arXiv:2302.02096v2 [cs.LG] 3 Aug 2023

个体公平的矩阵估计

Cindy Y. Zhang* Sarah H. Cen*cindyz@princeton.edu
shcen@mit.edu 普林斯顿大学 麻省理工学院

Devavrat Shah
devavrat@mit.edu 麻省理工学院

摘要

近年来，算法公平性出现了多种概念。其中一种是个体公平性（IF），要求相似的个体受到相似的待遇。与此同时，矩阵估计（ME）已成为处理含噪且存在缺失值数据的一种自然范式。在这项工作中，我们将这两个概念联系起来。我们证明，使用矩阵估计（ME）对数据进行预处理，可以提升算法的个体公平性（IF），而不牺牲性能。具体而言，我们证明，在适当条件下，使用一种称为奇异值阈值法（SVT）的流行矩阵估计（ME）方法对数据进行预处理，能够提供强有力的个体公平性（IF）保证。随后我们证明，在类似条件下，SVT 预处理还能产生一致且近似极小极大最优的估计值。因此，在所述条件下，ME预处理步骤不会增加基础算法的预测误差，即不会造成公平性与性能权衡。我们在合成数据和真实数据上验证了这些结果。

1 引言

随着数据驱动的决策日益普及，人们越来越关注机器学习（ML）算法的公平性 。由于何为公平取决于具体情境（例如，反映特定的价值体系），因此不存在普遍接受的公平性概念。

算法公平性的一种概念是个体公平性（*IF*），它不同于群体公平的概念（例如均等化几率）。简单来说，个体公平性要求相似的个体受到相似的对待。更准确地说，若算法 $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 作用于个体集合 $\mathcal{X}$，则当任意两个个体 $a, b \in \mathcal{X}$,

$$D(f(a), f(b)) \leq L \cdot d(a, b), \tag{1}$$

对于距离度量 d 和 D的选择。利普希茨常数 L 反映了个体公平性条件执行得有多严格。满足个体公平性条件的算法 f 可确保：特征空间中彼此接近的两个个体 $\mathcal{X}$，在结果空间中获得的结果也彼此接近$\mathcal{Y}$，而接近程度由 L刻画。因此，较小的利普希茨常数意味着更强的个体公平性约束。

*表示贡献相同

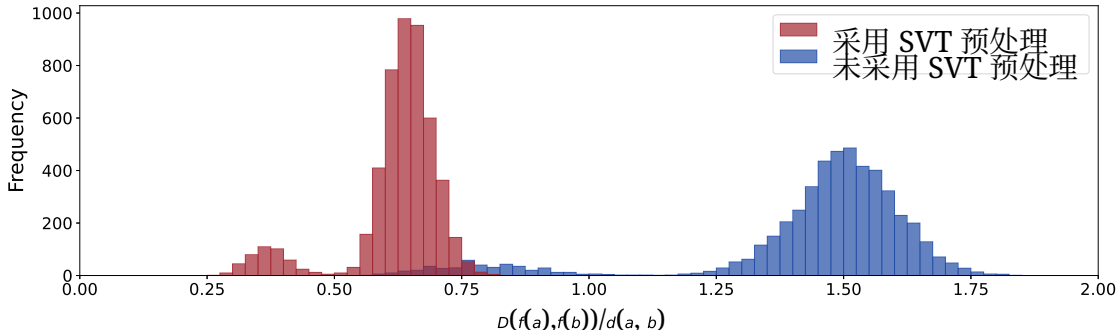

图1：我们在合成数据上运行深度神经网络，分别采用和不采用 SVT 预处理（详情请参见第 6 节实验 #1）。我们随机选取样本对 $a,\ b \in \mathcal{X}$ 然后计算比值 $D(f(a)\ f(b))/d(a,\ b)$，其中 f表示采用（红色）和不采用（蓝色）SVT 预处理的神经网络。如图所示，采用 SVT 预处理会使比值降低，这表明它能够提升个体公平性，如式（1）所定义。事实上，我们在第 4 节证明，在适当条件下，SVT 预处理能够增强算法的个体公平性保证。

与此同时，矩阵估计（ME）已成为处理含噪和/或存在缺失值数据的一种自然范式。在这项工作中，我们提出了一种两步程序：首先使用一种称为奇异值阈值法（*SVT*）的 ME 技术对数据（例如训练数据）进行预处理，然后将其交由推断算法 h （例如神经网络）处理。我们证明，在适当条件下，这一预处理步骤能够增强推断算法的个体公平性保证；也就是说，将 SVT 与 h 结合后，式（1）中的利普希茨常数会低于 h 单独使用时的值。

尽管 SVT 能够提升算法的个体公平性，但尚不清楚这种提升是否会以牺牲算法性能为代价。在这项工作中，我们证明，使 SVT 能够提升个体公平性的同一组阈值也意味着 SVT 具有强大的性能保证。换言之，在适当条件下，在可应用矩阵估计的情形中，SVT 能够提升个体公平性而不产生性能代价。我们的设定如图 2所示，并在第3节中详细说明。

我们的主要贡献可概括如下：

• **我们证明，SVT 预处理具有强有力的个体公平性保证**。矩阵估计常用于高维推断，以处理稀疏噪声数据。最常用的矩阵估计方法之一是 SVT。在第 4.2-4.3 节中，我们推导出一组条件；在这些条件下，SVT 预处理能够增强推断算法相对于观测协变量的个体公平性保证，并针对（未知的）真实协变量提供近似的个体公平性保证。随后，我们利用这一结果探究 SVT 如何影响不同数据情形下的预测。

• **我们证明，在 SVT 下实现个体公平性不会损害渐近性能**。在第4.4节中，我们证明，使用 SVT 预处理实现个体公平性并不一定会损害性能。具体而言，我们证明，SVT 要保证个体公平性所需的条件，与一种名为通用奇异值阈值法（USVT）的常用方法所需的条件相一致。由于 USVT 具有很强的性能保证（它能产生一致且近似极小极大的估计量）Chatterjee (2015），这一联系意味着，SVT 预处理可以在不带来性能代价的情况下实现个体公平性。换言之，通过 SVT 预处理来保证个体公平性不会损害性能，因为与基于性能的方法 USVT 相比，它不会对矩阵估计施加任何额外限制。

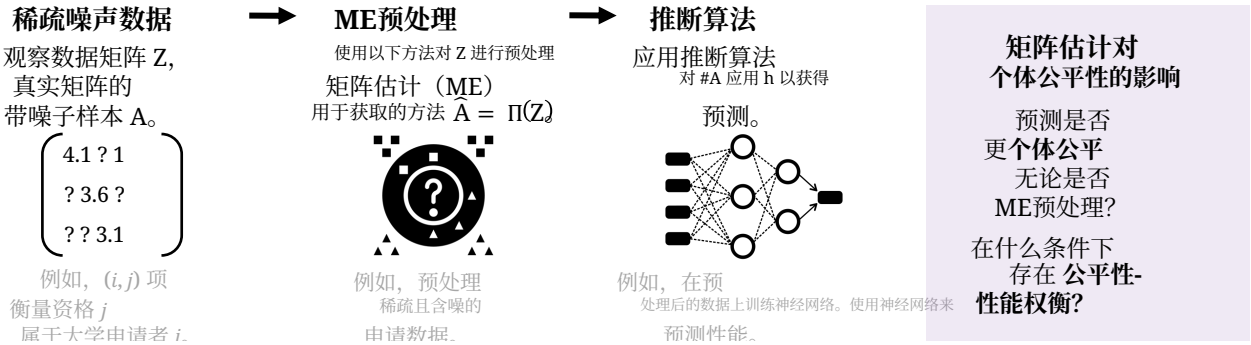

图2：我们研究了在需要使用稀疏噪声数据执行推断任务的情形下，ME预处理对个体公平性和性能的影响。主要结果表明，SVT（一种流行的ME方法）能够提供强有力的个体公平性保证，并且作为预处理步骤使用时不一定会损害性能。

- **我们通过真实数据集和合成数据集的实验验证了这些结果**。在第6节中，我们展示了在合成数据和 MovieLens 1M 数据集上的研究发现。我们直观展示了 SVT 预处理对个体公平性的影响。例如，图1展示了比值 $D(f(a)\ f(b))/d(a,b)$在 SVT 预处理下如何减小。数值越小，表示个体公平性的保证越强。我们还展示了 SVT 预处理对性能的影响。

据我们所知，这是首项在个体公平性与矩阵估计之间建立理论联系的工作。

2 相关工作

矩阵估计（ME）。矩阵估计研究的是如何根据矩阵部分条目带噪的观测值来估计这些条目（Candès & Tao，2010；Recht，2011；Keshavan 等人，2010a；Negahban & Wainwright，2012；Davenport 等人，2014；Chatterjee，2015；Chen & Wainwright，2015）。矩阵估计是一类可应用于任何以矩阵形式表示的数据的方法。具体而言，假设存在一个潜在矩阵，而我们只能获得其部分条目的带噪样本。矩阵估计的目标是根据这些带噪子样本估计每个条目的值。

例如，推荐系统会使用矩阵估计来估计用户对不同类型内容的兴趣（Koren 等人，2009；Song 等人，2016；Borgs 等人，2017）。事实上，Netflix 奖的获奖方案便是基于矩阵估计方法构建的（Koren，2009）。矩阵估计也被用于研究社交网络（Anandkumar 等人，2013；Abbe & Sandon，2015；Hopkins & Steurer，2017）；填补并预测时间序列（Agarwal 等人，2018；Amjad 等人，2018）；汇总众包中的信息（Shah & Lee，2018）；提升深度学习应对对抗攻击的鲁棒性（Yang 等人，2019）；等等。

奇异值阈值法（SVT）。关于矩阵估计以及与之密切相关的矩阵补全和矩阵分解领域，已有大量文献。尽管存在多种方法（Rennie & Srebro，2005），谱方法仍是最受欢迎的方法之一（Candès & Tao，2010；Mazumderet al.，2010；Keshavan 等人，2010a，b）

其中一种方法是 SVT（Cai 等人，2010），它首先对观测矩阵进行分解，然后仅使用超过预定阈值的奇异值来重构矩阵。众所周知，SVT 是一种收缩算子，可为核范数最小化

问题。通用奇异值阈值法（USVT）在 SVT 的基础上提出了自适应阈值，从而得到一个既一致又近似极小极大的估计量（Chatterjee，2015）。我们将在第4.1 节和第4.4节回顾 SVT 和 USVT。

个体公平性（IF）。个体公平性（IF）指的是相似的个体应受到相似的对待（Dwork 等人，2012；Barocas 等人，2018），其形式化定义见（1）。例如，假设个体 A 和 B 同时申请工作面试，且具有相似的（可观察到的）资质 a 和b。那么，个体公平性要求 A 和 B 获得面试邀请的比率相近。个体公平性不同于群体公平的概念（例如，不同人口群体之间结果的统计均等），但在某些条件下，个体公平性可以推出群体公平（Dwork 等人，2012）。

在个体公平性（IF）中，相似性通过距离度量的选择来刻画 D 和 d，而个体公平性则通过基于所选度量指标的 Lipschitz约束来实现。如何定义个体及其结果之间的“相似性”（即如何选择距离度量）一直备受争议（Gajane 和 Pechenizkiy，2017；Beutel 等人，2019；Ilvento，2019；Beutel 等人，2019；Gillen 等人，2018；Bechavod 等人，2020）。在这项工作中，我们允许使用任意 D。我们的一个个体公平性结果针对 d 作为 ℓ^1 范数，另一个则针对 d 作为 ℓ^q 范数。

公平性与协同过滤。在推荐中，协同过滤算法利用用户之间的相似性来推断用户偏好，而矩阵估计（ME）可视为这类算法之一。已有一些关于协同过滤公平性的研究，这些研究通常关注群体公平 Kamishima et al. (2012); Yao & Huang (2017); Beutel et al. (2019); Foulds et al. (2020); Pitoura et al. (2021); Shao et al. (2022)。少数研究考察了与个体相关的公平性概念 Serbos et al. (2017); Biega et al. (2018); Stratigi et al. (2020)，但这些概念不同于 Dwork et al. (2012) 所提出的个体公平性（IF）。据我们所知，我们首次从理论上分析了个体公平性与矩阵估计及协同过滤之间的联系，相关内容见第4节。

准确性。算法公平性中一个普遍关注的主题是公平性—准确性权衡Farnadi 等 (2018); Zhu 等 (2018); Liu 与 Burke (2018); Islam 等 (2020）。通过建立个体公平性与 USVT 之间的联系，我们在第 4.4 节中证明，在包括协同过滤在内的矩阵估计应用中，无需付出显著的性能代价即可实现个体公平性。

3 问题陈述

3.1 设定

考虑一个包含 m 个体的设定。假设存在一个未知的真实矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其中 A 的每一行对应一个个体，因此第 i 行 $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^n$ 是一个未知的 n 维特征向量，用于描述个体 $i \in [m]$。不失一般性，假设对于所有 $i \in [m]$ 和 $j \in [n]$，都有 $A_{ij} \in [-1, 1]$。[1]

假设可以观测到 A 的部分带噪条目。形式上，令 $\Omega \subset [m]\times[n]$表示观测条目的索引集，且 $\mathcal{Z} = [-1, 1] \cup \{\emptyset\}$。令 $Z \in \mathcal{Z}^{m\times n}$ 表示观测矩阵，其中 Z 的每个条目都是一个随机变量：如果 $(i,\ j) \in \Omega$，则为 $\mathbb{E}Z_{ij} = A_{ij}$；否则为 $Z_{ij} = \emptyset$。因此，第 i 行 $\mathbf{Z}_i \in \mathcal{Z}^n$ 表示个体 i的观测协变量。在本文余下部分，令 $\mathbf{B}_i$ 表示矩阵 B的第 i 行，令 $\mathbf{b}_i$ 表示其第 i 列。

[1]对于任意元素有限且满足对于所有 $i \in [m]$ 和 $j \in [n]$ 都有 $|A_{ij}| < \infty$ 的 A，总可以对 A 进行平移和缩放，使其介于 -1 和 1 之间，然后相应地调整最终结果。

推断任务。我们考虑以下推断任务：利用观测值（即训练数据） Z，为个体$i \in [m]$ 预测 $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$。令 $\mathcal{F} = \{f : [m] \times \mathcal{Z}^{m\times n} \to \mathcal{Y}\}$ 表示执行此推断任务的算法类别。请注意， f 的输出可以是一个确定值，也可以是可能取值上的分布。

3.2 个体公平性

个体公平性（IF）指的是相似的个体应受到相似的待遇(Dwork 等人，2012）。IF 被表述为一个(D, d)-Lipschitz约束，如下所示。

定义 3.1 （相对于观测协变量的个体公平性）。 考虑一个观测矩阵 $Z \in \mathcal{Z}^{m\times n}$。算法 $f \in \mathcal{F}$ 在 Z 上是(D, d)-个体公平的，条件是

$$D(f(i, Z), f(j, Z)) \le L \cdot d(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) \quad \forall i, j \in [m], \tag{2}$$

其中， $L \ge 0$ 不依赖于 i 或 j， D 是 $\mathcal{Y}$上的度量，而 d 是 $\mathcal{Z}^n$上的度量。

定义 3.2 （相对于潜在协变量的个体公平性）。 考虑一个观测矩阵 $Z \in \mathcal{Z}^{m\times n}$和真实矩阵 $A \in [-1, 1]^{m\times n}$。算法 $f \in \mathcal{F}$在 A 上是(D, d)-个体公平的，条件是

$$D(f(i, Z), f(j, Z)) \le L \cdot d(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j) \quad \forall i, j \in [m], \tag{3}$$

其中 $L \ge 0$ 不依赖于 i 和 j， D 是 $\mathcal{Y}$上的度量， d 是 $[-1, 1]^n$上的度量 .

问题陈述。我们聚焦于算法子类 $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \Pi) = \{f = h \circ \Pi : h \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{H} \subset \{h : [m] \times [-1, 1]^{m\times n} \to \mathcal{Y}\}$， $\Pi : \mathcal{Z}^{m\times n} \to [-1, 1]^{m\times n}$。直观来说， Π是一种预处理算法，它接收（稀疏且含噪的）数据 Z，并生成未知真实矩阵 A 的估计值 $\Pi(Z)$。随后将推断算法 h 应用于 Π 之上，使得 $f(i, Z) = h(i, \Pi(Z))$。在这项工作中，当 Π由矩阵估计方法给出时，我们考察 f相对于 h的个体公平性，即矩阵估计预处理步骤如何影响推断算法的个体公平性。

3.3 示例

第 3.1 节中的设定可应用于许多问题，在这些问题中，训练数据和算法输入都可能是有噪声的、稀疏的，或两者兼有。下面来看几个示例，以及个体公平性的影响。

示例 3.1 (推荐)。 考虑一个平台，它根据用户对偏好的稀疏、有噪声的观测值，为其提供个性化电影推荐。假设每位用户的电影偏好都可以用一个未知的 n 维向量$\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^n$来描述。例如， $a_{ij} \in [-1, 1]$ 可以表示用户 i 对电影$j \in [n]$的真实偏好。尽管 $A = [\mathbf{A}_1、\ldots\ldots、\mathbf{A}_m]^\top$ 未知，但平台会偶尔收到用户以评分形式提供的反馈，也可以观测用户的观看行为。将这些稀疏、有噪声的观测值存储在 Z 中，其中 $Z_{ij} = \emptyset$ 表示用户 i 尚未给电影 j评分。

平台的目标是估计用户的电影偏好。请注意， $f \in \mathcal{F}$ 可以利用其他信息（例如其他用户的评分，如协同过滤中所做的那样）。对 Z 而言，个体公平性要求观看和评分行为相似的用户获得相似的推荐结果。对 A 而言，个体公平性意味着潜在（即未知）电影偏好相似的用户获得相似的推荐结果。

例3.2（招生）。考虑一个有 m 名申请者的招生场景。假设对于招生而言，每位申请者 $i \in [m]$ 都由一个未知的 n维向量$\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^n$描述。假设每位个体 i 提交一份申请材料$\mathbf{Z}_i$，其中包含对$\mathbf{A}_i$的稀疏含噪测量。例如，一个人的数学标准化考试成绩是对其数学能力的一种含噪测量。当一位申请者提供了另一位没有提供的信息时（例如，一位申请者可能在简历上列出"辩论俱乐部"，而另一位没有，但这并不一定意味着后者的公开演讲能力较差），就可能出现数据稀疏性。作为输出，$f \in \mathcal{F}$ 可以给出一个招生评分$\mathbf{y} \in [0,1]$。在此例中，对 Z 而言，个体公平性要求申请材料相似的申请者获得相似的招生评分。对 A 而言，个体公平性意味着真实（但未知）资质相似的申请者获得相似的招生评分。

尽管在 A 上实现个体公平性是理想的，但通常人们要求在 Z上实现个体公平性，即算法应确保在其掌握的信息范围内实现个体公平性。考虑例3.2。假设两名申请者i 和 j 的真实特征相似，但前者 $n/2$ 个$\mathbf{Z}_i$ 值为 $\emptyset$，而后者 $n/2$ 个$\mathbf{Z}j$ 值为 $\emptyset$。换言之，i 所报告的资质类型与 j 所报告的资质类型毫无重合。由于 i 和 j 的真实特征相似，在 A上实现个体公平性，就要求学校以相似的方式对待 i 和 j，尽管学校获得的关于这两名申请者的信息截然不同。

4 主要结果

本节将说明，在适当条件下，使用矩阵估计对数据进行预处理，可以提升个体公平性，同时几乎不会带来性能代价。在介绍主要结果之前，我们先在第4.1 节介绍一种称为奇异值阈值法（SVT）的矩阵估计方法。在第4.2至4.3节中，我们将说明，SVT 预处理能够在观测矩阵 Z 和真实矩阵 A 上提供个体公平性保证。在第4.4节中，我们将说明，能够保证个体公平性的 SVT 阈值类别，与一种性能保证出色、广为人知的矩阵估计技术所用的阈值相吻合。这种联系意味着，SVT 预处理能够在不造成高昂性能代价的情况下实现个体公平性。

4.1 奇异值阈值法

回顾第 3.1 节中描述的推断任务。本节中，我们建议使用一种流行的 ME 方法，即**奇异值阈值法（SVT）**，作为预处理步骤。也就是说，对于类 $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \Pi) = \{f = h \circ \Pi \colon h \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{F}$，我们建议将 Π记为 SVT。

更确切地说，SVT(Z, τ, ψ) 接收三个值：观测矩阵 $Z \in \mathcal{Z}^{m \times n}$、阈值 $\tau \geq 0$ 和递增函数 ψ：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。随后，SVT 分四步进行：

1. 对于 Z 中任何满足 $\emptyset$ 的元素，将该值替换为 0，即，如果 $Z_{ij} = \emptyset$，则将其重新赋值为 $Z_{ij} = 0$。
2. 执行奇异值分解（SVD）：

$$Z = \sum_{\ell=1}^{\min(m,n)} \sigma_\ell \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T,$$

   其中，$\sigma_\ell \geq 0$ 是第 ℓ 个奇异值，$\mathbf{u}_\ell \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 是第 ℓ 个左奇异向量，而$\mathbf{v}_\ell \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是第 ℓ 个右奇异向量。
3. 对于任何满足 $\sigma_\ell > \tau$ 的索引 ℓ，将 ℓ 添加到集合 $S(\tau)$ 中，使得 $S(\tau) = \{\ell \colon \sigma_\ell > \tau\}$。

4. 最后，构造 A 的一个估计值:

$$\hat{A} = \min\left(1, \max\left(-1, \sum_{\ell \in S(\tau)} \psi(\sigma_\ell)\mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T\right)\right).$$

直观而言，SVT 会检测并移除观测矩阵中对应噪声的分量，同时保留其余分量（τ）。阈值 τ 决定了信号与噪声之间的界限； τ 的值越高，保留的分量就越少。

4.2 关于观测协变量的个体公平性

在上一节中，我们提出先使用 SVT 对 Z 进行预处理，再在其基础上应用推断算法 h 。本节将说明，使用 SVT 进行预处理能够保证 Z上的个体公平性。在本节余下部分，我们固定感兴趣的 Z 。

考虑一个特定的阈值 τ 和函数 ψ。回忆一下， σ_ℓ、$\mathbf{u}_\ell$和$\mathbf{v}_\ell$ 分别是 Z的第 ℓ 个奇异值、左奇异向量和右奇异向量。进一步回忆， $S(\tau) := \{\ell : \sigma_\ell > \tau\}$。令

$$K_2 = \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \frac{\psi(\sigma_\ell)\mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T}{\sigma_\ell^2} \right\|_\infty \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{z}_k\|_1 .$$

定理 4.1. 假设 h 是 $(\mathcal{D}, \ell^2)$-个体公平的，其常数为 K_1，即

$$D(h(i,B), h(j,B)) \le K_1 ||\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j||_2,$$

对所有 i、$j \in [m]$ 和 $B \in [-1,1]^{m\times n}$均成立。因此，对于 $f = h \circ SVT(Z、\ \tau、\ \psi)$,

$$D(f(i,Z), f(j,Z)) \le K_1 K_2 \|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j\|_1 , \tag{4}$$

对所有 i、$j \in [m]$均成立，即 f在 Z上以常数 K_1K_2满足 $(D$、$\ell^1)$-个体公平性。

定理 4.1 指出，当 h 是具有利普希茨常数 K_1的个体公平性时，应用 SVT 预处理可保留相对于观测协变量的个体公平性，其常数为 K_1K_2 。为了使经过 SVT 预处理的 h 比单独的 h 具有更强的个体公平性，我们需要 $K_2 \ll 1$，接下来将对此进行考察。

推论 4.2。 假设 $\psi(x) = \beta x$ ，且 Z 满足强不相干条件[2] ，参数为μ_1，即

$$\left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T \right\|_\infty \le \sqrt{\frac{\mu_1 r}{mn}},$$

其中 $r = |S(\tau)|$ 表示 Z的秩。那么对于任意阈值 τ， $K_2 \le \beta\sqrt{rm}/\tau$。

推论 4.2 刻画了在何种常见条件下， K_2 按 $O(\sqrt{rm}/\tau)$ 的尺度变化。具体而言，假设 $\tau \ge \sqrt{2n}\beta$。那么， $K_2 = O(\sqrt{rm}/n)$。这表明，只要 $n = \omega(rm)$，将 h 与 SVT 预处理相结合，就能提升 h 的个体公平性。换言之，只要相对于个体数量 m 和秩 r，每个个体 n 的数据量足够大，那么 $K_2 \to 0$ 按 $n \to \infty$ 变化。[3] 我们将在第5节进一步讨论这一结果的影响。

[2]强非相干性是矩阵估计文献中的一项标准假设Keshavan 等人（2010a）； Negahban 和 Wain- wright （2012）； Chen（2015）。它要求矩阵的奇异向量不稀疏，因此在样本有限时，可能难以估计底层的潜在矩阵。[3]秩 r 表示真实矩阵的“复杂度” A。尽管它是通过 Z计算得出的，但它反映了 Z中的“信号”量，而这通常取决于 A。

4.3 关于潜在协变量的个体公平性

在上一节中，我们证明了 SVT 预处理可以提升 Z 上的个体公平性。本节中，我们将证明，只要其估计值 A 接近真实值，SVT 预处理也能确保 A 上的个体公平性。

定理 4.3. 令 d 表示 ℓ^q 范数。假设 h 是$(\mathcal{D}, d)$-个体公平的，常数为K_1，即

$$D(h(i,B), h(j,B)) \leq K_1 ||\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j||_q,$$

对于所有 i、$j \in [m]$和 $B \in [-1,1]^{m\times n}$均成立。那么，对于 $f = h \circ SVT(Z, \tau, \psi)$，

$$D(f(i,Z), f(j,Z)) \leq K_1 \left\|\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j\right\|_q + 2K_1 ||\hat{A} - A||_{q,\infty}, \tag{5}$$

对于所有 i、$j \in [m]$均成立。

定理 4.3 指出，当 h 具有利普希茨常数 K_1时，f 在 A^ 上近似满足个体公平性，并且随着 $A \to A$趋近于 $A \to A$，逐渐达到精确的个体公平性。注意，定理 4.3 对任意 Π均成立。这一结果意味着，随着 SVT 的估计误差趋近于 0，SVT 预处理能够保留 h 在 A 上的个体公平性保证。我们将在下一节（命题 4.5）中证明，在适当选择阈值^的情况下，SVT 的估计误差确实趋近于 0（具体而言，$||A - A||_{2,\infty} \to 0$），当$m, n \to \infty$时。综合这两个结果可知，在保证 SVT（或更一般地，矩阵估计）准确的相同条件下，对 h 添加 SVT 预处理即可确保其在A 上满足个体公平性。[4]

注释 4.4. 定理 4.3表明，可以在 A上实现近似个体公平性，而这一保证的紧致程度取决于 Π的准确性。尽管在 A 上实现个体公平性可能值得追求，但在 Z上实现个体公平性也很重要，因为个体和算法设计者通常都无法依据未知的真实矩阵 A提出主张；他们必须指出证据（即观测值） Z。

4.4 个体公平性下的性能

回顾定理4.1 可知，只要阈值 τ 足够大，SVT 预处理就能保证在 Z上实现个体公平性。然而，目前尚不清楚为个体公平性选取的阈值是否有利于预测性能。下面我们将证明，已知能够提供高准确性的自适应阈值，与能够保证在 Z上实现个体公平性的阈值一致。由于该自适应阈值可以保证^ $A \to A$，根据定理 A，它也能保证在 4.3上实现个体公平性。因此，在适当阈值下进行 SVT 预处理，可以在 Z 和 A 上同时确保个体公平性，且几乎不会造成性能代价。

考虑一种著名的 ME 方法，称为**通用奇异值阈值法（USVT）**。USVT 通过提出一个用于设定阈值 τ 的通用公式来改进 SVT，从而无需手动调整 τ。在对 A 和 Ω 作出温和假设的情况下，USVT 具有强有力的性能保证。为了研究性能，将 ME 的均方误差（MSE）定义为

$$\mathrm{MSE}(\hat{A}) := \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[(\hat{A}_{ij} - A_{ij})^2\right]. \tag{6}$$

令 $\|M\|_*$ 表示矩阵 M 的核范数。我们首先给出 USVT 的性能保证。

[4]请注意，两个定理中的条件 $D\ h\ i\ B\ \ h\ j\ B\ \ \leq K_1||\ _i - \ _j||_q$ Π f $i\ j \in [m]$ $B \in ((,)(,))$ $[-1,1]^{m\times n}$ **BB** 对所有，均成立，并不苛刻。事实上，如果该条件不满足，就不存在任何方法能实现个体公平性。

命题 *4.5*（根据 *Chatterjee (2015)* 中的定理 *1.1* 修改）。假设 A 的各个元素是独立随机变量。假设 A 的每个元素都以概率 $p \in [0,1]$ 独立地被观测到。令 $\hat{p}$ 表示观测值的比例，$\psi(x) = x/\hat{p}$，$\epsilon \in (0,1]$，和 $w = (2+\eta)^2$，其中 $\eta \in (0,1)$。令 $\rho_1 = max(m,n)$，且 $\rho_2 = min(m,n)$。那么，若 $p \geq \rho_1^{\epsilon-1}$ 且 $\tau = \sqrt{w\rho_1}\hat{p}$，

$$MSE\left(SVT(Z,\tau,\psi)\right) \leq C(\eta)\min\left(\frac{\|A\|_*}{\rho_2\sqrt{\rho_1 p}}, \frac{\|A\|_*^2}{\rho_1\rho_2}, 1\right) + C(\epsilon,\eta)\exp(-c(\eta)\rho_1 p),$$

其中 $C(\eta)$ $c(\eta) > 0$ 仅取决于 η 和 $C(\epsilon,\eta)$ 仅取决于 η 和 ϵ.[5]

命题 4.5 指出，当 $\tau = \sqrt{w\rho_1}\hat{p}$ 且 p 足够大时，SVT 的均方误差以 $o((mn)^{-1})$ 的速率衰减。作为直接推论，命题 4.5 告诉我们，如果在获得完美信息 A 时，h 的损失很小，那么当 $\hat{n}$，$m \to \infty$ 时，$f = h \circ \text{SVT}(Z, \sqrt{\omega\rho_1}\hat{p}, \psi)$ 的损失也很小，因为 USVT 产生的估计值 A 接近 A。

备注 4.6. Chatterjee(2015) 还证明，USVT 的均方误差与极小极大估计量的均方误差相差至多一个常数倍及一个指数级小的加性项，这意味着我们无法比 USVT 做得好多少（参见 Chatterjee (2015) 中的定理 1.2）。

因此，在适当选择阈值的情况下，SVT 是一致的，并且近似达到极小极大最优。接下来，我们将这一发现与先前关于个体公平性的结果联系起来。

在 Z 上的个体公平性性能。 假设 $n > m$。那么，$\rho_1 = n$ 而定理 4.5 表明，采用阈值 $\tau = \sqrt{w}\hat{p}n$ 进行 SVT 预处理具有良好的性能。根据推论4.2，这样的阈值还可确保 f 在经过 SVT 预处理后，在 Z 上比 f 未经 SVT 预处理时具有更好的个体公平性，只要 n 足够大，使得 $n = \omega(rm)$。因此，当 n 以 $\omega(rm)$ 的速率增长时，SVT 预处理下的性能与个体公平性之间不存在权衡。

在 A 上的个体公平性性能。 回顾定理 4.3，当 $||\Pi(Z) - A||_{q,\infty} = 0$ 时，矩阵估计在A上近似满足个体公平性，在 A上则完全满足个体公平性。因此，A 上的个体公平性与矩阵估计的性能之间的关系很直接：估计误差 $||\Pi(Z) - A||_{q,\infty}$越低，$f$ 在 A上的个体公平性就越好。

5 讨论

在本节中，我们对结果进行解读，并讨论 SVT 预处理在何种条件下能够同时保证个体公平性和良好的性能。

结合结果。 根据命题 4.5，当$n \to \infty$ 且 $\tau = \sqrt{w}\hat{p}n$ 时，$n \geq m$，SVT 可提供良好的性能保证。根据推论 4.2，同一个 τ 可在 Z 上保证个体公平性，其利普希茨常数为 K_1K_2，其中 K_1 是未进行 SVT 预处理时 h 的利普希茨常数，而$K_2 = O(\sqrt{rm/(n\hat{p})})$。SVT 预处理可以改善 Z 上的个体公平性，而无需 牺牲性能

[5] 当满足附加条件 $\text{Var}(Z_{ij}) \leq \sigma^2$ 对所有 i，j 以及 $\sigma \leq 1$ 时，这个上界可以改进。于是，若 $\tau \geq \sqrt{w}n\hat{q}$，其中 $\hat{q} = \hat{p}\sigma^2 + \hat{p}(1-\hat{p})(1-\sigma^2)$、$q \geq n^{\epsilon-1}$，且 $q = p\sigma^2 + p(1-p)(1-\sigma^2)$：

$$\text{MSE}(\hat{A}) \leq C(\eta)\min\left(\frac{\|A\|_*\sqrt{q}}{mp\sqrt{n}}, \frac{\|A\|_*^2}{mn}, 1\right) + C(\epsilon,\eta)\exp(-c(\eta)nq).$$

当 $K_2 \ll 1$ 时，那么，何时 $K_2 \ll 1$，以及为什么 K_2 有时会大于 1？为了回答这个问题，我们考察两种数据情形：(i) 当 $n = o(rm/\hat{}p)$，以及 (ii) 当 $n = \omega(rm/\hat{}p)$。

第一种数据情境。在第一种数据情境下，推论 4.2 告诉我们，$K_2 > 1$，这意味着 SVT 预处理并不一定能改善个体公平性。这种现象的发生是因为，当用于区分个体的信息不多时（即 n，每个个体的ˆ观测特征数量较少），SVT 预处理会产生一个 A，并在各行之间进行平滑。也就是说，它会使 f 总体上将个体视为相似。

有时，这反而会损害个体公平性，因为个体公平性要求将相似的个体视为相似，但并不要求总体受到相似对待。要了解后一种做法为何可能损害个体公平性，请考虑$g_1(x) = x$ 和 $g_2(x) =$ round(x) for $x \in [0, 1]$。在 g_2 下，个体只能获得 0 或 1 的结果，因此算法会总体上将个体视为相似。也就是说，个体会被分入两个类别之一，因此所受待遇相对同质。

另一方面，在 g_1 下，个体会得到范围$[0, 1]$内无穷多个结果之一。两者中哪一个符合个体公平性？尽管 g_2 总体上对个体一视同仁，g_1 符合个体公平性，因为 $d(g_1(x)\ g_1(x')) = d(x,\ x')$，而 g_2 不符合个体公平性，因为 $g_2(0.5 - \delta) = 0$，而 $g_2(0.5 + \delta) = 1$，即使 $\delta > 0$任意小也是如此。在第一种数据情境下，可以用类似的逻辑证明，SVT 预处理并不总能改善个体公平性。[6]

第二种数据情境。在第二种数据情境下，推论 4.2告诉我们 $K_2 < 1$，这意味着 SVT 预处理 改善了 个体公平性。直观地说，当 $n = \omega(rm/\hat{}p)$时，每个个体观测到的特征数的期望增长速度快于个体数量和真实矩阵秩的增长速度。此时，SVT 以不同的方式平滑数据。它生成一个 A，沿列方向进行平滑。因此，它从个体（行）向量$\mathbf{Z}_i$ 中去除噪声，$\mathbf{Z}_i$ 中却保留了足够的信号，以区分个体 i 与其他个体，从而避免第一种数据情境下可能出现的现象（即总体上对个体一视同仁）。观测数据经过平滑处理，而个体仍可彼此区分，这一事实使 SVT 能够在这种数据情境下改善个体公平性。

综上所述。SVT 预处理会在将数据传递给 h 之前对其进行平滑，而这种平滑操作在不同的数据情形下对个体公平性的影响各不相同。然而，我们证明，只要选择合适的阈值，当 $n \to \infty$ 时，就能同时保证 Z 上的个体公平性、 A 上的个体公平性以及良好的性能。更准确地说，当 $\tau = \sqrt{w\hat{}}$ pn， $n = \omega(rm/\hat{}p)$，且 n 足够大时，*SVT* 预处理不仅能增强 Z 上的个体公平性，还能保证 A 上的个体公平性和良好的预测性能。

6 实验

我们提供了若干实验，用于检验 SVT 预处理对个体公平性和性能的影响。在每项实验中，推断任务都是利用观测值 Z，为每个个体 $i \in [m]$ 估计未知的 n 维特征向量 $\mathbf{A}_i$

[6]尽管 SVT 预处理未必能改善第一种数据情境下的个体公平性，但有人可能会认为，SVT 的“平滑”可以防止 f 不必要地区分不同个体。例如，假设 f 决定每户家庭能获得多少新冠肺炎救济。再假设，由于处理时间紧迫， $n = o(r^2 m)$，例如，政府对新冠肺炎对各户家庭造成的影响知之甚少。有人可能会认为，在这种情况下，政府无法可靠地区分各户家庭，因此应该向所有家庭发放相同数额的货币救济，而不是根据有限的数据来调整救济金额。其理由是：在这种数据情境下，很容易过拟合，并利用伪相关信息来区分个体。因此，人们可能会质疑第一种数据情境下个体公平性的重要性。

实验结果表明，无论是在模拟实验中还是在 MovieLens1M 数据集中，SVT 预处理都能改善个体公平性。我们还考察了使用和不使用 SVT 预处理时推断算法的性能。正如预期，加入 SVT 预处理会使均方误差增加，但增幅很小；根据定理4.5，随着数据量增长，我们预计这一增幅会逐渐趋近于 0 。

下面，我们将讨论分为三个部分。在前两部分中，我们分别介绍用于合成数据和*MovieLens 1M* 数据集的实验设定。在第三部分中，我们讨论结果。更多结果和实现细节请参见附录。

6.1 实验 #1：合成数据的设定

在实验 #1 中，我们在合成数据上测试 h 经过和未经过 SVT 预处理的情况，具体如下。

生成真实矩阵 A。考虑 $m = 200$ 个体。我们采样 m 个长度为 $n = 800$的特征向量，每个特征向量对应一个个体，从而形成真实矩阵$A \in [-1, 1]^{m\times n}$。特征向量（即 A的行）从 $c = 10$ 个簇中采样，其中每个簇服从多元正态分布。每个簇的均值是一个长度为 n的向量，从$(-1,\ 1)$中均匀随机抽取；每个簇的协方差是一个 $n \times n$ 对角矩阵，其对角线元素从$(0,\ 0.1)$中均匀随机抽取。随后对特征向量进行截断，使所有值都落在 $[-1, 1]$内。

生成观测矩阵 Z。回顾一下，Ω 表示观测条目的集合。我们按如下方式生成 Z：

$$Z_{ij} = \begin{cases} \mathrm{clip}(A_{ij} + \eta_{ij}, [-1, 1]), & \text{if } (i, j) \in \Omega, \\ \emptyset, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $\eta_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$。在本节中，$(i,\ j) \in \Omega \subset [m] \times [n]$ 的概率为 p。这与命题 4.5中的条件一致。在附录中，我们给出了采用另一种 Ω 设定时的结果（具体而言，观测个体 i的 j 个特征的概率取决于 i 所属的簇）。

推断算法。回顾一下，推断任务是根据数据 B （其中 B 可能经过了 SVT 预处理，也可能没有）预测个体 i 的特征向量 $\mathbf{A}_i$。在合成数据设定中，我们令算法 $h\colon [m] \times [-1, 1]^{m\times n} \to [-1, 1]^n$ 定义如下。

令 $h'\colon [m] \times [n] \to [0, 1]$ 表示在数据 B上训练的深度神经网络（DNN）。该 DNN 由三个全连接层组成，层大小分别为 300、100 和 1；隐藏层后使用 ReLU 激活函数，输出层后使用 Sigmoid 函数。最后，令

$$h(i, B) = 2[h'(i, 1), h'(i, 2), \ldots, h'(i, n)]^\top - 1.$$

预处理。我们比较 h 在使用和不使用 SVT 预处理时的个体公平性和性能。在不进行预处理时，训练 h' 所用的数据 B 为 Z （缺失项以零替代）。使用 SVT 预处理时，训练 h' 所用的数据 B 为 SVT(Z, τ, ψ)，其中 $\hat{p} = |\Omega|/(mn)$，$\psi(x) = x/\hat{p}$，$\hat{q} = 0.01^2\hat{p} + \hat{p}(1 - \hat{p})(1 - 0.01^2)$，且 $\tau = \sqrt{2.01n\hat{q}}$。这种形式的 SVT 与 USVT 一致（参见命题 4.5 和脚注 5）。

6.2 实验#2 的设定：MovieLens 1M 数据集

在实验#2中，我们在一个名为 MovieLens 1M 数据集的热门真实数据集上测试了 h，并比较了使用和不使用 SVT 预处理的情况。

表1：实验 #1 中个体公平性和性能的结果。

	$\hat{p} = 0.05$	$\hat{p} = 0.1$	$\hat{p} = 0.2$	$\hat{p} = 0.4$
均方误差(h)	0.33 ± 0.003	0.21 ± 0.002	0.10 ± 0.003	0.07 ± 0.001
均方误差(f)	0.34 ± 0.004	0.21 ± 0.001	0.11 ± 0.001	0.08 ± 0.001
个体公平性$_1^\dagger(Z)$	0.23 ± 0.005	0.18 ± 0.003	0.13 ± 0.001	0.07 ± 0.001
个体公平性$_1^f(Z)$	0.02 ± 0.001	0.02 ± 0.001	0.03 ± 0.001	0.03 ± 0.001
K_2	0.06 ± 0.007	0.12 ± 0.003	0.25 ± 0.009	0.49 ± 0.012
个体公平性$_2^\dagger(A)$	0.45 ± 0.011	0.63 ± 0.012	0.81 ± 0.005	0.84 ± 0.013
个体公平性$_2^f(A)$	0.49 ± 0.015	0.65 ± 0.006	0.82 ± 0.003	0.84 ± 0.005

数据集。MovieLens 1M 数据集Harper &Konstan (2015) 包含 6040 位用户和 3952 部电影的电影评分数据。在本研究中，这些评分数据可以表示为$m \times n$ 矩阵 Z，其中 $m = 6040$ 且 $n = 3952$。每个条目 Z_{ij} 包含用户 i对电影 j的评分，条件是$(i,\ j)$ 已观测到；而 $Z_{ij} = \emptyset$ 如果用户 i 尚未为电影 j评分，则0 到1之间。

作为一个真实世界的数据集，这里没有真实矩阵 A。因此，我们无法评估相对于 A 的性能——我们对 MovieLens 的讨论将侧重于个体公平性。

推断算法。回想一下，推断任务是预测个体$_i$ 在给定数据 B 时的特征向量 B （其中 B 可能经过了 SVT 预处理，也可能没有）。在 MovieLens 设置中，我们令推断算法 h : $[m] \times [-1, 1]^{m \times n} \to [-1, 1]^n$ 为 K-近邻（K-NN）算法Sarwar 等人(2001)。[7]

K-NN 通过对与用户 i 最相似的 K 个用户进行加权平均，得到估计值 $\mathbf{Y}_i$ 。在本文中，我们令 $K = 10$ ，并使用调整余弦相似度来衡量用户 i 与 j 之间的相似度:

$$\mathrm{sim}(i, j) = \frac{\sum_{k \in [n]} (B_{ik} - \bar{B}_k)(B_{jk} - \overline{B}_k)}{\sqrt{\sum_{k \in [n]} (B_{ik} - \bar{B}_k)^2 \sum_{k' \in [n]} (B_{jk'} - \bar{B}_{k'})^2}},$$

¯其中 B_k 表示第 k 个项目评分的平均值。

预处理。我们比较 h 经过和未经过 SVT 预处理时的个体公平性。未执行预处理步骤时， K-NN 使用的数据 B 为 Z （缺失项以零替代）。使用 SVT 预处理时， K-NN 使用的数据 B 为 SVT(Z, τ, ψ)，其中$\hat{p} = |\Omega|/(mn)$,$\psi(x) = x/\hat{p}$, $\tau = \sqrt{2.01 n \hat{p}}$，与 USVT 一致（见命题 4.5）。

6.3 结果

度量指标。对于函数 g: $[m] \times \mathcal{Z}^{m \times n} \to \mathbb{R}$，令

$$\mathrm{MSE}(g) := \frac{1}{mn - |\Omega|} \sum_{(i,j) \notin \Omega} (g_j(i, Z) - \mathbf{A}_{ij})^2,$$

[7]为了研究 SVT 预处理对另一类常见算法的影响，我们使用 K-NN。具体而言， K-NN 会以一种本身就有助于实现个体公平性的方式平滑数据，因此，如果 SVT 预处理能够进一步提升个体公平性，就尤其值得关注。

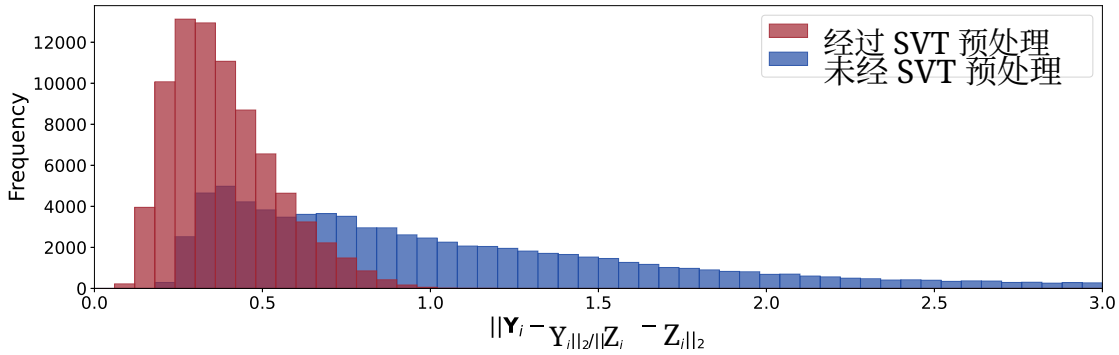

图3：实验#2 中随机选取的样本对 (i, j) 中 $||\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j||_2 / \|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j\|_1$ 的频率。 Y 表示在 MovieLens 1M 数据集上，采用（红色）和未采用（蓝色）SVT 预处理时，由 K-神经网络估计出的估计值。

其中 $g_j(i, Z)$ 是向量 $g(i, Z)$ 的第 j 个元素。对于矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$，令

$$\mathrm{IF}_q^g(X) \coloneqq \frac{1}{m^2} \sum_{i,j \in [m]} \|g(i, Z) - g(j, Z)\|_2 \,/\, \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_q \,,$$

个体公平性$_1^f(Z)$和 个体公平性$_1^h(Z)$分别衡量在 Z采用和未采用 SVT 预处理时的个体公平性。 个体公平性$_2^f(A)$和 个体公平性$_2^h(A)$ 分别衡量在 A 采用和未采用 SVT 预处理时的个体公平性。[8] 比值越小，表示个体公平性保证越强。

结果。表1 总结了实验 #1 的结果。这些数值是 10 次模拟的平均值，误差线表示 $+/-$ 两个标准差。图1-3 展示了 SVT 预处理对以下对象的个体公平性的影响： Z 实验 #1 和实验 #2。下面我们将讨论研究结果。

SVT 预处理对以下对象的个体公平性的影响： Z。表1 证实，在实验 #1 中，SVT 预处理改善了以下对象的个体公平性： Z。具体而言，个体公平性$_1^f(Z)$远小于个体公平性$_1^h(Z)$。图1和3展示了实验 #1 和实验 #2 中的这一效果，表明相较于不进行 SVT 预处理，SVT 预处理会使两个个体的结果之差相对于其特征之差更小。

SVT 预处理对以下对象的个体公平性的影响： A。以下对象的个体公平性： A采用 SVT 预处理时与不采用相比大致相当，但略弱。具体而言，个体公平性$_2^f(A)$略大于个体公平性$_2^h(A)$在表1中。这与定理4.3一致，该定理指出，添加预处理步骤 Π 可能会削弱以下对象的个体公平性： A，前提是 Π 的估计误差非零。由于 SVT 无法完美估计 A，因此会产生一定的估计误差，从而略微削弱 f的以下对象的个体公平性： A。

如表 1所示，这种影响很小。此外，随着 个体公平性$_2^f(A)$与 个体公平性$_2^h(A)$之间的差距会逐渐缩小。$\hat{}p$ 增大。这与我们的结果一致，因为 SVT 的估计误差会随着 $\hat{}p$ 增大而减小（见命题 4.5），这意味着，随着 A 的增大，个体公平性保证会得到改善（见定理$\hat{}p$ 增大（见定理 4.3）。

SVT 预处理对性能的影响。表1 中对应均方误差的行(h)和均方误差(f) 分别衡量深度神经网络在未进行和进行 SVT 预处理时的误差，在

[8]根据定理 ℓ^1 的范数用于 Z，这是基于我们的定理 4.1中的结果；而 ℓ^2 的范数用于 A，这是因为定理 4.3 与命题 4.5之间存在联系。

实验 #1。正如第4.4节所预期的，这些结果表明，SVT 预处理对预测性能的影响极小，也就是说，公平性与性能之间几乎不存在权衡。

7 结论

在本研究中，我们提出使用一种众所周知的矩阵估计（ME）方法——奇异值阈值法（SVT），在应用推断算法（例如神经网络）之前，对稀疏噪声数据进行预处理。我们证明，在应用推断算法之前使用 SVT 对数据进行预处理，可以提供强有力的个体公平性（IF）保证。具体而言，我们推导出了 SVT 预处理改善IF 的条件。随后我们证明，在相同条件下，SVT 预处理具有强有力的性能保证。综合来看，这些结果表明，在适当条件下，SVT 预处理能够在不带来性能代价的情况下改善 IF。我们在合成数据和 MovieLens 1M 数据集上验证了这些结果。

致谢

感谢审稿人投入时间并提出宝贵意见。我们还感谢 Michael Zhang 为本研究早期版本提供反馈。本研究部分得到 MIT- IBM “作为因果发现工具的表征学习”项目以及面向数据科学基础研究所的美国国家科学基金会 TRIPODS 第二阶段资助的支持。

参考文献

Abbe, E. 和 Sandon, C. 一般随机块模型中的社区检测：恢复的基本极限与高效算法。载于 *2015 年 IEEE 第 56 届计算机科学基础年会*，第 670–688 页。IEEE，2015 年。 3Agarwal, A.、Amjad, M. J.、Shah, D. 和 Shen, D. 基于矩阵估计的模型无关时间序列分析。 *ACM 计算系统测量与分析会议论文集*，2(3)：1–39，2018 年。 3Amjad, M.、Shah, D. 和 Shen, D. 稳健合成控制。《机器学习研究杂志》，19(1)：802–852，2018 年。 3Anandkumar, A. 、 Ge, R. 、 Hsu, D. 和 Kakade, S. 学习混合成员社区模型的张量谱方法。载于学习理论会议，第 867–881 页。PMLR，2013 年。3Barocas, S.、Hardt, M. 和 Narayanan, A. 公平性与机器学习：局限与机遇，2018 年。4Bechavod, Y. 、 Jung, C. 和 Wu, Z. S. 在线学习中的无度量个体公平性。 *arXiv* 预印本 *arXiv:2002.05474*，2020 年。 4Beutel, A.、Chen, J.、Doshi, T.、Qian, H.、Wei, L.、Wu, Y.、Heldt, L.、Zhao, Z.、Hong, L.、Chi, E. H. 等。通过成对比较实现推荐排序中的公平性。载于第 *25 届 ACM SIGKDD* 国际知识发现与数据挖掘会议论文集，第 2212–2220 页，2019 年。 4

Biega, A. J., Gummadi, K. P., and Weikum, G. Equity of attention: Amortizing individual fairness in rankings. 排名中的公平性。在第41届国际ACM SIGIR信息检索研究与开发会议论文集上，第405–414页，2018年。4 Borgs, C., Chayes, J., Lee, C. E., and Shah, D. 你的朋友就是我的朋友：用于稀疏矩阵估计的迭代协同过滤。收录于第31届神经信息处理系统国际会议论文集，第4718–4729页，2017年。3 Cai, J.-F., Candès, E. J., and Shen, Z. 一种用于矩阵补全的奇异值阈值算法。SIAM优化杂志，20(4):1956–1982，2010年。3 Candès, E. J. and Tao, T. 凸松弛的力量：近乎最优的矩阵补全。IEEE 信息论汇刊，56(5):2053–2080，2010年。3 Chatterjee, S. 通过通用奇异值阈值法进行矩阵估计。统计学年鉴，43 (1):177–214，2015年。2, 3, 4, 9, 21, 22 Chen, Y. 非相干最优矩阵补全。IEEE 信息论汇刊，61 (5):2909–2923，2015年。7, 20 Chen, Y. and Wainwright, M. J. 通过投影梯度下降快速进行低秩估计：一般统计与算法保证。arXiv 预印本 arXiv:1509.03025，2015年。3 Davenport, M. A., Plan, Y., Van Den Berg, E., and Wootters, M. 1比特矩阵补全。《Information and Inference: A Journal of the IMA》，3(3):189–223，2014年。3 Dwork, C., Hardt, M., Pitassi, T., Reingold, O., and Zemel, R. 通过认知实现公平。收录于第3届理论计算机科学创新会议论文集，第214–226页，2012年。4, 5 Farnadi, G., Kouki, P., Thompson, S. K., Srinivasan, S., and Getoor, L. 一种公平性感知混合推荐系统。arXiv 预印本 arXiv:1809.09030，2018年。4 Foulds, J. R., Islam, R., Keya, K. N., and Pan, S. 一种交叉性公平定义。收录于2020年IEEE第36届数据工程国际会议（ICDE），第1918–1921页。IEEE，2020年。4 Gajane, P. and Pechenizkiy, M. 关于机器学习预测公平性的形式化。arXiv 预印本 arXiv:1710.03184，2017年。4 Gillen, S., Jung, C., Kearns, M., and Roth, A. 使用未知公平性度量进行在线学习。arXiv 预印本 arXiv:1802.06936，2018年。4 Harper, F. M. and Konstan, J. A. MovieLens数据集：历史与背景。ACM《交互式智能系统汇刊》（TIIS），5(4):1–19，2015年。12 Hopkins, S. B. and Steurer, D. 基于少量样本的高效贝叶斯估计：社区检测及相关问题。收录于2017年IEEE第58届计算机科学基础年会（FOCS），第379–390页。IEEE，2017年。3 Ilvento, C. 面向个体公平性的度量学习。arXiv 预印本 arXiv:1906.00250，2019年。4 Islam, R., Keya, K. N., Zeng, Z., Pan, S., and Foulds, J. 神经公平协同过滤。arXiv 预印本 arXiv:2009.08955，2020年。4

Kamishima, T., Akaho, S., Asoh, H., and Sakuma, J. 提升推荐中的中立性。收录于 Decisions@ RecSys，第8–14页。Citeseer，2012年。4 Keshavan, R. H., Montanari, A., and Oh, S. 基于少量条目的矩阵补全。IEEE 信息论汇刊，56(6):2980–2998，2010a年。3, 7 Keshavan, R. H., Montanari, A., and Oh, S. 基于含噪条目的矩阵补全。《机器学习研究杂志》，11:2057–2078，2010b年。3 Koren, Y. Netflix 大奖的 BellKor 解决方案。Netflix Prize 文档，81(2009): 1–10，2009年。3 Koren, Y., Bell, R., and Volinsky, C. 推荐系统的矩阵分解技术。《Computer》，42(8):30–37，2009年。3 Liu, W. and Burke, R. 个性化公平性感知重排序。arXiv 预印本 arXiv:1809.02921，2018年。4 Mazumder, R., Hastie, T., and Tibshirani, R. 用于学习大型不完整矩阵的谱正则化算法。《机器学习研究杂志》，11:2287–2322，2010年。3 Negahban, S. and Wainwright, M. J. 受限强凸性与加权矩阵补全：含噪情况下的最优界。《机器学习研究杂志》，13:1665–1697，2012年。3, 7 Pitoura, E., Stefanidis, K., and Koutrika, G. 排名与推荐中的公平性：综述。arXiv 预印本 arXiv:2104.05994，2021年。4 Recht, B. 一种更简单的矩阵补全方法。《机器学习研究杂志》，12 (12)，2011年。3 Rennie, J. D. and Srebro, N. 面向协同预测的快速最大间隔矩阵分解。收录于第22届国际机器学习会议论文集，第713–719页，2005年。3 Sarwar, B., Karypis, G., Konstan, J., and Riedl, J. 基于项目的协同过滤推荐算法。收录于第10届国际万维网会议论文集，第285–295页，2001年。12 Serbos, D., Qi, S., Mamoulis, N., Pitoura, E., and Tsaparas, P. 套餐到群体推荐中的公平性。收录于第26届国际万维网会议论文集，第371–379页，2017年。4 Shah, D. and Lee, C. 以统计方法将众包问题化归为 graphon 估计。收录于国际人工智能与统计会议论文集，第1741–1750页。PMLR，2018年。3 Shao, P., Wu, L., Chen, L., Zhang, K., and Wang, M. FairCF：公平性感知协同过滤。《中国科学：信息科学》，65(12):1–15，2022年。4 Song, D., Lee, C. E., Li, Y., and Shah, D. 盲回归：通过协同过滤实现潜变量模型的非参数回归。神经信息处理系统进展，29:2155–2163，2016年。3

Stratigi, M., Nummenmaa, J., Pitoura, E. 和 Stefanidis, K. 公平的序列群体推荐。载于第 *35* 届 *ACM* 应用计算年度研讨会论文集，第 1443–1452 页，2020 年。4Yang, Y., Zhang, G., Katabi, D. 和 Xu, Z. Me-net：利用矩阵估计实现有效对抗鲁棒性。*arXiv* 预印本 *arXiv:1905.11971*，2019 年。3Yao, S. 和 Huang, B. 超越奇偶性：协同过滤的公平性目标。*arXiv* 预印本 *arXiv:1705.08804*，2017 年。4Zhu, Z., Hu, X. 和 Caverlee, J. 公平性感知的基于张量的推荐。载于第 *27* 届 *ACM* 国际信息与知识管理会议论文集，第 1153–1162 页，2018 年。4

A 附录

A.1 定理4.1的证明

为了证明定理4.1，我们先证明以下两个引理。

引理 A.1。 假设 $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. 则

$$\|T\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|T\|_\infty \|\boldsymbol{x}\|_1 \sqrt{m}.$$

证明。

$$\|T\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i\in[m]}\left(\sum_{j\in[n]} T_{ij}x_j\right)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\in[m]}\left(\sum_{j\in[n]} |T_{ij}||x_j|\right)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\in[m]}\left(\sum_{j\in[n]} \|T\|_\infty |x_j|\right)^2\right)^{1/2}$$
$$= \|T\|_\infty \left(\sum_{i\in[m]}\left(\sum_{j\in[n]} |x_j|\right)^2\right)^{1/2} = \|T\|_\infty \sqrt{m}\left(\sum_{j\in[n]} |x_j|\right) = \|T\|_\infty \|\mathbf{x}\|_1 \sqrt{m}.$$

□

引理 A.2。 假设 $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$。然后

$$\|T\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \max_j \|\mathbf{t}_j\|_1 .$$

证明。 回忆一下，$\mathbf{T}_i$ 表示 T 的第 i 行，而$\mathbf{t}_i$ 表示 T 的第 i 列 .

$$\|T\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i\in[m]} |T_i^\top \mathbf{x}| = \sum_{i\in[m]} \left|\sum_{j\in[n]} T_{ij}x_j\right| = \sum_{i\in[m]}\sum_{j\in[n]} |T_{ij}x_j| \leq \sum_{i\in[m]}\sum_{j\in[n]} |T_{ij}||x_j|$$
$$= \sum_{j\in[n]} |x_j| \sum_{i\in[m]} |T_{ij}| = \|\mathbf{x}\|_1 \max_j \left(\sum_{i\in[m]} |T_{ij}|\right) = \|\mathbf{x}\|_1 \max_j \|\mathbf{t}_j\|_1 .$$

□

定理 4.1。 假设 h 是$(\mathcal{D}, \ell^2)$-个体公平的，常数为 K_1，即:

$$D(h(i,B), h(j,B)) \leq K_1 ||\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j||_2,$$

对所有 i、$j \in [m]$和 $B \in [-1,1]^{m\times n}$均成立。于是，对于 $f = h \circ SVT(Z, \tau, \psi)$,

$$D(f(i,Z), f(j,Z)) \leq K_1 K_2 \|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j\|_1 , \tag{7}$$

对所有 i、$j \in [m]$均成立，即 f在 Z上是(D, ℓ^1)-个体公平的，常数为 K_1K_2。

证明。 设 $Z = \sum_{\ell=1}^{\min(m,n)} \sigma_\ell \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T$ 的奇异值分解（SVD），其中 σ_i,$\mathbf{u}_i$,$\mathbf{v}_i$ 分别是 i 阶奇异值、左奇异向量和右奇异向量。给定 $\hat{f} = h \circ \text{SVT}(Z, \tau, \psi))$，输入 A 是对 Z 运行 SVT 后的输出，即

$$\hat{A} = \sum_{\ell\in S(\tau)} \psi(\sigma_\ell)\mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T.$$

ˆ ˆ我们可以展开 $||\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j||_2$，得到

$$||\hat{\mathbf{A}}_i - \hat{\mathbf{A}}_j||_2 = \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \psi(\sigma_\ell) u_{\ell i} \mathbf{v}_\ell^T - \sum_{\ell \in S(\tau)} \psi(\sigma_\ell) u_{\ell j} \mathbf{v}_\ell^T \right\|_2 \tag{8}$$

$$= \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \psi(\sigma_\ell)(u_{\ell i} - u_{\ell j}) \mathbf{v}_\ell^T \right\|_2 . \tag{9}$$

接下来，我们将 $u_{\ell i} - u_{\ell j}$ 用$\mathbf{Z}_i$ 和$\mathbf{Z}j$表示。由于$\mathbf{u}_\ell$ 是 Z的第 ℓ个左奇异向量，因此它是 ZZ^T的第 ℓ 个特征向量。令 λ_ℓ 为 ZZ^T 的第 ℓ 个特征值。注意到 $\lambda_\ell = \sigma_\ell^2$。于是

$$\lambda_\ell \mathbf{u}_\ell = ZZ^T \mathbf{u}_\ell .$$

只看第 i 行，我们得到

$$\begin{aligned} \lambda_\ell u_{\ell i} &= \mathbf{Z}_i Z^T \mathbf{u}_\ell \\ \implies u_{\ell i} &= \frac{\mathbf{Z}_i Z^T \mathbf{u}_\ell}{\lambda_\ell} \\ \implies u_{\ell i} - u_{\ell j} &= \frac{(\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j) Z^T \mathbf{u}_\ell}{\sigma_\ell^2}. \end{aligned}$$

将其代回方程（9），得到

$$||\hat{\mathbf{A}}_i - \hat{\mathbf{A}}_j||_2 = \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \frac{\psi(\sigma_\ell)(\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j) Z^T \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T}{\sigma_\ell^2} \right\|_2 \tag{10}$$

$$= \left\| \left(\sum_{\ell \in S(\tau)} \frac{\psi(\sigma_\ell)}{\sigma_\ell^2} \left(\mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T \right)^T \right) Z(\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j) \right\|_2 \tag{11}$$

接下来，我们将引理A.1 应用于（11），得到

$$||\hat{\mathbf{A}}_i - \hat{\mathbf{A}}_j||_2 \le \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \frac{\psi(\sigma_\ell) \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T}{\sigma_\ell^2} \right\|_\infty \sqrt{n} \left\| Z(\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j) \right\|_1 \tag{12}$$

将引理 A.2 应用于 $\|Z（\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}j）\|_1$ 在（12）中，得到

$$||\hat{\mathbf{A}}_i - \hat{\mathbf{A}}_j||_2 \le \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \frac{\psi(\sigma_\ell) \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T}{\sigma_\ell^2} \right\|_\infty \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{z}_k\|_1 \left\| \mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j \right\|_1 \tag{13}$$

由于 $D(h(i,\ B)\ h(j,\ B)) \le K_1 ||\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j||_2$,

$$D(f(i,Z), f(j,Z)) = D(h(i,\hat{A}), h(j,\hat{A})) \tag{14}$$

$$\le K_1 \left(\left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \frac{\psi(\sigma_\ell) \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T}{\sigma_\ell^2} \right\|_\infty \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{z}_k\|_1 \right) \|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j\|_1 \tag{15}$$

$$= K_1 K_2 \left\| \mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_j \right\|_1 . \tag{16}$$

□

A.2 推论4.2的证明

推论 4.2。 假设 $\psi(x) = \beta x$ 并且 Z 满足参数为μ_1 *(Chen, 2015)*，即

$$\left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T \right\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\mu_1 r}{mn}},$$

其中 $r = |S(\tau)|$ 表示 Z 的秩。于是，对于任意阈值 τ， $K_2 \leq \beta\sqrt{rm}/\tau$。

证明。 回顾一下

$$K_2 = \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \frac{\psi(\sigma_\ell)\mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T}{\sigma_\ell^2} \right\|_\infty \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{z}_k\|_1 .$$

给定 $\psi(x) = \beta x$，我们有

$$K_2 = \beta \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \frac{\mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell^T}{\sigma_\ell} \right\|_\infty \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{z}_k\|_1 .$$

回顾一下， $S(\tau) := \{\ell : \sigma_\ell > \tau\}$是奇异值超过 τ 的分量集合，因此分母中的任意 σ_ℓ 的值都至少为 τ，从而得到

$$K_2 \leq \frac{\beta}{\tau} \left\| \sum_{\ell \in S(\tau)} \mathbf{u}_\ell \mathbf{v}_\ell \right\|_\infty \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{z}_k\|_1 .$$

给定 Z 满足强不相干条件，

$$K_2 \leq \frac{\beta}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{r}{mn}} \cdot \sqrt{n} \max_k \|\mathbf{z}_k\|_1 .$$

由于每个入 口 $Z_{ij} \in [-1, 1]$ 且 Z 的每一列中有 m 个条目， $\|\mathbf{z}_k\|_1 \leq m$。因此 e

$$K_2 \leq \frac{\beta}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{r}{mn}} \cdot \sqrt{n} \cdot m \leq \frac{\beta\sqrt{rm}}{\tau},$$

至此，证明完毕。 □

A.3 定理 4.3 的证明

定理 4.3。 设 d 表示 ℓ^q 范数。假设 h 是$(\mathcal{D}, d)$-个体公平的，常数为 K_1，即

$$D(h(i, B), h(j, B)) \leq K_1 ||\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j||_q,$$

对于所有 i、 $j \in [m]$ 和 $B \in [-1, 1]^{m \times n}$ 均成立。则对于 $f = h \circ SVT(Z, \tau, \psi)$，

$$D(f(i, Z), f(j, Z)) \leq K_1 \left\|\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j\right\|_q + 2K_1 ||\hat{A} - A||_{q,\infty} \tag{17}$$

对所有 $i, j \in [m]$。

证明。 回忆一下 $\|M\|_{q,\infty} = \text{最大值}_i \|\mathbf{m}_i\|_q$。 该结果由三角不等式的应用得出。

$$\begin{aligned} D(f(i,Z),f(j,Z)) &= D(h(i,\hat{A}),h(j,\hat{A})) \\ &\leq K_1 \left\| \hat{\mathbf{A}}_i - \hat{\mathbf{A}}_j \right\|_q \\ &\leq K_1(||\hat{\mathbf{A}}_i - \mathbf{A}_i||_q + ||\hat{\mathbf{A}}_j - \mathbf{A}_j||_q + ||\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j||_q) \\ &\leq K_1(2||\hat{A} - A||_{q,\infty} + ||\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j||_q) \\ &\leq K_1||\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j||_q + 2K_1||\hat{A} - A||_{q,\infty}, \end{aligned}$$

由此得到所述结果。 □

A.4 对 Chatterjee (2015) 中定理 1.1 的修订

Chatterjee（2015）中的定理 1.1。 假设我们有一个 $m \times n$ 矩阵 M，其中 $m \leq n$且 M 的各元素的绝对值均不超过 *1*。设 X 为一个元素由独立随机变量构成的矩阵，并且 $\mathbb{E}(x_{ij}) = m_{ij}$ 对所有 i 以及 j 均成立。假设 X 的各元素的绝对值也几乎必然不超过 1 。设 p 为属于区间 $[0,1]$ 的实数。假设 X 的每个元素以概率 p被观测到，以概率 $1-p$未被观测到，且各元素的观测情况彼此独立。

我们基于 X 的观测条目，使用通用奇异值阈值法（*USVT*）算法，并采用阈值 $(2+\eta)\sqrt{n\hat{}p}$. 假设对于某个 $\varepsilon > 0.$， $p \geq n^{-1+\varepsilon}$ 则

$$MSE(\hat{M}) \leq C \min\left(\frac{\|M\|_*}{m\sqrt{np}}, \frac{\|M\|_*^2}{mn}, 1\right) + C(\varepsilon)e^{-cnp},$$

其中， C 和 c 是仅取决于 η 和 C（ε）的正数，而其取值仅取决于ε 和 η.

在我们的工作中，我们针对具体的设定对 Chatterjee （2015）中的定理 1.1 进行了修改。这些修改仅涉及重命名变量，以保持记号的一致性，并明确变量之间的依赖关系。具体修改总结如下表所示。

表 2：对 Chatterjee （2015）中定理 1.1 的记号所做的修改。

Chatterjee（2015）中的记号	我们的记号
M	A
X	Z
$\hat{M}$	SVT(M， τ， ψ)
n	ρ_1
m	ρ_2
C	$C(\eta)$
c	$c(\eta)$
$C(\varepsilon)$	$C(\varepsilon$， $\eta)$

修改后的命题如下。

命题 *4.5*。（根据 *Chatterjee (2015)* 中的定理 *1.1* 修改。）假设 Z 的元素是独立随机变量，且每个元素都以概率 $p \in [0,1]$ 独立观测。令 $\hat{p}$ 表示观测值的比例，$\psi(x) = x/\hat{p}$，$\epsilon \in (0,1]$，和 $w = (2+\eta)^2$，其中 $\eta \in (0,1)$。令 $\rho_1 = \max(m,n)$，且 $\rho_2 = \min(m,n)$。那么，若对于某个 $\epsilon > 0$ 有 $p \geq \rho_1^{\epsilon-1}$，且 $\tau = \sqrt{w\rho_1}\hat{p}$，

$$MSE\left(SVT(Z,\tau,\psi)\right) \leq C(\eta)\min\left(\frac{\|A\|_*}{\rho_2\sqrt{\rho_1 p}}, \frac{\|A\|_*^2}{\rho_1\rho_2}, 1\right) + C(\epsilon,\eta)\exp(-c(\eta)\rho_1 p),$$

其中，$C(\eta)$ $c(\eta)$ > 0 仅取决于 η 和 $C(\epsilon,\eta)$ 仅取决于 η 和 ϵ。

A.5 实验设置

下面介绍一些有关实验设置的补充细节。

训练深度神经网络。给定输入矩阵 B，第 6.1 节所述深度神经网络（深度神经网络）的训练集由以下形式的（输入，目标）元组组成：$([\mathbf{B}i\,\mathbf{b}_j], B_{ij})$。$\mathbf{B}_i$ 和 $\mathbf{b}j$ 中的缺失项以零替代。观测条目 $(i, j) \in \Omega$中，80% 用于训练，其余 20% 用于验证；未观测条目构成测试集。我们使用批量大小为 128，并进行 2000 步训练。

A.6 补充实验结果

A.6.1 实验 #3：以非均匀随机方式观测条目

设定。回顾第 6.1 节中实验 #1 的设定。我们抽取 $m = 200$ 个长度为 $n = 800$的特征向量，每个向量对应一个个体，以构成真实矩阵 $A \in [-1,1]^{m\times n}$. 这些特征向量从 $c = 10$ 个簇中抽取，每个簇都是一个多元正态分布。

接下来，我们生成观测矩阵 Z。回顾一下，Ω 表示观测条目的集合。我们不再以概率 p 独立选择每个条目，而是根据条目所属的簇，以不同概率观测条目。对于每个簇 k，都有一个相应的随机向量 $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$，其条目之和为 $p \cdot n$。对于簇 k 中的每个个体 i，条目 $(i,\ j)$ 以概率 $p_i[j]$. 被观测。观测条目的期望数量为 $p \cdot n \cdot m$，因此观测比例符合预期，但条目不再是均匀随机抽取的，因为某个条目被抽取的概率取决于它所属的簇。其余设定与实验 #1 相同。

结果。表 3 总结了实验#3的结果。数值为 10 次模拟的平均值，误差线表示 $+/-$ 两个标准差。我们观察到，个体公平性$_1^f(Z)$ 远小于 个体公平性$_1^h(Z)$，这再次验证了 SVT 预处理能够提升 Z。

请注意，条目 $(i,j) \in \Omega$ 未被均匀随机选取，这违反了命题 4.5中的一个条件。该命题指出，A 的每个条目都以 p 的概率独立观测到。尽管违反了这一条件，我们从表 3中观察到，应用 SVT 预处理后，性能仅略有下降。这表明，SVT 的性能保证对于放宽命题 4.5中所述的独立性条件具有鲁棒性。

A.6.2 实验 #4：改变特征向量的长度

设定。考虑 $m = 500$ 个体。我们从 $c = 20$个簇中采样 m 个长度为 n 的特征向量，其中每个簇都服从多元正态分布。每个簇的均值是一个

表 3：实验#3 中个体公平性与性能的结果。

	$\hat{p} = 0.05$	$\hat{p} = 0.1$	$\hat{p} = 0.2$	$\hat{p} = 0.4$
均方误差(h)	0.31 ± 0.002	0.23 ± 0.002	0.16 ± 0.002	0.14 ± 0.001
均方误差(f)	0.33 ± 0.003	0.23 ± 0.001	0.17 ± 0.001	0.14 ± 0.001
个体公平性$_1^h(Z)$	0.24 ± 0.005	0.17 ± 0.003	0.11 ± 0.002	0.06 ± 0.001
个体公平性$_1^f(Z)$	0.02 ± 0.001	0.02 ± 0.001	0.03 ± 0.001	0.03 ± 0.001
K_2	0.05 ± 0.003	0.11 ± 0.007	0.25 ± 0.009	0.49 ± 0.013
个体公平性$_2^h(A)$	0.46 ± 0.010	0.63 ± 0.011	0.75 ± 0.015	0.75 ± 0.007
个体公平性$_2^f(A)$	0.49 ± 0.014	0.64 ± 0.006	0.75 ± 0.008	0.73 ± 0.014

长度为 n 从$(-1,1)$中均匀随机抽取的向量，每个簇的协方差是一个$n \times n$ 对角矩阵，其对角线元素从$(0,0.1)$中均匀随机抽取。随后对特征向量进行截断，使所有数值都落在 $[-1,1]$范围内。生成观测矩阵 Z时，我们均匀随机地观测其中比例为 $p = 0.2$ 的条目。我们不改变 p的值，而是创建 n取不同值的数据集，其中 n表示特征向量的长度。其余设定与第6.1节中所述的实验1相同。

表4：实验 #4 中不同 n 值下个体公平性和性能的结果。

	$n = 25$	$n = 100$	$n = 400$	$n = 800$
均方误差(h)	0.36 ± 0.004	0.28 ± 0.003	0.13 ± 0.001	0.10 ± 0.001
均方误差(f)	0.36 ± 0.004	0.28 ± 0.003	0.12 ± 0.001	0.10 ± 0.001
个体公平性$_1^h(Z)$	0.43 ± 0.004	0.26 ± 0.002	0.17 ± 0.001	0.13 ± 0.001
个体公平性$_1^f(Z)$	0.15 ± 0.003	0.07 ± 0.001	0.05 ± 0.001	0.03 ± 0.001
K_2	0.21 ± 0.020	0.06 ± 0.002	0.03 ± 0.001	0.02 ± 0.001
个体公平性$_2^h(A)$	0.51 ± 0.004	0.63 ± 0.005	0.80 ± 0.007	0.83 ± 0.007
个体公平性$_2^f(A)$	0.62 ± 0.011	0.67 ± 0.007	0.82 ± 0.011	0.83 ± 0.010

结果。表4总结了实验 #4 的结果。回顾第5节，当 $n = \omega(rm/\hat{p})$ 时，我们关于 SVT 预处理能够同时增强个体公平性并保持良好预测性能的理论保证成立。在上述设定中，$n = 25$ 和 $n = 100$ 都满足 $o(rm/\hat{p})$。然而，我们观察到，对于所有 n 的取值，个体公平性$_1^f(Z)$都远小于个体公平性$_1^h(Z)$，且均方误差(h)与均方误差(f)之间的差异极小。这意味着即使在 $n = o(rm/\hat{p})$ 时，应用 SVT 预处理仍能显著改善相对于 Z 的个体公平性，同时几乎不影响预测性能。这表明，SVT 预处理在经验影响函数和性能方面的优势，并不局限于 $n = \omega(rm/\hat{p})$ 的情形。