。Par´e 等人（2021）采用了稀疏性方法，是一个例外；作者利用重加权 ℓ_1 优化方法，为多竞争病毒模型求解解药问题。然而，该方法无法保证全局最优性。

因此，本文提出了一个框架，用于在时变网络上动态、稀疏地分配资源，以控制传播过程。该框架基于 Somers and Manchester (2022b) 中的工作；在该工作中，我们提出了一种适用于静态网络的多阶段稀疏资源分配方法。本文提出的框架通过将这项工作扩展到时序切换网络，克服了静态网络这一假设的不足。

2. 模型与问题表述

*2.1 SIS*传播过程模型

我们研究时变图$\mathcal{G}(t)$上的传播过程，该图的节点集 $\mathcal{V}$ 中有 n 个节点，边集 $\mathcal{E}(t)$随时间变化。现在，每个节点 $i \in \{1, 2, ..., n\} \in \mathcal{V}$都关联一个状态$X_i(t)$。我们考虑 Kermark and Mckendrick (1927) 提出的基本 SIS 模型，其中节点有两种状态：感染状态，即 $X_i(t) = 1$；或易感状态，即易受邻近节点感染，表示为 $X_i(t) = 0$。感染节点以概率 $\delta_i \Delta t$ 在 $X_i(t + \Delta t) = 0$内康复；传播过程则以概率 $\beta_{ij}\Delta t$从感染节点 j传播到易感节点 i，其中 Δt 是一个小时间间隔。鉴于传播过程和网络都具有时变特性，我们进一步允许 $\beta_{ij}(t)$和 $\delta_i(t)$随时间变化。

现在，我们将 $x_i(t) = E(X_i(t)) = P(X_i(t) = 1)$ 定义为节点 i 在时间 t被感染的概率。遵循 Preciado 等人（2014）的做法，采用平均场近似，可得 n个耦合的非线性微分方程：

$$\dot{x}_i = (1 - x_i(t)) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t) x_j(t) - \delta_i(t) x_i(t). \tag{1}$$

对式（1）应用欧拉前向近似（参见 Par´e 等人，2020），可得以下离散时间模型近似

$$x_i^{k+1} = x_i^k + h(1 - x_i^k) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}^k x_j^k - h\delta_i^k x_i^k \tag{2}$$

其中，$h = t^{k+1} - t^k$是每个时间间隔$[t^k, t^{k+1}]$的长度。给定 $h\delta^k \leq 1$ 和 $h\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}^k < 1 \; \forall k$，该模型在 $x_i^1 \in [0, 1] \Rightarrow x_i^k \in [0, 1] \; \forall k$处定义良好。
围绕无感染平衡点 $(x_i = 0 \; \forall i)$ 进行线性化后，我们得到

$$x^{k+1} = A^k x^k \tag{3}$$

其中，$x^k = [x_1^k, ..., x_n^k]^T$是系统状态，$A^k$是由以下元素组成的稀疏状态矩阵

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1 - h\delta_i^k \geq 0 & \text{if} \quad i = j, \\ h\beta_{ij}^k \geq 0 & \text{if} \quad i \neq j, (i, j) \in \mathcal{E}^k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

请注意，由于传播参数 β_{ij}^k, δ_i^k发生变化，以及网络结构发生变化（即 $\mathcal{E}^k$发生变化），状态矩阵 A^k 会在每个时间步发生变化。因此，我们得到一个可将时变切换图序列 $\mathcal{G}^k(\mathcal{V}, \mathcal{E}^k)$ 作为输入的系统。

此外，我们指出，(3) 是 Berman 和 Plemmons (1994) 所述的正系统，即如果对于所有 i，$x_i^1 \geq 0$，那么对于所有 i 和所有 $k \geq 0$，$x_k^i \geq 0$。

2.2 代价函数

目标是降低并界定上一节所述时序图上传播系统的风险。为此，我们假设在有限时间范围内预测并优化至时间 K，并为系统定义如下成本函数

$$J(x^1) = \sum_{k=1}^{K} \alpha^k C x^k \tag{5}$$

其中，$x^k = [x_1^k, ..., x_n^k]^T$是系统状态，$C = [c_1, ..., c_n]$是一个行向量，用于定义时间 k与每个节点 i相关的成本，其中每个 $c_i \geq 0$。我们引入折扣因子 $\alpha \in (0, 1]$，以便调整近期成本相对于长期成本的重要性。请注意，也可以将 $K \to \infty$ 的成本考虑在内，详情见第3.2节。

现在，我们可以基于线性模型 (3) 推导成本 (5) 的界，并证明该界也适用于非线性模型 (2) 的成本。对于具有非负线性成本的正系统，其价值函数（或剩余成本函数）是线性的，参见 Berman 和 Plemmons (1994)、Briat (2013) 和 Rantzer (2015)；我们将采用这一论证的变体，通过类似动态规划的形式推导上界。

命题*1*。 假设存在一列行向量 $p^k = [p_1^k, ..., p_n^k]$，$k = 1$，...，$K$，其分量均非负：$p_i^k \geq 0 \; \forall i, \; k$，且满足以下不等式：

$$p^k \geq C + \alpha p^{k+1} A^k \tag{6}$$

其中，不等式均按分量理解。则 $p^1 x^1 \geq J(x^1)$ 如 (5) 中所定义。

证明。 我们首先证明，$V(x, \; k) = p^k x^k$ 是线性系统 (3) 在时刻 k 处、从状态 x 出发的剩余成本的上界。由于 $x_i^k \geq 0 \; \forall i, \; k$，不等式 (6) 意味着 $p^k x^k \geq Cx^k + \alpha p^{k+1} A^k x^k$. 利用 $V(x, \; k) = p^k x^k$，可得

$$V(x^k, k) \geq Cx^k + \alpha V(x^{k+1}, k+1). \tag{7}$$

通过望远镜求和，我们得到 $V(x^1, \; 1) \geq \sum_{k=1}^{K} \alpha^k C x^k + V(x^K, \; K+1)$，且由于 $V(x^K, \; K+1) \geq 0$ 我们有 $V(x^1, \; 1) = p^1 x^1 \geq \sum_{k=1}^{K} \alpha^k C x^k$.

为了说明这也为非线性系统 (2) 的成本提供了上界，我们注意到，对于任意 x^k，其元素属于 $[0, 1]$，$x^{k+1} \geq A^k x^k$ 按照 (2) 计算，也就是说，从相同初始条件出发，线性系统的解在逐元素意义上构成非线性系统解的上界。由于成本向量 C 为正，这进一步意味着，线性系统得到的成本构成非线性系统所得成本的上界。

为了从这些成本界限建立风险模型，我们注意到，期望成本 $E[J(x^1)]$ 可以通过初始状态 $\hat{x}^1$ 的期望值的线性函数来界定。由于对于任意 x^1，都有 $J(x^1) \leq p^1 x^1$，因此可得 $E[J(x^1)] \leq E[p^1 x^1] = p^1 E[x^1] = p^1 \hat{x}^1$。因此，我们将与每个状态相关的风险定义为

$$R_i = p_i^1 \hat{x}_i^1. \tag{8}$$

可以考虑总体风险 $\sum_i R_i = p^1 \hat{x}^1$，以及疫情暴发的最大风险（即预期影响的“最坏情况”）$\max_i(R_i)$。

2.3 资源分配模型

为了降低整体成本和风险，我们现在研究在模型中纳入每个时间步 k 的稀疏预算资源。我们考虑将资源分配给边，以降低传播率β_{ij}；同时分配给节点，即提高恢复率 δ_i。

为此，我们假设 $k = 1$、.....、K的传播率和恢复率可能取值范围有界：

$$0 < \underline{\beta}_{ij}^k \leq \beta_{ij}^k \leq \overline{\beta}_{ij}^k, \quad 0 < \underline{\delta}_i^k \leq \delta_i^k \leq \overline{\delta}_i^k < \overline{\Delta}. \tag{9}$$

这里，β_{ij}^1 和 δ_i^1 是系统 (2) 未经修改的速率。对于 $k > 1$，β_{ij}^k 和 δ_i^k 是根据时间步 k 对应的未经修改速率，并纳入截至当前时间步的资源分配后，系统更新后的速率。也就是说，在我们的模型中，在特定时间步所做的更改会在之后的所有时间持续生效。这意味着状态矩阵 A^k 现在每个时间步都会发生变化；变化不仅源于 (4) 中所述图的时变特性，也源于截至时间 k在 β_{ij} 和 δ_i 上纳入的资源分配。请注意，该框架可以轻松修改，以纳入具有固定持续时间或随时间逐渐减弱的干预措施。

现在，我们提出以下资源模型：

$$\begin{aligned} f_{ij}\left(\beta_{ij}^k\right) &= w_{ij}^k \log\left(\frac{\overline{\beta}_{ij}^k}{\beta_{ij}^k}\right) \\ g_i\left(\overline{\Delta} - \delta_i^k\right) &= w_{ii}^k \log\left(\frac{\overline{\Delta} - \underline{\delta}_i^k}{\overline{\Delta} - \delta_i^k}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

其中，w_{ij} 是权重，分别表示在时间 k降低 β_{ij} 和提高 δ_i 的成本。

这些资源模型可以理解为：一定比例的增加（针对 β_{ij}）和减少（针对 δ_i）始终具有相同的成本。请注意，β_{ij} 不可能降至 0，因为这需要无限的资源。更重要的是，这些资源模型有助于实现稀疏性，详见第 3.1 节。关于这类对数资源分配的更深入讨论，请参阅 Somers 和 Manchester（2021）。

2.4 问题陈述

我们的目标是在遵循时变网络结构的同时，对疫情暴发风险和所需资源量进行界定。因此，我们研究时变切换图上针对传播过程的两个密切相关的动态资源分配问题。

问题 *2*。（资源约束风险最小化）。给定时序切换图序列 $\mathcal{G}^k(\mathcal{V}, \; \mathcal{E}^k)$、定义的每个时间步资源分配预算 Γ^k k、总预算 Γ_{tot} 以及与每个节点 $i \in \mathcal{V}$相关的成本 c_i，求 $k = 1$，...，K 的最优传播率和恢复率 β_{ij}^k与 δ_i^k，通过稀疏资源分配最小化最大风险 $p_i^1 \hat{x}_i^1$ 的上界。该问题可表述为：

$$\underset{p^k, \beta^k, \delta^k}{\text{minimize}} \quad \max(p_i^1 \hat{x}_i^1) \tag{11}$$

$$\text{such that} \quad p^k \geq 0, \quad \alpha p^{k+1} A^k - p^k \leq -C, \tag{12}$$

$$0 < \underline{\beta}_{ij}^k \leq \beta_{ij}^k \leq \overline{\beta}_{ij}^k, \; 0 < \underline{\delta}_i^k \leq \delta_i^k \leq \overline{\delta}_i^k < \overline{\Delta}, \tag{13}$$

$$\sum_{ij} f_{ij}\left(\beta_{ij}^k\right) + \sum_i g_i\left(\delta_i^k\right) \leq \Gamma^k, \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{ij} f_{ij}\left(\beta_{ij}^k\right) + \sum_i g_i\left(\delta_i^k\right) \right) \leq \Gamma_{\text{tot}}. \tag{15}$$

问题 *3*。（风险约束资源最小化）。
求出最优传播率和恢复率 β_{ij}^k 和δ_i^k，使得对于 $k = 1, ..., K$，通过稀疏资源分配，在给定最大风险 γ 的上界、时变切换图序列 $\mathcal{G}^k(\mathcal{V}, \mathcal{E}^k)$ 以及针对 $i \in \mathcal{V}$ 的成本 c_i 的情况下，所需资源量最小。

该问题可采用与优化问题 2 类似的方式进行表述，但将 (14) 的左侧作为目标函数，并添加约束 $p_i^1 \hat{x}_i^1 \leq \gamma$，对所有 i 均成立。

该问题表述可扩展为在 $\hat{x}_i^1$ 上加入监测调度和资源分配，详见 Somers and Manchester（2022a）。还请注意，可纳入时间 $K \to \infty$，参见第3.2节；并且我们可以用 $\sum_i p_i^1 \hat{x}_i^1$ 替换 (11)，以限制总体风险。

3. 指数锥规划

本节将说明，问题 2 和问题 3 可重新表述为凸优化问题，特别是指数锥规划。此外，我们将讨论所提出的资源模型如何实现稀疏资源分配。

我们为所有节点 $i \in \mathcal{V}$ 定义决策变量 y_i 和 v_i，并为所有边 $(i,\ j) \in \mathcal{E}^k$ 定义决策变量 u_{ij}^k。
命题 *4.* 给定 $h\Delta < 1$，在变换 $\overline{y}_i = \log(p_i)$ 和 $u_{ij} = f_{ij}(\beta_{ij})$ 下，问题 2 等价于以下凸优化问题，并且

$$v_i = g_i\left(\overline{\Delta} - \delta_i\right)$$

$$\underset{y^k, u^k, v^k}{\text{minimize}} \quad \max(\log(\hat{x}_i^1) + y_i^1) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\text{such that} \quad & \log\Bigg(\sum_{i:(i,j)\in\mathcal{E}} \exp\Bigg(y_i^{k+1} + \log\left(\alpha h \overline{\beta}_{ij}^k\right) - \frac{u_{ij}^k}{w_{ij}} \\ & - y_j^k\Bigg) + \exp\left(y_j^{k+1} + \log\left(\alpha(1 - h\overline{\Delta})\right) - y_j^k\right) \\ & + \exp\left(y_j^{k+1} + \log\left(\alpha h(\overline{\Delta} - \underline{\delta})\right) - \frac{v_i^k}{w_{ii}} - y_j^k\right) \\ & + \exp\left(\log\left(c_j\right) - y_j^k\right)\Bigg) \leq 0 \quad \forall j, \end{aligned} \tag{17}$$

$$0 \leq u_{ij}^k \leq w_{ij} \log\left(\frac{\overline{\beta}_{ij}^k}{\underline{\beta}_{ij}^k}\right), \tag{18}$$

$$0 \leq v_i^k \leq w_{ii} \log\left(\frac{1 - \underline{\delta}_i^k}{1 - \overline{\delta}_i^k}\right), \tag{19}$$

$$\sum_{ij} u_{ij}^k + \sum_i v_i^k \leq \Gamma^k, \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{ij} u_{ij}^k + \sum_i v_i^k\right) \leq \Gamma_{\text{tot}}. \tag{21}$$

证明。与 Somers and Manchester (2022b) 中命题 2 的证明类似。
命题 *5.* 给定 $h\Delta < 1$，经过变换 $y_i = \log(p_i)$ 和 $u_{ij} = f_{ij}(\beta_{ij})$ 以及 $v_i = g_i\left(\Delta - \delta_i\right)$后，问题 3 等价于一个凸优化问题。其形式与 (16) - (21) 相同，只是目标函数为 $\sum_{ij} u_{ij}^k + \sum_i v_i^k$，并且用约束 $\log(\hat{x}_i^1) + y_i^1 \leq \gamma$ 替代 (20)。

证明。参见 Somers and Manchester (2022b)。

3.1 稀疏性

所提出的框架和指数锥规划形式的一个显著优点是，它们有助于实现稀疏资源分配。现在表述为约束 (20) 和 (21) 的资源模型，是 ℓ_1 范数约束和目标函数，因为 $u_{ij} \geq 0$ 和 $v_i \geq 0$，而众所周知，这些有助于产生稀疏性（例如 Cand`es 等人（2008）及其中的参考文献）。

若目标是最大程度地实现稀疏性，即使分配了非零资源的节点和边的数量最少，则可以采用 Cand`es 等人（2008）提出的重加权 ℓ_1 优化方法。我们可以通过迭代求解问题将其纳入模型，同时使用一种重加权资源模型来近似表示获得非零资源分配的节点和边的数量，例如：

$$\phi^q = \sum_{ij} \frac{u_{ij}^{k^q}}{u_{ij}^{k^{q-1}} + \epsilon} + \sum_i \frac{v_i^{k^q}}{v_i^{k^{q-1}} + \epsilon} \tag{22}$$

其中 q 是迭代次数，ϵ 是一个较小的正数，用于提高数值稳定性。对于问题 2，我们现在用 $\phi^q \leq M$ 替换 (20)，其中 M 是可获得资源分配的节点和边的数量上限。类似地，对于问题 3，我们用 (22) 替换目标函数。这种迭代方法可以忽略先前的预算界限，且无法保证收敛或全局最优性，但在实践中已证明有效。

3.2 无限时间

所提出的框架考虑了一个有限时间范围内的优化场景，即优化截至时间步 K，这很合理，因为实际案例中的可靠预测往往只覆盖有限的时间范围。或者，也可以轻松扩展该框架，将成本纳入其中，如 $K \to \infty$。更新后的成本界限（见命题 4）如下。

命题 *6.* 给定对未来网络变化的上界，即对所有$k \geq K$的未来 A、$A^K \geq A^k$ 值的上界，并假设存在一列行向量 $p^k = [p_1^k, ..., p_n^k]$，$k = 1, \ldots\ldots, K$，它们逐元素非负：$p_i^k \geq 0\ \forall i$，$k$，且对 $k = 1, \ldots\ldots, K-1$，不等式 (6) 现在成立，并且

$$p^K \geq C + \alpha p^K A^K \geq C + \alpha p^K A^k, \tag{23}$$

其中，不等式理解为逐元素成立。于是，$p^1 x^1 \geq J(x^1)$ 如 (5) 中所定义。

证明。(23) 中的第二个不等式成立，是因为 p 非负且 $A^K \geq A^k$。在命题 4 的证明中，我们由 (6) 得到了 (7)；同理，(23) 推出

$$V(x^k, K) \geq Cx^k + \alpha V(x^{k+1}, K) \tag{24}$$

对于 $k \geq K$。通过望远镜求和，我们现在得到 $V(x^1,1) \geq \sum_{k=1}^{L} \alpha^k C x^k + V(x^L, K)$，对任意 $L \geq K$ 均成立；由于$V(x^L, K) \geq 0$且 L 可以任意大，因此我们有 $V(x^1,1) = p^1 x^1 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k C x^k$.

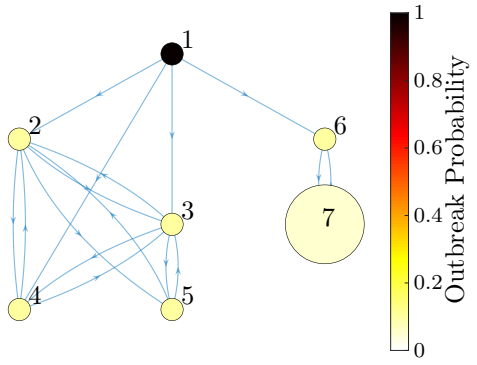


图 1. 包含 $n = 7$ 个节点的影响图。节点颜色表示疫情暴发概率 $\hat{x}_i^1$，节点标记大小表示成本 c_i，其中高成本节点为 $i = 7$。

现在，我们的优化问题2和3对$k = 1, ..., K-1$使用（12），并加入以下附加约束

$$p^K(\alpha A^K - I) \leq -C. \tag{25}$$

对应的凸形式请参见 Somers and Manchester (2022b) 中的公式 (21)。

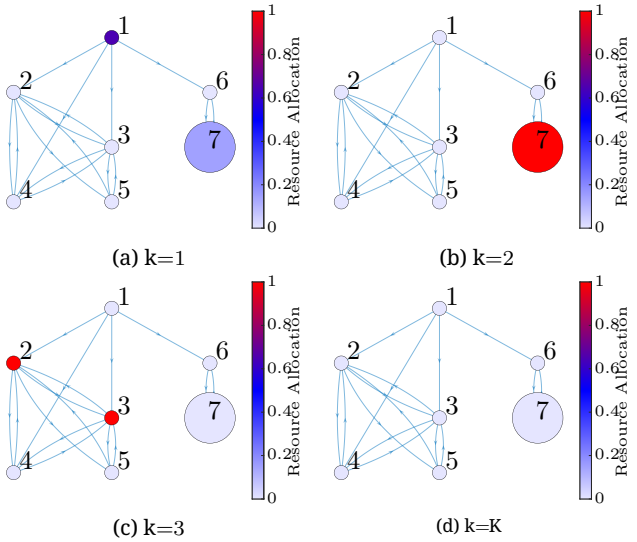
4. 结果

在本节中，我们将展示如何利用所提出的优化框架，研究时序切换网络上的资源分配。首先，我们讨论一个 7 节点示例，以说明在假设网络为静态、平均或时序切换网络时，资源分配的差异。接下来，我们展示一个周期性航班网络及相应的稀疏航班网络缩减方法，以降低已知 SARS 暴发的风险。最后，我们通过一个风力预报不断变化的野火示例进行说明。

4.1 小型影响网络

我们首先从一个小型 7 节点示例入手，因为可视化网络序列变化及其影响在小规模下更容易。在这个特定示例中，我们模拟错误信息的传播，并考虑影响图$\mathcal{G}^k = (\mathcal{V}, \mathcal{E}^k)$，其中包含 $n = 7$个节点，如图 1 所示。这里，节点 $i = 1$具有较高的概率 $\hat{x}_i^1$成为这则特定谣言的起源，节点颜色表示该概率；箭头表示影响方向，例如，节点$i = 1$ 会影响节点 6，但反过来则不会，而节点 6 和 7 会彼此分享（错误）信息。然而，实际的影响网络会随时间变化 $k \leq K$，节点会建立新的连接，或者例如因不想看到某些内容而停止关注其他节点。我们为所有 $(i, j) \in \mathcal{E}^k$ 取相同的传播率和恢复率 $\beta_{ij}^k = 0.35$，并为所有 $i \in \mathcal{V}$取 $\delta_i = 0.2$ 。此外，我们引入一个高成本节点 $i = 7$，其成本为 $c_i = 1$；节点标记大小表示该成本。我们不希望这则谣言传播到该节点，因为它可能与其他规模更大的媒体网络存在关联，或容易受到错误信息（例如诈骗或针对老年人的反疫苗宣传活动）的影响。

现在的目标既是阻止这则谣言传播，尤其是保护成本高昂的节点 i =7。通过开展“真相宣传活动”，即提高认知度或恢复率 δ，以及拦截传入的“高风险”内容，可以减轻谣言和错误信息的影响，



(a) k=1 (b) k=2 (c) k=3 (d) k=K

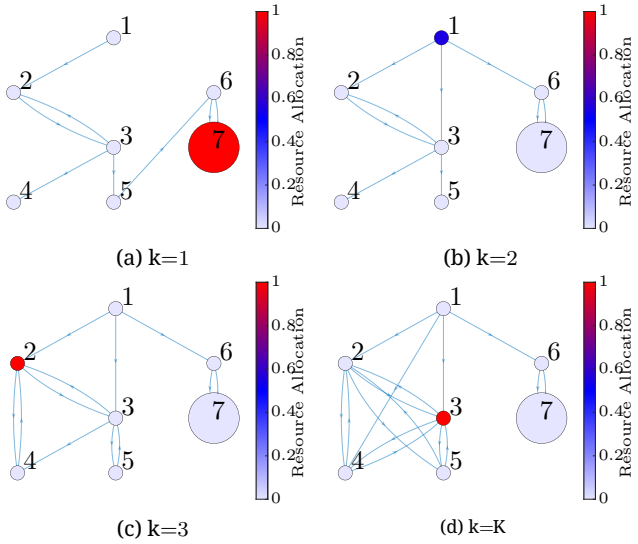
图 2. 使用静态网络的反谣言策略，其中$h = 0.24$、$\alpha = 0.93$。节点颜色表示被选为目标的节点。

即降低传入内容的传播率 β （Zareie 和 Sakellariou（2021））。我们同时对这两种措施进行建模：目标节点的恢复率提高，传播率降低。令 $\Delta = 1$、$\alpha = 0.93$, $h = 0.24$and $\Gamma^k = 1.5$ 适用于所有满足 $K = 4$ 的 k，我们首先求解问题 2。接下来，为了突出稀疏性及结果差异，我们采用重加权 ℓ_1 最小化方法（参见第 3.1 节），在保持风险界不变的同时，最小化非零资源分配的数量。

我们希望比较在对网络变化速度相对于谣言传播速度作出不同假设时所选定的目标节点。保持所有传播和模型参数不变，我们现在考虑以下情形：1）静态图；2）$K \to \infty$的时变切换图；3）平均图。结果分别显示在图 2、图 3 和图 4 中。可以看出，根据对网络变化速度所作的假设不同，认知度或反谣言宣传策略也会有很大差异，这凸显了考虑网络的时间特性的重要性。与静态方法选择节点 1 相比，所有时变策略一开始都选择节点 $i = 7$，这是因为掌握了影响力变化的信息。由于对网络变化速度、网络变化的认知以及持续时间的假设不同，$k = 1$ 之后的策略也有所不同。

4.2 美国航空网络

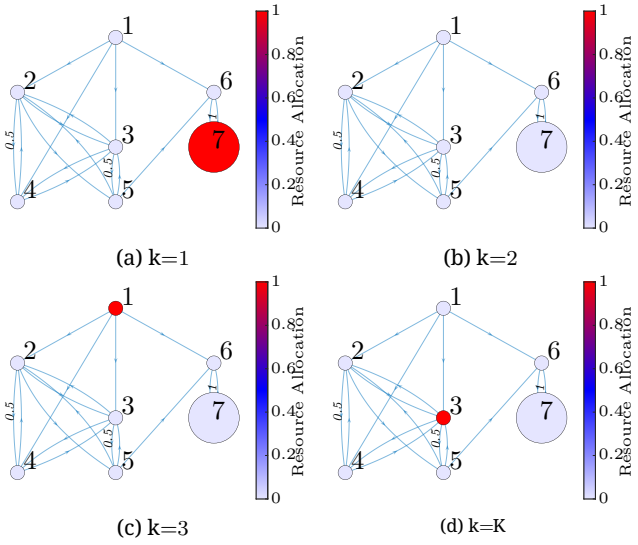
接下来，我们考虑一个美国国内航空运输网络图，该图基于 Santos 等人（2019）提供的 2014 年乘客运输量，并修改为周期性航班时刻表。该时刻表包含 $n = 359$ 个节点和 514 - 2097 条边，具体取决于航班日，如图 5 所示。研究范围涵盖美国境内所有国内航空交通，但不包括波多黎各、维尔京群岛和关岛；服务于同一城市的多个机场合并处理，并省略年乘客运输量少于 10,000 人次的航线。航班日数量根据乘客运输量确定，并将航线分别安排为每周 2、3、4 或 7 个航班日，以构建周期性时刻表和网络图。



(a) k=1 (b) k=2

(c) k=3 (d) k=K

图3. 对包含 $h = 0.24$、 $\alpha = 0.93$的时变切换网络序列的反谣言策略。



(a) k=1 (b) k=2

(c) k=3 (d) k=K

图4. 图3中<步骤 id='1'>平均</步骤>图的目标策略。

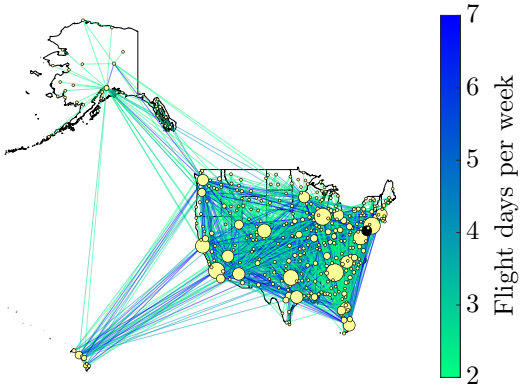


图5. 基于 Santos 等人（2019）的周期性美国航空运输网络，包含359个节点和514 - 2097条边。边的颜色表示每周飞行天数，深蓝色表示每天至少有航班的航线。节点标记的大小表示成本c_i ， 节点颜色表示疫情暴发概率 $\hat{x}_i^1$。

现在，我们对费城的严重急性呼吸综合征疫情暴发进行建模。传播参数依据 Chowell 等人（2004），设定传播率为每天 $\beta = 0.25$ ，恢复率为 $\delta = 0.0631$。现在可以通过减少特定航线的乘客人数和航班数量来控制传播率 β_{ij}。此外，我们根据每个机场服务的乘客人数归一化值设定成本 c_i ，以表示疾病传播到某个城市节点所造成的影响。现在，我们设定每日预算为 $\Gamma^k = 5$，总预算为 $\Gamma_{\text{tot}} = 25$、 $h = 0.02$ 和 $\alpha = 0.9$，并获得每日缩减后的航班时刻表，如图 6 所示。前 5 天分别在 13、18、18、19 和 19 条航线上减少乘客人数，并在最初几个时间步使用最大预算，以最大程度地遏制疫情暴发。

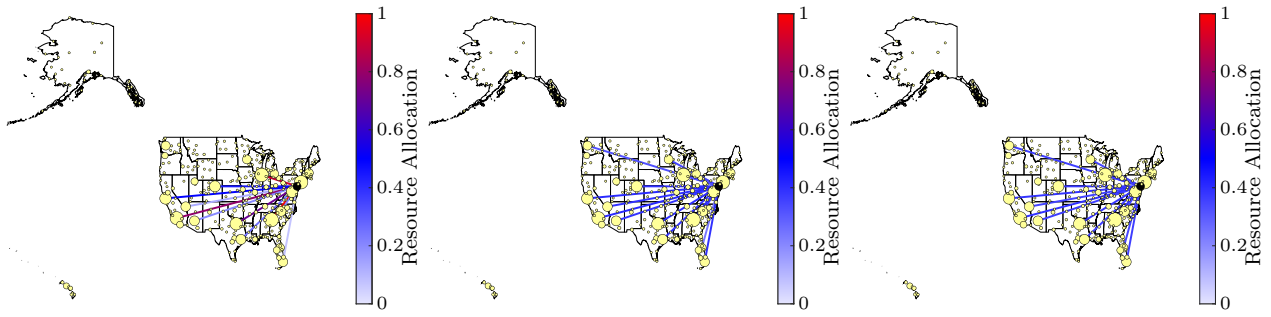
4.3 野火示例

我们考虑图 7a 所示的虚构景观，其中包含不同的植被类型、一座城市和水域。我们将该景观表示为一个时序图 $\mathcal{G}^k(\mathcal{V},\ \mathcal{E}^k)$，其中包含 $n = 1000$ 个节点；边集 $\mathcal{E}^k$ 将每个节点与其相邻的 8 个节点相连，也就是说，火势可以水平、垂直和对角线方向蔓延，但与每条边相关联的传播值会随着天气条件和天气预报的变化而在每个时间步发生改变。除了天气预报，传播率还由植被类型决定，依据 Karafyllidis 和 Thanailakis（1997）以及 Alexandridis 等人（2008）的方法，其中 $\beta = \beta_b\beta_{veg}\beta_w$由基准传播率$\beta_b = 0.5$、植被因子 $\beta_{veg} = 0$，0。1，1 和 1。4 组成，分别对应水域、沙漠、草地和桉树林；天气效应为 β_w。最后，对对角相连节点之间的传播率进行修正。我们为所有节点 $i \in \mathcal{V}$设定恢复率 $\delta = 0.5$ 。

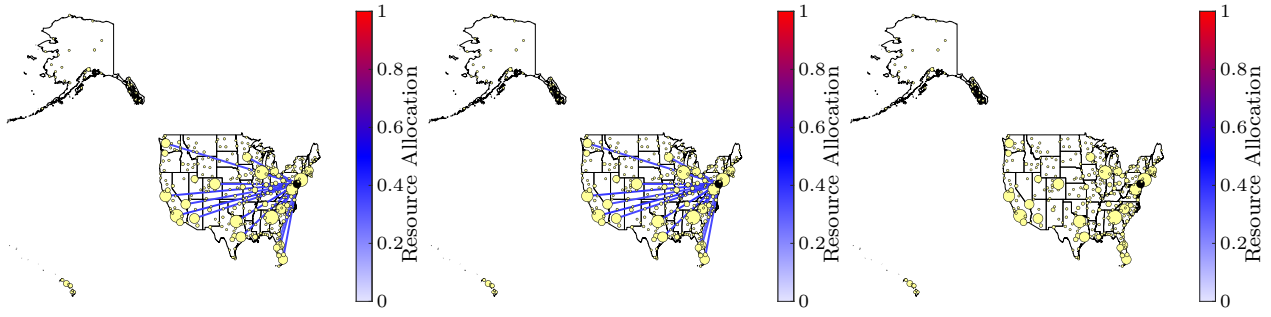
接下来，我们取 $c_i = 1$ 其他地方的城市节点成本 $c_i = 0.001$ 以及图 7b 所示的疫情暴发概率$\hat{x}_i^1$ 。这可能反映了道路附近火灾带来的生命和财产风险较高，因此成本也更高，且火灾疫情暴发概率更高。

现在假设天气预报如下：在时间步 $k = 1$，无风； $k = 2$ 东北风，风速为 $V = 4$米/秒；到时间步中点 $k = 3$ ，风向转为南风，风速为 $V = 8$ 米/秒，预计至少还会持续 2 个时间步。因此，为了对此建模，我们可以取$k = 3$两种风况的平均图。令 $\Gamma^k = 10$、 $h = 0.25$、 $\alpha = 0.9$，即可得到图 8 所示的结果。图中展示了累积资源量，其中每个时间步新增的资源用较粗的线条表示，之前新增的资源则以更高的透明度显示。可以看到，系统根据天气预报在城市周围有效地形成了一层防护层。起初无风，随后将出现东北风，因此资源被分配到北部和东部；之后，为应对即将到来的南风，城市在南部部署更多资源，以保护城市免受这些区域火势蔓延加剧的影响。

所提出的凸优化程序的可扩展性已在 Somers and Manchester（2022a,b）中进行了研究，结果发现求解器时间与节点数量和时间步数均呈线性关系。对于动态变化，也发现了相似的运行时间。

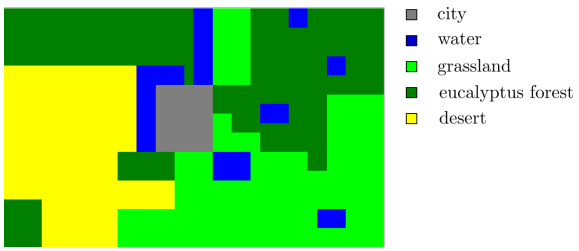


(a) 星期日 (b) 星期一 (c) 星期二



(d) 星期三 (e) 星期四 (f) 星期五，星期六

图 6. 为抑制费城的疫情暴发， $\Gamma^k = 5$ 和 $\Gamma_{\text{tot}} = 25$分别每日减少 13、18、18、19、19、0 和 0 条航线的乘客人数。



(a) 植被地图



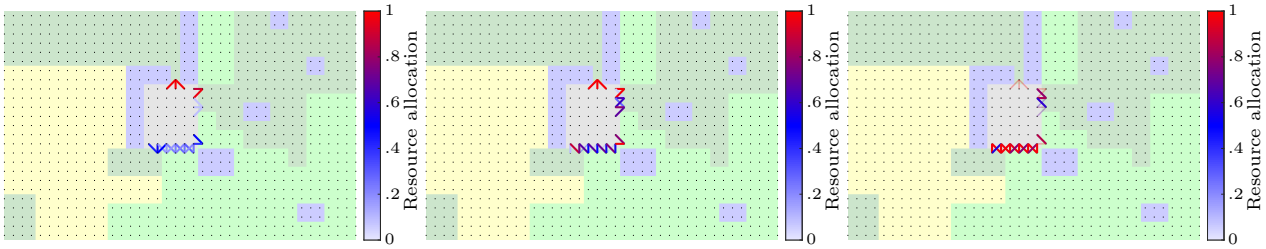
(b) 疫情暴发概率

图 7. 具有不同区域类型的虚构景观，以网格表示，包含 $n = 1000$ 个节点及其对应的估计疫情暴发概率 $\hat{x}_i^1$。

参考文献

Ahn, H.J. 和 Hassibi, B.（2013）。复杂网络上流行病传播的全局动态。在第 *52* 届 *IEEE* 决策与控制会议论文集，4579–4585。Alexandridis, A., Vakalis, D., Siettos, C.I. 和 Bafas, G.V.（2008）。一种用于森林火灾蔓延预测的元胞自动机模型：1990 年席卷斯佩察岛的野火案例。《应用数学与计算》，204(1)，191–201。

Bailey, N.T.J. (1975). 传染病数学理论及其应用. Charles Griffin & Company Ltd. Berman, A. and Plemmons, R.J. (1994). 数学科学中的非负矩阵, 第 9 卷。SIAM. Bertsekas, D.P. et al. (2000). 动态规划与最优控制：第 *1* 卷. Athena scientific Belmont. Bloem, M., Alpcan, T., and Ba¸sar, T. (2009). 多重网络的最优鲁棒疫情应对。《控制工程实践》, 17(5), 525–533. Briat, C. (2013). 通过积分线性约束实现不确定线性正系统的鲁棒稳定性与稳定化： L_1-增益和 L_∞-增益表征。《国际鲁棒非线性控制杂志》, 23(17), 1932–1954. Cand`es, E.J., Wakin, M.B., and Boyd, S.P. (2008). 通过重加权 ℓ_1 最小化增强稀疏性。《傅里叶分析与应用杂志》, 14(5-6), 877–905. Chowell, G., Castillo-Chavez, C., Fenimore, P.W., Kribs-Zaleta, C.M., Arriola, L., and Hyman, J.M. (2004). 严重急性呼吸综合征的模型参数与疫情暴发控制。《新兴传染病》, 10(7), 1258. Di Giamberardino, P. and Iacoviello, D. (2019). 用于减少流行病传播及其并发症的最优资源分配。《信息》, 10(6), 213. Drakopoulos, K., Ozdaglar, A., and Tsitsiklis, J.N. (2017). 网络疫情何时难以消除? 《运筹学数学》, 42(1), 1–14. Gracy, S., Par´e, P.E., Sandberg, H., and Johansson, K.H. (2020). 周期性疫情过程的分析与分布式控制。*IEEE* 《控制、网络与系统汇刊》, 8(1), 123–134. Karafyllidis, I. and Thanailakis, A. (1997). 使用元胞自动机预测森林火灾蔓延的模型。《生态建模》, 99(1), 87–97.



(a) k=1 (b) k=2 (c) k=3

图 8. 图 7 中场景的资源分配： $\Gamma^k = 10$、 $h = 0.25$ 和 $\alpha = 0.9$ 对应的预测情形分别为 k=1 时无风、k=2 时有 $V = 4$ m/s 的东北风，以及在中间步 k=3 转为 8 m/s 南风。

Kermark, M. and Mckendrick, A. (1927). 对流行病数学理论的贡献。第一部分。《皇家学会会刊 *A*》, 115(5), 700–721. K¨ohler, J., Enyioha, C., and Allg¨ower, F. (2018). 通过模型预测控制方法动态分配资源以控制疫情暴发。见美国控制会议论文集, 1546–1551。IEEE. Nowzari, C., Ogura, M., Preciado, V.M., and Pappas, G.J. (2015). 在时变网络上遏制流行病的最优资源分配。见第 *49* 届阿西洛马会议：信号、系统与计算论文集, 1333–1337. Nowzari, C., Preciado, V.M., and Pappas, G.J. (2016). 流行病分析与控制：复杂网络传播过程综述。*IEEE* 控制系统杂志, 36(1), 26–46. Nowzari, C., Preciado, V.M., and Pappas, G.J. (2017). 网络化流行病模型控制的最优资源分配。*IEEE*《网络系统控制汇刊》, 4(2), 159–169. Par´e, P.E., Beck, C.L., and Ba¸sar, T. (2020). 网络流行病的建模、估计与分析：概述。《控制年度评论》, 20, 345–360. Par´e, P.E., Beck, C.L., and Nedi´c, A. (2015). 时变网络上病毒传播的稳定性分析与控制。见第 *54* 届 *IEEE* 决策与控制会议论文集, 3554–3559。IEEE. Par´e, P.E., Beck, C.L., and Nedi´c, A. (2018). 时变网络上的流行病过程。*IEEE*《网络系统控制汇刊》, 5(3), 1322–1334. Par´e, P.E., Liu, J., Beck, C.L., Nedi´c, A., and Ba¸sar, T. (2021). 带有突变和人类意识的时变网络多竞争病毒。《自动化》, 123, 109330. Prakash, B.A., Tong, H., Valler, N., Faloutsos, M., a nd Faloutsos, C. (2010). 时变网络上的病毒传播：理论与免疫算法。见机器学习与数据库知识发现联合欧洲会议, 99–114. Springer. Preciado, V.M., Zargham, M., Enyioha, C., Jadbabaie, A., and Pappas, G.J. (2014). 针对传播过程的网络保护最优资源分配。*IEEE*《网络系统控制汇刊》, 1(1), 99–108. Rantzer, A. (2015). 正系统的可扩展控制。《欧洲控制杂志》, 24, 72–80. Sanatkar, M.R., White, W.N., Natarajan, B., Scoglio, C.M., and Garrett, K.A. (2015). 动态切换网络中 SIS 模型的流行病阈值。*IEEE*《系统、人机与控制论：系统》, 46(3), 345–355. Santos, B.F., Sa, C., and Clarke, J. (2019). 基于投资组合的航空公司机队规划研究所依据的数据。

Scaman, K., Kalogeratos, A., and Vayatis, N. (2016). 使用优先级规划抑制网络中的流行病。*IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.*, 3(4), 271–285. S´elley, F., Besenyei, ´A., Kiss, I.Z., and Simon, P.L. (2015). 现代网络流行病模型的动态控制。*SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 14(1), 168–187. Somers, V.L.J. and Manchester, I.R. (2021). 通过凸优化实现传播过程控制的稀疏资源分配。*IEEE*《控制系统快报》, 5(2), 547–552. Somers, V.L.J. and Manchester, I.R. (2022a). 通过监测计划和稀疏控制，将传播过程的风险降至最低。*IEEE Trans. Control. Netw. Syst.*Somers, V.L.J. and Manchester, I.R. (2022b). 面向网络传播过程控制的多阶段稀疏资源分配。载于*Proc. Am. Control Conf.*, 3632–3639. IEEE. Speidel, L., Klemm, K., Egu´ıluz, V.M., and Masuda, N. (2017). 时变切换网络中的流行病阈值。载于《时态网络流行病学》, 161–177. Springer. Torres, J.A., Roy, S., and Wan, Y. (2017). 线性网络传播动力学的稀疏资源分配。*IEEETrans. on Automatic Control*, 62(4), 1714–1728. Valdano, E., Ferreri, L., Poletto, C., and Colizza, V. (2015). 时变网络中流行病阈值的解析计算。*Phys. Rev. X*, 5(2), 021005. Van Mieghem, P., Omic, J., and Kooij, R. (2009). 网络中的病毒传播。*IEEE/ACM Trans. on Networking*, 17(1), 1–14. Van Mieghem, P., Stevanovi´c, D., Kuipers, F., Li, C., Van De Bovenkamp, R., Liu, D., and Wang, H. (2011). 通过删除边降低图的谱半径。《物理评论*E*》, 84(1), 016101. Watkins, N.J., Nowzari, C., and Pappas, G.J. (2019). 连续时间流行病过程的鲁棒经济型模型预测控制。*IEEE Trans. on AutomaticControl*, 65(3), 1116–1131. Zareie, A. and Sakellariou, R. (2021). 最大限度降低在线社交网络中错误信息的传播：综述。*J. Netw. Comput. Appl.*, 186, 103094. Zhang, W., Lu, S., and Pei, Y. (2018). 一种通过几何规划在任意网络中实现流行病暴发控制的最优资源分配方法。*Commun. Math. Biol. Neurosci.*, 2018, 1–17. Zino, L. and Cao, M. (2021). 流行病的分析、预测与控制：从标量模型到动态网络模型的综述。*IEEE*《电路与系统杂志》, 21(4), 4–23.