arXiv:2302.02120v1 [math.DS] 4 Feb 2023

闭曲面上的定向与标准跟踪性质

SOGO MURAKAMI

Abstract. 我们证明，对于非游荡集由有限个临界元（即奇点或闭轨）组成的闭曲面上的拓扑流，定向跟踪性质与标准跟踪性质等价。此外，我们证明，具有定向跟踪性质的闭曲面上拓扑流的每个孤立奇点，要么是渐近稳定的，要么是反向渐近稳定的，要么存在一个邻域，该邻域可分解为两个或四个双曲扇区。

1. Introduction

在动力系统的定性研究中，跟踪性质一直是双曲理论中的一项关键性质（例如参见 [9] 或 [12] ），它有助于证明双曲系统的结构稳定性。关于各种跟踪性质与结构稳定性或Ω-稳定性之间关系的研究成果中，Pilyugin 和 Tikhomirov 的工作尤为突出：他们证明了紧流形上的 C^1 向量场 [10]具有 Lipschitz 跟踪性质当且仅当其结构稳定。Lipschitz 跟踪性质强于标准跟踪性质，但也存在若干弱于标准跟踪性质的跟踪性质。其中就包括定向跟踪性质。该性质只关注轨道的时间定向；为了跟踪伪轨道，它允许对真实轨道进行保向时间重参数化。定向跟踪性质何时能推出标准跟踪性质，是一个值得探讨的问题。

作为一项经典工作，Komuro [6] 证明了在不含奇点的紧致度量空间上，拓扑流的定向与标准跟踪性质是等价的。最近，这一结果已推广到含有有限个李雅普诺夫稳定奇点或反向李雅普诺夫稳定奇点的情形 [8]。当紧致度量空间变为闭曲面时，预计会有更强的性质成立。然而，Tikhomirov [13] 给出了一个重要例子，在该例中这种等价性并不成立。该例是定义在四维闭流形上的一个 C^1 向量场，其非游荡集由有限个奇点组成，其中包括两个指标为二的双曲鞍点。在本文中，我们证明了闭曲面上拓扑流的定向与标准跟踪性质是等价的，其中非游荡集由有限个临界元组成。注意，在这里所有鞍型双曲奇点的指标均为一，因此Tikhomirov在其例子中构造的情形在此处不会发生。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：37C50。

Key words and phrases. 拓扑流；跟踪；双曲扇区。1

首先介绍一些记号。设(M,dist)为一个 C^0 带有距离函数的闭曲面 M。取定义在 M上的拓扑流 ϕ（即， $\phi\colon\ \mathbb{R}\times M\to M$是满足 $\phi(0,x)=x$ 且 $\phi(s+t,x)=\phi(s,\phi(t,x))$的连续映射，其中对所有 $s,t\in\mathbb{R}$和 $x\in M$均成立）。

我们称 $\xi\colon\ \mathbb{R}\to M$ 是 ϕ 的 d-伪轨道，如果

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t+s),\,\phi(\xi(t),s)\big)<d$$

对所有 $t\in\mathbb{R}$ 和 $s\in[0,1]$均成立。令 $\mathrm{Ps}(d)$ 为 ϕ 的所有 d-伪轨道构成的集合。用 Rep 表示从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有保持定向的同胚构成的集合。对于 $\varepsilon>0$，令

$$\mathrm{Rep}(\varepsilon)=\left\{f\in\mathrm{Rep};\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}-1\right|<\varepsilon,\forall a,b\in\mathbb{R},a>b\right\}.$$

我们称拓扑流 ϕ 具有标准跟踪性质，如果对于每个$\varepsilon>0$，都存在 $d>0$，使得若 $\xi\in$ 属于 $\mathrm{Ps}(d)$，则

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\,\phi(h(t),x)\big)<\varepsilon,\quad t\in\mathbb{R}$$

对于某个 $x\in M$ 和 $h\in$，其中 $h\in$ 属于 $\mathrm{Rep}(\varepsilon)$。用 $\mathrm{StSh}(M)$ 表示所有具有标准跟踪性质的拓扑流构成的集合。作为跟踪性质的一种较弱形式，我们称拓扑流 ϕ 具有定向跟踪性质，如果对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $d>0$，使得若 $\xi\in$ 属于 $\mathrm{Ps}(d)$，则

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\,\phi(h(t),x)\big)<\varepsilon,\quad t\in\mathbb{R}$$

对某些 $x\in M$ 和 $h\in$ Rep。用 $\mathrm{OrientSh}(M)$ 表示所有具有定向跟踪性质的拓扑流的集合。 ϕ 的奇点（即拓扑流的不动点）和闭轨称为临界元。令 $\mathrm{Sing}(\phi)$ 表示 ϕ 的所有奇点构成的集合，$\mathrm{Crit}(\phi)$ 表示 ϕ 的所有临界元构成的集合。我们称一个 ϕ-不变紧集 K 是渐近稳定的，如果对 K 的任意邻域 V，都存在 K 的一个邻域 U，使得

$$\phi(t,x)\in V,\quad t\geq 0$$

and

$$\phi(t,x)\to p,\quad t\to\infty$$

对所有 $x\in U$ 均成立。类似地，若一个 ϕ-不变紧集 K 满足：对 K 的任意邻域 V，都存在 K 的一个邻域U，使得对任何.....，则称其为反向渐近稳定。

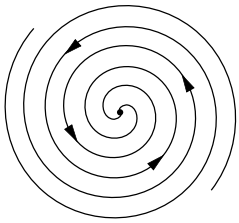
$$\phi(t,x)\in V,\quad t\leq 0$$

and

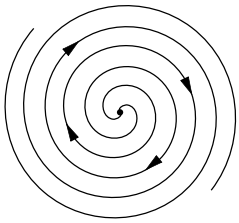
$$\phi(t,x)\to p,\quad t\to-\infty$$

对所有 $x\in U$ 均成立。对于 $r>0$ 和 $x\in M$，令 $B(r,x)$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的开球。用 $\alpha(x)$（分别用 $\omega(x)$）表示 x 的 α-极限集（分别为 ω-极限集），并用 $\Omega(\phi)$ 表示 ϕ 的非游荡集。

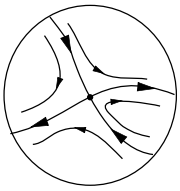
我们的第一个定理是关于 $\phi\in\mathrm{OrientSh}(M)$ 奇点的一个分类结果。奇点只有四种类型，足够简单，因而可以理解奇点周围的局部动力学行为。 [7]中也有类似结果，但我们的结果更精确，并且基于 [5] 中未采用的扇区理论 [7]。因此，为求完整，我们给出其完整证明。



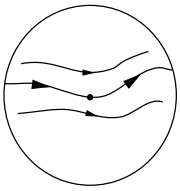
(a) 渐近稳定奇点。



(b) 反向渐近稳定奇点。



（c）具有四个双曲扇区的奇点tors.



（d）具有两个双曲扇区的奇点tors.

图1. 定理1.1中的四类奇点。

定理1.1。设 M 是一个 C^0 闭曲面，且 $\phi \in \mathrm{OrientSh}(M)$ 满足 $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$。假设 p 有一个邻域 D，它与$\mathbb{R}^2$ 中的一个闭圆盘同胚，且不包含任何 α-极限点或 ω-极限点（ p除外）。那么下列性质之一成立：

（a） p 是渐近稳定的。（b） p 是反向渐近稳定的。（c） D 具有一个由与 ∂D相关联的四个双曲扇区组成的开稠密子集。（d） D 具有一个由与 ∂D相关联的两个双曲扇区组成的开稠密子集。

我们在第2节中给出双曲扇区的定义（另见图1）。利用定理1.1，我们证明定向与标准跟踪性质之间的等价性。

定理 1.2。设 M 是一个 C^0 闭曲面，且 ϕ 是M上的一个拓扑流。假设非游荡集 $\Omega(\phi)$ 由有限个临界元组成。则以下条件等价：

- $\phi \in$ StSh(M)。
- $\phi \in$ OrientSh(M)。

显然，StSh(M) $\subset$ OrientSh(M)。为证明定理 1.2，我们需要证明 OrientSh(M) $\subset$StSh(M)。以下推论可由定理 1.2 直接得到。

推论 1.3。 设 M 为光滑闭曲面，且 ϕ 为 C^1 *Axiom A* 流形上的流。则以下条件等价:

- $\phi \in \mathrm{StSh}(M)$。
- $\phi \in \mathrm{OrientSh}(M)$。

第2节给出了若干命题和引理，它们在主要定理的证明中发挥着重要作用。第3节证明了定理1.1。第4节将定理 1.2 归约为一个命题，并引入一些记号和引理。第5节和第6节研究了临界元附近伪轨道的行为，以证明定理 1.2。第7节完成定理 1.2 的证明。

2. Preliminaries

本节给出若干在别处证明过的引理和命题，它们是证明定理1.1和定理 1.2的基础。第一个引理的证明实质上见于 [2]。

引理2.1 ([2])。 设 $x_0 \in M \setminus \mathrm{Sing}(\phi)$，并设 U 是 x_0的一个邻域。那么存在一个包含 x_0 和 $\tau_0 > 0$ 的集合 S，使得映射

$$\varphi : (-\tau_0, \tau_0) \times S \ni (x, t) \mapsto \phi(x, t) \in U$$

是到其像上的同胚，且其像是 x_0的一个开邻域。

注。 Imφ 包含 x_0 的一个邻域这一事实，可由 [2, 定理2.9], 证明中的一个简单补充论证得出，此处略去。

以下引理可由 Jordan-Schoenflies定理 [3]立即推出。

引理2.2 ([3])。 设 C 是 $\mathbb{R}^2$中的一条简单闭曲线。那么对于所有的 $p \notin C$ 和 $q \in C$，存在一个连续映射 $i : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$，使得 $i(0) = p$、$i(1) = q$，并且

$$i\big([0, 1)\big) \cap C = \emptyset.$$

以下引理是 [14,定理31。2，定理 31.5]。

引理 2.3 ([14])。 设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间，且 $G : [-1, 1] \to X$ 是一个满足 $G(-1) \neq G(1)$ 的满连续映射。则存在一个单射连续映射 $j : [-1, 1] \to X$，使得 $j(-1) = G(-1)$ 且 $j(1) = G(1)$。

利用这些引理，我们可以证明以下命题，该命题指出，闭曲面上的拓扑流满足流盒定理。这一事实已在许多论文中使用（例如参见 [4] 或 [1] ），但据作者所知，尚未有人明确给出证明。为完整起见，我们在此给出证明。

命题 2.4. 设 $x_0 \in M \setminus \mathrm{Sing}(\phi)$，且 U 是一个与 ϕ 的极限集不相交的 x_0 邻域。则存在一个嵌入闭区间 I，满足 x_0 和 $\tau_0 > 0$，使得映射

$$\psi : (-\tau_0, \tau_0) \times I \ni (t, x) \mapsto \phi(t, x) \in U$$

是到其像上的同胚，而该像是 x_0 的一个邻域。

证明。 根据引理2.1，存在一个集合 S，满足 x_0 和 $\tau_0 > 0$，使得映射

$$\varphi : (-\tau_0, \tau_0) \times S \ni (t, x) \mapsto \phi(t, x) \in M$$

是到其像上的同胚，且该像是 x_0的一个开邻域。必要时缩小U，我们可以假设 U 同胚于$\mathbb{R}^2$ 中的一个开圆盘，且 $U \subset$Imφ。设 $C \subset U$ 是一条围绕 x_0的简单闭曲线。由于 U与 ϕ 的极限集不相交，我们可以取

$$t_1 = \sup\{t < 0; \phi(t, x_0) \in C\},$$
$$t_2 = \inf\{t > 0; \phi(t, x_0) \in C\}.$$

对 $i = 1,2$，令 $y_i = \phi(t_i, x_0)$。于是 C被分成两个子弧 C_1和 C_2，其端点分别为 y_1 和 y_2，并定义另一个具有相同端点的子弧：

$$C_0 = \{\phi(t, x_0); t_1 < t < t_2\}.$$

设 U_1和 U_2分别为简单闭曲线 $C_0 \sqcup C_1$和 $C_0 \sqcup C_2$的内部。将引理2.2应用于 $C_0 \sqcup C_1$ 和 $C_0 \sqcup C_2$，可得连续映射 $i : [-1, 1] \to U$，满足 $i(0) = x_0$，$i(-1) \in U_1$，$i(1) \in U_2$，并且

$$i\big([-1, 0) \cup (0, 1]\big) \cap (C_0 \sqcup C) = \emptyset.$$

定义 $F : [-1, 1] \to S$ 如下：

$$F(s) = \mathbf{pr}_2 \circ \varphi^{-1}(i(s))$$

对所有 $s \in [-1, 1]$，其中 $\mathbf{pr}_2$ 是到第二个分量的投影。注意，$\mathbf{pr}_1 \circ \varphi^{-1}(x) \to 0$，当 $x \to x_0$ 时，其中 $\mathbf{pr}_1$ 是到第一个分量的投影。对于充分小的 $\eta \in (0, 1)$，我们有 $F(-\eta) \in U_1$, $F(\eta) \in U_2$，并且

$$F\big([-\eta, 0) \cup (0, \eta]\big) \cap (C_0 \sqcup C) = \emptyset.$$

定义 $G : [-1, 1] \to S$，使得 $G(s) = F(\eta s)$。然后将引理 2.3 应用于 $G : [-1, 1] \to G([-1, 1])$，从而得到单射连续映射 $j : [-1, 1] \to G([-1, 1])$，使得 $j(-1) = G(-1)$ 且 $j(1) = G(1)$。由于 $G([-1, 1]) \subset U_1 \sqcup C_0 \sqcup U_2$ 且 $j([-1, 1])$ 连通，存在 $t_0 \in (-1, 1)$，使得 $j(t_0) \in C_0$。由于 C_0 是轨道的一个连通子集，且 $U \subset$ Im φ，因此有 $C_0 \cap S = \{x_0\}$。由此得到 $j(t_0) = x_0$。令 $I = j([-1, 1])$，并定义 $\psi : (-\tau_0, \tau_0) \times I \to$Im φ，使得

$$\psi(t, x) = \phi(t, x).$$

那么，根据 S的选取，ψ 是单射，而区域不变定理表明，ψ 是到其像上的同胚。最后，x_0 位于 Im ψ的内部，因为 x_0属于 Im ψ的开集 $\psi((-\tau_0, \tau_0) \times j((-1, 1))$。□

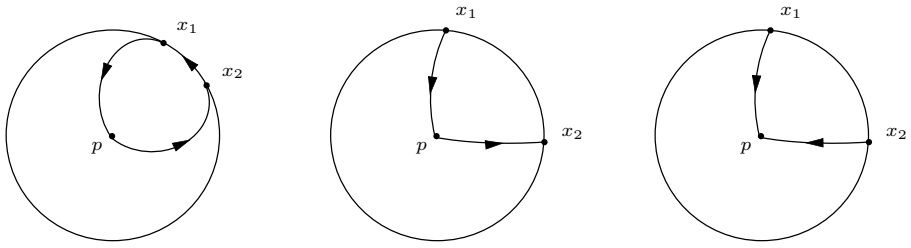
现在我们引入一些记号，以便陈述下一个命题。设 p是 ϕ的一个奇点，U 是 p 的一个邻域，它同胚于 $\mathbb{R}^2$中的一个开圆盘。设 $C \subset U$ 是包围 p 的一条简单闭曲线，并设 U_C 是 C的内部。对于 $x \in C$，我们称 Orb$^+(x)$（分别地，Orb$^-(x)$）为从 x 出发的正（分别地，负）基轨道，如果

$$\phi(t, x) \in U_C, \quad t > 0 \text{ (resp. } t < 0)$$

and

$$\phi(t, x) \to p, \quad t \to \infty \text{ (resp. } t \to -\infty).$$

设 c_i 是来自 $x_i \in C$、对应于 $i = 1, 2$ 的正基轨道或负基轨道。U_C 的开子集 S 称为由 c_1 和 c_2 确定的扇形区域，如果 S 的边界由 c_1，c_2、p 以及一条从 x_1 到 x_2 的子弧 C_{12} 组成。由 c_1 和 c_2 确定的扇形区域 S 称为椭圆型，如果 Orb(x_1) = Orb$(x_2) \subset S$；若 S 不是椭圆型且 $C_{12} \cup S$ 不包含正基轨道或负基轨道，则称其为双曲型。由 c_1 和



(a) 椭圆扇区。 (b) 双曲扇区。 (c) 抛物扇区。

图 2. 三种类型的扇形区域。

c_2 称为正（分别为负）抛物型扇形区域，如果 c_1 和 c_2 是正（分别为负）基轨道，且 S 不包含负（分别为正）基轨道。正如下面的命题 3.2 中所论证的，我们很容易看出这三种类型的扇形区域互不重叠。

以下命题是局部扇区分类定理 [5, 引理 8.2 和 8.3]。该定理在 C^1 情形下已得到证明，但其证明对拓扑流仍然有效。

命题 2.5 ([5])。设 p 是 ϕ 的一个奇点，且 D 是 p 的一个闭邻域，与 $\mathbb{R}^2$ 中的一个闭圆盘同胚。若 D 中除 p 外不含 α-极限点或 ω-极限点，则 D 有一个稠密子集，由有限个与 ∂D 相关的椭圆型、抛物型和双曲型扇区组成。

下面的三个引理将用于证明定理 1.2。以下引理早已广为人知（例如，参见 [11] ）。

引理 2.6 (Conley 动力系统基本定理)。存在一个连续函数 $L_0 : M \to \mathbb{R}$，满足以下性质：

(1) 对于任意 $x \notin \Omega(\phi)$，

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto L_0(\phi(t,x)) \in \mathbb{R}$$

严格递增。

(2) 对于 x、$y \in \Omega(\phi)$，x 与 y 属于同一个临界元，当且仅当 $L_0(x) = L_0(y)$。

对于 $\Lambda \in \mathrm{Crit}(\phi)$，定义

$$W^s(\Lambda) = \{x \in M; \phi(t,x) \to \Lambda, \quad t \to \infty\},$$
$$W^u(\Lambda) = \{x \in M; \phi(t,x) \to \Lambda, \quad t \to -\infty\}.$$

对于 Λ_1，$\Lambda_2 \in \mathrm{Crit}(\phi)$，我们将 $\Lambda_1 \to \Lambda_2$ 记为 if

$$W^u(\Lambda_1) \cap W^s(\Lambda_2) \setminus \Omega(\phi) \neq \emptyset.$$

以下引理的证明与 [9, 引理 2.4.6] 的证明类似，此处略去。

引理 2.7. 如果$\Omega(\phi)$ 由有限个临界元组成，那么 $\phi \in \mathrm{OrientSh}(M)$满足无环条件。

下面的引理是伯克霍夫常数定理 [9,定理 2.2.5] 关于流的版本。这个引理的证明与 [9, 定理 2.2.5] 的证明类似。

引理 2.8 ([9])**.** 设 U 是一个包含 $\Omega(\phi)$ 的开集。那么存在 $R>0$ 和$d>0$，使得如果 $x\in M$ 满足

$$\phi(t,x)\notin U,\quad t\in(0,\ell),$$

然后 $\ell<R$。

3. Classification of singularities

本节中，我们证明定理1.1，该定理对每个 $p\in$Sing(ϕ) 的邻域内的拓扑流进行分类，其中邻域 D 满足定理1.1的条件。

记 Sing$_s(\phi)$ 为 ϕ 的所有渐近稳定奇点的集合，记 Sing$_u(\phi)$ 为 ϕ 的所有渐近不稳定奇点的集合。记 Sing$_4(\phi)$ 为 ϕ 中具有定理1.1性质（c）的所有奇点的集合，记 Sing$_2(\phi)$ 为具有定理1.1性质（d）的所有奇点的集合。取 $p\in$Sing(ϕ) 及其邻域 D，使其满足定理1.1的条件。

引理 3.1. 对于所有 $x\in D\setminus\{p\}$，我们有 $\mathrm{Orb}(x)\not\subset D$。特别地，不存在与 ∂D 相关联的椭圆扇区。

证明。为导出矛盾，假设存在一点 $x_0\in D\setminus\{p\}$，使得 Orb(x_0) $\subset D$。那么，根据假设，我们有 $\omega(x_0)=\alpha(x_0)=\{p\}$。将 Orb($x_0$) $\cup\{p\}$ 所围简单闭曲线内部的开区域记为U。由于$U\subset D$，我们有

$$\mathrm{Orb}(x)\subset U\subset D \tag{3.1}$$

对所有 $x\in U$ 都成立。设 x_1 是 U 中的一点，并取足够小的 $\varepsilon_1>0$，使得 $B(2\varepsilon_1,x_1)$ 包含于 U 中。则 (3.1) 推出 $\omega(x_1)=\alpha(x_1)=\{p\}$。当$d>0$足够小时，所有 $\xi\in$ Ps(d) 都是 ε_1-影踪的。存在 $T_d>0$，使得

$$\phi(T_d+t,x_1),\quad \phi(-T_d+t,x_1)\in B(d/2,p),\quad t\in[0,1].$$

考虑一个 d-伪轨道 $\xi:\mathbb{R}\to U$，满足

$$\xi(t)=\phi(t-2T_dn,x_1),\quad t\in[(2n-1)T_d,(2n+1)T_d)$$

对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 都成立。那么存在 $x_2\in B(\varepsilon_1,x_1)$ 和 $h\in$ Rep，使得 $h(0)=0$，从而

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\,\phi(h(t),x_2)\big)<\varepsilon_1,\quad t\in\mathbb{R}.$$

根据 x_1 的选择以及这个不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}\big(p,\,\phi(h(2T_dn),x_2)\big)&\geq\mathrm{dist}\big(p,\,\xi(2T_dn)\big)-\mathrm{dist}\big(\xi(2T_dn),\,\phi(h(2T_dn),x_2)\big)\\&\geq 2\varepsilon_1-\varepsilon_1=\varepsilon_1\end{aligned}$$

对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 都成立。然而，由 (3.1) 可得 $\omega(x_2)=\alpha(x_2)=\{p\}$。这就产生了矛盾。□

断言 1. 如果 $p\notin$Sing$_s(\phi)$（分别地，$p\notin$Sing$_u(\phi)$），则存在 $x\in\partial D$ 使得轨道$^-(x)\subset D$（（分别地，轨道$^+(x)\subset D$) 且

$$\phi(t,x)\to p,\quad t\to-\infty,\quad (resp.\ \phi(t,x)\to p,\quad t\to\infty).$$

证明。 假设 $p \notin \mathrm{Sing}_s(\phi)$。那么我们可以取 $\varepsilon > 0$，使得 $B(\varepsilon, p) \subset D$并且对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在满足条件的 $z_n \in B(1/n, p)$

$$\mathrm{Orb}^+(z_n) \not\subset B(\varepsilon, p)$$

或 $\omega(z_n) \neq \{p\}$。注意，若 $\mathrm{Orb}^+(z_n) \subset B(\varepsilon, p)$，则根据关于 D 的假设，$\omega(z_n) = \{p\}$。因此，对于所有 $n \geq 1$,

$$\mathrm{Orb}^+(z_n) \not\subset B(\varepsilon, p).$$

Let

$$t_n = \inf\{t \geq 0; \phi(t, z_n) \in \partial B(\varepsilon, p)\}$$

且 $w_n = \phi(t_n, z_n) \in \partial B(\varepsilon, p)$。如有必要，取一个子序列 $\{w_{n_k}\}_{k\geq 1}$，我们可以假设 w_{n_k} 收敛到某个 $w \in \partial B(\varepsilon, p)$。由于 $t_{n_k} \to \infty$ 当 $k \to \infty$ 时，$\mathrm{Orb}^-(w) \subset D$。因此再次根据关于 D 的假设,

$$\phi(t, w) \to p, \quad t \to -\infty.$$

此外，由引理 3.1 可知 $\mathrm{Orb}^+(w) \not\subset D$。因此我们可以取

$$t_0 = \inf\{t > 0; \phi(t, w) \notin D\}$$

并定义 $x = \phi(t_0, w)$。那么容易看出，x 满足所需条件。关于 $p \notin \mathrm{Sing}_u(\phi)$ 的证明类似，只需反转时间方向。□

命题 3.2. 若 $p \notin \mathrm{Sing}_s(\phi) \cup \mathrm{Sing}_u(\phi)$，则 p 没有与 ∂D相关联的抛物扇区。

证明。 假设 p 有一个由 $\mathrm{Orb}^+(x_1)$ 和 $\mathrm{Orb}^+(x_2)$ 确定的正抛物扇区 S。令$C_{1,2}$ 为 ∂D 上从 x_1 到 x_2 的子弧，使得 S 是 D 的子集，其边界由以下部分组成

$$p, \mathrm{Orb}^+(x_1), \mathrm{Orb}^+(x_2) \text{ and } C_{1,2}.$$

利用命题 2.4，我们可以取一个嵌入 $i : [-1, 1] \to D$，使得 $i(0) = \phi(1, x_1)$，并且嵌入闭区间 $i([-1, 1])$ 满足命题 2.4 中关于 $x_0 = i(0)$ 的条件。此外，我们可以假设 $i((0, 1]) \subset S$。于是

$$\mathrm{Orb}^+(i(s)) \subset S, \quad s \in (0, s_0] \tag{3.2}$$

对于某个较小的 $s_0 \in (0, 1]$。事实上，反设存在一个序列 $\{s_n\}_{n\geq 1}$ 属于 $(0, 1]$，使得当 $n \to \infty$ 时，$s_n \to 0$，并且

$$\mathrm{Orb}^+(i(s_n)) \not\subset S.$$

那么对于所有 $n \geq 1$，存在 $t_n > 0$ 使得

$$t_n = \inf\{t > 0; \phi(t, i(s_n)) \in C_{1,2}\}.$$

必要时取一个子序列，我们可以假设 $\phi(t_n, i(s_n)) \to y_0$ 对某个 $y_0 \in C_{1,\,2}$ 成立。由于 $t_n \to \infty$，由连续性可得，对所有 $t < 0$，$\phi(t, y_0) \in S$，这与 S 是抛物型的矛盾。因此 (3.2) 成立。必要时缩小 s_0，我们可以假设 $\mathrm{Orb}^+(i(s_0)) \cap i([0, s_0]) = \{i(s_0)\}$。记 S_0 为由以下部分构成的闭曲线内部区域

$$i([0, s_0]), p, \mathrm{Orb}^+(i(0)) \text{ and } \mathrm{Orb}^+(i(s_0)),$$

其中注意到，根据 (3.2)，$\omega(i(s_0)) = \{p\}$。令 $x_0 = \phi(1, i(s_0/2)) \in S_0$。取满足以下性质的 $\varepsilon_1 > 0$:

$$B(\varepsilon_1, x_0) \subset S_0 \tag{3.3}$$

and

$$\operatorname{dist}(\overline{S_0}, \partial D) > \varepsilon_1. \tag{3.4}$$

由于 $p \notin \mathrm{Sing}_s(\phi)$，利用断言 1，我们有 $w \in \partial D$，其中 $\mathrm{Orb}^-(w) \subset D$，并且

$$\phi(-t, w) \to p, \quad t \to \infty.$$

我们的假设 $\phi \in \mathrm{OrientSh}(M)$ 意味着存在 $d > 0$，使得每个 d-伪轨道都能被 ε_1-定向跟踪。取足够大的 $T > 0$，使函数 $\xi\colon \mathbb{R} \to M$ 定义为

$$\xi(t) = \begin{cases} \phi(t, x_0), & t \le T, \\ \phi(t - 2T, w), & t > T \end{cases}$$

是一个 d-伪轨道。于是存在 $h \in \mathrm{Rep}$，使得 $h(0) = 0$，并且存在 $z_0 \in S$，满足

$$\operatorname{dist}\big(\xi(t),\, \phi(h(t), z_0)\big) < \varepsilon_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

由这个不等式可得 $\operatorname{dist}(x_0,\ z_0) < \varepsilon_1$。因此，由 (3.2) 和 (3.3)，对所有 $t \ge 0$，$\phi(h(t)\ z_0) \in S_0$。我们还有

$$\operatorname{dist}\big(w,\, \phi(h(2T), z_0)\big) < \varepsilon_1.$$

这与 (3.4) 矛盾，并证明了当 p 具有一个正抛物扇区时，该命题成立。p 具有一个负抛物扇区时的证明类似。 □

假设 $p \notin \mathrm{Sing}_s(\phi) \cup \mathrm{Sing}_u(\phi)$。根据命题 2.5，$D$ 中存在一个开稠密子集，由有限个椭圆型、双曲型和抛物扇区组成。结合引理 3.1 和命题 3.2，我们可以观察到，D 具有一个开稠密子集，其中包含偶数个双曲扇区。

引理 3.3. 设 S 是由某些 x_1、$x_2 \in \partial D$所确定的 p 的一个双曲扇区，其边界为 $\mathrm{Orb}^+(x_1)$ 和 $\mathrm{Orb}^-(x_2)$。设 $x_1' \in \mathrm{Orb}^+(x_1) \cup \{p\} \setminus \{x_1\}$ 以及 $x_2' \in \mathrm{Orb}^-(x_2)$。对于 x_2'的任意邻域 U_2，存在 x_1' 的一个邻域 U_1，使得对于任意$x \in U_1 \cap S$,

$$\phi(t, x) \in S, \quad t \in [0, t_x]$$

and

$$\phi(t_x, x) \in U_2$$

对某个 $t_x > 0$。

证明。由于 S 是一个双曲扇区，对所有 $x \in S$,

$$\mathrm{Orb}^+(x) \not\subset S. \tag{3.5}$$

事实上，S 没有正基轨道，因此若 (3.5) 不成立，则有 $\mathrm{Orb}^-(x) \subset S$（注意，$\mathrm{Orb}^+(x) \subset S$ 表明 $\omega(x) = \{p\}$）。这与引理 3.1 矛盾。

反设存在一个序列 $\{y_n\}_{n \ge 1}$，属于 S，使得

$$y_n \to x_1', \quad n \to \infty$$

并且对于所有的 $n \ge 1$ 和 $s > 0$，要么

$$\phi([0, s], y_n) \not\subset S \tag{3.6}$$

or

$$\phi(s, y_n) \notin U_2 \tag{3.7}$$

成立。根据 (3.5)，存在 $t_n = \inf\{t > 0; \phi(t,\ y_n) \in \partial S\} < \infty$。若对于某个 $s \in [0, t_n)$，$\phi(s,\ y_n) \in U_2$，则 (3.6) 和 (3.7) 对 s 不成立。因此我们得到

$$\phi([0, t_n], y_n) \cap U_2 = \emptyset \tag{3.8}$$

对所有 $n \geq 1$。必要时取一个子序列，不妨设 $\phi(t_n, y_n) \to y_0$，其中某个 $y_0 \in \partial D$ 满足 $\phi(t, y_0) \in S$，对所有 $t \leq 0$ 均成立，因为 $t_n \to \infty$。结合这一点以及 S 是一个双曲扇区这一事实，可得 $y_0 = x_2$。这与 (3.8) 矛盾。□

命题 3.4. 若 $p \notin \mathrm{Sing}^s(\phi) \cup \mathrm{Sing}^u(\phi)$，则双曲扇区的数量为2 或4。

证明。 反设存在多于四个双曲扇区。设 S_1 和 S_2 是与 ∂D 相关的相邻扇形区域，其中 S_i 由 $\mathrm{Orb}^+(x_0)$ 和 $\mathrm{Orb}^-(y_i)$ 确定，$i = 1,2$，对某个 $x_0, y_1, y_2 \in \partial D$ 成立。由于双曲扇区多于四个，我们有 $y_3 \in \partial D \setminus \{y_1, y_2\}$，使得 $\mathrm{Orb}^-(y_3) \subset D$。令 $\varepsilon_1 > 0$ 满足

$$\varepsilon_1 < \mathrm{dist}\big(\{\phi(-1, y_1), \phi(-1, y_2)\},\ \mathrm{Orb}^+(x_0) \cup \{p\} \cup \mathrm{Orb}^-(y_3)\big) \tag{3.9}$$

and

$$\varepsilon_1 < \mathrm{dist}\big(y_3, \overline{S_1} \cup \overline{S_2}\big). \tag{3.10}$$

根据关于 S_1 和 S_2的引理 3.3，我们可以将 $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ 取得足够小，使得若 $x \in B(\varepsilon_2, \phi(1, x_0)) \setminus \mathrm{Orb}^+(x_0)$，则存在 $t_0 > 0$ 满足

$$\phi(t, x) \in S_1 \cup S_2, \quad t \in [0, t_0]$$

and

$$\phi(t_0, x) \in B(\varepsilon_1, y_1) \cup B(\varepsilon_1, y_2).$$

令 $d > 0$ 满足每个 $\xi \in \mathrm{Ps}(d)$ 都是 ε_2-定向跟踪的。定义函数$\xi : \mathbb{R} \to M$ 如下:

$$\xi(t) = \begin{cases} \phi(1 + t, x_0), & t \leq T_d, \\ \phi(t - 2T_d, y_3), & t > T_d \end{cases}$$

对于某个 $T_d > 0$，它是一个 d-伪轨道，因此 ξ 是 ε_2-跟踪的。取 $h \in \mathrm{Rep}$，使得 $h(0) = 0$，且 $z_0 \in M$ 满足

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\ \phi(h(t), z_0)\big) < \varepsilon_2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

于是我们有 $z_0 \in B(\varepsilon_2, \phi(1, x_0))$。

现在考虑两种可能的情况。

情况 1： $z_0 \in B(\varepsilon_2, \phi(1, x_0)) \setminus \mathrm{Orb}^+(x_0)$。

根据 ε_2 的选择，存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\phi(t, z_0) \in S_1 \cup S_2, \quad t \in [0, t_0]$$

且 $\phi(t_0, z_0) \in B(\varepsilon_1, y_1) \cup B(\varepsilon_1, y_2)$。令 $t_1 =$最小值$\{h^{-1}(t_0)\ 2T_d\}$。于是

$$\phi(h(t_1), z_0) \in \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$$

and

$$\xi(t_1) \in \mathrm{Orb}^+(x_0) \cup \{p\} \cup \mathrm{Orb}^-(y_3).$$

此外，我们还满足以下条件之一

$$\xi(t_1) = y_3 \text{ when } t_1 = 2T_d$$

or

$$\phi(h(t_1), z_0) \in B(\varepsilon_1, y_1) \cup B(\varepsilon_1, y_2) \text{ when } t_1 = h^{-1}(t_0).$$

结合这些事实以及 (3.9) 和 (3.10),

$$\operatorname{dist}\big(\xi(t_1),\, \phi(h(t_1), z_0)\big) > \varepsilon_1.$$

这与 (3.11) 和 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ 矛盾。

情形 2： $z_0 \in B(\varepsilon_2,\ \phi(1,\ x_0)) \cap \mathrm{Orb}^+(x_0)$。

由于 $\phi(h(2T_d)\ z_0) \in \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$, (3.10) 推出

$$\operatorname{dist}\big(y_3,\, \phi(h(2T_d), z_0)\big) > \varepsilon_1.$$

这再次与 (3.11) 矛盾。 □

结合命题 3.2 和命题 3.4，我们得到定理1.1。

4. Reduction of Theorem 1.2

本节将定理 1.2 归约为一个较易证明的命题，并引入一些记号和引理。这些记号和引理在本文其余部分中起着重要作用。假设 $\phi \in \mathrm{OrientSh}(M)$ 的非游荡集由有限个临界元组成。

为了证明定理 1.2，只需证明对于每个 $\varepsilon_0 > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对所有 δ-伪轨道 ξ，均有

$$\operatorname{dist}\big(\xi(t),\, \phi(h(t), x)\big) < 2\varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

对于某个 $x \in M$ 和 $h \in \mathrm{Rep}(2\varepsilon_0)$。我们可以假设 $\varepsilon_0 \in (0,\ 4/5)$ 满足

$$3\varepsilon_0 < \min\{\operatorname{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2); \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathrm{Crit}(\phi), \Lambda_1 \neq \Lambda_2\}. \tag{4.1}$$

这一选择将在下文各节中使用。令

$$K = M \setminus \bigcup_{x \in \mathrm{Sing}(\phi)} B(\varepsilon_0/2, x).$$

于是我们可以取 $T_0 > 0$ 使得

$$\phi(t, x) \neq x, \quad t \in [0, 2T_0]$$

对所有 $x \in K$ 均成立，因为 $K \cap \mathrm{Sing}(\phi) = \emptyset$ 且 K 是紧的。定义

$$\widetilde{K} = \bigcap_{t \in [-2T_0, 2T_0]} \phi(t, K).$$

如有必要，缩小 $T_0 > 0$，我们可以假设

$$B(\varepsilon_0, \Lambda) \subset \widetilde{K} \tag{4.2}$$

对每个闭轨 Λ均成立。记 Pt_{T_0} 为满足以下条件的所有函数 $\xi:\ \mathbb{R} \to M$

$$\xi(t + nT_0) = \phi(t, \xi(nT_0))$$

对所有 $t \in [0, T_0$均成立）以及 $n \in \mathbb{Z}$。对于 $d > 0$，令

$$\mathrm{Pt}_{T_0}(d) = \{\xi \in \mathrm{Pt}_{T_0}; \operatorname{dist}\big(\phi(T_0, \xi(nT_0)),\, \xi((n+1)T_0)\big) < d, \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

定理 1.2 的证明可归结为证明以下命题：

命题 4.1. 对于由 (4.1) 给出的 $\varepsilon_0 > 0$，存在 $d > 0$，使得如果 $\xi \in \mathrm{Pt}^{T_0}(d)$，那么

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \phi(h(t), x)\big) < \varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

对某些 $x \in M$ 和 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$。

我们来说明定理 1.2 如何由命题 4.1 推出。容易看出，存在 $\delta > 0$，使得若 ξ 是一个 δ-伪轨道，则

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \xi'(t)\big) < \varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

对某些 $\xi' \in \mathrm{Pt}^{T_0}(d)$。于是，由命题 4.1 可得

$$\mathrm{dist}\big(\xi'(t),\, \phi(h(t), x)\big) < \varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

对某些 $x \in M$ 和 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \phi(h(t), x)\big) &\le \mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \xi'(t)\big) + \mathrm{dist}\big(\xi'(t),\, \phi(h(t), x)\big)\\ &< \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

这就证明了 (4.1)，定理 1.2 由此得证。

以下两个引理将在命题 4.1 的证明中用到，其中涉及上述对 ε_0 的选取。下面的引理本质上是 [8, 命题~2.1]，其中 K 是通过给定的 $T_0 \in (0,1)$ 和一个紧集 K 定义的；而这里我们固定了依赖于上述给定 ε_0 的 T_0。下文中，我们记 $\mathrm{Pt}^{T_0} = \mathrm{Pt}$，且 $\mathrm{Pt}^{T_0}(d) = \mathrm{Pt}(d)$。

引理 4.2 ([8])。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在满足以下性质的 $\varepsilon' > 0$：

若 $y \in M$ 满足

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t + t_0),\, \phi(g(t), y)\big) < \varepsilon', \quad t \in [0, T_1]$$

and

$$\xi(t + t_0),\, \phi(g(t), y) \in \widetilde{K}, \quad t \in [0, T_1]$$

对于某个 $\xi \in \mathrm{Pt}$、$t_0 \in \mathbb{R}$、$T_1 \ge T_0$ 和 $g \in \mathrm{Rep}$，其中 $g(0) = 0$，则存在 $\tilde{g} \in \mathrm{Rep}(\varepsilon)$，其中 $\tilde{g}(0) = g(0)$ 且 $\tilde{g}(T_1) = g(T_1)$，使得

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t + t_0),\, \phi(\tilde{g}(t), y)\big) < \varepsilon, \quad t \in [0, T_1].$$

下面的引理是 [8, 引理 5.1] 的闭轨版本。

引理 4.3 ([8])。设 Λ 是 ϕ 的渐近稳定(分别为反向渐近稳定) 临界元。那么存在 $d > 0$ 和 Λ 的一个邻域 U，使得若 $\xi \in \mathrm{Pt}(d)$ 满足 $\xi(t_0) \in U$，其中某个 $t_0 \in \mathbb{R}$，则

$$\xi(t) \in B(\varepsilon_0/2, \Lambda), \quad t \ge t_0 \ (\textit{resp. } t \le t_0).$$

这个引理的证明与 [8, 引理 5.1], 的证明类似，此处省略。事实上，只需将奇点替换为闭轨，[8, 引理 5.1] 的证明同样适用于闭轨。

5. Neighborhoods of Closed Orbits

本节中，我们构造闭轨的邻域，以研究伪轨道的行为。

引理 5.1. 设 Λ 是 ϕ的一条闭轨。那么， Λ 是渐近稳定的或反向渐近稳定的。

证明。 令 ε_0 为(4.1)给出的常数。取 $\varphi\colon [-1,1]\to B(\varepsilon_0,\Lambda)$为一个嵌入，使得嵌入闭区间 $\varphi([-1,1])$满足命题 2.4 中关于 $x_0=\varphi(0)$的条件。对于某个 $\delta_0>0$, 我们可以取一个庞加莱映射$P\colon \varphi([-\delta_0,\delta_0])\to\varphi([-1,1])$。定义 $\widetilde{P}\colon [-\delta_0,\delta_0]\to[-1,1]$为 $\widetilde{P}=\varphi^{-1}\circ P\circ\varphi$.~只需证明0对 P是吸引的或排斥的。注意, P 是一个到其像上的同胚，因此 P 是递增的或递减的。

我们分别考虑以下两种情况。

~**情况 1：** P 递增。

~由（4.1）可知，对所有 $t\neq 0$， $P(t)\neq t$ 成立。由于 P 连续，我们~~可以假设，对所有 $a\in\in(0,\delta_0)$, $P(a)>a$。另一种情况，即对~所有 $a\in\in(0,\delta_0)$， $P(a)<a$，可类似证明。若对所有 $a\in\in(-\delta_0,0)$， $P(a)<a$，则 0 是 P的排斥点~。

~反证法证明如下：假设对于某个 $a\in\in(-\delta_0,0)$~， $P(a)>a$，由（4.1）可知，对于所有 $(-\delta_0,0)$， $P(a)>a$。令 $p_0=\varphi(-\delta_0/2)$，并令 $p_1=\varphi(\delta_0/2)$。取足够小的 $\varepsilon>0$，使得 $B(\varepsilon,p_0)$ 的闭包与Λ不相交。然后令 Γ 为 $\mathrm{Orb}^+(B(\varepsilon,p_0))$ 的闭包。必要时进一步减小 ε，我们可以假设

$$B(\varepsilon,p_1)\cap\Gamma=\emptyset. \tag{5.1}$$

由于 $\phi\in\mathrm{OrientSh}(M)$，存在 $d>0$，使得每个 d-伪轨道都是ε-定向跟踪的。取足够大的 τ_0， $\tau_1>0$，使得函数 $\xi\colon\mathbb{R}\to M$ 定义为

$$\xi(t)=\begin{cases}\phi(t+\tau_0,p_0), & t\le 0,\\ \phi(t-\tau_1,p_1), & t>0\end{cases}$$

满足 $\xi\in\mathrm{Ps}(d)$。根据 d 的选取， ξ 被 ε-跟踪。因此存在 $h\in\mathrm{Rep}$，使得 $h(-\tau_0)=0$，且 $x_0\in M$ 满足

$$\operatorname{dist}\big(\xi(t),\,\phi(h(t),x_0)\big)<\varepsilon,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.2}$$

于是 $\operatorname{dist}\big(p_0,\ \ x_0\big)<\varepsilon$，结合 Γ 的定义可知

$$\phi(h(t),x_0)\in\Gamma$$

对所有 $t\ge-\tau_0$ 都成立。特别地， $\phi(h(\tau_1)\ x_0)\in\Gamma$，于是 (5.1) 与 $t=\tau_1$ 矛盾，这与 (5.2) 矛盾。

~**情形 2：** P 是递减的。

~取满足 $P((-\delta_1,\delta_1))\subset(-\delta_0,\delta_0)$ 的 $\delta_1\in(0,\delta_0)$。由 (4.1) 可知，对所有 $t\neq 0$， $\widetilde{P}^2(t)\neq t$。现在假设，对所有 $a\in(0,\delta_1)$， $\widetilde{P}^2(a)>a$。~另一种情形，即对所有 $a\in(0,\delta_0)$， $P(a)<a$，证明类似。由于~~~P连续，且 $P^2(\delta_1/2)>\delta_1/2$，因此存在 $a_0\in(P(\delta_1/2),0)$，使得~~$P(a_0)>\delta_1/2$。于是 $(a_0,\delta_1/2)$ 满足 $P^{-1}(a_0,\delta_1/2)\subset(a_0,\delta_1/2)$，故由 (4.1)，~$(a_0,\delta_1/2)$ 是 P 的一个排斥邻域。□

用 $\mathrm{Clos}_s(\phi)$ 表示所有渐近稳定闭轨构成的集合，用 $\mathrm{Clos}_u(\phi)$ 表示所有反向渐近稳定闭轨构成的集合。

断言 2. 设 Λ 是 ϕ 的一条闭轨，并设 ε_0 是由 (4.1) 给出的常数。存在 $r_0 \in (0, \varepsilon_0/2)$，使得若 $x, y \in \Lambda$ 满足 $\mathrm{dist}(x, y) < r_0$，则

$$\mathrm{dist}\big(\phi(t,x),\, \phi(t,y)\big) < \frac{\varepsilon_0}{8}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

证明. 取 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得

$$\mathrm{dist}\big(\phi(t,x),\, x\big) < \frac{\varepsilon_0}{8} \tag{5.3}$$

对所有 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 和 $x \in \Lambda$ 均成立。为反证，假设存在序列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{y_n\}_{n\geq 1}$，它们属于 Λ，使得

$$\mathrm{dist}\big(x_n, y_n\big) < \frac{1}{n} \tag{5.4}$$

and

$$\mathrm{dist}\big(\phi(t_n,x_n),\, \phi(t_n,y_n)\big) \geq \frac{\varepsilon_0}{8}$$

对某个 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ 成立。于是由 (5.3),

$$\phi(t_n, y_n) \notin \phi((-\varepsilon, \varepsilon), \phi(t_n, x_n)),$$

这意味着

$$y_n \notin \phi\big((-\varepsilon, \varepsilon),\, x_n\big) \tag{5.5}$$

对于 $n \geq 1$。必要时取一个子序列，我们可以假设，对于某个 $x_0 \in \Lambda$，$x_n \to x_0$。于是，由 (5.5) 得，对于充分大的 n，$y_n \notin \phi\big((-\varepsilon/2,\ \varepsilon/2)\ x_0\big)$。这与充分大的 n 时的 (5.4) 矛盾。□

下面的命题是本节的主要结果，其证明将在引理 5.3 的证明之后给出。该命题表明，当 Λ 渐近稳定时，它有一个邻域，在其中，不仅任何跳跃充分小的正向伪轨道都会留在该邻域内，而且每个邻近点的正向轨道也会以 ε_0-标准跟踪它。

命题 5.2. 设 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_s(\phi)$ (分别为 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_u(\phi)$)。则存在 Λ 的一个邻域 $U_\Lambda \subset B(\varepsilon_0, \Lambda)$ 以及 $d_\Lambda, r_\Lambda > 0$，使得若 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_\Lambda)$ 满足 $\xi(t_0) \in U_\Lambda$，其中某个 $t_0 \in \mathbb{R}$，则以下性质成立：

(a) $\xi(t) \in B(\varepsilon_0/2, \Lambda)$ 对所有 $t \geq t_0$ (分别地，$t \leq t_0$)。(b) 对于所有 $x \in B(r_\Lambda, \xi(t_0))$，存在 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$ 满足 $h(0) = 0$，使得

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \phi(h(t-t_0), x)\big) < \varepsilon_0, \quad t \geq t_0 \ (resp.\ t \leq t_0).$$

为了证明命题 5.2，我们需要以下引理。该引理指出，渐近稳定闭轨道附近的每条正向轨道，都可由一条足够接近的正向轨道进行标准跟踪。

引理 5.3. 设 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_s(\phi)$ (分别地，$\Lambda \in \mathrm{Clos}_u(\phi)$)。那么存在 $r > 0$，使得若 $x_0 \in \Lambda$ 且 $x_1 \in B(r, x_0)$，则

$$\mathrm{dist}\big(\phi(t,x_0),\, \phi(g(t),x_1)\big) \leq \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad t \geq 0 \ (resp.\ t \leq 0)$$

对于某个 $g \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0/4)$ 及 $h(0) = 0$。

证明。不失一般性，假设 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_s(\phi)$，因为 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_u(\phi)$ 的情形类似。令 $r_0 \in (0, \varepsilon_0/2)$ 为断言 2 给出的常数。将 ε 替换为最小值 $\{\varepsilon_0/8, r_0/2\}$，并应用引理 4.2；令 $\varepsilon_0' \in (0, r_0)$ 为命题针对 $\varepsilon =$ 最小值$\{\varepsilon_0/8, r_0/2\}$ 给出的常数。我们可以取$r \in (0, r_0/2)$，使得每个 $\xi \in \mathrm{Pt}(r)$ 都是 ε_0'-定向跟踪的，并且

$$\mathrm{Orb}^+(x) \subset B(\varepsilon_0/8, \Lambda)$$

对所有的 $x \in B(r, \Lambda)$，因为 Λ 是渐近稳定的。对于每个 $x_0 \in \Lambda$ 和 $x_1 \in B(r, x_0)$，令

$$\xi(t) = \begin{cases} \phi(t, x_0), & t < 0, \\ \phi(t, x_1), & t \geq 0. \end{cases}$$

由于 $\xi \in \mathrm{Pt}(r)$，存在 $h \in \mathrm{Rep}$，使得 $h(0) = 0$ 且 $x_1' \in M$ 满足

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \phi(h(t), x_1')\big) < \varepsilon_0', \quad t \in \mathbb{R}.$$

根据 r的选取，

$$\xi(t) \in B(\varepsilon_0/8, \Lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

这一事实与 (4.2) 使我们能够应用引理 4.2。因此，我们有

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \phi(g(t), x_1')\big) < \min\{\varepsilon_0/8, r_0/2\}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

对于某个 $g \in \mathrm{Rep}$(最小值$\{\varepsilon_0/8, r_0/2\}$)，其中 $g(0) = 0$。这一不等式与 (5.6) 蕴含

$$\mathrm{Orb}(x_1') \subset B(\varepsilon_0/4, \Lambda).$$

因此，由 (4.1)，我们有 $\alpha(x_1') = \omega(x_1') = \Lambda$。然后，引理 2.7 表明 $x_1' \in \Lambda$。由于 (5.7) 蕴含

$$\mathrm{dist}\big(x_1',\, x_0\big) \leq \mathrm{dist}\big(x_1',\, x_1\big) + \mathrm{dist}\big(x_1,\, x_0\big) < r_0/2 + r < r_0,$$

我们有，$x_1' \in \Lambda \cap B(r_0, x_0)$。因此，由断言 2 和 (5.7)，

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}\big(\phi(t, x_0),\, \phi(g^{-1}(t), x_1)\big) &\leq \mathrm{dist}\big(\phi(t, x_0),\, \phi(t, x_1')\big) \\ &\quad + \mathrm{dist}\big(\phi(t, x_1'),\, \phi(g^{-1}(t), x_1)\big) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{8} + \mathrm{dist}\big(\phi(g(g^{-1}(t)), x_1'),\, \xi(g^{-1}(t))\big) \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{8} + \frac{\varepsilon_0}{8} = \frac{\varepsilon_0}{4} \end{aligned}$$

对所有 $t \geq 0$ 都成立。结合这一点与 $g^{-1} \in$Rep($\varepsilon_0/4$)，证明完毕。 □

现在，我们来证明命题 5.2。

命题 5.2 的证明。下面证明 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_s(\phi)$ 时的命题，因为 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_u(\phi)$ 的情形可以类似地证明。设 $r_0, r > 0$ 分别为断言 2 和引理 5.3 给出的正数。将 ε 替换为 $\min\{\varepsilon_0/4, r/2\}$，应用引理 4.2，并设 $\varepsilon' \in (0, r_0)$ 为命题针对 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0/4, r/2\}$ 给出的常数。设 d_Λ 使得每个 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_\Lambda)$ 都是ε'-定向跟踪的。令 $r_\Lambda = r/2$ 并

$$U_\Lambda = B(r/2, \Lambda). \tag{5.8}$$

引理 4.3 意味着，必要时缩小 d_Λ 和 U_Λ，我们可以假设：若 $\xi \in$Pt(d_Λ) 满足 $\xi(t_0) \in U_\Lambda$，其中某个 $t_0 \in \mathbb{R}$，则

$$\xi(t) \in B(\varepsilon_0/2, \Lambda) \tag{5.9}$$

对所有 $t \geq t_0$ 均成立，从而证明了（a）。至于（b）的证明，与假设中一样，设 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_\Lambda)$ 满足 $\xi(t_0) \in U_\Lambda$，其中某个 $t_0 \in \mathbb{R}$。令 $x_1 \in B(r_\Lambda,\ \xi(t_0))$。由（5.8），我们可以选取满足 $\xi(t_0) \in B(r/2,\ x_0)$ 的 $x_0 \in \Lambda$。另一方面，根据 d_Λ 的选取，存在 x_2 和 $h \in \mathrm{Rep}$，使得 $h(0) = 0$

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t+t_0),\, \phi(h(t), x_2)\big) < \varepsilon', \quad t \in \mathbb{R}.$$

由于 $\varepsilon' < \varepsilon_0/2$，结合 (5.9) 和 (4.2)，我们可以再次使用引理 4.2。于是有

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t+t_0),\, \phi(g(t), x_2)\big) < \min\{\varepsilon_0/4, r/2\}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.10}$$

对某个 $g \in \mathrm{Rep}(\min\{\varepsilon_0/4, r/2\})$，满足 $g(0) = 0$。现在分别对 x_1 和x_2 应用引理 5.3，可得 $h_1,\ h_2 \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0/4)$，满足 $h_1(0) = h_2(0) = 0$，使得

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}\big(\phi(t, x_0),\, \phi(h_1(t), x_1)\big) &< \varepsilon_0/4, \quad t \geq 0,\\
\mathrm{dist}\big(\phi(t, x_0),\, \phi(h_2(t), x_2)\big) &< \varepsilon_0/4, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

于是这些不等式和 (5.10) 表明，对所有 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}\big(\xi(t+t_0), \phi(h_1 \circ h_2^{-1} \circ g(t), x_1)\big)\\
&\qquad \leq \mathrm{dist}\big(\xi(t+t_0),\, \phi(g(t), x_2)\big)\\
&\qquad + \mathrm{dist}\big(\phi(g(t), x_2),\, \phi(h_2^{-1} \circ g(t), x_0)\big)\\
&\qquad + \mathrm{dist}\big(\phi(h_2^{-1} \circ g(t), x_0),\, \phi(h_1 \circ h_2^{-1} \circ g(t), x_1)\big)\\
&\qquad < \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{3\varepsilon_0}{4}.
\end{aligned}$$

当 $t \neq s$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h_1 \circ h_2^{-1} \circ g(t) - h_1 \circ h_2^{-1} \circ g(s)}{t-s}\right| &= \left|\frac{h_1 \circ h_2^{-1} \circ g(t) - h_1 \circ h_2^{-1} \circ g(s)}{h_2^{-1} \circ g(t) - h_2^{-1} \circ g(s)}\right|\\
&\quad \cdot \left|\frac{h_2^{-1} \circ g(t) - h_2^{-1} \circ g(s)}{g(t) - g(s)}\right|\\
&\quad \cdot \left|\frac{g(t) - g(s)}{t-s}\right|.
\end{aligned}$$

由此以及 $\varepsilon_0 < 4/5$ 可知，对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
1 - \varepsilon_0 &< \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4}\right)\\
&< \left|\frac{h_2 \circ h_1^{-1} \circ g(t) - h_2 \circ h_1^{-1} \circ g(s)}{t-s}\right|\\
&< \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{4}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{4}\right) < 1 + \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

由此可得 $h_1 \circ h_2^{-1} \circ g \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，命题 5.2 的证明至此完成。

6. Neighborhoods of Singularities

本节中，我们在奇点附近构造开集，以研究伪轨道的行为（见图 3）。

令 $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$。取 $D \subset B(\varepsilon_0/2,\ p)$ 的一个邻域，使其在 $\mathbb{R}^2$ 中同胚于一个闭圆盘。于是 ∂D 是一条围绕

p。若 $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi)$，取 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in D$，使得与 ∂D 相关的四个双曲扇区由 p 的基本轨道确定：

$$\mathrm{Orb}^+(\phi(-1,x_i)) \text{ and } \mathrm{Orb}^-(\phi(1,y_j))$$

对于 $i,\ j \in \{1,2\}$。同样地，如果 $p \in \mathrm{Sing}_2(\phi)$，取 $x_1,\ y_1 \in D$，使得与 ∂D 的 p 相关联的两个双曲扇区由基本轨道确定

$$\mathrm{Orb}^+(\phi(-1,x_1)) \text{ and } \mathrm{Orb}^-(\phi(1,y_1)).$$

定义

$$G^s(p) = \begin{cases} \{x_1, x_2\}, & p \in \mathrm{Sing}_4(\phi), \\ \{x_1\}, & p \in \mathrm{Sing}_2(\phi) \end{cases}$$

and

$$G^u(p) = \begin{cases} \{y_1, y_2\}, & p \in \mathrm{Sing}_4(\phi), \\ \{y_1\}, & p \in \mathrm{Sing}_2(\phi). \end{cases}$$

下面的命题断言，$W^s(p)$ 中一点的 α-极限集 $\setminus \{p\}$

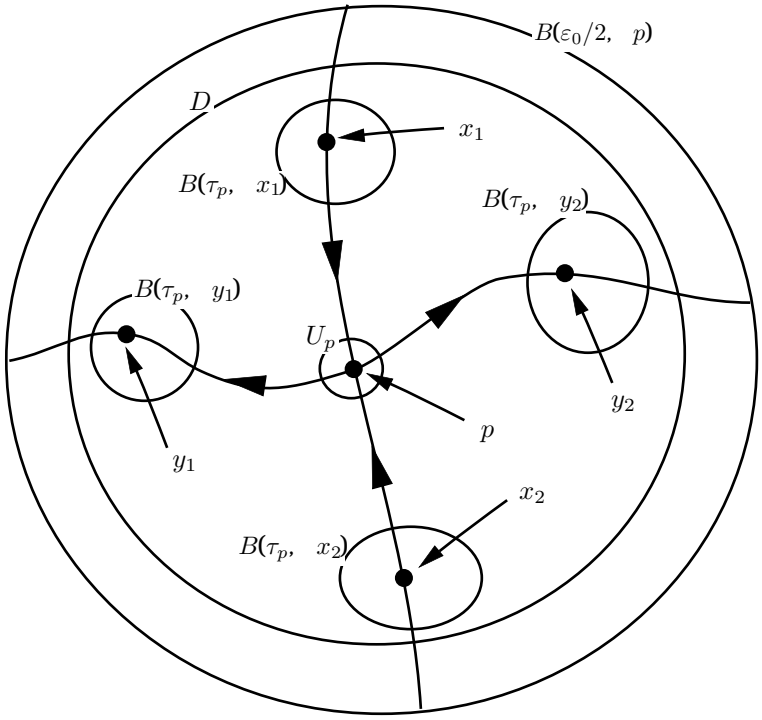


图 3

或者，点在 $W^u(p) \setminus \{p\}$ for $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$ 中的 ω-极限集表现出简单的动力学。更确切地说，下面的命题表明不存在鞍连接。

命题 6.1. 设 $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$。若 $z_0 \in W^s(p) \setminus \{p\}$，(分别地，$z_0 \in W^u(p) \setminus \{p\}$)，则 $\alpha(z_0)$ (分别地，$\omega(z_0)$) 是反向渐近稳定(分别地，渐近稳定)临界元。

证明。假设 $z_0 \in W^s(p) \setminus \{p\}$。令 Λ_0 为包含$\alpha(z_0)$的临界元。那么我们有，Λ_0 不是渐近稳定的临界元。反证法假设 $\Lambda_0 \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$（见定理1.1和引理 5.1）。令

$$d_1 \in (0, \inf\{L_0(\Lambda_0) - L_0(\Lambda); \Lambda \longrightarrow \Lambda_0\}).$$

注意，对于所有满足 $\Lambda \longrightarrow \Lambda_0$ 的 Λ，都有 $L_0(\Lambda_0) > L_0(\Lambda)$（见引理 2.6）。如有必要，可进一步缩小$d_1$，从而取 $G^u(p)$的一个邻域 $N^u(p)$，使得对于所有 $y \in N^u(p)$，都有$L_0(y) > L_0(p) + d_1/2$。于是，由命题 2.4，我们可以取一个嵌入闭区间 Σ_0，使其满足命题 2.4 中的条件，且$x_0 = \phi(1, z_0)$。由引理 3.3，我们可以假设

$$\mathrm{Orb}^+(x) \cap N^u(p) \neq \emptyset \tag{6.1}$$

对所有 $x \in \Sigma_0 \setminus \{\phi(1, z_0)\}$。取足够小的 $\varepsilon_1 > 0$，使得

$$|L_0(x) - L_0(y)| \leq d_1/2 \tag{6.2}$$

对所有 $x, y \in M$，满足 $\mathrm{dist}(x, y) < \varepsilon_1$，并且

$$B(\varepsilon_1, z_0) \subset \{\phi(t, x); -2 < t < 0, x \in \Sigma_0\}.$$

由于 $\phi \in \mathrm{OrientSh}(M)$，存在 $d > 0$，使得每个 $\xi \in \mathrm{Pt}(d)$ 都是 ε_1-定向跟踪的。取 $z_1 \in W^s(\Lambda_0) \setminus \Lambda_0$，并定义

$$\xi(t) = \begin{cases} \phi(t, z_0), & t \geq -T_d, \\ \phi(t + 2T_0, z_1), & t < -T_d \end{cases}$$

对于某个 $T_d > 0$。那么当 T_d 足够大时，$\xi \in \mathrm{Ps}(d)$。因此存在 $h \in \mathrm{Rep}$，使得 $h(0) = 0$，且 $w_0 \in M$，满足

$$\mathrm{dist}(\xi(t), \phi(h(t), w_0)) < \varepsilon_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

特别地，(6.2) 蕴含

$$|L_0(\xi(t)) - L_0(\phi(h(t), y_0))| \leq d_1/2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

由于 $w_0 \in B(\varepsilon_1, z_0)$，$\varepsilon_1$ 的选取意味着，对于某个 $s \in [0, 2]$，有 $\phi(s, w_0) \in \Sigma_0$。现在假设 $\phi(s, w_0) \neq z_0$。那么，根据 (6.1)，我们可以取满足 $\phi(h(t') w_0) \in N^u(p)$ 的 $t' \geq 0$，由此可知

$$L_0(\phi(h(t'), w_0)) > L_0(p) + d_1/2$$

根据 $N^u(p)$ 的选取。另一方面，显然

$$L_0(p) = \sup\{L_0(\phi(t, z_0)); t \in \mathbb{R}\} > L_0(\phi(t', z_0)) = L_0(\xi(t')),$$

这与 $t = t'$ 下的不等式 (6.3) 矛盾。此矛盾给出 $\phi(s, w_0) = z_0$。由此以及 (6.3) 可知

$$\begin{aligned} L_0(\Lambda_0) &= \inf\{L_0(\phi(t, z_0)); t \in \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{L_0(\phi(t, w_0)); t \in \mathbb{R}\} \\ &\leq \inf\{L_0(\phi(t, z_1)); t \in \mathbb{R}\} + d_1/2, \end{aligned}$$

这与 $z_1 \in W^s(\Lambda_0) \setminus \Lambda_0$ 以及 d_1 的选取相矛盾。

ω-极限集的证明类似。 □

下面的命题是命题 5.2 的奇点版本。不过，证明要简单得多，因为 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$ 可以是恒等映射。

命题 6.2。设 $p \in \mathrm{Sing}_s(\phi)$（分别为 $p \in \mathrm{Sing}_u(\phi)$）。则存在 $U_p \subset B(\varepsilon_0, p)$ 邻域 p，以及 $d_p, r_p > 0$，使得若 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_p)$ 满足 $\xi(t_0) \in U_p$，对于某个 $t_0 \in \mathbb{R}$，则以下性质成立：

(a) $\xi(t) \in B(\varepsilon_0/2, p)$ 对所有 $t \geq t_0$（（分别对 $t \leq t_0$））均成立。(b) 对于任意 $x \in B(r_p, \xi(t_0))$，

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \phi(t - t_0, x)\big) < \varepsilon_0, \quad t \geq t_0 \ (resp.\ t \leq t_0).$$

证明。只需考虑 $p \in \mathrm{Sing}_s(\phi)$，因为 $p \in \mathrm{Sing}_u(\phi)$ 的情形类似。由引理 4.3 可知，存在 $d > 0$ 以及 p 的一个邻域 V_p，满足以下性质：

- If $\xi \in \mathrm{Ps}(d)$ satisfies $\xi(0) \in V_p$, then $\xi(t) \in B(\varepsilon_0/2, p)$ for $t \geq 0$.

取足够小的 $r_p > 0$，使得 $B(2r_p,\ p) \subset V_p$。令 $U_p = B(r_p,\ p)$，并取满足 $\mathrm{Pt}(d_p) \subset \mathrm{Ps}(d)$ 的 $d_p > 0$。根据假设，我们有 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_p)$，其中 $\xi(t_0) \in U_p$，对某个$t_0 \in \mathbb{R}$成立。由于 $U_p \subset V_p$，V_p 的选择蕴含性质（a）。至于性质（b），根据 r_p的选择，我们有 $B(r_p,\ \xi(t_0)) \subset B(2r_p,\ p) \subset V_p$。因此，将上述性质使用两次（注意 $t \mapsto \phi(t,\ x)$ 是一条 d- 伪轨道），可得

$$\mathrm{dist}\big(\phi(t - t_0, x),\, \xi(t)\big) < \mathrm{dist}\big(\phi(t - t_0, x),\, p\big) + \mathrm{dist}\big(p,\, \xi(t)\big) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0,$$

从而证明性质（b）。 □

对于每个 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_s(\phi) \cup \mathrm{Clos}_u(\phi) \cup \mathrm{Sing}_s(\phi) \cup \mathrm{Sing}_u(\phi)$，固定一个包含 Λ 的邻域 U_Λ，该邻域由命题 5.2 或命题 6.2 给出。在这些命题中，我们还给出了常数 d_Λ，$r_\Lambda > 0$。接着令

$$d_0 = \min\{d_\Lambda; \Lambda \in \mathrm{Clos}_s(\phi) \cup \mathrm{Clos}_u(\phi) \cup \mathrm{Sing}_s(\phi) \cup \mathrm{Sing}_u(\phi)\} \tag{6.7}$$

and

$$r_0 = \min\{r_\Lambda; \Lambda \in \mathrm{Clos}_s(\phi) \cup \mathrm{Clos}_u(\phi) \cup \mathrm{Sing}_s(\phi) \cup \mathrm{Sing}_u(\phi)\}. \tag{6.8}$$

下面的引理声称，任何包含一点位于 W^s（p）基本域内的向后（分别为向前）伪轨道，只要满足 $p \in \mathrm{Sing}_4$（ϕ）$\cup \mathrm{Sing}_2$（ϕ），就能沿着该向后（分别为向前）伪轨道进行 ε_0-跟踪。

引理 6.3. 令 $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$。存在满足以下性质的 $d_p, \tau_p > 0$：

- 如果 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_p)$ 且 $x_0 \in M$ 满足 $\xi(t_0)\ x_0 \in B(\tau_p, x)$，其中某个 $t_0 \in \mathbb{R}$ 以及$x \in G^s(p)$（（分别为 $x \in G^u(p)$））， 那么存在满足 $h(0) = 0$ 的 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$， 使得

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t + t_0),\, \phi(h(t), x_0)\big) < \varepsilon_0, \quad t \leq 0 \ (resp.\ t \geq 0)\ . \tag{6.9}$$

证明。设 $x \in G^s(p)$。那么命题 6.1 表明 $\alpha(x) \in \mathrm{Clos}_u(\phi) \cup \mathrm{Sing}_u(\phi)$。取满足 $\phi(-T,\ x) \in U_{\alpha(x)}$的 $T > 0$。然后选取 $d_x \in (0, d_0)$ 和 $\tau_x > 0$，使得若 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_x)$ 满足 $\xi(t_0) \in B(\tau_x, x)$ 且 $y \in B(\tau_x, x)$，则

$$\xi(t_0 - T) \in U_{\alpha(x)} \tag{6.10}$$

and

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t_0 - t),\, \phi(-t, y)\big) < \min\{\varepsilon_0, r_{\alpha(x)}\}, \quad t \in [0, T]. \tag{6.11}$$

假设 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_x)$ 且 x_0 满足 $\xi(t_0)\ x_0 \in B(\tau_x, x)$。由 (6.10) 和 (6.11)，命题 5.2 和 6.2 表明存在 $g \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，使得 $g(0) = 0$，从而

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t+t_0-T),\, \phi(g(t), \phi(-T, x_0))\big) < \varepsilon_0, \quad t \le 0. \tag{6.12}$$

定义 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$ 为

$$h(t) = \begin{cases} g(t+T) - T, & t \le -T, \\ t, & t \ge -T. \end{cases}$$

于是，由 (6.11) 得

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t+t_0),\, \phi(h(t), x_0)\big) < \varepsilon_0, \quad t \in [-T, 0].$$

此不等式与 (6.12) 推出 (6.9)。类似地，对所有 $y \in G^s(p) \cup G^u(p)$，我们可以选取 d_y 和 τ_y。在有限集合 $G^s(p) \cup G^u(p)$ 上取最小值，即完成引理的证明。□

对于 $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$ 和 $x \in G^s(p) \cup G^u(p)$，固定一个嵌入闭区间

$$\Sigma_x \subset B(\tau_p, x) \tag{6.13}$$

满足命题 2.4 中关于 $x_0 = x$ 的条件。当 $x \in G^s(p)$ 且 $y \in G^u(p)$ 时，存在一点属于 Σ_x，其正向轨道在任意大的时刻都会与 Σ_y 相交。

引理 6.4. 设 x_i、$y_j \in D$ 是本节开头给出的点。那么存在 $T_p > 0$，使得对所有 i、$j \in \{1, 2\}$ 和 $T \ge T_p$,

$$\phi(t, x) \in D, \quad t \in [0, T]$$

并且对某个 $x \in \Sigma_{x_i}$，有 $\phi(T, x) \in \Sigma_{y_j}$。

证明. 令 $i, j \in \{1, 2\}$，并设 S 为由 $\phi(-1, x_i)$ 和 $\phi(1, y_j)$ 确定的 p 的双曲扇区。根据引理 3.3，必要时缩小 Σ_{x_i}，我们可以假设对任意 $x \in \Sigma_{x_i} \cap S$，存在 $t_x > 0$ 使得

$$\phi(t, x) \in S, \quad t \in [0, t_x]$$

并且 $\phi(t_x, x) \in \Sigma_{y_j}$。由于映射 $\Sigma_{x_i} \cap S \ni x \mapsto t_x \in (0, \infty)$ 连续，且当 $x \to x_i$ 时 $t_x \to \infty$，因此此引理得证。□

以下引理声称，$p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$ 周围的某些动力学行为对于伪轨道仍然保持不变。

引理 6.5。令 $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$，并令 d_p、$\tau_p > 0$ 和 $T_p > 0$ 分别为引理 *6.3* 和 *6.4* 给出的常数。则存在 p 的一个邻域 $U_p \subset D$ 以及满足以下性质的 $d'_p \in (0,\ d_p)$：

(a) 假设 $\xi \in \mathrm{Pt}(d'_p)$ 满足 $\xi(t_0) \in U_p$ 和 $\xi(t_0 + t_1) \notin B(\varepsilon_0/2, p)$，其中某个 $t_1 > 0$。那么存在 $t_2 > T_p/2$ 使得

$$\xi(t_0 + t_2) \in B(\tau_p, G^u(p)) \tag{6.14}$$

and

$$\xi(t_0 + t) \in B(\varepsilon_0/2, p), \quad t \in [0, t_2]. \tag{6.15}$$

(b) 假设 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_p')$ 满足 $\xi(t_0) \in U_p$ 和 $\xi(t_0+t_1) \notin B(\varepsilon_0/2, p)$，其中某个 $t_1 < 0$。那么存在 $t_2 < -T_p/2$ 使得

$$\xi(t_0+t_2) \in B(\tau_p, G^s(p))$$

and

$$\xi(t_0+t) \in B(\varepsilon_0/2, p), \quad t \in [t_2, 0].$$

证明。我们对 $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi)$ 证明此引理；对于 $p \in \mathrm{Sing}_2(\phi)$ 的证明本质上相同。令 $\tau_p > 0$ 为引理 6.3 中给出的常数。取 $\tau_p' \in (0, \tau_p)$，我们可以假设

$$\mathrm{dist}\big(p,\, G^s(p) \cup G^u(p)\big) > \tau_p'.$$

如果 U 的邻域 p 和 $d > 0$ 足够小，

$$\xi(t+t_0) \in B(\varepsilon_0/2, p) \setminus \overline{B(\tau_p', G^s(p) \cup G^u(p))}, \quad t \in [-T_p/2, T_p/2] \tag{6.16}$$

对于所有带有 $\xi(t_0) \in U$（对于某个 $t_0 \in \mathbb{R}$）的 $\xi \in \mathrm{Pt}(d)$。

取 $r_1 \in (0, \tau_p'/2)$，使得 $D \subset B(\varepsilon_0/2 - r_1, p)$。根据引理 3.3，存在 $r_2 \in (0, r_1)$，使得如果 $x \in B(2r_2, p)$ 且 $\mathrm{Orb}^+(x) \not\subset D$，则

$$\phi(t, x) \in D, \quad t \in [0, t_x] \tag{6.17}$$

and

$$\phi(t_x, x) \in B(r_1, G^u(p)) \tag{6.18}$$

对于某个 $t_x > 0$。此外，如有必要，缩小 r_2，我们可以假设 $B(r_2,\ p) \subset U$。取 $d_p' > 0$ 使得每个 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_p')$ 都是 r_2-定向跟踪的。设 $U_p = B(r_2,\ p)$。

如性质 (a) 的假设所述，设 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_p')$ 满足 $\xi(t_0) \in U_p = B(r_2,\ p)$，且 $\xi(t_0+t_1) \notin B(\varepsilon_0/2,\ p)$，其中 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和 $t_1 > 0$。那么存在 $x_0 \in B(2r_2,\ p)$ 和 $h \in \mathrm{Rep}$，使得 $h(0) = 0$，满足

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t_0+t),\, \phi(h(t), x_0)\big) < r_2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.19}$$

其中 $x_0 \in B(2r_2,\ p)$ 可由下式推出

$$\mathrm{dist}(x_0, p) \le \mathrm{dist}\big(x_0,\, \xi(t_0)\big) + \mathrm{dist}\big(\xi(t_0),\, p\big) < r_2 + r_2.$$

此外，不等式

$$\mathrm{dist}\big(p,\, \phi(h(t_1), x_0)\big) \ge \mathrm{dist}\big(p,\, \xi(t_0+t_1)\big) - \mathrm{dist}\big(\xi(t_0+t_1),\, \phi(h(t_1), x_0)\big) > \varepsilon_0/2 - r_2$$

表明 $\phi(h(t_1)\ x_0) \notin D$。因此，对于某个 $t_{x_0} > 0$，(6.17) 和 (6.18) 在 $x = x_0$ 下成立。接着，(6.17)、(6.19) 以及满足 $D \subset B(\varepsilon_0/2 - r_1,\ p) \subset B(\varepsilon_0/2 - r_2,\ p)$ 的 r_1、r_2 的选取，推出 (6.15) 对 $t_2 = h^{-1}(t_{x_0})$ 成立。现在，由 (6.19) 和 (6.18) 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}\big(\xi(t_0 + h^{-1}(t_{x_0})),\, G^u(p)\big) &\le \mathrm{dist}\big(\xi(t_0 + h^{-1}(t_{x_0})),\, \phi(t_{x_0}, x_0)\big) \\ &\quad + \mathrm{dist}\big(\phi(t_{x_0}, x_0),\, G^u(p)\big) \\ &< r_2 + r_1 < 2r_1 < \tau_p' < \tau_p.\end{aligned}$$

由此以及 (6.16) 可知 $h^{-1}(t_{x_0}) > T_p/2$。此外，这意味着 (6.14) 中的 $t_2 = h^{-1}(t_{x_0})$。性质 (b) 的证明类似。□

7. Proof of Proposition 4.1

本节中，我们将通过证明第4节中的命题 4.1 来完成定理 1.2 的证明。我们需要引理 4.2、命题 5.2，以及第6节中的两个命题和三个引理。为了稍后将引理 4.2 与 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 一起应用，令 $\varepsilon_0' > 0$为命题中对应于 ε' 的常数。令 d_0 和 d_p' 分别为 (6.7) 和引理 6.5 给出的常数，并取

$$d_1 < \min\{d_0, d_p'; p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)\}$$

从而每个 $\xi \in$Pt(d_1) 都是 ε_0'定向跟踪的。令

$$U = \bigcup_{\Lambda \in \mathrm{Crit}(\phi)} U_\Lambda,$$

其中， U_Λ 是命题 5.2、6.2 以及引理 6.5 中给出的 Λ 邻域。

由引理 2.8 很容易看出，下面的断言是其直接推论。

断言 3。 存在 $R_0 > 0$ 和 $d_2 \in (0, d_1)$，使得如果 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_2)$ 满足

$$\xi(t) \notin U, \quad t \in (0, \ell),$$

那么 $\ell < R_0$。

在此断言中，如有必要缩小 $d_2 > 0$，我们可以假设对于所有$\xi \in$Pt(d_2) 和 $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t_0 + t),\, \phi(t, \xi(t_0))\big) < \min\{\varepsilon_0, r_0\}, \quad t \in [0, R_0], \tag{7.1}$$

其中 ε_0 和 r_0 在 (4.1) 和 (6.8) 中给出。

以下命题的假设用于将 $\xi \in$Pt(d_2) 分类为若干种情况。

命题 7.1。 假设 $\xi(t_0) \in U_p$ 对某个 $p \in \mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)$ 成立。如果

$$\sup\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} = \infty \ (\textit{resp.}\ \inf\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} = -\infty),$$

那么 $\xi(t) \in B(\varepsilon_0/2, p)$ 对所有 $t \geq t_0$ (分别 $t \leq t_0$) 都成立。

证明。 我们考虑前一种情形。反设存在 $t_1 > t_0$，使得 $\xi(t_1) \notin B(\varepsilon_0/2,\ p)$。则由引理 6.5 可知，对某个 $t_2 > T_p/2$，有 $\xi(t_0 + t_2) \in B(\tau_p,\ G^u(p))$。于是，关于渐近稳定临界元的命题 6.1 以及关于 $t \geq 0$ 的引理 6.3 表明，对某个渐近稳定临界元 Λ 和充分大的 t，有 $\xi(t) \in B(3\varepsilon_0/2,\ \Lambda)$，这与我们的假设矛盾。后一种情形的证明类似。□

令 $\xi \in Pt(d_0)$，并定义

$$S(\xi) = \{\Lambda \in \mathrm{Crit}(\phi); \xi(t) \in U_\Lambda \text{ for some } t \in \mathbb{R}\}.$$

若对某个 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和某个渐近稳定临界元 Λ，有 $\xi(t_0) \in U_\Lambda$，则由命题 6.2 和 5.2 可知，对所有 $t \geq t_0$，都有 $\xi(t) \in B(\varepsilon_0,\ \Lambda)$。因此，$S(\xi)$ 至多包含一个渐近稳定临界元。类似地， $S(\xi)$ 至多包含一个反向渐近稳定临界元。因此，只需考虑以下情形:

(C1) $S(\xi) = \{\Lambda\}$ 满足 $\Lambda \in \mathrm{Sing}_s(\phi) \cup \mathrm{Clos}_s(\phi)$。**(C2)** $S(\xi) = \{\Lambda\}$ 满足 $\Lambda \in \mathrm{Sing}_u(\phi) \cup \mathrm{Clos}_u(\phi)$。**(C3)** $S(\xi) = \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ 满足 $\Lambda_1 \in \mathrm{Sing}_s(\phi) \cup \mathrm{Clos}_s(\phi)$, 且满足 $\Lambda_2 \in \mathrm{Sing}_u(\phi) \cup \mathrm{Clos}_u(\phi)$。

(C4) 存在 $p \in (\mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)) \cap S(\xi)$，使得

$$\inf\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} = -\infty \text{ and } \sup\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} = \infty.$$

(C5) 存在 $p \in (\mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)) \cap S(\xi)$，使得

$$\inf\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} > -\infty \text{ and } \sup\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} = \infty.$$

(C6) 存在 $p \in (\mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)) \cap S(\xi)$，使得

$$\inf\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} = -\infty \text{ and } \sup\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} < \infty.$$

(C7) 存在 $p \in (\mathrm{Sing}_4(\phi) \cup \mathrm{Sing}_2(\phi)) \cap S(\xi)$，使得

$$\inf\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} > -\infty \text{ and } \sup\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} < \infty.$$

为证明定理 1.2，只需证明在每种情形下，任意一个 $\xi \in \mathrm{Pt}(d_2)$ 都是 ε_0-标准跟踪的。现在我们来证明这七种情形。

从 (C1) 到 (C7) 各情形的证明.

(C1): 由断言 3 可知，$\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_\Lambda\}$ 没有下界。因此，由命题 6.2 和 5.2,

$$\xi(t) \in B(\varepsilon_0/2, \Lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

事实上，否则存在 $t' \in \mathbb{R}$ 使得 $\xi(t') \notin B(\varepsilon_0/2, \Lambda)$，但由于没有下界，我们可以找到某个 $t < t'$ 使得 $\xi(t) \in U_\Lambda$。由这些命题可推出$\xi(t') \in B(\varepsilon_0/2, \Lambda)$，这与上述结论矛盾。由 (7.2) 可知，当 $\Lambda \in \mathrm{Sing}_s(\phi)$ 时，对所有 $t \in \mathbb{R}$，ξ 都被 $\phi(t, \Lambda)$ ε_0-跟踪。另一方面，当 $\Lambda \in \mathrm{Clos}_s(\phi)$ 时，根据 d_2 的选取，存在 $x_0 \in M$ 和 $h \in \mathrm{Rep}$，使得 $h(0) = 0$，从而

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t), \phi(h(t), x_0)\big) < \varepsilon_0', \quad t \in \mathbb{R}.$$

然后，由 (7.2) 和 (4.2)，我们可以对 $[nT_0,(n+1)T_0]$, $n \in \mathbb{Z}$ 应用引理 4.2（在命题中将 $[0, T_0]$ 视为.....），从而证明 ξ 是 ε_0-标准跟踪的。

(C2): 此情形的证明与情形 **(C1)** 的证明类似。

(C3): 由断言 3，我们可以选取 t_1，$t_2 \in \mathbb{R}$，使得

$$\xi(t_1) \in U_{\Lambda_1}, \quad \xi(t_2) \in U_{\Lambda_2}$$

以及 $t_1 - t_2 \in (0, R_0)$。由 (7.1)，我们有

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t_2 + t), \phi(t, \xi(t_2))\big) < \min\{\varepsilon_0, r_0\}, \quad t \in [0, R_0], \tag{7.3}$$

这意味着

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t_1), \phi(t_1 - t_2, \xi(t_2))\big) < r_0.$$

因此，命题 6.2 和 5.2(b) 表明，存在 $h_1, h_2 \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，满足$h_1(0) = h_2(0) = 0$，使得

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t), \phi(h_1(t - t_1), \phi(t_1 - t_2, \xi(t_2)))\big) < \varepsilon_0, \quad t \geq t_1 \tag{7.4}$$

and

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t), \phi(h_2(t - t_2), \xi(t_2))\big) < \varepsilon_0, \quad t \leq t_2. \tag{7.5}$$

定义 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，其中 $h(t_2) = 0$ 定义为

$$h(t) = \begin{cases} h_1(t - t_1) + t_1 - t_2, & t \geq t_1, \\ t - t_2, & t \in [t_2, t_1], \\ h_2(t - t_2), & t \leq t_2. \end{cases}$$

由 (7.3)、(7.4) 和 (7.5) 可得

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t),\, \phi(h(t), \xi(t_2))\big) < \varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(C4)： 根据命题 7.1，$\xi(t) \in B(\varepsilon_0/2,\ p)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。因此，ξ 被 ϕ $(t,\ p)$ ε_0-影随于 $t \in \mathbb{R}$。

(C5)： 假设 $\xi(t_0) \in U_p$。由断言 3 和 $\inf\{t \in \mathbb{R}; \xi(t) \in U_p\} > -\infty$，可找到 $t_1 < t_0$，使得 $\xi(t_1) \notin B(\varepsilon_0/2,\ p)$。于是，引理 6.5 (b) 表明存在 $t_2 < -T_p/2$，使得

$$\xi(t_0 + t_2) \in B(\tau_p, G^s(p))$$

and

$$\xi(t_0 + t) \in B(\varepsilon_0/2, p), \quad t \in [t_2, 0]. \tag{7.6}$$

设 $x_0 \in G^s(p)$，且 $\xi(t_0 + t_2) \in B(\tau_p,\ x_0)$。那么，根据引理 6.3，存在$h_0 \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，使得 $h_0(0) = 0$

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t + t_0 + t_2),\, \phi(h_0(t), x_0)\big) < \varepsilon_0, \quad t \leq 0. \tag{7.7}$$

定义 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，其中 $h(0) = 0$ 为

$$h(t) = \begin{cases} h_0(t), & t \leq 0, \\ t, & t \geq 0. \end{cases}$$

于是，命题 7.1、(7.6) 和 (7.7) 推出

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t + t_0 + t_2),\, \phi(h(t), x_0)\big) < \varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(C6)： 这一情形的证明与情形 **(C5)** 的证明类似。

(C7)： 假设对某个 $t_0 \in \mathbb{R}$，$\xi(t_0) \in U_p$。由命题 7.1 和假设可知，存在 $t_1 < t_0$ 和 $s_1 > t_0$，使得 $\xi(t_1)\ \xi(s_1) \notin B(\varepsilon_0/2, p)$。于是，引理 6.5 表明存在 $t_2 < -T_p/2$ 和 $s_2 > T_p/2$，使得 $\xi(t_0 + t_2) \in B(\tau_p, G^s(p))$，$\xi(t_0 + s_2) \in B(\tau_p, G^u(p))$，并且

$$\xi(t_0 + t) \in B(\varepsilon_0/2, p), \quad t \in [t_2, s_2]. \tag{7.8}$$

设 $x_0 \in G^s(p)$ 和 $y_0 \in G^u(p)$ 满足 $\xi(t_0 + t_2) \in B(\tau_p, x_0)$ 和 $\xi(t_0 + s_2) \in B(\tau_p, y_0)$，分别成立。由引理 6.4，可在 Σ_{x_0} 中找到满足以下条件的 x_1

$$\phi(t, x_1) \in B \subset B(\varepsilon_0/2, p), \quad t \in [0, s_2 - t_2] \tag{7.9}$$

且 $\phi(s_2 - t_2,\ x_1) \in \Sigma_{y_0}$，其中 Σ_{x_0} 和 Σ_{y_0} 是由 (6.13) 给出的嵌入闭区间。由引理 6.3 可知，存在满足 $h_0(0) = 0$ 的 $h_0 \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，使得

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t + t_0 + t_2),\, \phi(h_0(t), x_1)\big) < \varepsilon_0, \quad t \leq 0, \tag{7.10}$$

且存在满足 $g_0(0) = 0$ 的 $g_0 \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，使得

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t + t_0 + s_2),\, \phi(g_0(t), \phi(s_2 - t_2, x_1))\big) < \varepsilon_0, \quad t \geq 0. \tag{7.11}$$

定义 $h \in \mathrm{Rep}(\varepsilon_0)$，其中 $h(0) = 0$ 为

$$h(t) = \begin{cases} h_0(t), & t \leq 0, \\ t, & t \in [0, s_2 - t_2], \\ g_0(t - s_2 + t_2) + s_2 - t_2, & t \geq s_2 - t_2. \end{cases}$$

因此，由 (7.10)、(7.11)、(7.8) 和 (7.9)，我们得到

$$\mathrm{dist}\big(\xi(t + t_0 + t_2),\, \phi(h(t), x_1)\big) < \varepsilon_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

证明至此完成。

ACKNOWLEDGEMENTS

作者谨向我的导师 S. Hayashi 致以谢意，感谢他提出的建设性建议和持续支持。

References

1. Aranson S. Kh., Belitsky G. R., Zhuzhoma E. V.《曲面上动力系统定性理论导论》。美国数学学会，1996。2. Bhatia, N. P., Szeg¨o, G. P.《动力系统稳定性理论》。施普林格科学与商业媒体，2002。3. Cairns, S. S.《Jordan-Schoenflies定理的一个初等证明》。 *Proceedings of the American Mathematical Society*, **2.6**, 860-867 (1951)。4. Guti´errez, C. S.《二维流形上的连续流的光滑化与复现》。,.- ( )。5. Hartman, P.《常微分方程》。工业与应用数学学会，2002。6. Komuro, M.《具有伪轨跟踪性质的单参数流》， *MonatMath.*, **98**, 219-253 (1984)。7. Mai, J., Gu, R.《闭曲面上具有伪轨跟踪性质的 C^0 流的条件》。 *Sci. China Ser. A-Math.* **40**, 1166-1175 (1997)。8. Murakami, S.《拓扑流的定向与标准跟踪性质》， *Tokyo J. Ergodic Theory and dynamical systems* **6 1**, 17 44 1986 , , ( )。 *Math.* **46** 2022
9. Pilyugin, S., and Sakai, K.《跟踪与双曲性》。第2193卷。柏林：施普林格，2017。10. Pilyugin, S., and Tikhomirov, S.《利普希茨跟踪蕴含结构稳定性》。 *Nonlinearity***23**(10), 2509-2515 (2010)。11. Robinson, C.《动力系统：稳定性、符号动力系统与混沌》。CRC出版社，1998。12. Robinson, C.《动力系统中的稳定性定理与双曲性》。 *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* **7** 3 425 437, 1977 , ( ), - ( )。13. Tikhomirov, S.《具有定向跟踪性质的向量场的一个例子》， *J. Dyn. control syst.* **21** 643 654 2015 , , - ( )。14. Willard, S.《一般拓扑学》。Courier Corporation，2012。