arXiv:2302.02085v2 [math.RT] 5 Jul 2024

模簇上的半连续映射

¨CHRISTOF GEISS、DANIEL LABARDINI-FRAGOSO 和 JAN SCHROER

Abstract. 我们研究有限维代数上的模簇中的半连续映射。我们证明截断欧拉映射是上半连续或下半连续的。这意味着模的 g-向量和 E-不变量是上半连续的。我们还讨论了若干上半连续映射的一般值之间的不等式。

Contents

1. 引言与主要结果 1 2. 模簇与半连续映射的已知结果 5 3. 主要结果的证明 10 4. 例子 15 参考文献 16

1. Introduction and main results

1.1. 模簇的不可约分支。设 A 是有限维 K-代数，其中 K 是代数闭域。令 $\mathsf{mod}(A)$ 为有限维左 A-模的范畴。

对于 $d \geq 0$ ，令 $\mathsf{mod}(A,d)$ 表示维数为 d的 A-模所构成的仿射簇。一般线性群 $G_d := \mathsf{GL}_d(K)$通过共轭作用于 $\mathsf{mod}(A,d)$。轨道对应于 d维模的同构类。$\mathsf{mod}(A,d)$ 中$M \in$的轨道记为 $\mathcal{O}_M$。令 $\mathsf{Irr}(A,d)$ 为 $\mathsf{mod}(A,d)$ 的不可约分支集合，并令 $\mathsf{Irr}(A)$ 为所有维数 d 对应的集合 $\mathsf{Irr}(A,d)$ 的并。若存在某个$M \in \mathsf{mod}(A,d)$满足$Z = \overline{\mathcal{O}_M}$，则称 $Z \in \mathsf{Irr}(A,d)$ 含有稠密轨道。

1.2. 主要结果。对于 M， $M' \in \mathsf{mod}(A)$，并令 $i \geq 0$

$$\mathrm{ext}^i_A(M,M') := \dim \mathrm{Ext}^i_A(M,M').$$

W我们有 $\mathsf{Ext}^0_A(M,M') = \mathsf{Hom}_A(M,M')$。令 $\mathsf{hom}_A(M,M') := \mathsf{ext}^0_A(M,M')$.

日期：2024年6月10日。2010年数学主题分类。主要分类号：14M99、16E30、16G70；次要分类号：16G60、13F60。

对于 $d, d', i \geq 0$，定义

$$\operatorname{ext}^i_A(-,?)\colon \operatorname{mod}(A,d)\times\operatorname{mod}(A,d')\to\mathbb{Z},\quad (M,M')\mapsto \operatorname{ext}^i_A(M,M'),$$
$$\operatorname{ext}^i_A(-)\colon \operatorname{mod}(A,d)\to\mathbb{Z},\quad M\mapsto \operatorname{ext}^i_A(M,M).$$

众所周知，上述映射是上半连续的。

定理 1.1。对于 $d, d', t \geq 0$，映射

$$\eta_t(-,?)\colon \operatorname{mod}(A,d)\times\operatorname{mod}(A,d')\to\mathbb{Z},\quad (M,M')\mapsto \sum_{i=0}^{t}(-1)^i \operatorname{ext}^i_A(M,M')$$

当 t 为偶数时是上半连续的，当 t 为奇数时是下半连续的。

我们称 $\eta_t(-,?)$ 为截断欧拉映射。

若 gl。$\dim(A) = t$，则定理 1.1 表明 $\eta_t(-,?) = \eta_{t+1}(-,?)$ 是上半连续且下半连续的。这意味着众所周知的结果：在这种情况下，值$\eta_t(M, M')$ 仅取决于 M和 M'的维数向量。相应的双线性型 $\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}$ 是 欧拉型，属于 A。（其中 n 是不可同构的简单A-模的数量。）

对于 $Z\in\operatorname{Irr}(A,d)$ 和 $Z'\in\operatorname{Irr}(A,d')$，令 $\operatorname{ext}^i_A(Z,Z')$（分别为 $\operatorname{ext}^i_A(Z)$）表示 $\operatorname{ext}^i_A(-,?)$（分别为 $\operatorname{ext}^i_A(-)$）在 $Z\times Z'$（分别在 Z）上的一般值。因此

$$\operatorname{ext}^i_A(Z,Z') = \min\{\operatorname{ext}^i_A(M,M') \mid (M,M')\in Z\times Z'\},$$
$$\operatorname{ext}^i_A(Z) = \min\{\operatorname{ext}^i_A(M,M) \mid M\in Z\}.$$

令 $\operatorname{hom}_A(Z,Z') := \operatorname{ext}^0_A(Z,Z')$ 且 $\operatorname{end}_A(Z) := \operatorname{ext}^0_A(Z)$。

对于 $Z\in\operatorname{Irr}(A,d)$ 和 $Z'\in\operatorname{Irr}(A,d')$，令 $\eta_t(Z,Z')$ 表示 $\eta_t(-,?)$ 在 $Z\times Z'$ 上的一般值。$\operatorname{ext}^i_A(-,?)$ 的上半连续性意味着

$$\eta_t(Z,Z') = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i \operatorname{ext}^i_A(Z,Z').$$

定理 1.1 意味着这个一般值实际上是 t（偶数时）的最小值，或 t（奇数时）的最大值 $\eta_t(-,?)$ 在 $Z\times Z'$上的值。

对于 $M, M'\in\operatorname{mod}(A)$，$i\geq 1$和 $j\geq 0$，我们有

$$\operatorname{Ext}^i_A(\Omega^j(M),M')\cong\operatorname{Ext}^{i+j}_A(M,M')$$

其中 $\Omega^j(M)$ 是 M 的第 j 个上同调核模。对于 $\Omega^j(-)$ 的定义，我们使用极小投射分解。

推论 1.2. 对于 $j\geq 0$，映射

$$\operatorname{hom}_A(\Omega^j(-),?) : \operatorname{mod}(A,d)\times\operatorname{mod}(A,d')\to\mathbb{Z},\ (M,M')\mapsto\operatorname{hom}_A(\Omega^j(M)\ M')$$

是上半连续的。

设 $S(1)\ldots, S(n)$ 为简单 A-模（同构意义下）。对于 $M\in\operatorname{mod}(A)$ 和 $1\leq i\leq n$，令

$$g_i := g_i(M) := -\dim\operatorname{hom}_A(M,S(i)) + \dim\operatorname{ext}^1_A(M,S(i)).$$

于是，$g(M) := (g_1,\ldots,g_n)$ 是 M 的 g-向量。

推论 1.3。对于 $d \geq 0$ 和 $1 \leq i \leq n$，映射

$$g_i(-)\colon \operatorname{mod}(A,d) \to \mathbb{Z}, \quad M \mapsto g_i(M)$$

是上半连续的。

推论 1.3 已在我们放弃的预印本 [GLFS20].

对于 $M, N \in \operatorname{mod}(A)$，令

$$E(M,N) := \hom_A(N, \tau(M)) \quad \text{and} \quad E(M) := E(M,M)$$

分别为 E-不变量 和（M, N）的 M。这里 τ是 $\operatorname{mod}(A)$ 的 Auslander-Reiten 平移。（关于 Auslander-Reiten 理论的介绍，请参阅 [ASS06、ARS97、R84]。）

E-不变量和 g-向量出现在 Derksen、Weyman 和 Zelevinsky 关于通过雅可比代数对 Fomin-Zelevinsky簇代数进行加性范畴化的开创性工作 [DWZ10] 中。它们也出现在 τ-倾斜理论 [AIR14]中。

推论 1.4. 对于 $d, d' \geq 0$，映射

$$E(-,?)\colon \operatorname{mod}(A,d) \times \operatorname{mod}(A,d') \to \mathbb{Z}, \quad (M,M') \mapsto E(M,M'),$$
$$E(-)\colon \operatorname{mod}(A,d) \to \mathbb{Z}, \quad M \mapsto E(M)$$

是上半连续的。

推论 1.4 与以下结果密切相关 [DF15，推论 3。7]。不过请注意， [DF15] 中的映射定义在另一个簇上。

对于 $Z \in \operatorname{Irr}(A,d)$ 和 $Z' \in \operatorname{Irr}(A,d')$， $E(-,?)$（分别为 $E(-)$）在$Z \times Z'$（分别为 Z）上的一般值记作 $E(Z,Z')$（分别为 $E(Z)$）。

对于 Z， $Z' \in \operatorname{Irr}(A)$，我们通常需要知道 $E(Z,\ Z') = 0$。推论 1.4表明，只需找到某个 $(M,\ M') \in Z \times Z'$使得 $E(M,\ M') = 0$。

由上半连续性，不等式

$$\operatorname{ext}^i_A(Z,Z) \leq \operatorname{ext}^i_A(Z) \quad \text{and} \quad E(Z,Z) \leq E(Z)$$

对所有 $Z \in \operatorname{Irr}(A)$ 和 $i \geq 0$ 均成立。

定理 1.5. 对于 $Z \in \operatorname{Irr}(A)$，以下条件等价：

(i) $\hom_A(Z,Z) < \operatorname{end}_A(Z)$;
(ii) $\operatorname{ext}^1_A(Z,Z) < \operatorname{ext}^1_A(Z)$; (iii) $E(Z,Z) < E(Z)$; (iv) Z 不包含稠密轨道

$it.$

若 Z 不含稠密轨道，则不等式 $\operatorname{Ext}^i_A(Z,Z) \leq \operatorname{Ext}^i_A(Z)$ 对 $i \geq 2$未必是严格的。例子可见第 4节。一般而言，寻找 $\operatorname{Ext}^i_A(Z,Z) < \operatorname{Ext}^i_A(Z)$ 成立的充要条件，或许会很有意思。

回顾一下，$M \in \mathrm{mod}(A)$ 是一个砖，当且仅当 $\mathrm{End}_A(M) \cong K$。对于 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$，令 $\mathrm{brick}(Z) := \{M \in Z \mid Z \text{ 是一个砖}\}$。那么，$Z$ 是一个砖分支，当且仅当 $\mathrm{brick}(Z) \neq \varnothing$。这当且仅当 $\mathrm{end}_A(Z) = 1$，也当且仅当 $\mathrm{brick}(Z) = Z$。

推论 1.6. 设 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$ 是一个不包含稠密轨道的砖分支。那么 $\mathrm{hom}_A(Z, Z) = 0$。

推论 1.6 将 [S92 定理 3 的一个结论5] 从遗传代数推广到了任意代数。它也可以从 [PY20 定理 3 的证明8]中 提取。

对于 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$，令

$$c(Z) := \min\{\dim(Z) - \dim \mathcal{O}_M \mid M \in Z\}$$

为 Z 的参数个数。由此可得 $c(Z) \leq E(Z)$。令

$$\mathrm{Irr}^\tau(A) := \{Z \in \mathrm{Irr}(A) \mid c(Z) = E(Z)\}$$

为 一般 τ-约化 分支的集合。这些分支由 [GLS12] 引入并加以研究（当时称为强约化分支）。通过一般 $\tau(A)$ 向量对 Irr g 进行参数化是 Plamondon 的成果[P13, 定理 1。2]。

以下结果有助于研究温和代数的泛型τ-约化分支的直和分解，更多详情请参见第 2.6 节。该结果结合了推论 1.6 以及温和代数的一些著名结果即可得出。

推论 1.7 (Plamondon、Yurikusa [PY20])。 假设 A是温和的。对于每个$Z \in \mathrm{Irr}^\tau(A)$，有 $E(Z, Z) = 0$。

推论 1.7 早已作为 [PY20 定理 3 的一部分出现，8]但当时被错误地归功于 [GLFS22]。

泛型 τ-约化分支在构造 Fomin-Zelevinsky 簇代数的良好基时起着关键作用。给定一个 2-无圈箭图 Q 以及一个针对 Q 的非退化势 W，令 $A = \mathcal{P}(Q, W)$ 为相应的雅可比代数，并令 $\mathcal{A}(Q)$（分别为 $\mathcal{U}(Q)$）为与 Q相关联的 Fomin-Zelevinsky 簇代数（分别为上簇代数），细节参见 [DWZ08、DWZ10] 。回顾一下，$\mathcal{A}(Q) \subseteq \mathcal{U}(Q)$。对于每个 $Z \in \mathrm{Irr}^\tau(A)$，都有一个泛型Caldero-Chapoton函数 $C_Z \in \mathcal{U}(Q)$。集合 $\mathcal{B} := \{C_Z \mid Z \in \mathrm{Irr}^\tau(A)\}$ 通常构成 $\mathcal{A}(Q)$ 的一个基，参见 [GLS12、Q19]。文献 [DWZ10] 证明了 $\mathcal{A}(Q)$ 的所有簇单项式都包含在 $\mathcal{B}$ 中。温和雅可比代数已在 [GLFS16] 中分类，其中包括所有由标记曲面的三角剖分产生的雅可比代数。在这种情况下，推论 1.7 表明，对于每个 $C_Z \in \mathcal{B}$，对所有 $m \geq 1$ 都有 $C_Z^m \in \mathcal{B}$。

在[GLFS24] 中，我们构造了雅可比代数上模的 Derksen-Weyman-Zelevinsky 变异的几何版本，并将一般 τ-约化分支的变异不变性（见 [P13，定理 1。3]）从有限维雅可比代数推广到任意雅可比代数。我们对变异不变性的证明使用了推论1.4。

对于逆 Auslander-Reiten 平移 τ^-，有一些显然的对偶定义和陈述。

1.3. 论文结构。第 2 节回顾一些定义和众所周知的结果。第 2.1 节介绍模簇及其连通分支的一些事实。第 2.2 节回顾上半连续映射和下半连续映射的定义，并列出它们的基本性质。第 2.3 节给出 A的 Bar分解定义。第 2.4 节利用 Bar分解证明 $\operatorname{ext}^i_A(-,?)$ 是上半连续的。第 2.5 节阐释 g-向量与 E-不变量之间的关系。第 2.6 节回顾模簇不可约分支的直和分解定理。第 3 节给出引言中所有结果的证明。我们的第一个主要结果定理 1.1 在第 3.1 节中证明。推论 1.2 在第 3.2 节中证明。第 3.3 节给出推论 1.3 和推论 1.4 的证明。第二个主要结果定理 1.5 及推论 1.6 的证明见第 3.4 节。第 3.5 节给出推论 1.7 的证明。第 4 节由一组例子构成。

1.4. 约定。全文中，设 K 是一个代数闭域。我们始终用 A 表示一个 K 上的有限维代数。模指有限维左 A-模。令 $n(A)$ 表示简单 A-模的同构类数。（该数是有限的。）

所有簇均定义在 K 上。对于仿射簇 X 的子集 U，令 $\overline{U}$ 表示 U 在 X 中的扎里斯基闭包。

对于 $d \geq 0$，令 $M_d(K)$ 表示元素属于 K 的 $(d \times d)$ 矩阵集合。

令 $\mathbb{N}$ 表示包含 0 的自然数集合，并令 $K^\times := K \setminus \{0\}$。

集合 X 的基数记为 $|X|$。

对于映射 $f\colon X \to Y$和 $g\colon Y \to Z$，其复合记作 $gf\colon X \to Z$。

2. Known results on varieties of modules and semicontinuous maps

2.1. 模簇。对于 $d \geq 0$，令 $\operatorname{mod}(A,d)$ 表示 K-代数同态 $M\colon A \to M_d(K)$ 所构成的仿射簇。一般线性群 $G_d = \operatorname{GL}_d(K)$ 在 $\operatorname{mod}(A,d)$ 上通过共轭作用。（对于 $g \in G_d$ 和 $M \in$，令 $\operatorname{mod}(A,d)$，并令 $gM\colon A \to M_d(K)$ 由 $a \mapsto g^{-1}M(a)g$ 定义。）

M 的轨道为 $\mathcal{O}_M := \{gM \mid g \in G_d\}$。其维数为 $\dim G_d - \dim \operatorname{End}_A(M)$。$\operatorname{mod}(A,d)$ 中的轨道对应于 d 维 A-模的同构类。

令 $n = n(A)$，并令 $S(1), \ldots, S(n)$ 为单 A-模的代表元，按同构分类。对于单 A-模 S，以及 $M \in \operatorname{mod}(A)$，令 $[M : S]$ 表示 S 在 M 的一个（因此也是所有）合成列中的 Jordan-Hölder 重数。则 $\dim(M) := ([M : S(1)], \ldots, [M : S(n)]) \in \mathbb{N}^n$ 是 M 的维数向量。令 d_S 为 S 的 K- 维数。

对于 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ 且 $d = d_1 d_{S(1)} + \cdots + d_n d_{S(n)}$，令

$$\operatorname{mod}(A, \mathbf{d}) := \{M \in \operatorname{mod}(A,d) \mid \underline{\dim}(M) = \mathbf{d}\}.$$

这是 $\operatorname{mod}(A,d)$ 的一个连通分支，而 $\operatorname{mod}(A,d)$ 的所有连通分支都以这种方式得到，见 [Ga74，推论 1。4]。

令 $\mathrm{Irr}(A,d)$ 为簇 $\mathrm{mod}(A,d)$ 的不可约分支集合，并令 $\mathrm{Irr}(A)$ 为所有满足 $d \geq 0$ 的 $\mathrm{Irr}(A,d)$ 的并集。

对于 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$，令 $\dim(Z) := \dim(M)$，其中 M 是 Z中的任意一个模，并令 $\dim_i(Z) := [M : S(i)]$ 为 $\dim(Z)$ 的第 i 个分量。

2.2. 半连续映射。设 X 是一个仿射簇。映射 $\eta\colon X \to \mathbb{Z}$ 是上半连续的（分别地，下半连续的），如果对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，集合 $X_{\leq n} := \{x \in X \mid \eta(x) \leq n\}$（分别地，$X_{\geq n} := \{x \in X \mid \eta(x) \geq n\}$）都是 X中的开集。显然，η 是上半连续的，当且仅当 $-\eta$ 是下半连续的。

设 $\eta\colon X \to \mathbb{Z}$ 是上半连续的（分别地，下半连续的），且令Z 为 X的一个不可约分支。令 $\eta(Z) := \min\{\eta(x) \mid x \in Z\}$（分别地，$\eta(Z) := \max\{\eta(x) \mid x \in Z\}$）。那么 $\{x \in Z \mid \eta(x) := \eta(Z)\}$ 是 Z的一个稠密开子集。我们称 $\eta(Z)$ 为 η 在 Z上的一般值。

引理 2.1. 对于仿射簇 X 和 Y，设 $\eta\colon X \times Y \to \mathbb{Z}$ 为上半连续或下半连续。则对于 $x \in X$ 和 $y \in Y$，映射

$$\eta(x,-)\colon Y \to \mathbb{Z}, \quad y \mapsto \eta(x,y),$$
$$\eta(-,y)\colon X \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \eta(x,y)$$

分别为上半连续或下半连续。

引理 2.2. 对于仿射簇 X，设 $\eta\colon X \times X \to \mathbb{Z}$ 为上半连续或下半连续。则映射

$$\eta(-)\colon X \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \eta(x,x),$$

分别为上半连续或下半连续。

注意，引理 2.1 和 2.2 的逆命题通常不成立。

引理 2.3. 对于仿射簇 X，设 X_1、……、X_t为 X的连通分支。映射 $\eta\colon X \to \mathbb{Z}$ 为上半连续或下半连续，当且仅当所有限制 $\eta_{X_i}\colon X_i \to \mathbb{Z}$ 分别为上半连续或下半连续。

以下引理是众所周知的。

引理 2.4. 设 X 是一个仿射簇，V 是一个有限维 K-向量空间，Z 是 $X \times V$的一个闭子集。假设对每个 $x \in X$，集合

$$Z_x := \{v \in V \mid (x,v) \in Z\}$$

都是 V的子空间。那么

$$\eta\colon X \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \dim(Z_x)$$

是上半连续的。

2.3. Bar分解。以下所有张量积 $\otimes = \otimes_K$ 均取自 K，除非另有说明。对于 $n \geq 1$，令

$$A^{\otimes n} := A \otimes \cdots \otimes A$$

为 n 重张量积。

标准复形

$$\cdots \xrightarrow{p_2} A^{\otimes 3} \xrightarrow{p_1} A^{\otimes 2} \xrightarrow{p_0} A \to 0$$

定义为

$$p_i \colon a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i+1} \mapsto \sum_{k=0}^{i} (-1)^k a_0 \otimes \cdots \otimes a_k a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+1}$$

其中 $i \geq 0$。标准复形是 A 的自由 A-A 双模分解 .

设 $M \in \mathsf{mod}(A)$。将张量函子 $- \otimes_A M$ 应用于标准复形，得到一个投射分解

$$\cdots \xrightarrow{d_3^M} A^{\otimes 3} \otimes M \xrightarrow{d_2^M} A^{\otimes 2} \otimes M \xrightarrow{d_1^M} A \otimes M \xrightarrow{d_0^M} M \to 0$$

M，其中对于 $i \geq 0$， $d_i^M := p_i \otimes_A M$。注意，我们将（左） A-模$A \otimes_A M$与 M视为相同。因此， M的投射分解中的所有张量积都是在 K上进行的。

2.4. 的上半连续性 $\mathrm{Ext}_A^i(-, ?)$。 我们沿用第 2.3 节中的记号。设 $i \geq 1$。为简化起见，我们定义

$$k_i^{M,N} := \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(d_i^M, N)),$$
$$c_i^{M,N} := \dim \mathrm{Hom}_A(A^{\otimes i} \otimes M, N).$$

值 $c^{M,\ i\ N}$仅取决于 $\mathsf{dim}(M)$ 和 $\mathsf{dim}(N)$，因为

$$A^{\otimes i} \otimes M \cong A^{\dim(A^{\otimes(i-1)}) \dim(M)}$$

是自由投射模，因此 $c^{M,\ i\ N} = \mathsf{dim}(A^{\otimes(i-1)})\ \mathsf{dim}(M)\ \mathsf{dim}(N)$。（我们采用约定 $A^{\otimes 0} = K$。）将 $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ 应用于 M 的投射分解，可得

$$\mathrm{Ext}_A^i(M, N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(d_{i+1}^M, N)) / \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(d_i^M, N))$$

且 $\mathrm{Ext}_A^0(M, N) = \mathsf{Ker}(\mathrm{Hom}_A(d_1^M, N))$。由于

$$c_i^{M,N} = \dim \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(d_i^M, N)) + \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(d_i^M, N))$$

我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{ext}_A^i(M, N) &= \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(d_{i+1}^M, N)) - \dim \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(d_i^M, N)) \\ &= k_{i+1}^{M,N} + k_i^{M,N} - c_i^{M,N}. \end{aligned}$$

且 $\mathrm{Ext}_A^0(M, N) = k^{M,\ 1\ N}$。

以下结果非常有用，例如我们需要它来证明定理 1.1。

引理 2.5. 对于 d、$d' \geq 0$ 和 $i \geq 1$，映射

$$\eta \colon \mathrm{mod}(A, d) \times \mathrm{mod}(A, d') \to \mathbb{Z}, \quad (M, M') \mapsto k_i^{M,M'}$$

是上半连续的。

证明。设

$$X := \mathrm{mod}(A,d) \times \mathrm{mod}(A,d'),$$
$$V := \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes i} \otimes K^d, K^{d'}),$$
$$Z := \{((M,M'),f) \in X \times V \mid f \in \mathrm{Hom}_A(A^{\otimes i} \otimes M, M'),\ fd_i^M = 0\}.$$

那么， Z 是 $X \times V$中的闭集。

对于（M， M'） $\in X$令$Z_{(M,M')}$: $= \{f \in V \mid$（（M， M'） f） $\in Z\}$。显然，这是 V的一个子空间，与 Ker(Hom$_A$（d_i^M， M'））同构。因此，我们可以应用引理 2.4 ，得到 η 是上半连续的。□

推论 2.6. 对于 $d, d', i \geq 0$ ，映射

$$\mathrm{mod}(A,d) \times \mathrm{mod}(A,d') \to \mathbb{Z}, \quad (M,M') \mapsto \mathrm{ext}_A^i(M,M')$$

是上半连续的。

证明。 这直接由引理 2.5以及第 2.4 节开头的讨论得出。 □

2.5. g-向量与 E-不变量。设 $n = n(A)$，并设 $S(1) \ldots, S(n)$ 为两两不同构的简单 A-模。对于 $M \in \mathrm{mod}(A)$ 和 $1 \leq i \leq n$ ， 回顾

$$g_i(M) = -\hom_A(M, S(i)) + \mathrm{ext}_A^1(M, S(i)).$$

设 $P(1) \ldots, P(n)$ 为不可分解的投射 A-模，其顶$(P(i)) \cong S(i)$，其中 $1 \leq i \leq n$。注意，对于 $M \in \mathrm{mod}(A)$，有

$$\hom_A(P(i), M) = [M : S(i)].$$

每个有限维投射 A-模 P 都具有如下形式

$$P \cong P(1)^{a_1} \oplus \cdots \oplus P(n)^{a_n}$$

其中 $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ 唯一确定。对于 $1 \leq i \leq n$ ， 令

$$[P : P(i)] := a_i.$$

对于 $M \in \mathrm{mod}(A)$，令

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$$

为 M 的一个最小投射表示。

下面的引理显然成立。

引理 2.7. 对于 $1 \leq i \leq n$ ， 我们有

$$g_i(M) = [P_1 : P(i)] - [P_0 : P(i)].$$

设 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$。由映射 hom$_A(-, S(i))$ 和 ext$_A^1(-, S(i))$ 的上半连续性可知，存在 Z 的稠密开子集 U ， 使得 $g_i(-)$ 在 U 上对所有 $1 \leq i \leq n$ 都是常数。我们将这个一般值记为 $g_i(Z)$。

对于 $M, N \in \mathrm{mod}(A)$，回忆一下

$$E(M,N) = \hom_A(N, \tau(M)) \quad \text{and} \quad E(M) = E(M,M).$$

将 $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ 应用于 M 的最小投射表示（见上文），我们得到一个正合序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(p_0,N)} \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(p_1,N)} \mathrm{Hom}_A(P_1,N).$$

根据 [ARS97，第 IV 章，推论 4。3] 我们有

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(p_1,N)) \cong \mathrm{Hom}_A(N,\tau_A(M)).$$

特别地，我们得到

$$\begin{aligned} E(M,N) &= \hom_A(M,N) - \hom_A(P_0,N) + \hom_A(P_1,N) \\ &= \hom_A(M,N) - \sum_{i=1}^{n}[P_0:P(i)][N:S(i)] + \sum_{i=1}^{n}[P_1:P(i)][N:S(i)] \\ &= \hom_A(M,N) + \sum_{i=1}^{n} g_i(M)[N:S(i)]. \end{aligned}$$

设 $Z, Z' \in \mathrm{Irr}(A)$。由 $\hom_A(-,?)$ 的上半连续性，存在 $Z \times Z'$（分别为 Z）的一个稠密开子集 U，使得 $E(-,?)$（分别为 $E(-)$）在 U 上的限制为常数。我们将此一般值记为 $E(Z,Z')$（分别为 $E(Z)$）。

2.6. 不可约分支的直和。对于 $1 \le i \le t$，设 $Z_i \in \mathrm{Irr}(A,d_i)$。令 $d = d_1 + \cdots + d_t$，并定义

$$\begin{aligned} \eta\colon G_d \times Z_1 \times \cdots \times Z_t &\to \mathrm{mod}(A,d) \\ (g, M_1, \ldots, M_t) &\mapsto g.(M_1 \oplus \cdots \oplus M_t). \end{aligned}$$

η 的像记为 $Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_t$。扎里斯基闭包 $\overline{Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_t}$ 是 $\mathrm{mod}(A,d)$ 中的一个不可约闭子集，但一般而言，它不是 $\mathrm{mod}(A,d)$ 的一个不可约分支。

定理 2.8 ([CBS02，定理 1.2])。对于 Z_1，……，$Z_t \in \mathrm{Irr}(A)$ 以下条件等价：

(i) $\overline{Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_t} \in \mathrm{Irr}(A)$; (ii) 对所有满足 $i \ne j$ 的 $1 \le i, j \le n$，$\mathrm{ext}^1_A(Z_i, Z_j) = 0$。

对于 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$ 和 $m \ge 1$，令 $Z^m := Z \oplus \cdots \oplus Z$ 为 Z 的 m 重直和。若 Z 含有一个由不可分解模构成的稠密子集，则称其为不可分解的。每个 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$ 都可以（以唯一方式）写成直和

$$Z = \overline{Z_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus Z_t^{a_t}}$$

其中 Z_1，……，Z_t 是两两不同的不可分解分支，并且 a_1，……，$a_t \ge 1$。我们参考 [CBS02] 了解详情。令 $\Sigma(Z) := t$。

对于 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$，Voigt 引理（例如参见 [Ga74，命题 1。1]）以及 Auslander-Reiten 公式（例如参见 [R84，第 2 节。4]）可推出

$$c(Z) \le \mathrm{ext}^1_A(Z) \le E(Z).$$

回顾一下，$\mathrm{Irr}^\tau(Z) := \{Z \in \mathrm{Irr}(A) \mid c(Z) = E(Z)\}$ 是一般情况下 τ-约化的分支。

回顾一下，$M \in \mathrm{mod}(A)$ 是刚性的（分别地，τ-刚性的），如果 $\mathrm{Ext}^1_A(M,M) = 0$（分别地，$\mathrm{Hom}_A(M,\tau_A(M)) = 0$）。根据 Auslander-Reiten 公式，任何 τ-刚性模都是刚性的，但反过来一般不成立。如果 M 是 τ-刚性的，那么 $Z = \overline{\mathcal{O}_M} \in \mathrm{Irr}^\tau(A)$。

对 τ-刚性模的系统研究始于 [AIR14]。这些模对于 Fomin-Zelevinsky簇代数的加性范畴化十分重要，并且还引出了对经典倾斜理论的广泛推广。

定理2.9 ([CLS15，定理 1.3])。 对于 $Z_1, \ldots, Z_t \in \mathrm{Irr}^\tau(A)$ 以下条件等价：

(i) $\overline{Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_t} \in \mathrm{Irr}^\tau(A)$; (ii) $E(Z_i, Z_j) = 0$ 对所有满足 $i \neq j$ 的 $1 \leq i, j \leq n$ 均成立。

定理 2.9 的证明依赖于定理 2.8。

请注意，在定理 2.8 和 2.9 中，我们不假设各分量$Z_1, \ldots, Z_t$两两不同。

根据 Auslander-Reiten 公式，条件 $E(Z_i, Z_j) = 0$ 意味着 $\mathrm{ext}^1_A(Z_i, Z_j) = 0$。

定理2.10 ([CLS15，定理6.1])。 设 $Z \in \mathrm{Irr}^\tau(A)$ 满足 $E(Z, Z) = 0$。则$\Sigma(Z) \leq n(A)$。

对于所有 $Z \in \mathrm{Irr}^\tau(A)$, $\Sigma(Z) \leq n(A)$ 是否成立是一个未解决问题。

3. Proofs of the main results

3.1. 截断欧拉映射的半连续性。

*Pro*定理 *1.1*。 回顾一下，对于 $t \geq 0$ 和 M, $M' \in \mathrm{mod}(A)$ 我们定义了

$$\eta_t(M, M') = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \, \mathrm{ext}^i_A(M, M').$$

我们采用第2.4节中的记号。为方便起见，令 $c^{M,\ 0\ M'} := 0$ 并定义

$$c^{M,M'} := \sum_{i=0}^{t} (-1)^{i+1} c_i^{M,M'}.$$

如果固定 $\dim(M)$ 和 $\dim(M')$，这就是一个常数。

我们得到

$$\eta_t(M, M') = \begin{cases} k_{t+1}^{M,M'} + c^{M,M'} & \text{if } t \text{ is even,} \\ -k_{t+1}^{M,M'} + c^{M,M'} & \text{if } t \text{ is odd.} \end{cases}$$

现在引理 2.5 表明，$\eta_t(-,?)$ 在 t 为偶数时是上半连续的，在 t为奇数时是下半连续的。证明至此完成。 □

3.2. 的上半连续性 $\mathrm{Hom}_A(\Omega^j(-),\ ?)$。 本节给出推论 1.2的证明。对于 $M \in \mathrm{mod}(A)$, 令

$$\cdots \xrightarrow{p_3} P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$$

是 M 的极小投射分解。对于 $j \geq 0$，我们有 $\mathrm{Im}(p_j) = \Omega^j(M)$。

对于 $j \geq 0$ 和 $M' \in \mathrm{mod}(A)$，定义

$$p_j^{M,M'} := \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \hom_A(P_{j-1-i}, M').$$

（对于 $j = 0$，我们有 $p^{M}{}_{,j}{}^{M'} = 0$。）

引理 3.1. 对于 d、 d'、 $j \geq 0$，我们有

$$\hom_A(\Omega^j(M), M') = p_j^{M,M'} + (-1)^j \eta_j(M, M').$$

.

证明。沿用本节开头的记号，有一个短正合列

$$0 \to \Omega^j(M) \to P_{j-1} \to \Omega^{j-1}(M) \to 0$$

对每个 $j \geq 1$。应用 $\mathrm{Hom}_A(-, M')$ 可得一个正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\Omega^{j-1}(M), M') \to \mathrm{Hom}_A(P_{j-1}, M') \to \mathrm{Hom}_A(\Omega^j(M), M') \to \mathrm{Ext}^1_A(\Omega^{j-1}(M), M') \to 0.$$

Ke注意到 $\mathrm{Ext}^1_A(\Omega^{j-1}(M)\ M') \cong \mathrm{Ext}^j_A(M, M')$，我们得到公式 a

$$\hom_A(\Omega^j(M), M') = -\hom_A(\Omega^{j-1}(M), M') + \hom_A(P_{j-1}, M') + \mathrm{ext}^j_A(M, M').$$

解这个递推关系可得

$$\begin{aligned} \hom_A(\Omega^j(M), M') &= \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \hom_A(P_{j-1-i}, M') \right) + (-1)^j \eta_j(M, M') \\ &= p_j^{M,M'} + (-1)^j \eta_j(M, M'). \end{aligned}$$

□

下一个引理是众所周知的。

引理 3.2. 对于 $1 \leq i \leq n(A)$ 和 $j \geq 0$，我们有

$$\mathrm{ext}^j_A(M, S(i)) = \hom_A(P_j, S(i)) = [P_j : P(i)].$$

引理 3.3. 对于 $j \geq 1$，我们有

$$p_j^{M,M'} = \sum_{i=0}^{n(A)} (-1)^{j-1} \eta_{j-1}(M, S(i))[M' : S(i)].$$

证明。 回忆一下，$\mathrm{Hom}_A(P(i)\ M') = [M' :\ S(i)]$。现在由引理3.2可得结论。 □

推论 3.4. 映射

$$p_j^{-,?}\colon \operatorname{mod}(A,d)\times\operatorname{mod}(A,d')\mapsto\mathbb{Z},\quad (M,M')\mapsto p_j^{M,M'}$$

是上半连续的。

证明。 结合引理 2.3、3.1、3.3 与定理 1.1。 □

推论 *1.2* 的证明。 结合引理 3.1 与推论3.4 以及定理 1.1，我们得到映射

$$\hom_A(\Omega^j(-),?)\colon \operatorname{mod}(A,d)\times\operatorname{mod}(A,d')\to\mathbb{Z},\quad (M,M')\mapsto\hom_A(\Omega^j(M),M')$$

是上半连续的。 □

3.3. 向量和 g-向量以及 E-不变量。 我们证明推论 1.3 和 1.4 （它们对应于以下两个命题）。

命题 3.5. 对于 $1\le i\le n(A)$，映射 $g_i(-)$ 是上半连续的。

证明。 根据定理 1.1，截断欧拉映射

$$\begin{aligned}\eta_1(-,?)\colon \operatorname{mod}(A,d)\times\operatorname{mod}(A,d')&\to\mathbb{Z}\\ (M,M')&\mapsto\hom_A(M,M')-\operatorname{ext}^1_A(M,M')\end{aligned}$$

是下半连续的。利用引理 2.1 可得 $-\eta_1(-,S(i))$ 是上半连续的。由于

$$g_i(M)=-\hom_A(M,S(i))+\operatorname{ext}^1_A(M,S(i))=-\eta_1(M,S(i)),$$

结论得证。 □

命题 3.6. $E(-,?)$ 是上半连续的。

证明。我们知道

$$E(M,N)=\hom_A(M,N)+\sum_{i=1}^{n(A)}g_i(M)[N:S(i)]$$

对于 $M,N\in\operatorname{mod}(A)$。对于所有$1\le i\le n(A)$，$\hom_A(-,?)$ 和 $g_i(-)$ 的上半连续性意味着 $E(-,?)$ 是上半连续的。□

3.4. 关于 $\hom_A(-,?)$、$\operatorname{ext}^1_A(-,?)$ 和 $E(-,?)$。 本节给出定理 1.5 和推论 1.6的证明。

对于簇 X 的可构造子集 U，令 $\operatorname{codim}_X(U)$ 表示 U 在 X 中的余维。

引理 3.7. 对于 $Z\in\operatorname{Irr}(A)$，我们有

$$\operatorname{codim}_{Z\times Z}(\{(M,M')\in Z\times Z\mid M\cong M'\})=c(Z).$$

证明. 回顾一下,

$$c(Z) = \min\{\dim(Z) - \dim \mathcal{O}_M \mid M \in Z\}$$

并且 $\dim \mathcal{O}_M = \dim G_d - \dim \operatorname{End}_A(M)$。令

$$f\colon Z \times G_d \to Z \times Z$$
$$(M, g) \mapsto (M, gM).$$

这是一个仿射簇态射，其像 $\operatorname{Im}(f) = \{(M, M') \in Z \times Z \mid M \cong M'\}$。显然，$\operatorname{Im}(f)$ 不可约，并且 $\{(M, M') \in \operatorname{Im}(f) \mid \dim(Z) - \dim \mathcal{O}_M = c(Z)\}$ 是 $\operatorname{Im}(f)$ 的一个稠密开子集。对于该子集中的 (M, M')，Chevalley 定理表明

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim(Z \times G_d) - \dim f^{-1}(M, M').$$

我们有 $\dim f^{-1}(M, M') \cong \operatorname{Aut}_A(M)$。于是得到

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim(Z) + \dim G_d - \dim \operatorname{End}_A(M) = \dim(Z) + \dim \mathcal{O}_M.$$

因此 $\operatorname{codim}_{Z\times Z}(\operatorname{Im}(f)) = 2\dim(Z) - \dim(Z) - \dim \mathcal{O}_M = c(Z)$。 □

定理 *1.5* 的证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：假设 $\hom_A(Z, Z) < \operatorname{end}_A(Z)$。我们选取 $(M, M') \in Z \times Z$ 使得

$$\hom_A(M, M') = \hom_A(Z, Z), \qquad \operatorname{ext}^1_A(M, M') = \operatorname{ext}^1_A(Z, Z),$$
$$\operatorname{end}_A(M) = \operatorname{end}_A(Z), \qquad \operatorname{ext}^1_A(M) = \operatorname{ext}^1_A(Z).$$

短正合列

$$0 \to \Omega(M) \to P_0 \to M \to 0$$

给出等式

$$\operatorname{ext}^1_A(M, M') = \hom_A(M, M') - \hom_A(P_0, M') + \hom_A(\Omega(M), M'),$$
$$\operatorname{ext}^1_A(M) = \operatorname{end}_A(M) - \hom_A(P_0, M) + \hom_A(\Omega(M), M).$$

映射 $\hom_A(P_0, -)$ 在 Z 上为常数。由映射 $\hom_A(\Omega(-), ?)$ 的上半连续性（参见推论 1.2），我们可以假设 $\hom_A(\Omega(M) M') \leq \hom_A(\Omega(M) M)$。现在，$\hom_A(Z, Z) < \operatorname{end}_A(Z)$ 蕴含 $\operatorname{ext}^1_A(Z, Z) < \operatorname{ext}^1_A(Z)$。

(i) $\Longrightarrow$ (iv)、(ii) $\Longrightarrow$ (iv) 和 (iii) $\Longrightarrow$ (iv)：假设 $Z \in \operatorname{Irr}(A)$ 包含一个稠密轨道，即对某个 $M \in Z$，有 $Z = \overline{\mathcal{O}_M}$。那么 $\mathcal{O}_M$ 和 $\mathcal{O}_M \times \mathcal{O}_M$ 分别是 Z 和 $Z \times Z$ 的稠密开子集。对所有$i \geq 0$，我们得到 $\operatorname{ext}^i_A(Z, Z) = \operatorname{ext}^i_A(Z)$，并且 $E(Z, Z) = E(Z)$。

(iv) $\Longrightarrow$ (i)：假设 $Z \in \operatorname{Irr}(A, d)$ 不包含稠密轨道。这意味着 $c(Z) \geq 1$。我们要证明 $\hom_A(Z, Z) < \operatorname{end}_A(Z)$。

Let

$$U := \{(M, M', f) \in Z \times Z \times \operatorname{Hom}_K(K^d, K^d) \mid f \in \operatorname{Hom}_A(M, M')\}.$$

这是 $Z \times Z \times \operatorname{Hom}_K(K^d, K^d)$ 的一个闭子集。对于 $i \geq 0$ 令

$$U_i := \{(M, M', f) \in U \mid \hom_A(M, M') = i\}.$$

这是 U的一个局部闭子集。令 $\pi'_i\colon U_i \to Z \times Z$为显然的投影，并定义 $V_i := \operatorname{Im}(\pi'_i)$。我们得到一个满射 $\pi_i\colon U_i \to V_i$。根据 [B96，引理 2。1]

映射 $\pi_i\colon\ U_i \to V_i$ 是一个向量丛。特别地，π_i 将 U_i的开子集映射到 V_i的开子集。

设 $i_0 := \mathsf{hom}_A(Z,Z)$。那么 V_{i_0} 是 $Z \times Z$ 的稠密开子集，因此是不可约的。

设 $M \in Z$使得 $\dim \mathsf{End}_A(M) = \mathsf{end}_A(Z)$。我们已经知道 $i_0 = \mathsf{hom}_A(Z,Z) \leq \mathsf{end}_A(Z)$。

Let

$$U_{i_0}^\circ := \{(M,M',f) \in U_{i_0} \mid f \text{ is not an isomorphism}\}.$$

这是 U_{i_0}的闭子集。因此 $W_{i_0} := U_{i_0} \setminus U_{i_0}^\circ$是 U_{i_0}的开子集。

假设 $W_{i_0} \neq \varnothing$。那么 $\pi_{i_0}(W_{i_0})$ 是 V_{i_0} 的稠密开子集，因此也是 $Z \times Z$的稠密开子集。

注意，对于所有 $(M,M') \in \pi_{i_0}(W_{i_0})$ 我们有 $M \cong M'$。这是一个矛盾，因为根据引理 3.7我们有

$$\mathrm{codim}_{Z\times Z}(\{(M,M') \in Z \times Z \mid M \cong M'\}) = c(Z) \geq 1.$$

因此我们证明了 $U_{i_0}^\circ = U_{i_0}$。特别地，如果 $(M,M') \in Z \times Z$使得 $\mathsf{hom}_A(M,M') = i_0$，那么 $M \ncong M'$。这意味着 $\mathsf{hom}_A(Z,Z) < \mathsf{end}_A(Z)$。

(iv) $\implies$ (iii)：令 $Z \in \mathsf{Irr}(A)$。假设 Z 不包含稠密轨道。我们已经知道 (iv) 蕴含 (i)，即 $\mathsf{hom}_A(Z,Z) < \mathsf{end}_A(Z)$。现在这两个等式

$$E(Z,Z) = \hom_A(Z,Z) + \sum_{i=1}^{n(A)} g_i(Z)\underline{\dim}_i(Z),$$

$$E(Z) = \mathrm{end}_A(Z) + \sum_{i=1}^{n(A)} g_i(Z)\underline{\dim}_i(Z).$$

意味着 $E(Z,Z) < E(Z)$。

定理 1.5 的证明至此完成。 □

推论*1.6* 的证明。令 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$ 为一个砖分支。根据定义，我们有 $\mathsf{end}_A(Z) = 1$。如果 Z 不具有稠密轨道，则定理 1.5 蕴含 $\mathsf{hom}_A(Z,Z) = 0$。 □

3.5. 一般而言 τ-约化分支（适用于温和代数）。我们证明推论 1.7。

对于 $Z \in \mathsf{Irr}(A)$，$c(Z) = 0$ 当且仅当 Z 包含一个稠密轨道。此外，$c(Z) = E(Z) = 0$ 当且仅当 Z包含一个 τ-刚性模 M。在这种情况下，$\mathcal{O}_M$ 在 Z中稠密，且有 $E(Z,Z) = 0$。

从现在起，假设 A 是一个温和代数，并令 $Z \in \mathrm{Irr}(A)$ 不可分解。由此可知 $c(Z) \leq 1$，例如参见[CC15，第 2 节。2]在这种情况下，以下各项等价：

(i) $c(Z) = E(Z) = 1$;

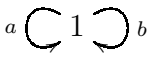
(ii) Z 是一个不包含稠密轨道的砖分支。

更多细节请参见[GLFS22，第 3]节。在这种情况下，定理1.5 表明 $E(Z,\ Z)\ =0$。现在，定理2.9 推出推论1.7。

4. Examples

4.1. 设 $Z\in \mathrm{Irr}(A)$。一般而言，对于 $i\geq 2$，不等式 $\mathrm{ext}^i_A(Z,Z)\ \leq \mathrm{ext}^i_A(Z)$ 不一定是严格的。一个简单的例子是，若 $\mathrm{gl.dim}(A)\ =t$，则对所有 $i\geq t+1$ 和 $Z\in \mathrm{Irr}(A)$，都有 $\mathrm{ext}^i_A(Z,Z)\ =\ \mathrm{ext}^i_A(Z)\ =0$。

4.2. 设 $A=KQ/I$，其中 Q 是该箭图



且 I 由 $\{ab-ba,\ a^2,\ b^2\}$ 生成。（若 $\mathrm{char}(K)\ =\ 2$，则这是克莱因四元群的群代数。）对于 $\lambda\ \in\ K^\times$，设 M_λ 是由下式定义的二维A-模

$$M_\lambda\colon A\to M_2(K),\quad a\mapsto \begin{pmatrix}0&0\\ \lambda&0\end{pmatrix},\quad b\mapsto \begin{pmatrix}0&0\\ 1&0\end{pmatrix}.$$

我们有

$$\hom_A(M_\lambda,M_\mu)=\begin{cases}2 & \text{if } \lambda=\mu,\\ 1 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$\mathrm{ext}^1_A(M_\lambda,M_\mu)=\begin{cases}1 & \text{if } \lambda=\mu,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

此外，当且仅当 $M_\lambda\cong M_\mu\ \lambda=\mu$ 时，我们有 τ。简单计算可得 $M_\lambda(\cong M_\lambda)\ M_\lambda$，且 $\Omega(\cong M_{-\lambda^{-1}})^{\,2}$。因此 $\Omega M_\lambda(\cong M_\lambda)$。容易验证

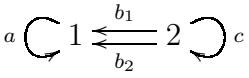
$$Z:=\overline{\bigcup_{\lambda\in K^\times}\mathcal{O}_{M_\lambda}}\in \mathrm{Irr}(A,2).$$

（事实上，我们有 $\mathrm{mod}(A,2)\ =\ Z$。）注意，Z 不含稠密轨道。由此可得 $\mathrm{hom}_A(Z,Z)\ =\ 1$，$\mathrm{end}_A(Z)\ =\ 2$，$\mathrm{ext}^1_A(Z,Z)\ =\ 0$，$\mathrm{ext}^1_A(Z)\ =\ 1$，$E(Z,Z)=1$，以及 $E(Z)=2$。对于 $i\geq 2$，我们得到 $\mathrm{ext}^i_A(Z,Z)\ =0$，并且

$$\mathrm{ext}^i_A(Z)=\begin{cases}1 & \text{if } i \text{ is odd,}\\ 0 & \text{if } i \text{ is even.}\end{cases}$$

这里我们用到了 $\mathrm{Ext}^i_A(M_\lambda,M_\mu)\ \cong \mathrm{Ext}^1_A(\Omega^{i-1}(M_\lambda)\ M_\mu)$。

4.3. 以下例子出自 Calvin Pfeifer [Pf22]。设 $n\geq 2\ \ A=KQ/I$，其中 Q 是箭图



且 I 由 $\{a^n,\, c^n,\, ab_i - b_ic \mid i = 1, 2\}$生成。这是代数 $H(C, D, \Omega)$，来自 [GLS17] 对于

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} n & \\ & n \end{pmatrix}, \quad \Omega = \{(1, 2)\}.$$

令 $\mathbf{d} = (n, n)$。$\mathsf{mod}(A, 2n)$ 中的 $\mathsf{mod}(A, \mathbf{d})$ 的局部自由 A-模（依照 [GLS17] 的意义）构成一个非空的开不可约子集。令 $Z \in \mathsf{Irr}(A, 2n)$ 为该子集的闭包。则 Z 不可分解，$\mathsf{hom}_A(Z, Z) = \mathsf{ext}^1_A(Z, Z) = E(Z, Z) = 0$，且 $\mathsf{end}_A(Z) = \mathsf{ext}^1_A(Z) = E(Z) = n$。

4.4. 设 $A = KQ$ 为有限维路径代数。那么 $\mathsf{mod}(A, d)$ 的不可约分支恰好是 $\mathsf{mod}(A, d)$ 的连通分支。此外，每个不可分解的 $Z \in \mathsf{Irr}(A)$ 都是一个砖分支，参见 [K82，命题 1]。令$Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ 为 Q 的顶点集。因此 $n = n(A)$。令 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ 为 [S92]，意义下的各向同性 Schur 根，并令 $d = d_1 + \cdots + d_n$。令$Z = \mathsf{mod}(A, \mathbf{d}) \in \mathsf{Irr}(A, d)$。则 $\mathsf{hom}_A(Z, Z) = \mathsf{ext}^1_A(Z, Z) = E(Z, Z) = 0$，且 $\mathsf{end}_A(Z) = \mathsf{ext}^1_A(Z) = E(Z) = 1$。若进一步假设 Q 连通且为野性的，那么对于所有砖 $M \in Z$，都有 $\tau(M) \ncong M$。作为一个具体例子，设 Q 为箭图

$$1 \rightleftarrows 2 \longleftarrow 3$$

并令 $\mathbf{d} = (1,2,1)$。那么 Q 是连通且野性的，而 $\mathbf{d}$ 是各向同性 Schur 根。

References

[AIR14] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, τ-倾斜理论。Compos. Math. 150（2014），第3期，415–452。[ASS06] I. Assem, D. Simson, A. Skowro´nski, 《结合代数表示论基础》，第1卷：表示论方法。伦敦数学会学生教材，65。剑桥大学出版社，剑桥，2006。x+458 页。[ARS97] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, 《Artin 代数表示论》。1995年原版的修订重印本。剑桥高等数学研究，36。剑桥大学出版社，剑桥，1997。xiv+425页。[B96] K. Bongartz，关于有限维模的退化与扩张。Adv. Math. 121（1996），第2期，245–287。[CC15] A. Carroll, C. C hindris，关于无圈温和代数的不变理论。Trans. Amer. Math. Soc. 367（2015），第5期，3481–3508。[CLS15]G. Cerulli Irelli, D. Labardini-Fragoso, J. Schr¨oer，Caldero-Chapoton 代数。Trans. Amer. Math. Soc. 367（2015），第4期，2787–2822。[CBS02] W. Crawley-Boevey, J. Schr¨oer，模簇的不可约分支。J. Reine Angew. Math. 553（2002），201–220。[DF15] H. Derksen, J. Fei，代数的一般表示。Adv. Math. 278（2015），210–237。[DWZ08] H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky，带势箭图及其表示。I. 变异。Selecta Math.（新系列）14（2008），第1期，59–119。[DWZ10] H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky，带势箭图及其表示 II：簇代数中的应用。J. Amer. Math. Soc. 23（2010），第3期，749–790。[Ga74] P. Gabriel，有限表示型是开性质。代数表示国际会议论文集（加拿大安大略省渥太华卡尔顿大学，1974），第10篇，23页。卡尔顿数学讲义，第9辑，卡尔顿大学，渥太华，安大略省，1974。[GLFS16] C. Geiß, D. Labardini-Fragoso, J. Schr¨oer，雅可比代数的表示型。Adv. Math. 290（2016），364–452。

[GLFS20] C. Geiß, D. Labardini-Fragoso, J. Schr¨oer，带系数的一般 Caldero-Chapoton 函数及其在曲面簇代数中的应用。已弃用的预印本（2020），45页，arXiv:2007.05483[GLFS24] C. Geiß, D. Labardini-Fragoso, J. Schr¨oer，DWZ-突变的几何化。预印本（2024），正在准备中。[GLFS22] C. Geiß, D. Labardini-Fragoso, J. Schr¨oer，温和代数上的模概形与曲面层理。Selecta Math.（新系列）28（2022），第1期，第8篇，78页。[GLS12] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schr¨oer，簇代数的一般基与室公式。J. Amer. Math. Soc. 25（2012），第1期，21–76。[GLS17] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schr¨oer，关于可对称化 Cartan 矩阵的带关系箭图 I：基础。Invent. Math. 209（2017），第1期，61–158。[K82] V. Kac，无限根系、图的表示与不变理论。II. J. Algebra 78（1982），第1期，141–162。[Pf22] C. Pfeifer，电子邮件通信。[P13] P.-G. Plamondon，来自簇范畴的簇代数一般基。Int. Math. Res. Not. IMRN 2013，第10期，2368–2420。[PY20] P.-G. Plamondon, T. Yurikusa，温和代数具有稠密的 g-向量扇。附录由 Bernhard Keller 撰写。Int. Math. Res. Not. IMRN（2023），第4期，2701–2747。预印本（2020），34页，arXiv:2007.04215[Q19]F. Qin，上簇代数的基与热带点。预印本（2019），68页，arXiv:1902.09507[R84] C.M. Ringel，温和代数与整二次型。数学讲义，1099。Springer-Verlag，柏林，1984。xiii+376 页。[S92] A. Schofield，箭图的一般表示。Proc. London Math. Soc.（第3辑）65（1992），第1期，46–64。

Christof Geiss
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
04510 México D.F.
México

电子邮箱地址：christof.geiss@im.unam .mx

Daniel Labardini-Fragoso
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
04510 México D.F.
México

电子邮箱地址：labardini@im.unam.mx

Jan Schröer
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Endenicher Allee 60
53115 Bonn
Germany

电子邮箱地址：schroer@math.uni-bonn.de