arXiv:2302.02129v2 [physics.flu-dyn] 1 May 2023

旋转流体中沿轴平移的球体绕流：重新数值考察Maxworthy的实验

Tristan Auregan†、Thomas Bonometti 和 Jacques Magnaudet图卢兹流体力学研究所（IMFT），图卢兹大学、法国国家科学研究中心、法国国家综合理工学院、图卢兹第三大学，法国图卢兹

†现地址：巴黎大学、索邦大学、巴黎文理研究大学、多尺度物理与力学实验室、法国国家科学研究中心、巴黎高等物理化学学院，法国巴黎 F-75005

（收到日期 xx；修订日期 xx；接受日期 xx）

我们计算了一个刚性球体在低黏度流体中沿大型圆柱形容器的轴线匀速平移所诱导的流动。该流体作刚体旋转，而球体受约束，以与未扰动流体相同的角速度自转。数值模拟所覆盖的参数范围与 Maxworthy 的实验相近［《流体力学杂志》，第 40 卷，第 453–479 页（1970年）］。我们描述了流动的主要特征，尤其是物体前后形成的泰勒柱内部特性及惯性波形态，并确定作用于球体上的阻力和力矩。研究发现，在快速旋转和缓慢旋转条件下，力矩变化分别遵循两种截然不同的定律。通过考察控制物体附近轴向涡量分布的主导平衡关系，我们预测了相应的标度律。阻力结果与 Tanzosh & Stone 为无惯性状态提出的半经验定律吻合良好［《流体力学杂志》，第 275 卷，第 225–256 页（1994年）］。研究发现，即使在惯性效应显著的状态下，只要旋转效应也足够强，该定律仍然适用。结果表明，在快速旋转构型中，轴向约束会显著增大阻力；若要使这种影响小到可以忽略，容器长度必须约为球体直径的千倍。本文所报告的数值模拟证实，这种约束效应正是 Maxworthy的实验结果与理论预测之间长期存在差异的根源。

1. 引言

刚性或可变形物体在快速旋转流体中平移所产生的流场，具有引人注目而又微妙的特性；一个多世纪以来，人们对此给予了广泛关注，研究始于 Proudman（1916年）和 Taylor（1917年）的开创性工作。这种构型与分层流体或磁化流体中的流动有相似之处，在颗粒、液滴或气泡于局部旋转流动中沉降或上升的问题中具有实际意义，例如快速旋转悬浮液的动力学，以及两相流中采用的离心分离技术（Ungarish 1993年；Bush、Stone 和 Tanzosh 1994年）。这一研究也与海洋和大气动力学相关（Loper 2001年）；此外，将其与热对流或成分对流结合起来，有助于天体物理学研究地球及快速旋转行星中液态内核的动力学（Bush、Stone 和 Bloxham 1992年；Cheng、Stellmach、Ribeiro、Grannan、King 和 Aurnou 2015年）。

在运动黏度为 ν 、整体以角速度a 旋转的牛顿流体中，赤道半径为a 、以速度 U_∞ 运动的刚性轴对称体所产生的流动扰动

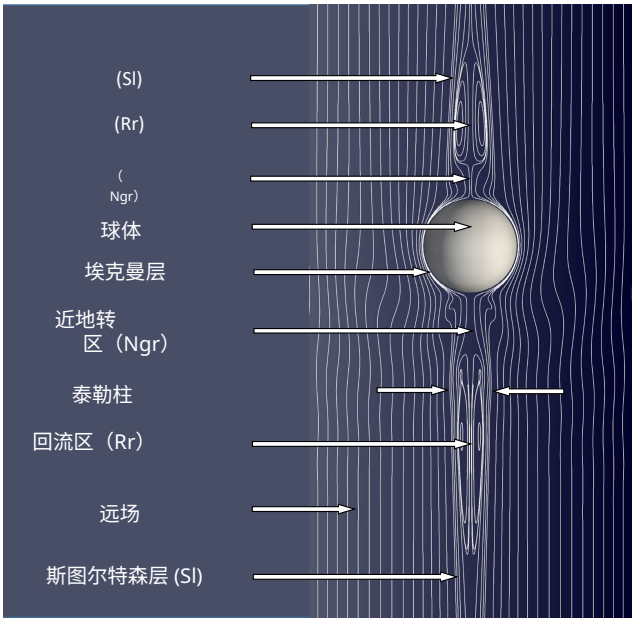

FIGURE 1. 在一个作刚体旋转的大型流体容器中，球体沿轴上升时的定性流动结构。流动是在随球体平移的参考系中观察到的。细白线是在 $\mathcal{R}e = 93$ 和 $\mathcal{T}a = 193$ 条件下通过模拟获得的流线，即 $\mathcal{R}o = 0.48$。

取决于泰勒数 $\mathcal{T}a \equiv \frac{\Omega a^2}{\nu}$ 和罗斯贝数$\mathcal{R}o \equiv \frac{U_\infty}{\Omega a}$（或等价地，雷诺数 $\mathcal{R}e \equiv \frac{U_\infty a}{\nu} = \mathcal{R}o\mathcal{T}a$）——Taylor 开创性地开展了圆柱体或球体在刚体旋转的黏性流体中平移的实验，其中物体沿旋转轴平行方向（Taylor 1922年）或垂直方向（Taylor 1923年）平移。这些实验揭示了细长的再循环流体区域，后来称为泰勒柱。这些区域被限制在一个包围物体的圆柱体内，其母线与旋转轴平行。后来，Maxworthy 在广泛的 $\mathcal{T}a$ 范围内，重复了Taylor 1922年的球体沿旋转轴平移实验，涵盖低雷诺数（$\mathcal{R}e \lesssim 0.5$，Maxworthy 1965年）以及中高雷诺数（$5 \lesssim \mathcal{R}e \lesssim 100$，Maxworthy 1968年；$3 \lesssim \mathcal{R}e \lesssim 300$，Maxworthy 1970年）。他证实了Taylor对流动结构典型特征的观察，并发现流体旋转通常会增大球体所受的阻力；将阻力按斯托克斯阻力归一化后，这一增幅与泰勒数呈线性关系。

图1描绘了泰勒数较大（$\mathcal{T}a = 193$）时相应流动的示意图。在这种情况下，球体赤道两侧不存在前后对称性，因为平流效应较强（$\mathcal{R}e = 93$）。可以观察到球体上游和下游各有一个显著的回流区。目前情况下存在这类回流区，与 Tanzosh & Stone (1994) 和 Vedensky & Ungarish (1994)（后者研究的是圆盘）的预测一致；这些预测指出，当 $\mathcal{T}a \gtrsim 50$ 时会出现这类结构，其轴向范围（以物体半径归一化）近似按 $0.052\mathcal{T}a$增长。第二个显著特征是近地转区，在该区域内，Taylor-Proudman 定理近似成立（Moore & Saffman 1968）。在这个较小的区域中，其无量纲长度为

约为 $0.006\mathcal{T}a$ （Tanzosh & Stone 1994），流体几乎达到刚体旋转，其旋转速率在物体下游快于 Ω ，而在上游则慢于 Ω 。这种近乎均匀的旋涡运动伴随着微弱的塞状轴向流，因此少量流体通量得以通过包围物体的埃克曼边界层，从一个近地转区传递到另一个近地转区经由。最后一个显著的流动特征是斯图尔特森层，它将外部流动与泰勒柱连接起来（泰勒柱是由回流区、近地转区以及上述埃克曼边界层组成的流体区域）。斯图尔特森层具有复杂的内部“夹层”结构，由三个同心亚层构成，其厚度遵循不同的标度律；在该层内，轴向运动强烈，而旋涡速度则沿径向迅速变化（Baker 1967；Moore & Saffman 1969）。只要容器足够长、端壁不会与泰勒柱发生动力学相互作用，该层就是前后泰勒柱交换流体的主要区域。

许多研究尝试刻画刚体旋转对球体所受阻力的影响，研究范围涵盖有限长度和无限长容器。Stewartson（1952年）考察了无黏流体流动和无限长容器中的脉冲式缓慢运动渐近极限。他运用拉普拉斯变换方法，预测阻力 F_D 为

$$\frac{F_D}{F_{St}}=\frac{8}{9\pi}\mathcal{T}a \quad\Leftrightarrow\quad C_D=\frac{32}{3\pi}\mathcal{R}o^{-1}\approx 3.4\mathcal{R}o^{-1} \quad (\mathcal{T}a=\infty,\,\mathcal{R}o\to 0)\,, \tag{1.1}$$

其中， $F_{St}=6\pi\rho\nu aU_\infty$ 表示斯托克斯阻力（ ρ 为流体密度），阻力系数 C_D 则通过关系式 $F_D=\frac{1}{2}C_D\pi a^2\rho U_\infty^2$ 定义。随后，Moore & Saffman（1969年）在假设黏性效应较小但有限的条件下，证实了上述结果。相反，Childress（1964）考察了黏性流动情形，并假设 $\mathcal{R}e\ll\mathcal{T}a^{1/2}\ll 1$。运用匹配渐近展开方法，他得到了

$$\frac{F_D}{F_{St}}=1+\frac{4}{7}\mathcal{T}a^{1/2} \quad\Leftrightarrow\quad C_D=\frac{12}{\mathcal{R}e}+\frac{48}{7}(\mathcal{R}e\mathcal{R}o)^{-1/2} \quad (\mathcal{R}e\ll 1,\mathcal{T}a\ll 1,\,\mathcal{T}a/\mathcal{R}e^2\gg 1)\,. \tag{1.2}$$

有趣的是，Childress 的理论还预测，当 $\mathcal{T}a/\mathcal{R}e^2\lesssim 0.2$ 时，阻力也会小于非旋转流体中的阻力；当 $\mathcal{T}a/\mathcal{R}e^2\approx 0.09$ 时，降幅最大，为 $\approx 5\%$。后来，Weisenborn（1985年）和 Tanzosh & Stone（1994）在仍假设雷诺数可忽略不计的条件下，预测了任意泰勒数对应的阻力。尽管两组研究采用了不同的方法（分别称为“诱导力”法和边界积分法），但在 $\mathcal{T}a=10^4$ 以内，两组结果的差异不超过 0.5%，且都与 Tanzosh & Stone（1994）提出的半经验定律相差不超过 5%，该定律为

$$\frac{F_D}{F_{St}}=1+\frac{4}{7}\mathcal{T}a^{1/2}+\frac{8}{9\pi}\mathcal{T}a \quad\Leftrightarrow\quad C_D=\frac{12}{\mathcal{R}e}+\frac{48}{7}(\mathcal{R}e\mathcal{R}o)^{-1/2}+\frac{32}{3\pi}\mathcal{R}o^{-1} \quad (\mathcal{R}e\ll 1)\,. \tag{1.3}$$

预测式 (1.3) 只是将 (1.1) 和 (1.2) 线性组合而成。Vedensky & Ungarish (1994) 独立地采用一组对偶积分方程，预测了类似条件下圆盘所受的阻力。Moore & Saffman (1968) 在假设黏性效应虽小但有限、且忽略惯性效应的情况下，研究了容器有限长度的影响。考虑一个两端为刚性端面的容器，其半长

H 使得 $1 \ll \mathcal{L} \equiv H/a \ll \mathcal{T}a^{1/2}$，他们证明

$$\frac{F_D}{F_{St}} = \frac{43}{630}\mathcal{T}a^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad C_D = \frac{86}{105}\mathcal{R}o^{-1}\mathcal{T}a^{1/2} \quad (\mathcal{T}a \to \infty, \mathcal{R}o \to 0)\,. \tag{1.4}$$

最近，Kozlov 等人（2023）在 $\mathcal{T}a \in [250;\ 2.5\times10^4]$, $\mathcal{R}o \in [10^{-4};\ 10^{-2}]$ 范围内，对球体在快速旋转的短容器（$\mathcal{L} = 9.4$）中上升进行了实验，并证实了式（1.4）所预测的 $\mathcal{T}a^{3/2}$ 依赖关系。在这种“短容器”极限下，沿两个端壁形成的埃克曼层会与泰勒柱直接相互作用，并承担相当一部分前、后泰勒柱之间的流体输运，使阻力系数取决于黏度（通过泰勒数），这与“长容器”极限形成对比。在后者中，容器纵横比满足 $\mathcal{L} \gg \mathcal{T}a^{1/2}$，其特征是这两个埃克曼层中的径向流极弱，因而不起作用。不过，端壁仍可能通过纯运动学的“阻塞”效应影响泰勒柱的内部结构，从而改变阻力。基于此，Hocking、Moore 和 Walton（1979）考察了有限的比值 $\delta = \mathcal{L}/\mathcal{T}a$（仍处于罗斯贝数可忽略不计的极限），并得出结论：随着 δ 减小，阻力单调增大。例如，以对应于 $\delta \to \infty$ 的预测值（1.1）为归一化基准时，他们发现，位于两端壁正中间的球体所受阻力在 $\delta = 1$ 时约增加 9%，在 $\delta = 1/4$ 时约增加 30%。

Maxworthy（1965）开展的低雷诺数阻力测量（$\mathcal{R}e \lesssim 0.5$、$\mathcal{T}a \in [0.05, 0.7]$）与（1.2）在几个百分点以内吻合。值得注意的是，这些数据还支持 Childress 的预测：当 $\mathcal{T}a/\mathcal{R}e^2$ 足够低时，阻力小于非旋转流体中的阻力。相反，在雷诺数和泰勒数足够大时（$\mathcal{R}e \in [3;\ 300]$，$\mathcal{T}a \in [10;\ 450]$），同一作者后来报告的数据（Maxworthy 1970）遵循标度关系（1.1），但其前因子明显更大。基于对比（1.1）和（1.4），Maxworthy 怀疑差异的根源可能在于其容器的有限长度；根据所使用颗粒的大小，该长度满足 $\mathcal{L} \approx 80$ 或 $\mathcal{L} \approx 120$。因此，他利用补充数据校正了端壁效应，其中一些数据发表于 Maxworthy（1968），是在短得多的容器（$5 \lesssim \mathcal{L} \lesssim 10$）中获得的。基于这一校正，他得出结论，自己的数据可以按以下形式外推至无限长容器

$$C_D = (5.2 \pm 0.1) \times \mathcal{R}o^{-1\pm0.01}\,. \tag{1.5}$$

然而，式（1.5）中的前因子仍比式（1.1）中的大近 50%。这一差异促使人们将式（1.1）扩展到有限长度容器。然而，研究发现相应的修正只能略微缩小这一差异，因此 Hocking 等人（1979）推测，其理论中未考虑的有限-$\mathcal{R}o$ 效应不可忽略。

关于所研究问题最早的模拟，是基于完整的纳维–斯托克斯方程进行的，因此纳入了有限-$\mathcal{R}o$ 效应；这些模拟由 Dennis、Ingham 和 Singh（1982）完成。当时的计算能力有限，所考察的参数范围仅限于 $\mathcal{R}e \leqslant 0.5$ 和 $\mathcal{T}a \leqslant 0.5$。尽管如此，这些模拟仍定量证实了 Maxworthy（1965）关于在 $0 \leqslant \mathcal{T}a \leqslant 0.5$范围内阻力随 $\mathcal{T}a$ 增加而增大的实验发现。Rao 与 Sekhar（1995）考察了宽得多的雷诺数范围（最高达 $\mathcal{R}e = 500$），但只考虑了大于 2 的罗斯贝数。他们观察到，在存在中等旋转效应时，流动结构会发生变化；尤其是当 $\mathcal{R}e \gtrsim 20$ 和 $\mathcal{R}o$ 从 $\mathcal{O}(10)$ 降至 $\mathcal{O}(1)$ 时，球体后方的驻涡会缩小并消失。他们发现，在这一中等-$\mathcal{R}o$、中到高-$\mathcal{R}e$ 的范围内，

旋转效应会降低阻力；Maxworthy（1970）也注意到了这一发现，之后 Sahoo 等人（2021）通过数值模拟再次证实了这一点。Minkov、Ungarish 和 Israeli（2000, 2002）分别研究了圆盘在低-$\mathcal{R}o$ 条件下于短容器和长容器中上升的情形。他们证实，容器的相对高度会显著影响阻力。他们还通过考察（长容器情形下） $\mathcal{R}o \leqslant 0.25$ 且 $\mathcal{T}a \in [100, 200]$的范围，即 $\mathcal{R}e \leqslant 50$，研究了对流项的影响，也就是有限-$\mathcal{R}o$ 修正。他们得出结论，这些效应实际上会降低阻力，从而进一步加大与 Maxworthy 实验数据之间的差异。Wang、Lu 和 Zhuang（2004）针对同一构型进行了三维模拟，研究了球体在有无差异自旋时、 $\mathcal{R}e = 100$ 、250 和 $\mathcal{T}a \in [50, 6.25 \times 10^3]$条件下的情形。他们证实了图1所示的低罗斯贝数下流动结构的典型特征，并考察了控制参数对惯性波模式的影响。不过，他们没有报告任何阻力数值。因此，迄今为止，完整的纳维–斯托克斯模拟仍未能使 Maxworthy（1970）在低-$\mathcal{R}o$ 范围内的实验发现与关于阻力的理论预测（1.1）或（1.3）相吻合。正因如此，Minkov 等人（2002）的结论——“无论如何，关于阻力大小的理论与实验之间的主要差异仍未解决，鉴于目前的结果，这一差异甚至更加令人费解”——至今仍然成立。

这一引人关注却未得到解释的差异，是本研究最初的主要动机。我们采用完全解析的数值模拟，以深入了解这一问题，并进一步探究刚体旋转、黏性效应和平流效应对物体绕流组织结构的影响。假设球体以与未扰动流相同的速率旋转，并确定相应的阻力和力矩，从而评估轴向约束效应可能对流动结构及物体所受载荷产生的影响。我们考察泰勒数 $\mathcal{T}a \in [20, 450]$ 和雷诺数 $\mathcal{R}e \in [2, 300]$，得到范围为 $\mathcal{R}o \in [5 \times 10^{-3}, 10]$的罗斯贝数；这与 Maxworthy于1970年的实验所涵盖的参数范围相对应。§ 2介绍数学问题、数值设置以及与零-$\mathcal{R}o$ 结果的初步比较。§ 3讨论流动结构的典型特征，并将其与以往研究结果进行比较。随后，§ 4分析阻力和力矩随控制参数的变化。§ 5总结本研究的主要结果，并提出未来研究方向。

2. 问题表述与数值设置

2.1. 控制方程与基本假设

我们假设，绕旋转轴的所有流动特性均与方位角位置无关，但局部速度具有非零的方位角分量。我们进一步假设，球体以容器预先设定的角速度旋转，该角速度沿 z 轴方向。当流动相对于球体赤道呈现完美的前后对称性时，这一假设严格成立；在 $\mathcal{R}o = 0$ 极限下即可实现这种对称性。尽管如此，我们还针对本文所关注的整个流动条件范围，补充进行了满足无力矩条件的计算。§4.2 将表明，只要 $\mathcal{R}o \lesssim 1$，从一种条件切换到另一种条件对阻力的影响可以忽略；而在较高的 $\mathcal{R}o$ 下，影响也较小，阻力的相对差异不到 10%。假设流体不可压缩且为牛顿型流体，其密度为 ρ ，运动黏度为 ν，则在随球体旋转并平移的参考系中，连续性方程和纳维–斯托克斯方程写为

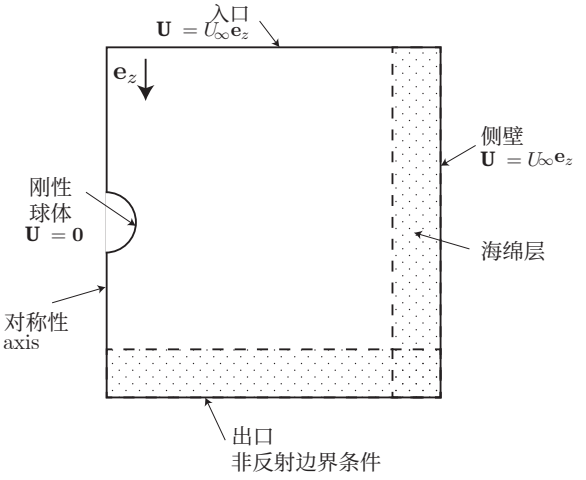

FIGURE 2. 计算域和边界条件示意图（非按比例绘制）。

与球体一起运动时，方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0\,; \quad \partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\rho^{-1} \nabla P + \nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^{\mathrm{T}}) - 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{U}\,, \qquad (2.1)$$

其中$\mathbf{U}$ 为速度场， P为包含离心贡献的修正压力，Ω 为施加的旋转速率，$\mathbf{e}_z$ 为 z方向的单位向量。

2.2. 计算方面

计算采用在IMFT开发的二阶有限体积代码JADIM完成。速度场和压力场的空间离散采用交错网格。式（2.1）的时间积分通过将对流项和科里奥利项的三阶龙格–库塔格式与黏性项的半隐式克兰克–尼科尔森格式相结合来实现。每个时间步结束时，通过投影法满足不可压缩性。完整时间积分格式的精度为二阶（Calmet 与 Magnaudet（ 1997））。

边界条件总结于图2中。在上游边界和侧边界施加均匀速度 $U_\infty \mathbf{e_z}$ 。由于参考系随球体平移和旋转，在球体表面施加无滑移条件$\mathbf{U} = \mathbf{0}$ ；而在流动轴线上，速度分量满足

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{U} = \mathbf{0}\,, \quad \text{and} \quad \mathbf{e}_z \times \nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_z) = \mathbf{0}\,. \qquad (2.2)$$

因此，在轴上只有轴向速度非零，且其法向导数在此处为零。最后，在下游边界采用Magnaudet、Rivero 与 Fabre（1995年）所描述的无反射条件。简言之，在该边界上，切向（法向）速度分量的一阶（第二阶）法向导数设为零，同时压力的二阶交叉导数也设为零。

由于球体轴向运动会产生非零的科里奥利力分量，因此当罗斯贝数足够小时，就会产生惯性波。这些惯性波的波长与 U_∞/Ω 成正比，由球体发出并向下游及外侧传播。因此，它们不会自然地从计算域中排出。为防止波的能量在外边界附近累积，我们添加了一个海绵层，使波逐渐衰减，同时不在计算域内产生任何反射。为此，我们采用瑞利阻尼技术（Slinn 与 Riley

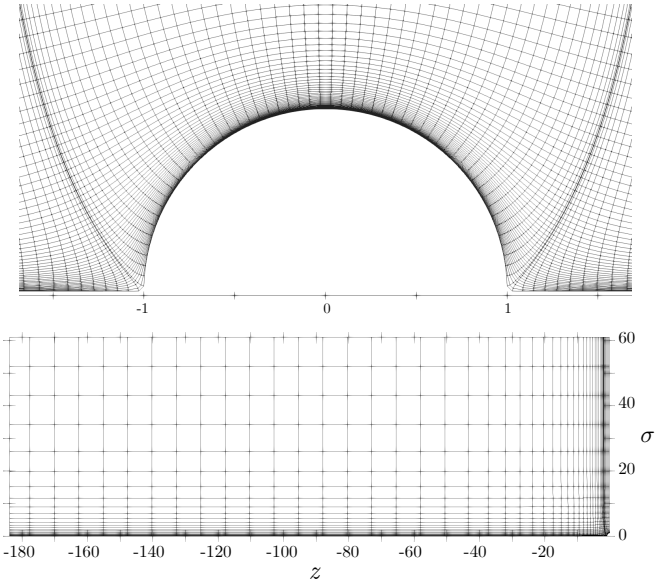

FIGURE 3.计算网格（压力节点位于顶点处）。（a）：球体附近的放大视图；（b）上半计算域 $z \leqslant 0$，其中有 $\mathcal{L} = 180$ 和 $\mathcal{L}_\sigma = 60$（球体位于右下角；为便于观察，每个方向上均移除了三分之二的网格单元）。

1998年），其做法是在该层中用阻尼替代场 $\mathbf{U}$ 替代精确速度场$\mathbf{U}^*$，定义如下

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U} - \alpha\,(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)\,, \tag{2.3}$$

其中，$\mathbf{U}_0$ $\alpha \in [0,1]$ $_0 = U_\infty\ _z$ $\alpha\ \zeta\ =$ $[-6.125\ \zeta/L_{sl}\ ^2]$,是流动在边界附近达到的某个参考速度，而是一个阻尼参数。我们选取$\mathbf{U}$e以及 ( ) exp ( )，其中 L_{sl} 是海绵层的厚度，ζ 是距相关外边界的局部距离。我们选择 L_{sl}，使海绵层中至少包含五个网格单元；研究发现，这足以有效衰减惯性波，同时将数值解不具物理意义的这一特定区域的厚度控制在有限范围内。关于当前代码结合上述海绵层技术所提供解的质量，可参见 Zhang、Mercier 和 Magnaudet（2019年）关于球体在分层流体中沉降时辐射内波的研究。图2展示了计算域示意图，并标明了对各边界所采用的处理方式。

在 JADIM 中，纳维–斯托克斯方程 (2.1) 采用广义正交曲线坐标系表示。这使得程序能够使用多种正交贴体网格，相关讨论见 Magnaudet 等人 (1995)。该参考文献还给出了在这一通用坐标系下表示的控制方程的详细形式。关于该程序采用贴体网格求解球形或椭球体绕流的示例（包括过渡态或不稳定态），可参见 Magnaudet & Mougin (2007) 以及 Auguste & Magnaudet (2018) 的研究。本文遵循 Magnaudet 等人 (1995)，采用一种基于圆柱体势流的流线和等势线构建的正交网格（图 3）。有关该程序在此类网格上所得解的精度，可参见 Magnaudet 等人 (1995)、Legendre & Magnaudet (1998) 以及 Legendre 等人 (2003) 等文献；这些文献中的预测结果涉及球形气泡在各种二维和三维流动构型中所受的力

结果表明，在雷诺数极低和极高的极限情况下，这些预测结果均与理论预测非常吻合。

采用上述选择后，网格在球体附近近似呈球形（两极附近除外），并随着与球心距离的增加逐渐转变为圆柱形。这种网格特别适合高效捕捉球体周围的边界层，也能捕捉尾流和近轴上游区域，即使这些区域距离物体很远亦然。后文将会表明，在当前问题中，这些远场区域尤为重要，而采用球形网格几乎无法捕捉它们。网格在球体附近是不均匀的，远离球体后则变为均匀网格。远场网格的均匀性使海绵层厚度能够得到恰当控制。沿球体表面采用极薄的网格单元，并使网格单元厚度随距球体距离的增加而缓慢按几何级数增大，从而能够在所考虑的参数范围内恰当捕捉“惯性”边界层（其无量纲厚度按 $\mathcal{R}e^{-1/2}$ 标度变化）和/或埃克曼边界层（按 $\mathcal{T}a^{-1/2}$ 标度变化）。网格设计的详情以及针对部分网格参数开展的敏感性研究见附录A。除非另有说明，计算域的半长和半径（从球心起算，并以球体半径 a 归一化）分别为 $\mathcal{L} \times \mathcal{L}_\sigma = 180 \times 60$，空间离散采用 314×96 个网格单元。不过，根据 § 1 中的讨论，附录 B 对轴向约束对流动特性和阻力的影响进行了详细评估，其中 $\mathcal{L}$ 从 40 变化至 $\approx 10^3$。在低-$\mathcal{R}o$ 流动状态下，§§ 3 和 4 中的结果采用了这项敏感性研究的结果。由于预计在 Maxworthy的实验所考察的大多数条件下，流动沿方位角方向保持不变，因此我们采用轴对称分辨率。显然，与完全三维分辨率相比，这一简化大幅降低了参数研究的成本。不过，当雷诺数较大时（通常为 $\mathcal{R}e \gtrsim 100$），仍需谨慎，因为已知在没有旋转的情况下，该范围内的流动具有三维特征。我们将在 § 3 开始处再讨论这一问题。以整个流动计算域内均匀的初始条件 $\mathbf{U} = U_\infty \mathbf{e}_z$为起点，在标准单处理器工作站上，计算至获得收敛的定常轴对称解约需 2 小时。当阻力的相对时间变化在 5×10^4 个时间步内小于 0.1% 时，即认为解已收敛。

2.3. 初步测试

我们首先将上述数值设置在雷诺数较小但非零时预测的球体表面局部应力分布，与 Tanzosh & Stone (1994) 在蠕动流极限下采用边界积分法得到的结果进行比较。为此，我们定义应力张量 $\mathsf{T} = -P\mathsf{I} + \rho\nu\left(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)$（$\mathsf{I}$ 表示克罗内克δ），以及表面牵引力 $\mathbf{n} \cdot \mathsf{T}\big|_{r=a} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_\phi\mathbf{e}_\phi$，其中 $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_r$ 是指向流体一侧的球体单位法向量，($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$) 是对应于（r, θ, ϕ）球坐标系的径向、极向和方位角单位向量；$r = 0$ 位于球心，$\theta = 0$（分别是 π）位于上游（分别是下游）两极。表面牵引力三个分量随 θ 的变化关系见图4。两个切向分量 F_θ 和 F_ϕ的结果吻合得很好，尽管当前模拟中的泰勒数与 Tanzosh & Stone (1994) 的略有不同。 F_r分布看起来也相似，但从赤道到两极差异逐渐增大，在两极附近约达 10%。具体而言，虽然 Tanzosh & Stone (1994) 报告的 F_r分布

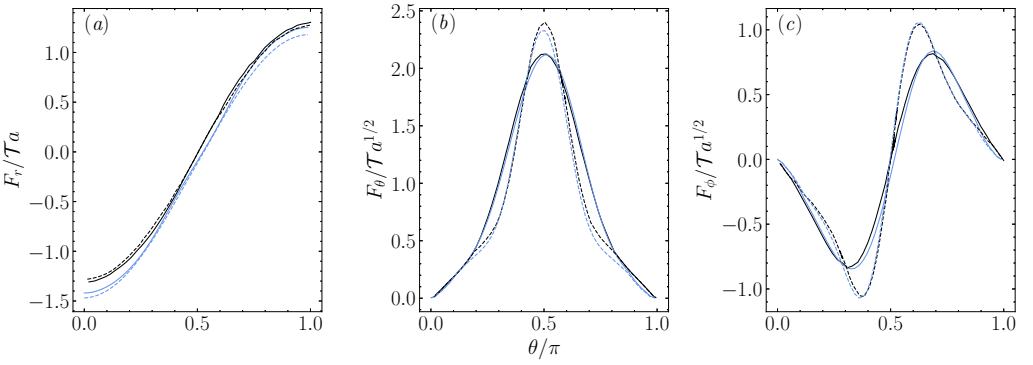

FIGURE 4. 表面牵引力三个分量随极角 θ 的变化，均以 $\rho\nu U_\infty/a$ 归一化。蓝色实线和虚线分别表示（$\mathcal{R}e = 5$, $\mathcal{T}a = 55.5$）和（$\mathcal{R}e = 2$, $\mathcal{T}a = 445$）的本文结果；黑色实线和虚线分别表示 Tanzosh & Stone (1994) 对 $\mathcal{T}a = 50$ 和 $\mathcal{T}a = 500$ 得出的零-$\mathcal{R}o$ 结果。

Tanzosh & Stone (1994) 展示了严格的前后反对称性（由 $\mathcal{R}o = 0$假设所要求），但当前结果并非如此。这显然是有限雷诺数效应所致。这些效应主要体现在 F_r 上，原因是该牵引力分量等同于表面压力，因为连续性条件与无滑移条件共同作用，使球体表面的法向黏性应力为零。相比之下， F_θ和 F_ϕ仅涉及黏性应力。因此，这些牵引力分量受有限-$\mathcal{R}e$效应的直接影响较小，不过在对应于 $\mathcal{R}e = 5$的分布中央部分仍可观察到轻微的前后不对称， F_ϕ上的这一现象尤为明显。

3. 流场

3.1. 初步说明

现在，我们来考察数值模拟在参数范围 $\mathcal{T}a \in [20, 450]$, $\mathcal{R}o \in [10^{-2}, 10]$（对应的雷诺数范围为 $\mathcal{R}e \in [5, 300]$）内所得流场的显著特征。涵盖这一范围后，我们便可以将数值预测与 Maxworthy（1970）报告的全部实验数据进行比较。但必须再次强调，本文结果均由轴对称模拟得到，尽管已知当罗斯贝数足够大时，雷诺数尚未达到本文所考虑的上限，流动就已呈现三维特征。事实上，在无旋转（$\mathcal{R}o \to \infty$）的情况下，已证实平移球体尾流的轴对称性会在 $\mathcal{R}e \approx 105$ 时被打破（Natarajan & Acrivos 1993; Johnson & Patel 1999）。在存在中等旋转效应（$\mathcal{R}o = 2$）时，Wang 等（2004）表明，球体周围的流动在 $\mathcal{R}e = 100$ 时仍保持轴对称，但在 $\mathcal{R}e = 250$ 时则呈现三维且非定常的特征。然而，由于在极限 $\mathcal{R}o \to 0$ 下涡量控制方程变为线性方程（见下文该方程 z 分量的具体形式），因此在此极限下不会发生尾流失稳，也不会出现涡脱落，无论雷诺数多大。因此，预期 $\mathcal{R}o$ 越低，三维效应开始出现时的临界雷诺数就越高。Machicoane 等（2018）在条件 $\mathcal{R}o \lesssim 10$ 下研究垂直于快速旋转容器轴线拖曳的圆柱体时，也报告了一个密切相关的现象：尾流保持稳定的临界$\mathcal{R}e$ 有所升高。更具体地说，研究发现圆柱体尾流仍保持

当 $\mathcal{R}e \lesssim 550/\mathcal{R}o$ 时保持定常，这可与极限 $\mathcal{R}o \to \infty$ 下的 $\mathcal{R}e \leqslant 23.5$ 相比较。因此，考虑到低-$\mathcal{R}o$ 极限下施加于流动的约束会显著延缓球体尾流向三维性的转变，我们预计在罗斯贝数足够低时，本文的轴对称结果在达到所考虑的最大雷诺数（$\mathcal{R}e = 300$）之前仍然有效，通常为 $\mathcal{R}o \lesssim 1$ （遗憾的是，目前尚不清楚临界 $\mathcal{R}e$ 随 $\mathcal{R}o$ 的精确变化关系）。对于雷诺数大于 105 且 $\mathcal{R}o \gtrsim 1$ 的结果，则需更加谨慎。不过，即使在这一范围内，三维效应（可能还包括非定常效应）对阻力的影响在达到 $\mathcal{R}e \approx 200$ 之前仍然有限。例如，在非旋转流动中， $\mathcal{R}e = 150$ 时的时间平均阻力仅比通过约束流动保持轴对称所得的预测值高 4%，而阻力振荡的相对幅度不到 1%（Tomboulides & Orszag 2000）。因此，将本文在同一范围内对阻力所作的预测与实验数据进行比较仍有意义（我们在 $\mathcal{R}e = 167$ 下进行了一系列计算）。只有对应于 $\mathcal{R}e = 300$ 和 $\mathcal{R}o > 1$ 的少数预测，才可能确实受到本文研究忽略三维效应这一做法的影响；在非旋转流动中，该雷诺数下的尾流会进入混沌但尚未达到湍流的状态（Tomboulides & Orszag 2000；Poon 等2014）。

3.2. 总体特征

从现在起，我们使用柱坐标 σ， ϕ， z分析流场，其中σ 柱半径（$\sigma = 0$ 位于旋转轴上）、 ϕ 方位角，以及 z 球心的轴向距离（$z < 0$ 球体上游， $z > 0$ 球体下游）。图5和图6展示了不同 $\mathcal{T}a$和 $\mathcal{R}e$取值下球体周围的流动。图5展现了球体附近流动结构的细节，而图6则对纵轴方向进行压缩，以展示较高的两个 $\mathcal{T}a$ 下的整个回流区。图5显示，随着泰勒数增大，泰勒柱在纵向和径向上均有所增长；对于给定的 $\mathcal{T}a$，随着 $\mathcal{R}e$减小、$\mathcal{R}o$降低，泰勒柱也会增长。与先前的观察一致，可以看到，上游泰勒柱中的流体旋转速度比容器慢，而下游泰勒柱中的流体旋转速度比容器快。这一特征可以通过考察轴向涡量 $\omega_z = \partial_\sigma U_\phi$的控制方程来解释，即

$$\partial_t \omega_z + U_\sigma \partial_\sigma \omega_z + U_z \partial_z \omega_z - \omega_z \partial_z U_z - \omega_\sigma \partial_\sigma U_z = 2\Omega \partial_z U_z + \nu \nabla^2_{\sigma,z} \omega_z \,, \qquad (3.1)$$

其中， $\nabla^2_{\sigma,\,z}$ 表示二维拉普拉斯算子， ∂_σ 和 ∂_z 分别表示关于柱坐标 σ 和 z的偏导数。注意到 $\omega_\sigma = -\partial_z U_\phi$ 和 $\partial_z U_\phi\big|_{\sigma \ll a} \approx \sigma \left(\partial_z \omega_z\right)\big|_{\sigma=0}$，涡倾斜项 $-\omega_\sigma \partial_\sigma U_z$在旋转轴附近可近似为 $\sigma \partial_z \omega_z\big|_{\sigma=0} \partial_\sigma U_z$。因此， （3.1）中除一项外，其余各项都涉及 ω_z 或其导数，由此可知， ω_z 的非零值只能由源项 $2\Omega \partial_z U_z$产生。沿母线 $\sigma = a$朝 z 增大的方向移动时，球体表面的无滑移条件使赤道面前方的流动减速，这意味着对于 $z < 0$，有 $\partial_z U_z < 0$。相反，赤道面下游的流动必须加速，从而对于 $z > 0$，有 $\partial_z U_z > 0$。因此，从静止状态开始，柱状区域 $\sigma \leqslant a$的上部（下部）会产生负（正）的 ω_z 值。分别以U_∞， a 和 a/U_∞ 对速度、距离和时间进行无量纲化，并暂以横线表示无量纲量，则（3.1）的无量纲形式为 $\mathcal{R}o\, lhs = 2\,\partial_z U_z + \mathcal{T}a^{-1} \nabla^2_{\sigma,\,z} \omega_z$，其中$lhs$ 表示（3.1）的左端项。此时，源项为 $\mathcal{O}$(1)量级，而输运/拉伸项和扩散项的量级分别为 $\mathcal{O}$（$\mathcal{R}o$） 和 $\mathcal{O}$（$\mathcal{T}a^{-1}$）。

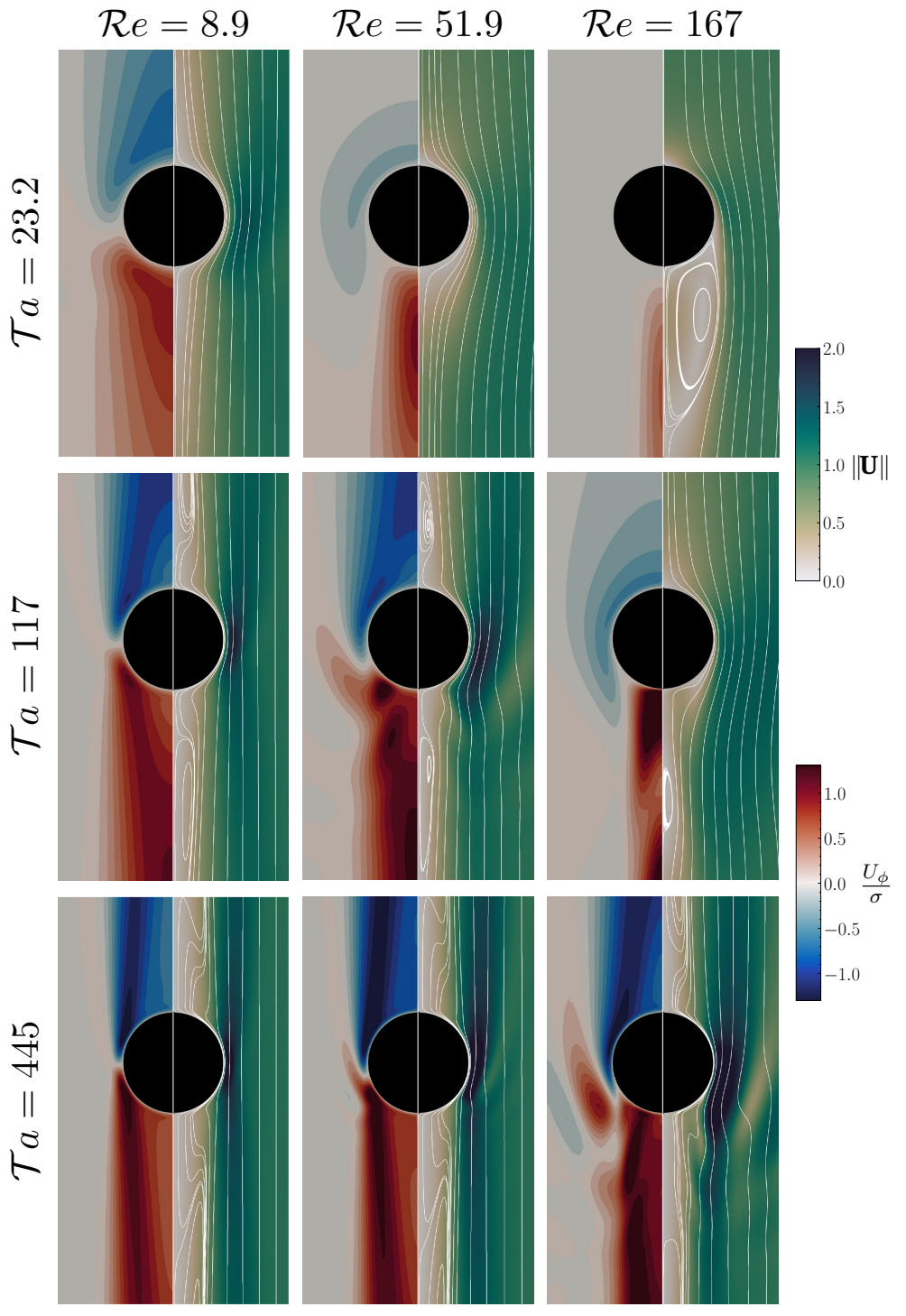

FIGURE 5. 参数空间（$\mathcal{R}e$, $\mathcal{T}a$）中球体周围的流动结构。流动方向为自上而下。面板左半部分（红蓝色标）：角速度 U_ϕ/σ（按 U_∞/a 缩放）；右半部分（绿色色标）：速度大小 $||\mathbf{U}||$（按 U_∞ 缩放），以及球体参考系中的流线。

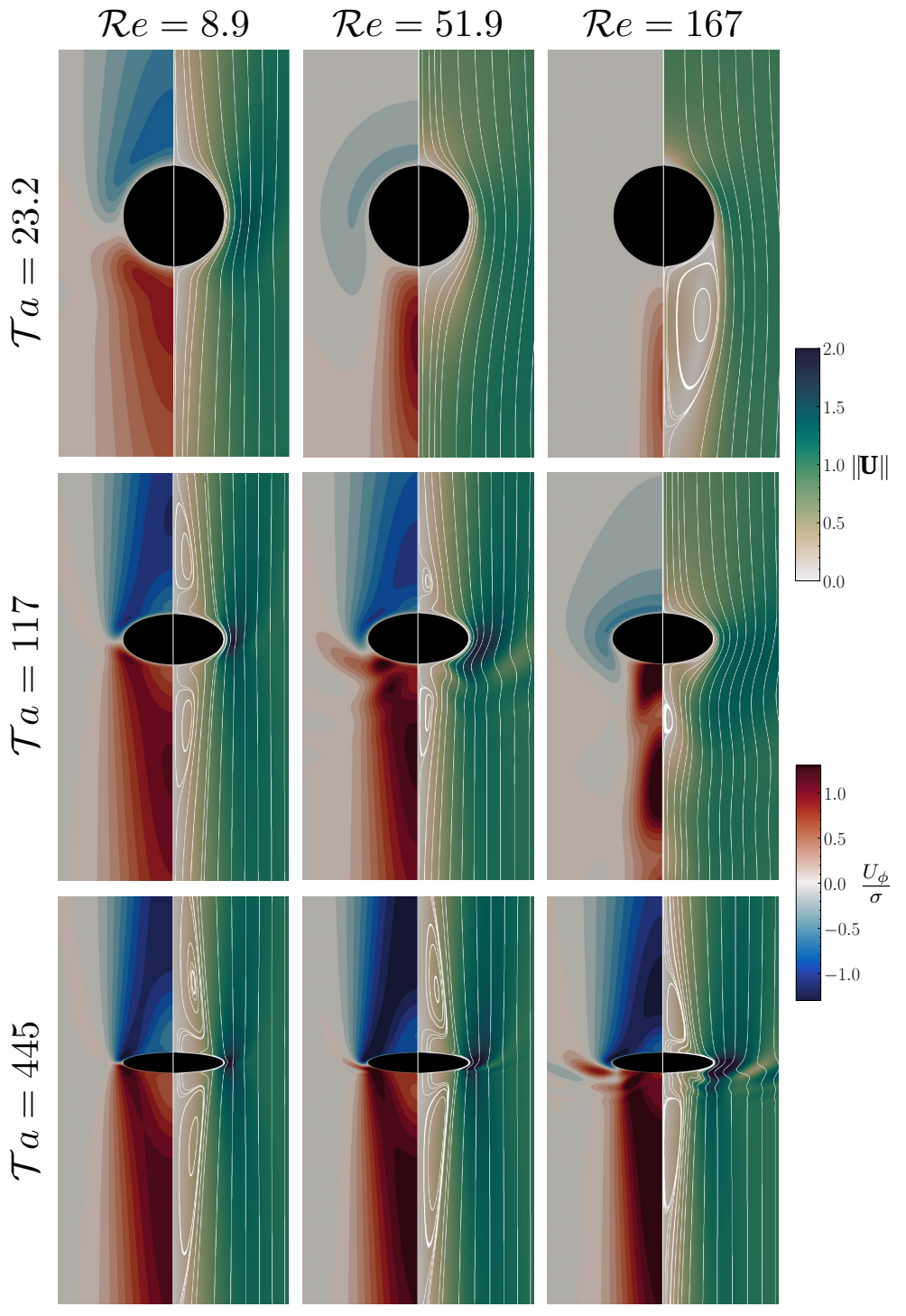

FIGURE 6. 与图5相同，但纵轴压缩了2倍（分别为5倍），以便捕捉$\mathcal{T}a = 117$（分别为 $\mathcal{T}a = 445$）回流区垂直范围的变化。

ω_z 的稳态分布取决于给定 $\mathcal{T}a$下平流/拉伸与黏性扩散的相对强度，因此也取决于 $\mathcal{R}o$（或等价地取决于 $\mathcal{R}e$）。例如，考察帧（a）中的 $-$（c），可以看到，角向旋流 U_ϕ/σ（在轴附近会减小为 ω_z）在 $\mathcal{R}e = 8.9$ 时趋于呈现前后对称的分布（帧（a））；随着雷诺数增大，分布变得越来越不对称，在 $\mathcal{R}e = 167$ 时，球体上游出现 $\omega_z \approx 0$（帧（c））。在后一种情况下，平流效应足够强，使 ω_z 具有显著数值的流动区域缩小为尾流中的一个细长圆柱区。

Tanzosh & Stone (1994年)证实，在零-$\mathcal{R}o$ 极限下，回流区会在 $\mathcal{T}a \approx 50$处出现。图6中的帧（a）和（d）对应相当低的雷诺数，定性上支持这一预测：前者（$\mathcal{T}a = 23.2$）未显示回流，而后者（$\mathcal{T}a = 117$）则显示了回流。$\mathcal{T}a = 117$ 和 $\mathcal{R}e = 167$时未发现上游回流，即 $\mathcal{R}o = 1.43$ （帧（f）），这表明上游回流区出现的必要条件实际上是 $\mathcal{T}a \gtrsim 50$ 且$\mathcal{R}o \lesssim 1$。值得注意的是，在罗斯贝数大于1的三个面板中（帧（b）、（c）和（f）），球体上游角速度的空间分布与其他所有情况中观察到的柱状结构大不相同。在帧（f）中，球体下游的分布也颇为特殊：两个彼此分离的极大值位于一个与物体脱离的微小驻涡两侧。帧（c）（$\mathcal{R}o = 7.2$）中的流动结构类似于非旋转情况下的结构，球体下游延伸着一个较大的驻涡。相反，帧（b）（$\mathcal{R}o = 2.25$）中没有这种结构，表明此时旋转正控制着近尾流中的流动结构。因此可以得出结论，当罗斯贝数低于某个数值（通常为$\mathcal{R}o \lesssim 5$）时，旋转效应开始显现。颗粒在一维线性分层流体中沉降时也会观察到类似的转变，此时基于布伦特-魏萨拉频率的弗劳德数起到罗斯贝数的作用（Torres, Hanazaki, Ochoa, Castillo & van Woert 2000年；Magnaudet & Mercier 2020年）。当 $\mathcal{R}o < 1$时，随着泰勒数增大，流动变得越来越一维，泰勒柱向物体上游和下游延伸很远（帧（$g-i$））。在同一组帧中可以看到，上游流柱的半径随罗斯贝数减小；随着 $\mathcal{R}o \to 0$，斯图尔特森层逐渐靠近包围球体的流体圆柱表面。在泰勒数最大时，上游回流泡向球体上游延伸超过15个半径（帧（g），并位于球体前方2个半径处。在如此大的 $\mathcal{T}a$下，流体在环绕球体的薄埃克曼层内沿球体圆周方向发生强烈变化。例如，赤道附近的流体速度约为沉降/上升速度的2.6倍。

3.3. 近体速度分布

图7展示了在不同流动条件下，三个速度分量随径向位置的变化情况，测量位置为四个与轴垂直的连续平面，从 $z = 0$（赤道面）到 $z = -10$，后者位于低$\mathcal{R}o$ 极限下的回流区内（本节中长度和速度均视为无量纲量，分别以 a 和 U_∞归一化）。暂且不考虑赤道面，三个分量共有的一个显著特征是：在平均位置 $\sigma = 1$ 附近的斯图尔特森层内，三个分量均随径向位置大幅变化；该层从外侧界定了泰勒柱。在情形$\mathcal{R}o = 4.5 \times 10^{-3}$ 下，三个分量在该层内的平面 $z = -2$ 上达到的峰值 $U_z \approx 1.4$、 $U_\sigma \approx 0.02$、 $U_\phi/\sigma \approx -1.1$ 与 Tanzosh & Stone (1994) 对 $\mathcal{R}o = 0$的预测吻合良好。同样在 $\mathcal{R}o = 4.5 \times 10^{-3}$ 下， $z = -2$处轴向速度呈近轴塞状剖面

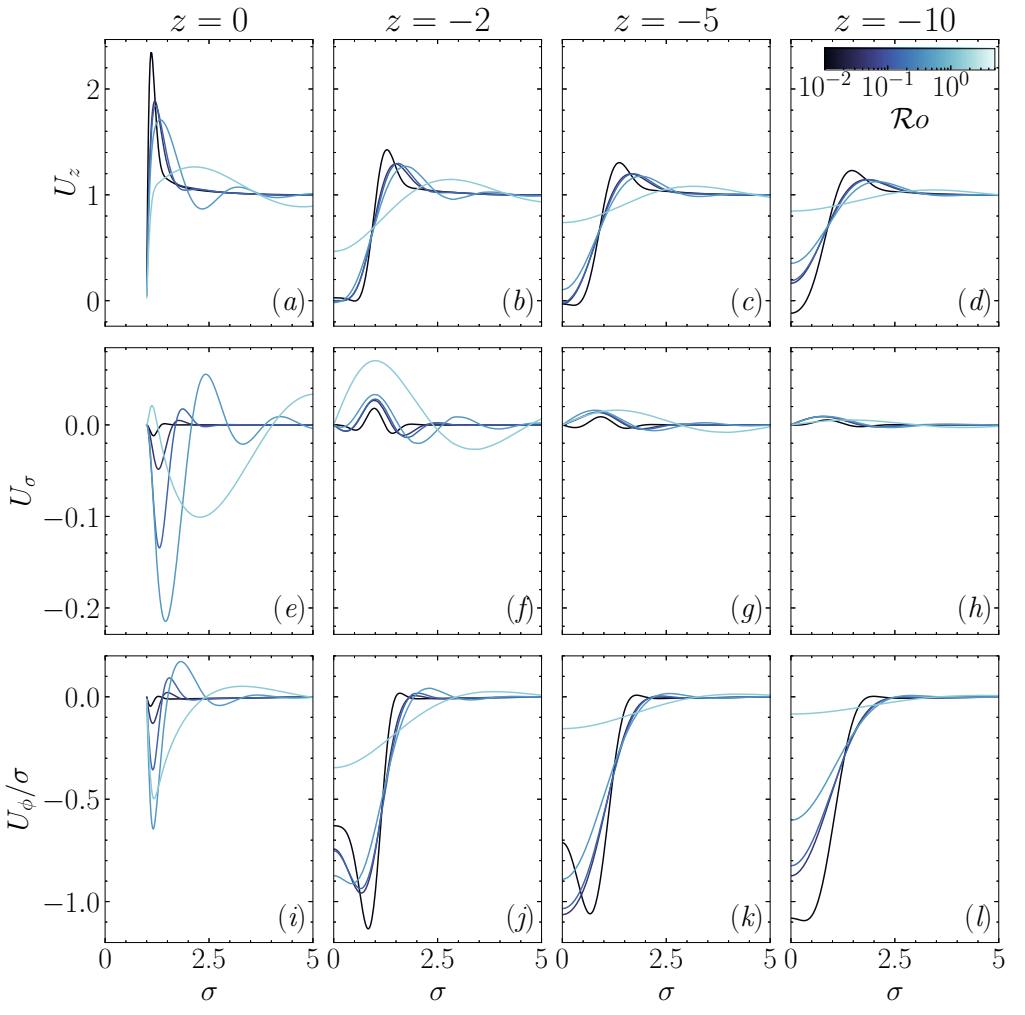

FIGURE 7.球体前方若干个 $z = cst.$ 平面内速度场的径向切片：$(a) - (d)$：轴向分量 U_z；$(e) - (h)$：径向分量 U_σ；$(i) - (l)$：角向旋流 U_ϕ/σ。速度和距离分别以 U_∞ 和 a归一化。随着罗斯贝数增加，线条颜色逐渐变浅。黑色：$\mathcal{R}o = 4.5 \times 10^{-3}$，$\mathcal{R}e = 2\,(\mathcal{T}a = 445)$；深紫色：$\mathcal{R}o = 4.3 \times 10^{-2}$，$\mathcal{R}e = 5$；深蓝色：$\mathcal{R}o = 0.138$，$\mathcal{R}e = 16.1$；中蓝色：$\mathcal{R}o = 0.444$，$\mathcal{R}e = 51.9$；浅蓝色：$\mathcal{R}o = 1.43$，$\mathcal{R}e = 167$（后四种情况下为 $\mathcal{T}a = 117$）。

（帧（b））， 直至 $\sigma \approx 0.6$处数值都接近于零，这是近地转区的典型特征。向上游移动时，可以看到 U_z 从轴线到 $\sigma \approx 0.4$ 取较小的负值（帧（$c - d$））， 由此可估算回流区的半径。相比之下，在惯性最强的情形（$\mathcal{R}o = 1.43$）下，U_z 在任何 z 位置直至轴线都保持显著的正值，这证实了这样一种判断：在这类条件下不存在近地转区或回流区。对于 $0.043 \leqslant \mathcal{R}o \leqslant 0.44$ 的中间情形（均满足$\mathcal{T}a = 117$），在平面 $z = -2$上（帧（b）），近地转行为一直持续到 $\sigma \approx 0.3$ 处。相比之下，在这些情形中， $z = -10$ 处的轴向速度直到轴线仍保持显著的正值，表明无论 $\mathcal{T}a = \mathcal{O}$的罗斯贝数如何，该平面都位于回流区顶端之外（$10^2$）。

返回 与情况 $\mathcal{R}o = 4.5 \times 10^{-3}$相同，角向旋流的近轴剖面 is

随着与球体的距离增大，逐渐变平缓，轴线上数值从 $z=-2$处的 0.6 增至 $z=-10$ 处的 1.1，近似如此（图帧（$j-l$））。同样，这些发现与 Tanzosh & Stone (1994) 的结果一致。由于 $U_\phi/\sigma \approx \omega_z$ 靠近轴线，这种逐渐增大并最终形成塞状剖面的原因可借助 (3.1) 来理解。当 $\mathcal{R}o \to 0$时，球体上游的 ω_z 轴向变化只能由弱轴向变化所产生的非零源项引起。由于靠近轴线时 ω_z 的径向变化可忽略，因此有 $2\mathcal{T}a\,\partial_z U_z \approx -\partial_{zz}\omega_z$。由此可见，黏性扩散会使 ω_z的轴向剖面产生非零曲率。轴向速度从回流区的小负值增至近地转区的近零值，因此轴向梯度 $\partial_z U_z$ 为正，从而得到 $\partial_{zz}\omega_z<0$。此外，在给定的径向位置 $\sigma\neq 0$，U_ϕ 从球体上游的负值增至球体表面的零值，而沿轴线则始终为零。因此，$\partial_\sigma(\partial_z U_\phi)$ 为正，这意味着在球体表面 $\partial_z\omega_z>0$。结合上述两个不等式可得出结论：球体上游的 $\partial_z\omega_z$ 必然为正（且大于其表面值），这意味着随着 $|z|$ 增大，角向旋流（绝对值）也会增大，与图帧（$j-l$）中观察到的现象一致。对于 $\mathcal{T}a=117$ 和 $\mathcal{R}o<0.2$ 这两个中间情况，该论证在 $z=-5$ 范围内仍然成立。然而，在这些情况下，平面 $z=-10$位于回流区之外，轴向速度的显著正值（$U_z\approx 0.1$）证实了这一点。因此，在$z=-5$之外，$\partial_z U_z$ 为负且绝对值相当大。这使得 $\partial_{zz}\omega_z$ 为正，且显著大于靠近球体区域内的值，从而在回流区之外产生 $\partial_z\omega_z<0$，因此随着 $|z|$ 增大，角向旋流减弱。

对称性论证表明，在 $\mathcal{R}o=0$ 处的赤道面上，径向和方位速度分量都必须为零。因此，这些分量在该平面上的非零值（(*e*) 和 (*i*) 帧）揭示了平流效应的强弱。由于这些效应往往会增强流体经由埃克曼层从上游泰勒柱输运至下游泰勒柱的量，因此预计当 $\mathcal{R}o$ 非零时，$z=0$ 处的 U_σ 和U_ϕ 近壁面分布的主要特征，会与零-$\mathcal{R}o$ 极限下赤道面稍上方的分布相似。球体上游斯图尔特森层中间部分的轴向速度值为 $\mathcal{O}(1)$（(*b*) 帧），再加上其在 $z=0$ 处埃克曼层中的较大峰值（(*a*) 帧），使赤道面上游、径向位置为 $\sigma\approx 1$ 处的 $\partial_z U_z$ 为正。连续性条件结合球体表面的无滑移条件，进而意味着赤道面上方的 $\sigma\gtrsim 1$ 为 $U_\sigma<0$。这就是为什么在存在有限惯性效应时，预计该平面内球体表面附近的 U_σ 为负。只要 U_z 的近壁面峰值仍然存在，情况确实如此（(*e*) 帧）。具体而言，只要 $\mathcal{R}o$ 小于 1，埃克曼层内 U_σ 和 U_ϕ/σ 的（负）峰值绝对值就会随罗斯贝数增大而显著上升。随着 $\mathcal{R}o$ 增大，该峰值逐渐远离球体表面；在 $\mathcal{R}o=0.44$ 处，其大小分别接近 0.2 和 0.6，对应（向内的）径向速度和角向旋流（(*e*) 和 (*i*) 帧）。强惯性情形 $\mathcal{R}o=1.43$, $\mathcal{R}e=167$ 的表现则有所不同，尤其是 U_σ 首先在最靠近球体表面的边界层部分取正值（(*e*) 帧）。在埃克曼层内，轴向速度在 $\mathcal{R}o=4.5\times10^{-3}$ 处达到约 2.4 的最大值（(*a*) 帧）。这一数值与 Tanzosh & Stone (1994) 的发现相符；他们报告在$\mathcal{R}o=0$ 处的最大值为 2.25。在低-$\mathcal{R}o$ 区间，埃克曼层内较大的正 U_z 值对流动的整体动力学起着关键作用，因为它们直接控制着从上游泰勒柱输运至下游泰勒柱的流体量。研究发现，惯性效应会显著改变 $\mathcal{R}o=0$ 图景，使 U_z 最大值降至

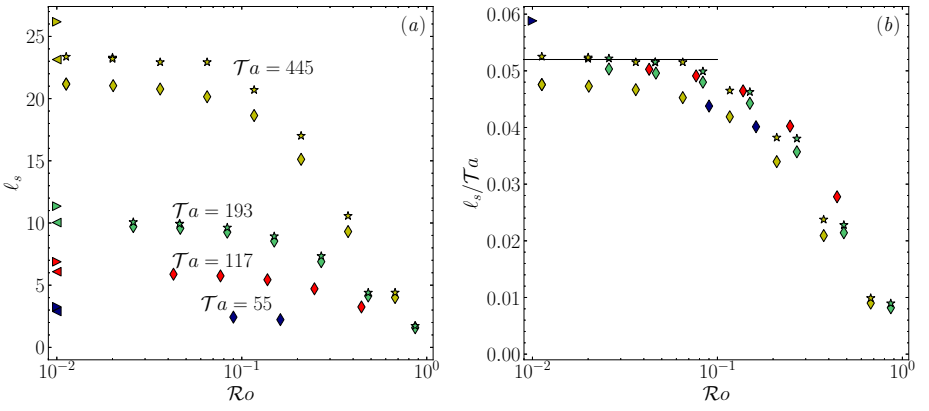

FIGURE 8. 上游回流区的范围。(*a*)：不同$\mathcal{T}a$值下的 ℓ_s 与 $\mathcal{R}o$；(*b*)：相同结果，但 ℓ_s 以 $\mathcal{T}a$归一化。 ♢, ⋆：分别为 $\mathcal{L} = 180$ 和 $\approx 10^3$下的当前模拟； ▷：实验（Maxworthy 1970年）； ◁：在 $\mathcal{R}o = 0$ 下进行的边界积分模拟（Tanzosh & Stone 1994年）；——零$\mathcal{R}o$ 极限 $\ell_s = 0.052\,\mathcal{T}a$（Tanzosh & Stone 1994年）；深蓝色、红色、绿色和黄色符号分别表示 $\mathcal{T}a = 55$、117、193和445。

1.7（ $\mathcal{R}o = 0.44$ 处）；以单位自由来流速度为参照，这相当于峰值降低了 50%。综合赤道面上观察到的三个速度分量的结果可以看出，惯性效应会深刻改变埃克曼层内的局部流动结构，这可能会直接影响球体表面的应力分布，进而影响阻力。

3.4. 上游回流区的范围

图8显示，对于不同的 $\mathcal{T}a$，上游回流区的范围 ℓ_s 如何随 $\mathcal{R}o$ 变化。我们将 ℓ_s 定义为球心到旋转轴上轴向速度改变符号的最远上游位置之间的距离，并以球体半径 a归一化。严格来说，如图1所示，回流区位于轴向速度改变符号的两个位置之间，其中离球体最近的位置定义了近地转区的顶端。不过，我们沿用 Maxworthy（1970）的做法；他通过染料可视化，关注的是回流区顶端的位置。与他的观察一致，当 $\mathcal{T}a$ 保持固定且 $\mathcal{R}o \to 0$时， ℓ_s 达到平台值。反之，当 $\mathcal{R}o \to 1$时， ℓ_s 消失，这意味着在 $\mathcal{R}o > 1$ 时不存在回流区（另见图6和图7）。对于固定的 $\mathcal{R}o$，随着 $\mathcal{T}a$ 减小，ℓ_s 也随之减小，直至接近50的临界泰勒数；低于该值时，回流区消失。如图8（*b*）所示，在 $50 \lesssim \mathcal{T}a \lesssim 200$、$\mathcal{R}o \lesssim 5\times10^{-2}$范围内，数值模拟再现了 $\ell_s \approx 0.052\,\mathcal{T}a$ 的预测（ Tanzosh & Stone 1994）。然而，正如图8（*a*）左上角的符号所示，对于本文考察的最大 $\mathcal{T}a$ 值，即 $\mathcal{T}a = 445$，数值结果偏离了这一预测，也偏离了 Maxworthy 的数据。例如，我们发现，在 $\mathcal{R}o = 2\times10^{-2}$时， $\ell_s \approx 21$ ，显著低于 Tanzosh & Stone（1994）报告的零-$\mathcal{R}o$ 极限下的数值 $\ell_s = 23$。我们将这一差异归因于轴向约束效应；Ungarish 与 Vedensky（1995）也曾提出这一思路。为检验这一假设，我们按照附录 B 中讨论的方法，将计算域长度从 $\mathcal{L} = 180$ 增加到 $\mathcal{L} \approx 10^3$ 。附录 B 对回流长度和阻力受这些效应影响的敏感性进行了详细分析。正如图8（*b*）中的星形符号所示，在这个长得多的计算域中得到的回流长度与零-$\mathcal{R}o$ 预测高度吻合。这清楚地表明，

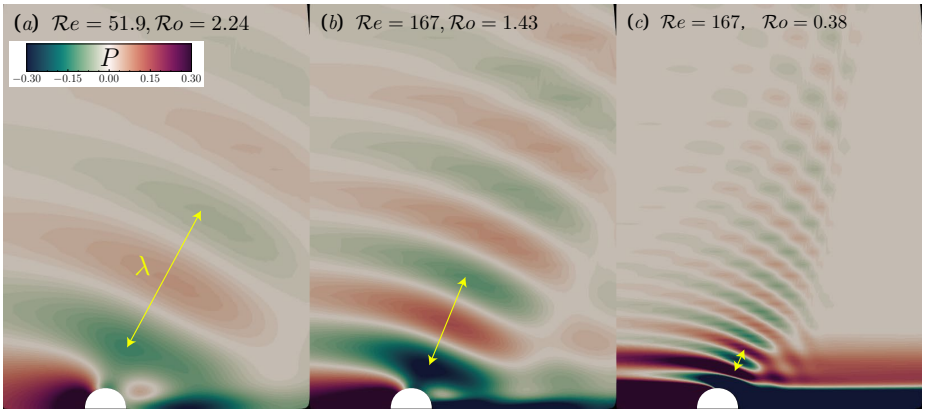

FIGURE 9. 多个 $\mathcal{R}o$下惯性波形态的可视化；相对于球体的相对流动方向为从左到右。颜色表示压力变化的幅值（按 $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$缩放）。

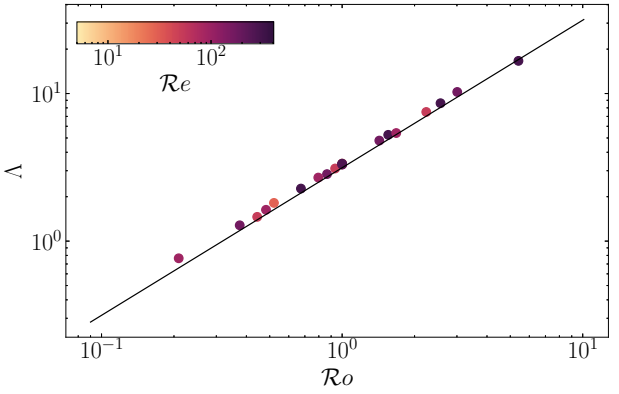

FIGURE 10. 波长随罗斯贝数的变化： • 数值模拟；——理论预测 $\Lambda = \pi\mathcal{R}o$。

回流区的特征，更广泛地说，泰勒柱的特征，对轴向约束效应极其敏感，即使在具有 $\mathcal{L} = \mathcal{O}(10^2)$ 的容器中也是如此。事实上，尽管回流区顶端远离计算域的顶部和底部边界，但当 $\mathcal{T}a$ 较大且 $\mathcal{R}o \to 0$时，泰勒柱顶端会与这些边界直接相互作用；相应的阻塞效应足以改变流动中距离物体近得多的各个区域的特征。

3.5. 惯性波形态

最后，为了完成对流场的表征，我们有必要考察泰勒柱外流动的主要特征，即球体辐射出的惯性波场。物体在旋转流体中运动，或横向流动作用于旋转地形时产生的这类波，已有充分记载（Greenspan 1968）。Taylor（1922年）预言了这类波的存在，并发现它们具有各向异性色散特性，其弧度频率 ω_{I0} 遵循与方向有关的色散关系 $\omega_{I0} = \pm 2\Omega\cos\psi$，其中 ψ 为波矢 $\mathbf{k}$ 与旋转轴之间的夹角。他还指出，值得注意的是，无论波幅如何，这一色散关系都成立。然而，与稳定分层流体中的内波不同，在均匀流体中会产生纯惯性波，这使得实验观测更加困难（Pritchard 1969）。

因此，Taylor 未能观测到他所预言存在的波。不过，他在旋转圆柱的轴线上释放一个轻质球体时，得以直观地观察到静止流体柱的存在，这一流体柱后来以他的名字命名。很久以后，Machicoane等人 （2015年，2018年）利用粒子图像测速，直观地观察到旋转水槽中由脉动、振荡或横向运动的圆柱体产生的波。据我们所知，在本文研究的构型中尚无类似的实验观测。Wang等人 （2004年）的数值研究给出了 $\mathcal{R}o = 2$、 $\mathcal{T}a = 50$ 和 125 对应的若干流线图，据此可以推断出中等旋转流动中的波形。

在当前构型中，波由球体相对于未扰动流体以速度 $-U_\infty \boldsymbol{\Omega}/\Omega$ 运动而辐射。因此，在与物体相连的参考系中，弧度频率必须根据相应的多普勒频移进行修正，变为 $\omega_I = \omega_{I0} + U_\infty \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}/\Omega$，使得 ω_I 满足（Lighthill 1967年；Whitham 1974年）

$$\omega_I = 2(\pi U_\infty/\lambda \pm \Omega)\cos\psi\,. \tag{3.2}$$

方程（3.2）表明，物体沿旋转轴的相对位移使波长为 $\lambda = \pi U_\infty/\Omega$ 的轴对称驻波得以存在，即 $\Lambda \equiv \lambda/a = \pi\mathcal{R}o$，正如 Taylor（1922年）的预测。在图9中，我们使用压力扰动场来展示罗斯贝数取三个不同值时的波形。图10（a）显示，通过寻找两个相邻波峰之间的最小距离（图9中的黄色箭头）所确定的波长，与 Taylor 的理论预测高度吻合。波场的细节，即 ψ 的空间分布，取决于物体表面的不可穿透条件，并受到黏性效应的影响，尤其是那些控制埃克曼层的黏性效应（Johnson 1982；Cheng 与 Johnson 1982）。

能量由波以经过多普勒频移的群速度$\mathbf{c}_g = \partial_{\mathbf{k}}\omega_I =$$\mathbf{c}_{g0} + U_\infty \mathbf{e}$ $_g$ $c_{gz} = U_\infty - \pi^{-1}\Omega\lambda$ $^2\psi$ $c_{g\sigma} = 2\pi^{-1}\Omega\lambda$ 2ψ

辐射，其中$\mathbf{c}_{g0} = \partial_{\mathbf{k}}\omega_{I0}$。$\mathbf{c}$的轴向和径向分量分别为 sin 和 ( ) sin 。因此，具有 $\lambda = \pi U_\infty/\Omega$ 的驻波，其轴向和径向群速度分别为 $c_{gz} = U_\infty \cos^2\psi$ 和$c_{g\sigma} = \frac{1}{2}U_\infty$ sin 2ψ，能量沿直线射线 $\sigma =$$(z - z_0)$ tan ψ传播，其中 z_0 为射线在旋转轴上的起点。根据图 9，角度 ψ 从球体下游的约 $\pi/3$ 增大至上游接近$\pi/2$ 的值。因此，能量通量的轴向和径向分量处处为正，即分别指向下游和外侧。此外，沿上游方向移动时，这些分量持续减小，并最终在波峰平行于轴时消失（$\psi = \pi/2$）。因此，在球体的远上游处，波能量完全不传播，也就是说，它只是随球体一起运动。比较三个子图可知，在球体上游的给定位置，较低的 $\mathcal{R}o$ 对应于波前与旋转轴越平行。因此， $\mathcal{R}o$ 越低，波能量停止传播的上游位置就越近。

对整套计算结果的考察表明，在罗斯贝数处于 $0.2 \lesssim \mathcal{R}o \lesssim 5$ 范围内时，存在具有上述类似特征的惯性波。这两个极限分别由截然不同的原因造成。在 $\mathcal{R}o = 5$ 时，波长约为计算域半径的三分之一（若不考虑海绵层，则甚至只有其一半）。因此，外侧圆柱边界会影响较大 $\mathcal{R}o$ 时物体辐射出的扰动分布，从而阻止驻波的形成。相反，波的消失则是由黏性效应

导致的，适用于 $\mathcal{R}o \lesssim 0.2$。事实上，波矢为$\mathbf{k}$ 的扰动会以速率 $-\nu||\mathbf{k}||^2$衰减。因此，作用于该扰动的黏性力与恢复性科里奥利力之比 r_v 为 $2\pi^2\nu/(\Omega\lambda^2) = 2\pi^2/(\Lambda^2\mathcal{T}a)$；当 $\Lambda = \pi\mathcal{R}o$ 时，该比值为 $r_v = 2(\mathcal{T}a\mathcal{R}o^2)^{-1}$。因此，在给定 $\mathcal{T}a$ 时， $\mathcal{R}o$ 越小，r_v 越大；例如，当 $\mathcal{R}o = 0.1$ 且 $\mathcal{T}a = 200$ 时， $r_v = 1$ 。

4. 物体所受载荷

4.1. 阻力

图11展示了对球体表面在 § 2.3 中定义的表面牵引力进行直接积分后得到的阻力系数。子图（a）显示了补偿后的阻力系数 $C_D\mathcal{R}e/12$ 随雷诺数变化的曲线，其中涵盖不同的 $\mathcal{T}a$；子图（b）则显示了 C_D 随罗斯贝数变化的曲线，其中涵盖不同的 $\mathcal{R}e$。此外，图中还以静止流体中平移球体的标准阻力曲线作为参照，该曲线基于经验关联式 $C_D(\mathcal{R}e) = 12\mathcal{R}e^{-1}(1 + 0.241\mathcal{R}e^{0.687})$ （ Schiller 和 Naumann 1933 ）；无黏性预测（ 1.1 ）也作为参照一并列出。出于 §3.1 中讨论的原因，只有与 $\mathcal{R}e = 300$ 和 $\mathcal{R}o > 1$ 对应的少数数值预测（即图11（a）中位于虚线下方最右侧的三个菱形标记）预计会因计算结果中缺少三维效应而受到显著影响。

在低至中等雷诺数下，例如 $\mathcal{R}e \lesssim 50$，阻力显著大于上述关联式的预测值，这凸显了刚体旋转的影响。本文结果在 $\mathcal{T}a \approx 80$ 以内与 Maxworthy（1970）的结果吻合良好，即处于旋转效应适中的范围。相比之下，对于更大的 $\mathcal{T}a$，本文结果与实验数据明显偏离，预测的阻力较低。在给定的 $\mathcal{T}a$ 下， $\mathcal{R}e$ 越小，偏差越大；当 $\mathcal{R}e = 5$ 时，对于最高的 $\mathcal{T}a$，两者的相对差异超过 40%。反之， $\mathcal{T}a$ 越大，偏差开始出现时对应的雷诺数越高。因此，当 $\mathcal{T}a$ 较大时，只要 $\mathcal{R}e$ 足够大，数值预测仍与实验数据吻合。在图11(*b*)的 C_D 对 $\mathcal{R}o$ 表示中可以看到，对于 $\mathcal{R}o \gtrsim 2 \times 10^{-1}$，数值预测落在实验值略有分散的区间内。相比之下，低于这一阈值时，数值结果与实验结果开始偏离，且偏差随 $\mathcal{R}o$ 减小而增大。值得注意的是，所有在 $\mathcal{R}o \lesssim 0.3$ 下得到的数值数据均高于无黏性预测（1.1）。由于这些数据对应的雷诺数小于 200，黏性效应很可能是造成所观察到差异的原因。后文将对此加以证实。

在图11(*a*)中可以看到，当 $\mathcal{R}e$ 足够大且 $\mathcal{T}a$足够小时，阻力低于标准定律的预测值，例如 $\mathcal{R}e \gtrsim 70$ 和 $\mathcal{T}a \lesssim 80$ （参见右下方最后三个紫色菱形和最末一个深绿色菱形）。这与 Maxworthy 的实验发现一致，正如圆点所示；在这一范围内，相应的罗斯贝数满足 $\mathcal{R}o \gtrsim 1$ 。Rao 与 Sekhar（1995）和 Sahoo 等（2021）也通过数值模拟观察到了相同的行为。众所周知，当前模拟未考虑的非轴对称效应会增大非旋转流动中的阻力，因此可能会让人怀疑，高$\mathcal{R}e$ 范围内数值模拟所得阻力偏低，是因为缺少了这些效应。然而，球体尾流中的轴对称性只有在 $\mathcal{R}e \approx 105$ 且 $\mathcal{R}o \to \infty$ 时才会被破坏（图11(a)中的虚线）；而在 $\mathcal{R}e = 93$ 和 $\mathcal{T}a = 23.2$ 时计算得到的阻力（图中实线下方最左侧的菱形）比标准阻力定律的预测值低15%。同样，在$\mathcal{T}a$ 相同但 $\mathcal{R}e = 167$时，阻力比根据标准阻力定律预期的值低20%；而已知在 $\mathcal{R}o \to \infty$ 极限下，该 $\mathcal{R}e$范围内的轴对称预测值仅低估阻力4%（参见§ 3.1中的讨论）。因此，

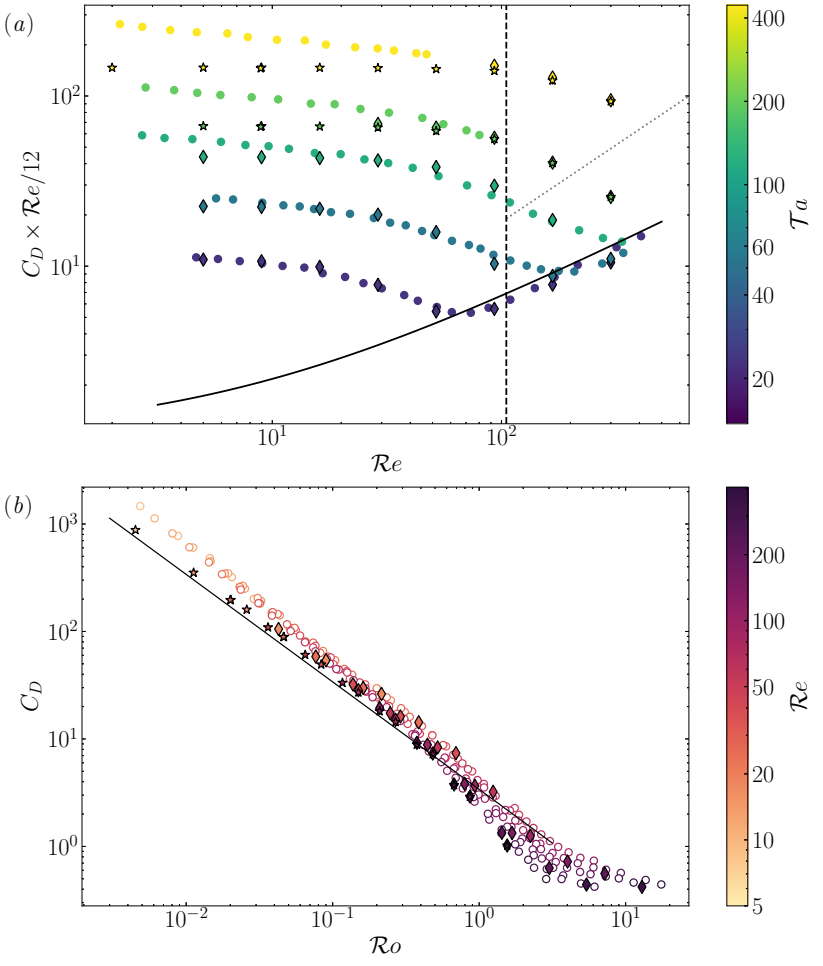

FIGURE 11. 阻力系数随雷诺数和罗斯贝数的变化。(*a*)：C_D 对 $\mathcal{R}e$；(*b*)：C_D 对$\mathcal{R}o$。♦，★：分别为 $\mathcal{L} = 180$ 和 $\approx 10^3$条件下的当前模拟；○：实验（Maxworthy，1970年）。在(*a*)中，实线表示静止流体中平移球体的标准阻力曲线；竖直虚线对应于在极限 $\mathcal{R}o \to \infty$下尾流变为三维的阈值，点线则用于区分属于 $\mathcal{R}o > 1$ 范围（线下方）的数据与属于 $\mathcal{R}o < 1$ 范围（线上方）的数据。在(*b*)中，实线对应于无黏性预测（1.1）。符号的颜色分别根据(*a*)中的 $\mathcal{T}a$ 值和(*b*)中的 $\mathcal{R}e$ 值确定。

可以得出结论，图中观察到的差异确实是旋转效应所致，其物理成因与 Maxworthy 实验数据所揭示的相同。在相应的 $\mathcal{R}e$ 范围内，球体后方存在一个较大的驻涡。图12展示了刚体旋转如何改变这一涡的大小，以及压力和轴向速度分布。可以看到，即使旋转程度不高（图的下半部分对应于 $\mathcal{R}o = 5.4$），涡内的负轴向速度也会显著减小，使涡核内的压力升高。因此，与球体在静止流体中平移的情况相比，前后驻点之间的整体压差减小，从而降低了压差阻力。这一效应十分显著：在 $100 \lesssim \mathcal{R}e \lesssim 300$范围内，阻力相对于标准定律可降低10%至20%。Maxworthy（1970）认为，

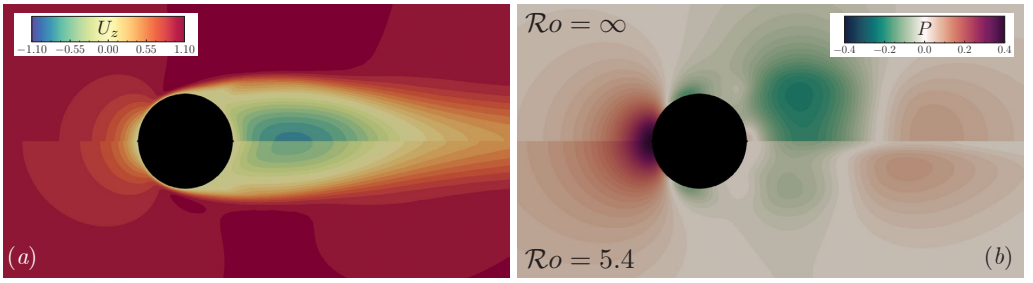

FIGURE 12. 高雷诺数下刚体旋转对球体附近速度和压力的影响（$\mathcal{R}e = 300$）。（a）：轴向速度（以 U_∞为尺度）；（b）：压力（以 $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$为尺度）。每个画面的上半部分：非旋转流动（$\mathcal{R}o = \infty$）；下半部分：$\mathcal{R}o = 5.4$。相对于球体的相对流动方向为从左向右。

驻涡核心区的压力升高，是因为“旋转流体向外流经这个 [回流]泡状区域，使其旋转速率低于施加的旋转速率”。然而，当前结果与这一解释相矛盾。例如，图6(c)针对 $\mathcal{R}e = 167$, $\mathcal{T}a = 23.2$ 显示，驻涡内部的角速度大于施加的旋转速率，相应的阻力（图11(a)右下角倒数第二个紫色菱形）比标准阻力曲线低15%。事实上，考虑方位涡量的控制方程 $\omega_\phi = \partial_z U_\sigma - \partial_\sigma U_z$，即可理解阻力降低的起因。旋转通过源项 $2\Omega\,\partial_z U_\phi$影响 ω_ϕ平衡，这与式(3.1)中的源项类似，但其中的 $\partial_z U_z$ 由 $\partial_z U_\phi$替代。在轴附近，该源项实际上等于 $2\Omega\sigma\partial_z\omega_z$。如§3.2所述，$\omega_z$ 在球体下游随其与后驻点距离的增加而增大（图6(c)证实了这一点）。因此，驻涡内部该源项为正，使 ω_ϕ 相较于非旋转构型产生正向变化。在轴附近，$\omega_\phi \approx -\partial_\sigma U_z$，因此 ω_ϕ的这一变化转化为 U_z 的增大，因为 $\sigma \to 0$；也就是说，越靠近旋转轴，轴向速度的正向变化越大。因此，当 U_z 在 $\mathcal{R}o \to \infty$极限下为负时，有限旋转效应会减小其绝对值，从而使局部压力升高，进而产生观测到的阻力降低。

图 13 绘出了实验和数值确定的阻力系数与 Tanzosh & Stone (1994) 提出的半经验预测（1.3）的对比。该预测预计在任意泰勒数下均有效。相比之下，考虑到（1.3）前两项所依据的（1.2）的适用范围，该预测应仅适用于雷诺数较低的情况。数值结果表明，只要 $C_D \gtrsim 6$，且计算域足够长，就与（1.3）高度吻合。事实上，根据附录 B 的结论，$C_D \geqslant 10^2$ 对应的结果采用扩展计算域获得，其半长度为 $\mathcal{L} \approx 10^3$；而较低 C_D 对应的结果则是在标准计算域（$\mathcal{L} = 180$）上获得的。注意，在中间范围 $8 \lesssim C_D \lesssim 10^2$ 内，两个计算域给出的预测吻合良好。与本文结果形成鲜明对比的是，Maxworthy 1970年的实验数据在 $C_D > 15$时便超出预测（1.3），且在较大的 C_D下，偏差可达 50%。用于考虑其装置中轴向约束效应的经验外推（1.5）（该装置的 $\mathcal{L} \approx 80$为相应数值，具体取决于球体尺寸）仅略有改善；对于 $C_D = \mathcal{O}(10^3)$，仍高估了 40%。当 C_D 足够低时，通常为 $C_D \lesssim 6$，（1.3）会高估阻力。这一范围对应较大的雷诺数和中等的罗斯贝数。在这些条件下，上述阻力

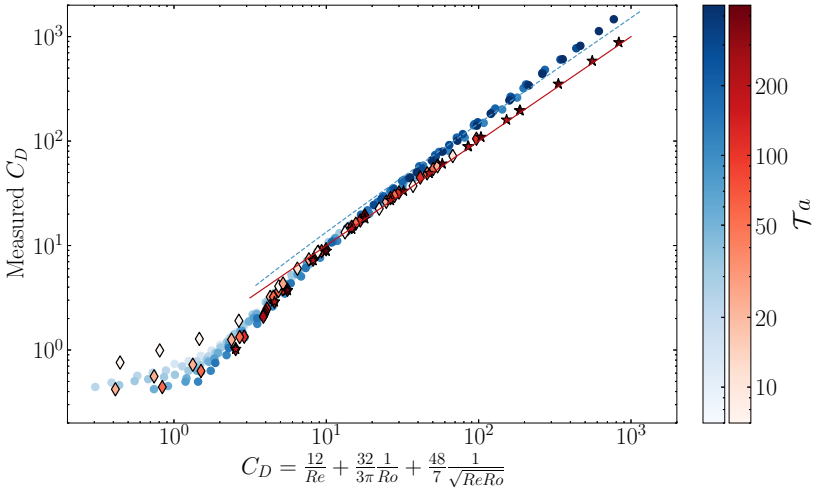

FIGURE 13. 测得的阻力系数与半经验预测式（1.3）的比较。——：预测式（1.3）；⧫，★：当前模拟，参数为 $\mathcal{L} = 180$ 和 $\approx 10^3$，分别对应；●：实验数据（Maxworthy 1970年）；- - - -：经“修正”的实验关系式（1.5）。红色和蓝色的色条分别代表数值数据和实验数据。在每组数据中，符号的颜色根据 $\mathcal{T}a$取值而变化，随着 $\mathcal{T}a$ 增大而逐渐变深。

降低机制会发挥作用，该机制与旋转导致驻涡缩短有关。显然，低-$\mathcal{R}e$ 渐近结果（1.2）并未包含这一机制所引起的阻力变化，因此简单的阻力定律（1.3）在这一范围内并不准确。相反，即使在中等至较大的雷诺数范围内，只要罗斯贝数略低于 1，（1.3）仍然成立。例如，令 $\mathcal{R}o = 0.5$ 和 $\mathcal{R}e = 100$，可得 $C_D \approx 7.9$；根据图 13，这接近（1.3）的适用范围下限。由此可见，这一简单的半经验预测实际上在低-$\mathcal{R}e$ 范围之外仍然有效，尽管原则上它本应仅适用于该范围。

目前的数值结果在两个数量级的 C_D（因此也包括 $\mathcal{R}o$）范围内与半经验预测（1.3）高度一致，这证明轴向约束效应是实验结果与理论模型之间长期存在、此前却未能解决的分歧的根源。通过考虑纳维–斯托克斯方程的定常轴对称解而恢复的一致性，也排除了问题可能源于非轴对称或非定常效应的可能性，尽管此前曾有人提出这种解释（Minkov等 2002年）。尽管 Maxworthy 正确地找到了问题的根源，但他提出的修正（1.5）存在偏差，因为它在很大程度上基于对其先前数据的外推；这些数据是在短得多的装置中获得的，且 $5 \lesssim \mathcal{L} \lesssim 10.5$ 取决于球体尺寸（Maxworthy 1968年）。这种外推并不恰当，因为短容器与长容器中的端部效应完全由不同机制引起，因此对阻力的影响也不同。在短容器中，泰勒柱与沿端壁分布的埃克曼层直接相互作用，这种相互作用在主导阶控制阻力，使 C_D 依照（1.4）所示的规律取决于黏度。长容器中的情况则不同，端壁只会产生一种（主要为无黏性的）阻塞效应，使泰勒柱略微压缩。这种差异会对物体附近的流动结构产生显著影响。例如，Ungarish 和 Vedensky（1995年）指出，对于薄圆盘，只有当比值 $\delta = \mathcal{L}/\mathcal{T}a$ 大于 0.08 时，才会出现上游回流。Maxworthy 的

1968年的实验是在非常大的泰勒数 $\mathcal{T}a \geqslant 2.5 \times 10^3$ 下进行的，因此所有相应数据都对应于 $\delta \leqslant 4 \times 10^{-3}$，在这一流态下，泰勒柱内部的流动与图1所示的流动结构（其对应条件为 $\delta = 0.93$）相去甚远。由于这些结构上的差异，将两种本质不同的流态混为一谈并进行外推，几乎不可能得到可靠结果。

还值得注意的是，Maxworthy于1970年的实验中，轴向约束效应实际上比根据容器与粒子的尺寸比 $\mathcal{L} \approx 80$ 和 $\mathcal{L} \approx 120$所预期的更为显著。事实上，阻力是通过测定上升粒子经过两组水平线之间所需的时间得出的；秒表启动时，这些粒子更靠近底壁，而秒表停止时则更靠近顶壁。Maxworthy对实验方案的描述缺少一些定量细节。尽管如此，可以合理推测，这两组线靠近围绕圆柱形旋转容器中部的“观察箱”的底端和顶端。由此可以估计，对于实现低-$\mathcal{R}o$ 条件的大-$\mathcal{T}a$ 粒子，球体下游可用的容器长度会随时间在 $48 \leqslant \mathcal{L} \leqslant 112$ 范围内变化。显然，颗粒上游可用的容器长度则随时间反向变化。因此，决定约束效应强弱的实际容器与粒子的尺寸比应在 $50 \lesssim \mathcal{L} \lesssim 80$ 范围内（图18和19中的灰色条）。相比之下，在当前计算中，轴向约束不会随时间变化，因为球体在整个计算过程中始终位于两端“壁面”的中间位置。在附录 B 中，我们考察了两个低-$\mathcal{R}o$ 案例中，随着计算域长度增加，阻力如何变化。根据这些变化，我们确定了拟合公式 (B1)，用于预测轴向约束效应导致的人工阻力增大。尽管由于实验与数值设置之间存在差异，使用时仍需谨慎，但这一拟合公式可用于设计或解读未来的实验。

图 14 总结了当前模拟在参数空间（$\mathcal{R}e$, $\mathcal{R}o$）中遇到的各种“状态”，阴影区域示意了 Maxworthy于1970年的实验所覆盖的范围。可以辨认出三个主要区域。实线以上，惯性效应占主导地位，超过刚体旋转所引起的效应，因此阻力偏离半经验预测 (1.3)。在此线以下，只要计算域足够长，数值预测便与 (1.3) 非常吻合。 $\mathcal{L} = 180$ 介于实线和虚线之间时，便满足这一条件。在虚线以下，约束效应变得更加显著，即当 $\mathcal{R}o < 0.125$ 且 $\mathcal{T}a > 150$时；在这一范围内，为消除这些效应，我们不得不使用 $\mathcal{L} \approx 10^3$ 的扩展计算域。尽管图 13 显示，只要 $\mathcal{R}o$ 足够低，与 (1.3) 的吻合便可延伸至模拟所考虑的最高雷诺数（$\mathcal{R}e = 300$），但仍须再次强调，在这样的雷诺数下，当旋转效应中等或较弱时，实际流动已不再是轴对称的；图14中的竖直点线对应于 $\mathcal{R}o \to \infty$极限下向三维性的转变，正说明了这一点。然而，正如 §3.1 中所讨论的，在非旋转极限下，三维效应对 $\mathcal{R}e \approx 150$ 时的阻力影响很小。因此，该范围内的当前结果（图 14 中倒数第二列竖直排列的菱形）仍适合与实验数据进行比较；而最右侧一列中带绿色轮廓的三个菱形（$\mathcal{R}e = 300$）对应的结果，则预计会受到非轴对称效应的显著影响。

4.2. 力矩

如 §2.1 所述，本研究通过设定球体以与未扰动流相同的速率旋转来进行计算。因此，球体受到非零

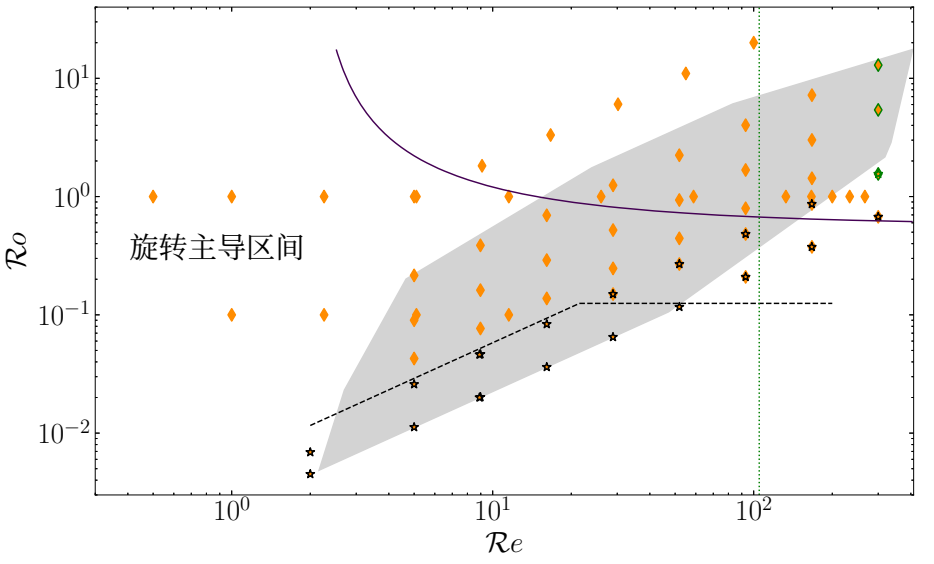

FIGURE 14. 当前数值模拟在参数空间（$\mathcal{R}e$，$\mathcal{R}o$）中涵盖的区间。♦，★ $\mathcal{L}=180$ $\mathcal{L}\approx 10^{3}$ ：分别在计算域和上进行的模拟；阴影区域：Maxworthy于1970年的实验所覆盖的参数范围；——：$\mathcal{R}o$ 与 $\mathcal{R}e$，由式（1.3）对 $C_D\approx 6$的预测；- - - -：在 $\mathcal{L}=180$条件下观察到约束效应的临界值以下区域；· · · ·：当 $\mathcal{R}o\to\infty$时尾流呈三维形态的临界值以上区域；绿色轮廓的菱形对应满足条件（$\mathcal{R}e=300$，$\mathcal{R}o>1$）的情况，在这些条件下，推测阻力会受到显著三维效应的影响。

力矩，值得考察该力矩如何随流动参数变化。利用 §2.3 中引入的定义，尤其是原点位于球心的球坐标系，力矩的 z 分量为

$$M_z=\mathbf{e}_z\cdot\int_{\mathcal{S}}a\mathbf{e}_r\times(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{T}\big|_{r=a})dS\,, \tag{4.1}$$

其中，$\mathcal{S}$ 表示球体表面。将表面牵引力$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{T}\big|_{r=a}$ 分量逐项展开后，可将式（4.1）化简为

$$M_z=-\rho\nu a\int_{\mathcal{S}}(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\theta)\partial_r U_\phi dS=2\pi\rho\nu a^3\int_0^\pi\sin^2\theta(\partial_r U_\phi)\big|_{r=a}d\theta\,. \tag{4.2}$$

注意到 $\sin^2\theta$ 关于赤道面 $\theta=\pi/2$对称，因此可将 U_ϕ 展开为具有这一性质的分量，即 z的偶函数，以及关于赤道面反对称的分量，即 z 的奇函数（形式上，例如可通过经由傅里叶变换实现）。只有 U_ϕ 的偶分量会对 M_z产生贡献。由于该分量源自负的上游轴向涡量的下游平流（见图5中的帧（a）– （b）、（e）– （f）和（h）– （i）），预计 M_z 为负；对于无转矩球体而言，这意味着其转速低于未扰动流体。因此，适合引入力矩系数 C_T，并通过$M_z=-\frac{\pi}{2}C_T a^3\rho U_\infty^2$将其与轴向转矩联系起来。根据此定义及上述说明，可得

$$C_T=-4\mathcal{R}e^{-1}\int_0^\pi\sin^2\theta(\partial_{r/a}U_\phi^e)\big|_{r=a}d\theta\,, \tag{4.3}$$

其中， U_ϕ^e 表示对 U_ϕ的无量纲偶对称贡献。

在边界层之外，其无量纲厚度记为 δ_B，有 $U_\phi^e \approx (\sigma/a)\omega_z^e$，其中 ω_z^e 表示 ω_z的（无量纲）偶分量。由于球体表面处$U_\phi^e = 0$，而赤道区域内 $\sigma/a \approx 1$，$(\partial_{r/a} U_\phi^e)\big|_{r=a} \sim \omega_z^e/\delta_B$，因此 $C_T \sim \mathcal{R}e^{-1}\omega_z^e/\delta_B$。为确定 C_T所遵循的标度律，必须考虑关于 ω_z 的控制方程 (3.1)，并牢记，当 $\mathcal{R}o \ll 1$和 $\mathcal{T}a \gg 1$时， $\delta_B \sim \mathcal{T}a^{-1/2}$ ；而在相反的极限 $\mathcal{R}o \gg 1$下， $\delta_B \sim \mathcal{R}e^{-1/2}$ ， $\mathcal{R}e \gg 1$。在后一种状态下，利用 § 3.2 中针对倾斜项 $-\omega_\sigma \partial_\sigma U_z$讨论的近轴近似，边界层外的 ω_z平衡在主导阶上简化为$U_\sigma \partial_\sigma \omega_z + (U_z + \sigma\partial_\sigma U_z)\partial_z \omega_z - \omega_z \partial_z U_z \approx 2\Omega \partial_z U_z$。由于径向位置 $\sigma/a \approx 1$ 处的轴向速度，在球体上游（下游）随着 z 增大而减小（增大），因此 $\partial_z U_z$ 的主导阶贡献是关于 z的奇函数。于是，球体绕流由 U_z 中的偶分量主导，并因连续性而在 U_σ中呈现奇分量。接着，根据上述 ω_z平衡形式可知， ω_z 的主导贡献关于 z为偶函数。在该状态下，科里奥利力的作用不会严格限制流场沿 z 方向的变化。因此，在边界层之外， $\partial_z \sim a^{-1} \sim \partial_\sigma$、$U_z \sim U_\infty$、 $U_\sigma \sim a\delta_B U_\infty$，且 ω_z平衡意味着 $U_\infty \omega_z/a \sim \Omega U_\infty/a$，即 $\omega_z \sim \Omega$，从而 $\omega_z^e \sim \mathcal{R}o^{-1}$。因此$\omega_z^e/\delta_B \sim \mathcal{R}e^{1/2}\mathcal{R}o^{-1}$ 并且

$$C_T\big|_{\mathcal{R}o \gg 1,\, \mathcal{R}e \gg 1} \sim \mathcal{R}o^{-1}\mathcal{R}e^{-1/2}\,. \tag{4.4}$$

现在考虑低-$\mathcal{R}o$ 极限，此时流场的显著轴向变化仅存在于埃克曼层内。对于 ω_z ，主导平衡关系为 $2\Omega\partial_z U_z \approx -\nu\nabla^2\omega_z$。在赤道面附近，埃克曼层内径向位置为 $\sigma \approx a$ 处的轴向变化发生在与球体半径同量级的距离上，因此 $\partial_z \approx a^{-1}$。该层外缘处的轴向速度为 U_∞ 量级，故有$\partial_z U_z \sim U_\infty/a$。由于 U_z 关于球体赤道近似对称， ω_z平衡中源项的主导贡献是 z的奇函数，因此 ω_z的主导贡献也是如此，记为 $\omega_z^o U_\infty/a$。 ω_z^o 的标度关系由平衡关系 $2\Omega U_\infty/a \sim \nu(U_\infty/a)\omega_z^o/(a\delta_B)^2$, 确定，由此得到 $\omega_z^o \sim 1$。若罗斯贝数较小但有限，流体流过球体时会通过项 $\{U_\sigma\partial_\sigma\omega_z^o + (U_z + \sigma\partial_\sigma U_z)\partial_z\omega_z^o - \omega_z^o\partial_z U_z\}U_\infty/a$对 ω_z分布产生小幅修正；该项近似为 z的偶函数。为平衡这一项，需要对 ω_z 作偶对称修正，记为 $\omega_z^e U_\infty/a$，并由相应的黏性项 $\nu(U_\infty/a)\nabla^2_{\sigma,z}\omega_z^e$提供。仍在赤道面附近，埃克曼层内 $\partial_\sigma \sim (a\delta_B)^{-1}$ ，而在其外缘 $U_\sigma \sim \delta_B U_\infty$ 。因此，上述惯性源项主要由贡献$U_\infty(\sigma/a)\partial_\sigma U_z \partial_z \omega_z^o \sim (U_\infty/a)U_\infty/(a\delta_B)\omega_z^o$决定，上述平衡关系意味着 $U_\infty/(a\delta_B)\omega_z^o \sim \nu\omega_z^e/(a\delta_B)^2$, , 即 $\omega_z^e \sim \mathcal{R}e\delta_B\,\omega_z^o$。根据 δ_B 和 ω_z^o所遵循的标度关系，可得$\omega_z^e \sim \mathcal{R}e\mathcal{T}a^{-1/2}$。因此 $\omega_z^e/\delta_B \sim \mathcal{R}e$ 并且

$$C_T\big|_{\mathcal{R}o \ll 1,\, \mathcal{T}a \gg 1} \sim 1\,, \tag{4.5}$$

这表明力矩系数现在与控制参数无关。因此，(4.4) 和 (4.5) 预测， C_T 呈现两种不同的标度律，具体取决于罗斯贝数和雷诺数的大小。在旋转主导区间，平流效应对占主导地位的轴向涡量平衡仅产生微小修正， C_T 为常数；而在平流主导区间， C_T 则随 $\mathcal{R}o$ 和 $\mathcal{R}e$ 增大而衰减。

图15展示了数值结果与上述预测的比较。当 $\mathcal{R}o\mathcal{R}e^{1/2}$ 小于 ≈ 5时，力矩系数与预测式（4.5）一致，其中

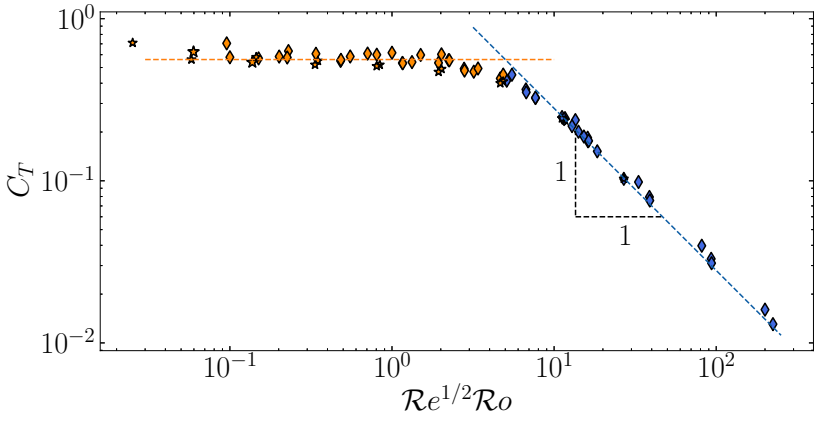

FIGURE 15. 力矩系数 C_T 随 $\mathcal{R}o\mathcal{R}e^{1/2}$变化。 ♦ 和 ★：分别是在具有 $\mathcal{L}=180$ 和 $\mathcal{L}\approx 10^3$的计算域上获得的结果。蓝色（分别为橙色）表示对应于 $C_D<6$ （分别为 $C_D\geqslant 6$）的构型。

$C_T=0.56\pm0.06$。超过 $\mathcal{R}o\mathcal{R}e^{1/2}\approx 5$后，即惯性效应中等至较强、旋转效应中等或较弱时， C_T 可由衰减定律 $C_T=2.8\,\mathcal{R}o^{-1}\mathcal{R}e^{-1/2}$很好地近似，这与（4.4）一致。正如图15中符号的颜色所示，第一个状态区间与图13显示阻力系数很好地符合预测式（1.3）的区间相吻合。相反，第二个状态区间则是 C_D 偏离该预测的区间。

力矩系数的数值结果可用于估算球体所需的差异旋转 Ω_s，以满足无力矩条件。事实上，这种旋转会在球体表面产生方位速度 $\Omega_s a\sin\theta$，因此，定义 (4.3) 中涉及的无量纲速度梯度 C_T 变为 $(\partial_{r/a}U_\phi^e)\big|_{r=a}\sim(\omega_z^e-\frac{a\Omega_s}{U_\infty}\sin\theta)/\delta_B$。力矩系数的近似变化量于是为 $4(\mathcal{R}e\delta_B)^{-1}\frac{a\Omega_s}{U_\infty}\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta=\frac{16}{3}(\mathcal{R}e\delta_B)^{-1}\frac{a\Omega_s}{U_\infty}$。观察图 7(*i*)，可以确定赤道面内旋涡速度 U_ϕ/σ 达到极值处与球体表面的距离。据此可得低雷诺数和高雷诺数状态下的近似估算值$\delta_B\approx 2.0\,\mathcal{T}a^{-1/2}$和 $\delta_B\approx 2.0\,\mathcal{R}e^{-1/2}$。在前一种状态下，数值结果表明 $C_T\approx 0.56$，因此当 $\frac{a\Omega_s}{U_\infty}\approx-\frac{3}{16}\times 0.56\,\mathcal{R}e\,\delta_B\approx-0.2\,\mathcal{R}e\mathcal{T}a^{-1/2}$时即可满足无力矩条件。类似地，在高雷诺数状态下，我们发现 $C_T\approx 2.8\,\mathcal{R}o^{-1}\mathcal{R}e^{-1/2}$，因此 $\frac{a\Omega_s}{U_\infty}\approx-1.0\,\mathcal{R}o^{-1}$。相对于施加的刚体旋转速率进行归一化后，这些估算值为

$$\frac{\Omega_s}{\Omega}\Big|_{\mathcal{R}o\ll1,\,\mathcal{T}a\gg1}\approx-0.2\,\mathcal{R}o^{3/2}\mathcal{R}e^{1/2}\quad\text{and}\quad\frac{\Omega_s}{\Omega}\Big|_{\mathcal{R}o\gg1,\,\mathcal{R}e\gg1}\approx-1.0\,. \tag{4.6}$$

在低-$\mathcal{R}o$ 状态下，差动旋转预计非常微弱，例如在图5(*g*)所示的构型中，$\Omega_s/\Omega=-1.7\times10^{-3}$。相比之下，当罗斯贝数和雷诺数都很大时，预计球体相对于实验室参考系的旋转可以忽略不计（图5中的(*b*)、(*c*)和(*f*)）。当然，这些只是粗略估计，因为我们在评估式（4.3）中的速度梯度时采用了简化近似，而且球体旋转预计会使球体附近方位涡量的分布略有改变。还要指出，在 $\mathcal{R}e\ll\mathcal{T}a^{1/2}\ll1$极限下，Childress（1964）预测了$\Omega_s/\Omega\approx-\frac{1}{5}\mathcal{R}e^2\mathcal{T}a^{-1/2}$。这一预测与本文所得结果不同，尤其是在低-$\mathcal{R}o$ 状态下，因为式（4.6）中的第一个估计可改写为

工况	$\mathcal{T}a$	$\mathcal{R}o$	$\mathcal{R}o\mathcal{R}e^{1/2}$	C_D	ΔC_D	C_T	Ω_s/Ω
(g)	445	0.02	0.06	196.2 196.1	0.05	0.63 –	– -0.0015
(d)	117	0.076	0.227	58.42 58.33	0.15	0.632 –	– -0.0098
(h)	445	0.117	0.843	33.32 33.20	0.36	0.52 –	– -0.042
(a)	23。2	0.384	1.145	14.27 14.14	0.92	0.53 –	– -0.067
(e)	117	0.444	3.20	8.84 8.72	1.38	0.471 –	– -0.26
(i)	445	0.375	4.846	8.91 9.04	-1.44	0.411 –	– -0.37
(b)	23.2	2.24	16.15	1.25 1.14	7.89	0.18 –	– -0.72
(f)	117	1.43	18.48	1.34 1.22	9.84	0.152 –	– -0.81
(c)	23.2	7.2	93.05	0.558 0.543	2.76	0.033 –	– -0.86

TABLE 1. 球体旋转对阻力的影响。结果按 $\mathcal{R}o\mathcal{R}e^{1/2}$ 的值递增排列。第一列中的标签对应图5中的各帧；对于每组条件，第一行中的阻力系数（C_D^0）是在 $\Omega_s = 0$ 条件下获得的，而第二行中的阻力系数（C_D^{tf}）对应无力矩条件； $\Delta C_D = (C_D^0/C_D^{tf} - 1) \times 100$ 表示两个阻力系数之间的百分比差异。案例（g） $-$（i）是使用扩展计算域和 $\mathcal{L} \approx 10^3$ 计算得到的。

$\Omega_s/\Omega \approx -0.2\,\mathcal{R}e^2\mathcal{T}a^{-3/2}$，这对应于对$\mathcal{R}e$ 具有相同的依赖关系，但随 $\mathcal{T}a$衰减得更快。这并不意外，因为我们假设泰勒数很大，因此当 $\mathcal{R}o$ 较低时，控制物体旋转的所有过程都由埃克曼层支配。相比之下，Childress 的分析假设 $\mathcal{R}e \ll \mathcal{T}a^{1/2} \ll 1$，因此，导致这种差动旋转的惯性效应只会在距离物体较远处才显现，即在大$\mathcal{O}(\mathcal{T}a^{-1/2})$无量纲距离处。

为检验上述对 Ω_s 的预测，并评估这种旋转对阻力的影响，我们进行了额外的数值模拟，对应于无力矩条件。我们通过迭代施加这一条件；对于情形 $\Omega_s = 0$，当最终力矩小于其稳态值的1%时，即认为达到收敛。我们针对图5展示流动结构的九种情形进行了这些模拟。这些构型涵盖了本研究所考虑的各种条件，尤其是图15所示的两种流态。模拟结果汇总于表1。可以看出，在所有 $\mathcal{R}o \lesssim 0.5$的情形下，球体旋转对阻力的影响都可以忽略（即两个 C_D 值之差小于2%）。在旋转程度中等至较低时，这种影响较大，这与根据该流态下由式(4.6)预测的 Ω_s/Ω 的 $\mathcal{O}(1)$值所预期的一致。尽管如此，两个 C_D 之间的相对差异始终不超过10%。因此，用无力矩条件下的结果替换图11和图13中采用 $\Omega_s = 0$ 得到的结果，不会造成任何视觉差异，即便是在惯性作用最强的流态下也是如此。式(4.6)预测情形

(*g*)下的 $\Omega_s/\Omega = -1.0$ 和情形(*c*)下的 $\Omega_s/\Omega = -1.0$ ，这与表1顶行和底行所列的数值吻合良好。

5. 总结与结论

借助数值模拟，我们重新研究了这一经典问题：刚性球体在充满弱黏性流体的旋转容器中沿轴稳态平移。假设流动为轴对称，且球体以与容器相同的角速度旋转，我们考察了范围$\mathcal{T}a \in [20, 450]$和 $\mathcal{R}e \in [5, 300]$内的大量组合，涵盖罗斯贝数范围 $\mathcal{R}o \in [10^{-2}, 10]$。这些条件对应于 Maxworthy 在其1970年经典研究中进行的实验（Maxworthy 1970）。

按照当今标准，从数值角度看，这个问题似乎很简单，但在计算域和离散网格方面实际上颇具挑战。原因在于，必须准确捕捉环绕物体的薄埃克曼边界层中的流动，以及沿近轴区域（对应泰勒柱）在物体上游和下游极远处的流动。这大概就是为什么时隔半个世纪，人们才在计算机上重现 Maxworthy的实验。我们通过采用贴体正交曲线网格解决了这一技术难题；该网格兼具球体附近球坐标的优点，以及远离球体处柱坐标的优点。

得益于该网格的设计，我们能够在所需的参数范围内详细考察流动特征，并将若干物理量与现有预测进行了定量比较。尤其是，我们观测到了球体辐射出的惯性波形，并确认其相关波长与无黏理论预测吻合良好 $\Lambda = \pi\mathcal{R}o$ （Taylor 1922年）。我们还考察了泰勒柱内流动特征如何随控制参数变化。具体而言，我们发现，对于 $\mathcal{T}a \gtrsim 100$，上游回流区的长度遵循 Tanzosh & Stone (1994) 在零-$\mathcal{R}o$ 极限下确立的规律 $\ell_s = 0.052\,\mathcal{T}a$ 。通过分析不同高度处的三个速度分量的水平切片，我们还阐明了一些有趣的低-$\mathcal{R}o$ 机制，例如，当沿轴向远离物体、经过近地转区和回流区时，角向旋流逐渐呈现近似塞状分布的机制。赤道面上的切片也有助于揭示惯性效应造成的若干结果，这些效应打破了零罗斯贝数极限下固有的对称性。尽管在 $\mathcal{R}o = 0$ 时，这些对称性要求该平面内的径向速度和方位速度为零，但我们发现，这两个速度分量在埃克曼层内形成较大的负峰值；对于 $\mathcal{R}o \approx 0.5$，其最小值分别约为球体速度的 20% 和 60%。相反，这些效应大幅降低了零-$\mathcal{R}o = 0$ 极限下该层内轴向速度所出现的大正峰值；对于 $\mathcal{R}o \approx 0.5$，峰值减半，这当然会直接影响前后泰勒柱之间的流体交换。

我们确定了球体在大量（$\mathcal{T}a$，$\mathcal{R}e$）参数组合下所受的阻力，并将数值结果与 Maxworthy 1970年的数据及现有预测进行了系统比较。将计算域具有 $\mathcal{L} = \mathcal{O}(10^2)$ 的低-$\mathcal{R}o$ 高-$\mathcal{T}a$ 数值结果，与 Tanzosh & Stone (1994) 基于边界积分方法得到的零-$\mathcal{R}o$ 预测（因此对应无限域）进行比较后，我们清楚地发现，在此参数范围内，轴向约束效应会显著增大阻力，这是因为它们会轻微改变泰勒柱的结构。为尽可能消除这种不利影响，我们设计了一个网格，其 $\mathcal{L} = \mathcal{O}(10^3)$ 满足以下条件：

在该网格上得到的阻力系数与零-$\mathcal{R}o$ 预测相差仅几个百分点。因此，阻力对轴向约束效应极其敏感，这正是 Maxworthy 1970年的数据（在 $\mathcal{L} \approx 80$ 的容器中获得）系统性地显著高于理论预测的原因。消除这些效应后，阻力系数与半经验定律 (1.3) 吻合良好；该定律考虑了旋转、黏度和弱惯性的综合影响。事实上，研究发现，(1.3) 的适用范围涵盖了满足 $C_D \gtrsim 6$ 的所有条件。因此，我们可以得出结论：只要旋转效应足够强，(1.3) 在 $\mathcal{R}e = \mathcal{O}(10^2)$ 以内均适用。相反，当惯性效应过于占主导时，(1.3) 会高估阻力。值得注意的是，在高-$\mathcal{R}e$ 且中到高- $\mathcal{R}o$ 的范围内，为静止流体中平移球体设计的标准定律也会高估阻力。这可能是因为（弱）旋转效应影响了球体尾流中的方位涡量。旋转会增大该区域内这一涡量分量，减弱驻涡中的负轴向流体速度，从而降低压差阻力；球体后方的数值速度和压力分布证实了这一过程。

由于假设球体以与未扰动流体相同的速率旋转，因此我们可以确定其所受的力矩。结果表明，该力矩遵循两种不同的标度律，具体取决于流动状态。当旋转效应占主导地位时，力矩系数保持不变，更确切地说，只要 $\mathcal{R}o\mathcal{R}e^{1/2} \lesssim 5$。相比之下，在惯性占主导地位的状态下，该系数按 $\mathcal{R}o^{-1}\mathcal{R}e^{-1/2}$ 衰减。有趣的是，与两种标度关系之间转变相对应的条件，恰好与阻力定律（1.3）失效的临界条件一致，即 $C_D \approx 6$。通过考察球体附近的轴向涡量平衡及其关于赤道面的相关对称性，可以解释这两种标度律；由此能够确定控制对称涡量分量的主导标度，而该分量源于平流效应。利用力矩的数值结果，推断出了达到无力矩条件时球体的差动旋转。研究发现，在旋转占主导地位的状态下，差动旋转速率与外部流体旋转速率之比按 $\mathcal{R}o^{3/2}\mathcal{R}e^{1/2}$ 缩放；而在惯性占主导地位的状态下，该比值变为常数。在无力矩条件下进行了一些数值模拟。结果表明，只要罗斯贝数小于 1，球体旋转几乎不会影响阻力；而在惯性最强的状态下则存在一定影响，相对差异为 $\lesssim 10\%$。

本研究仍有必要沿至少三个方向进一步拓展。首先，本文有意忽略了三维效应。尽管在我们研究的参数范围内，这些效应对阻力的影响可能微乎其微，但仍值得对这一次要效应进行量化。从更根本的角度来看，确定尾流转变为三维流动的临界值 $\mathcal{R}e_c(\mathcal{R}o)$、相应分岔的性质以及首个三维模态的空间结构，将极大丰富我们对轴对称物体周围高-$\mathcal{R}e$ 低至中等-$\mathcal{R}o$ 流动的认识。目前，用于对轴对称开放流进行全局线性稳定性分析的数值工具已相当成熟，也很容易加以改造来解决这一问题。

其次，尽管本文只报告了稳态构型的结果，瞬态状态也值得研究。特别是，在给定雷诺数下，考察旋转速率突然增大或减小时流动结构和阻力如何变化，是预测快速旋转悬浮液和离心过程中的瞬态效应时一个相关的问题。由于这种变化会导致

阻力发生变化，颗粒的沉降或上升速度也会随之改变。描述在黏性流体中时变条件下运动的颗粒速度的力平衡，通常分解为若干不同的贡献，尽管这种分解只有在爬行流条件下才有严格依据。除净重力和稳态（或准稳态）阻力外，还包括一个抵抗颗粒与流体之间相对加速度的附加质量力，以及一个由涡量非定常输运经过颗粒所产生的历史力。附加质量效应源于流体无法穿透物体表面，因此相应的力仅取决于瞬时相对加速度和物体形状。因此，在给定加速度时，该力不受旋转效应影响；我们通过数值模拟证实了这一结论（Aur´egan 2020年）。历史项则有所不同，其演化取决于相对加速度的过往历史，并由时变核函数加权。该核函数描述颗粒表面涡量的变化如何在黏度、惯性以及可能存在的非保守力（此处为科里奥利力）的共同作用下传播至流场中。因此，预计该核函数会随罗斯贝数变化。在上述初步研究中，我们验证了确实如此。因此，针对刚体旋转条件下历史效应开展系统研究，是未来工作的一项重要目标。这项研究或许应结合零-$\mathcal{R}o$极限下的理论方法与数值模拟，以探究有限平流效应的影响。

最后但同样重要的是，液滴和气泡还带来了值得深入研究的问题。Bush 等（1992年）（针对短容器）以及 Bush、Stone 和 Bloxham（1995年）（针对短容器和长容器）在零-$\mathcal{R}o$ 极限下开展的理论研究，为了解液滴与流体的黏度比以及离心力与表面张力之比（即所谓的旋转邦德数）的影响提供了有趣的见解。研究表明，液滴会因离心力而呈长椭球形；旋转邦德数越大，液滴沿旋转轴方向拉伸得越长。值得注意的是，研究预测，在长容器中，液滴的上升或沉降速度几乎不受液滴黏度和具体形状的影响，基本上只取决于其赤道半径。原因在于，阻力直接取决于流体从前方泰勒柱输运到后方泰勒柱的效率；在长容器中，这种输运主要通过斯图尔特森层，而不是经由埃克曼边界层进行。目前，人们基本上还不清楚平流效应会如何改变这些特征，但有理由认为，与实验数据相比，零-$\mathcal{R}o$ 近似对阻力的预测显著偏高，很大程度上是由这些效应造成的。Ungarish（1996年）提出了一种“准地转”近似，其中纳入了一些有限惯性修正，以解决这一问题；但这种改进仅略微缩小了差异。这些都是有必要将此处开展的研究扩展至液滴和气泡的原因。尽管这在技术上颇具挑战性，如今已有多种数值方法能够高效、准确地处理具有有限表面张力的可变形界面上的边界条件。因此，探究存在有限平流效应时，零-$\mathcal{R}o$ 条件下的研究结果会发生怎样的变化，是当前工作的一个令人振奋且切实可行的延续方向。

致谢

作者感谢 Marius Ungarish 教授进行了富有启发性的讨论，为本研究提供了灵感，并对稿件初稿提出了有益意见。本研究的部分工作使用了 CALMIP 提供的高性能计算资源（资助

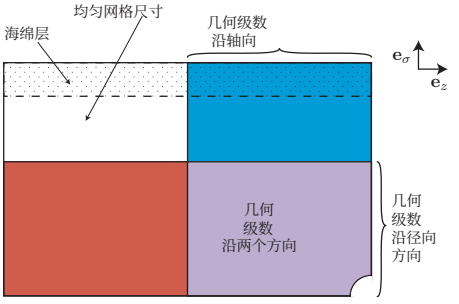

FIGURE 16. 网格不同区域的示意图。

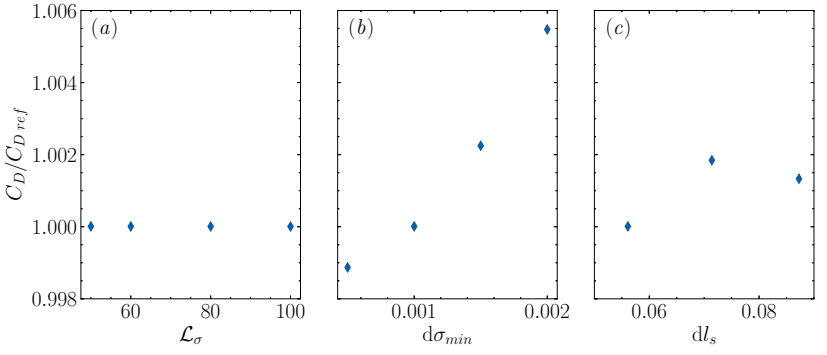

FIGURE 17. 对于 $\mathcal{R}o = 0.1$ 和 $\mathcal{T}a = 400$，阻力对网格某些特性的敏感性。（a）：计算域半径 $\mathcal{L}_\sigma$ 的影响；（b）：球体表面和旋转轴方向上第一行网格单元厚度的影响（$\mathrm{d}\sigma_{min}$ 为非均匀区域下游端和上游端对应的厚度）；（c）：与球体表面相邻网格单元长度 $\mathrm{d}l_s$ 的影响。参考阻力系数$C_{D,\,ref}$，采用本研究中始终使用的标准值 $\mathcal{L}_\sigma = 60$、$\mathrm{d}\sigma_{min} = 1 \times 10^{-3}$ 和 $\mathrm{d}l_s = 5.6 \times 10^{-2}$ 计算得到。

2020年-[P1525]）。

利益声明。 作者声明不存在利益冲突。

作者 ORCID。
T. Aur´egan https://orcid.org/0000-0001-6301-9006；T. Bonometti https://orcid.org/0000-0001-6869-553X；J. Magnaudet https://orcid.org/0000-0002-6166-4877。

附录A. 网格设计

如 §2.2 所述，网格包含一个包围球体的非均匀网格单元区域（图16中的紫色区域），以及一个远离物体、网格单元沿一个方向保持均匀的区域。在非均匀区域中，随着与球体表面的距离增加，网格单元尺寸按照几何级数逐渐增大。因此，控制网格的参数包括：(i) 最靠近球体的网格单元以及沿旋转轴排列的网格单元的尺寸，即与球体表面相邻的网格单元的周向长度，以及最靠近球体和旋转轴的网格单元行的径向厚度；(ii) 控制两个方向上网格单元尺寸变化的几何级数公比；

（iii）非均匀区域与均匀区域之间发生过渡的径向和轴向位置；以及 (iv) 两个方向上计算域的总尺寸。下文中，所有尺寸均以无量纲形式表示，并以球体半径为基准进行归一化。

如图3所示，球体两极处的网格存在奇异性，因此对极点附近网格单元的控制尤为重要。为选择紧邻球体表面且最靠近两极（即接触旋转轴）的网格单元厚度Δ_p，我们首先考察了计划研究的 $\mathcal{R}e$ 和 $\mathcal{T}a$ 的最大值，即 $\mathcal{R}e = 300$ 和 $\mathcal{T}a = 450$。在这些取值下，“惯性”边界层和埃克曼层的厚度分别约为 0.058 和 0.047。已知当前代码在边界层中采用 $4-5$个网格单元时，能够恰当地描述局部速度剖面（Magnaudet & Mougin 2007年；Auguste & Magnaudet 2018年），因此选取 $\Delta_p \approx 1 \times 10^{-2}$ 是合适的。由于沿轴向远离球体时网格单元逐渐变薄，通过在非均匀区域的上游端点和下游端点处选取最小径向网格单元尺寸 $\mathrm{d}\sigma_{min} = 1.10^{-3}$，即可得到上述 Δ_p 值；我们将其固定为 $|z| = 50$。在球体附近，同一行的网格单元在赤道附近远比两极处薄。采用上述 $\mathrm{d}\sigma_{min}$后，紧邻球体且最靠近赤道的网格单元厚度为 $\approx 1.2 \times 10^{-3}$，这确保了赤道部分边界层中预期出现的大速度梯度能够得到充分捕捉。我们将非均匀区域内网格单元径向增长的公比设为 1.10。非均匀区域与均匀区域之间的过渡位置固定为 $\sigma = 30$，因此，位于这两个区域公共边界附近及其以外的网格单元（图16中的蓝色和白色区域）的径向尺寸约为 2.5。采用这些参数后，非均匀区域内沿径向分布有 86 个网格单元。关于极向离散化，Auguste & Magnaudet（2018年）指出，在纯惯性流中，沿球体表面从一极到另一极均匀布置 64 个网格单元，至少在 $\mathcal{R}e = 500$范围内即可得到收敛结果。因此，在当前情形下，稍粗的离散化已足够，我们选取角分辨率 $\Delta\theta = \pi/56$，使球体表面网格单元的长度为 $\mathrm{d}l_s \approx 5.6 \times 10^{-2}$。越过两极后，旋转轴上的第一个网格单元长度被设定为与球体表面网格单元相同，即 $\mathrm{d}l_s$。随后，沿轴向远离物体时，网格单元按照另一几何级数逐渐加长，公比为 1.05。非均匀区域内沿轴向分布有 75 个网格单元，延伸至 $|z| = 50$。在此位置，网格单元长度约为 2.5，此后保持不变。沿旋转轴还分布有另外 54 个长度相同的均匀网格单元，覆盖 $|z| > 50$（图16中的红色区域），因此计算域终止于 $z = \pm\mathcal{L} = \pm 180$。

为选择计算域的外部无量纲半径 $\mathcal{L}_\sigma$，需要考虑惯性效应占主导、强于旋转效应的情形，因为后者预计会使流动沿旋转轴“收紧”（除惯性波辐射外，这一效应由海绵层专门处理）。由于 $\mathcal{R}e$ 越小，球体诱导的扰动扩散所覆盖的径向距离就越大，因此我们考察了本研究所考虑的最小雷诺数对应的情形，即 $\mathcal{R}e = 5$。Magnaudet 等人（1995年）证明，在此状态下，选择$\mathcal{L}_\sigma = 40$ 可确保不会出现虚假的约束效应。因此，考虑到海绵层还需占据额外宽度，我们选择了 $\mathcal{L}_\sigma = 60$；具体做法是在非均匀区域的外边界之外，再增加 10 个厚度均匀的网格单元。值得注意的是，Minkov 等人（2000年）得出结论：

对于处于低-$\mathcal{R}o$状态的圆盘，只要 $\mathcal{L}_\sigma > 5$，侧边界的影响就可以忽略，通常为 $\mathcal{R}o \leqslant 1 \times 10^{-2}$。然而，对于更大的罗斯贝数，这一结论显然不再成立；罗斯贝数通常处于 $0.1 \lesssim \mathcal{R}o \lesssim 10$ 范围内，而本文的大部分计算都属于这种情况。

我们具体评估了 $\mathrm{d}l_s$、$\mathrm{d}\sigma_{min}$（因此，Δ_p）和 $\mathcal{L}_\sigma$ 对案例$\mathcal{R}o = 0.1$、$\mathcal{T}a = 400$（即 $\mathcal{R}e = 40$）的影响；该案例中，泰勒柱在球体上游和下游的延伸程度适中。图17展示了阻力系数随这三个量的变化情况。在这三种情况下，当参数在其变化范围内取值时，C_D 的变化均小于0.5%。其中，最敏感的参数是最小径向网格单元尺寸 $\mathrm{d}\sigma_{min}$。这并不意外，因为该参数决定了捕捉边界层所能达到的空间分辨率。由于阻力在最小的两个取值之间仅变化 0.1%，我们认为采用 $\mathrm{d}\sigma_{min} = 1 \times 10^{-3}$ 即可实现网格收敛，并在整个研究中保留这一取值。采用上述各项网格参数和计算域尺寸（$\mathcal{L} = 180, \mathcal{L}_\sigma = 60$）后，总网格在轴向和径向分别包含 $2 \times （28 + 75 + 54） \times （86 + 10）$ 个网格单元。

与上述网格特征相比，具有$\mathcal{L} = 962$ 的扩展计算域是通过将非均匀区域沿轴向扩展至 167 个球体半径而获得的。在保持公比和球体表面离散化不变的情况下，我们在非均匀区域内布置了 101 个网格单元，其中最大的单元长度约为 8.75 个球体半径。随后，在保持该长度不变的情况下，通过再添加 91 个均匀网格单元，将计算域扩展至 $\mathcal{L} = 962$。在这种情况下，网格在轴向和径向分别包含 $2 \times (28 + 101 + 91) \times (86 + 10) = 440 \times 96$ 个网格单元。

附录 B. 轴向约束效应

在一次计算域较短（$\mathcal{L} \approx 40$）的初步模拟中，我们注意到，在$\mathcal{R}e = 8.9$ 和 $\mathcal{T}a = 445$ ($\mathcal{R}o = 0.02$)条件下，阻力相较于式 (1.3) 偏差约为 50%。对流动的检查表明，尽管上游和下游回流区仅延伸至可用长度的 15%，泰勒柱却一直延伸到计算域的入口和下游海绵区。因此，轴向速度在接近端壁时会突然恢复到其规定值。由此不可避免地得出结论：距离球体“过近”的上边界或下边界会压缩泰勒柱，并可能导致阻力大幅人工增大。

为确定超过该值后约束效应变得可以忽略（或者更确切地说，变得“可接受”）的计算域最小轴向尺寸，我们使用上述（$\mathcal{R}e,\ \mathcal{T}a$）组参数进行了详细的敏感性研究。具体而言，我们构建了一系列长度递增的网格，使 $\mathcal{L}$ 变化超过一个数量级，从 $\mathcal{L} = 40$ 到 $\mathcal{L} = 962$。在所有情况下，球体均位于两个端壁之间的中点。我们分别通过将阻力系数与式（1.3）进行比较，以及将 ℓ_s 上游回流区的长度与 Tanzosh & Stone (1994) 在零-$\mathcal{R}o$ 极限下的数值预测进行比较，来评估约束效应，$\ell_s = 0.052\,\mathcal{T}a$（见§3.4）。该研究结果见图18。可以观察到，采用标准计算域长度 $\mathcal{L} = 180$时，上游回流区的长度（图18（a））仍被显著低估。要使其与零-$\mathcal{R}o$ 值的偏差在1%以内，至少需要半长度 $\mathcal{L} \approx 700$。对于足够短的计算域（$\mathcal{L} \lesssim 30$），不再能检测到上游回流，因为球体上游的轴向速度始终不改变符号。正如图18（b）所示，阻力方面的情况甚至更加严重：将计算域半长度达到 10^3, 时所得的结果进行外推，必须得出结论，只有超过

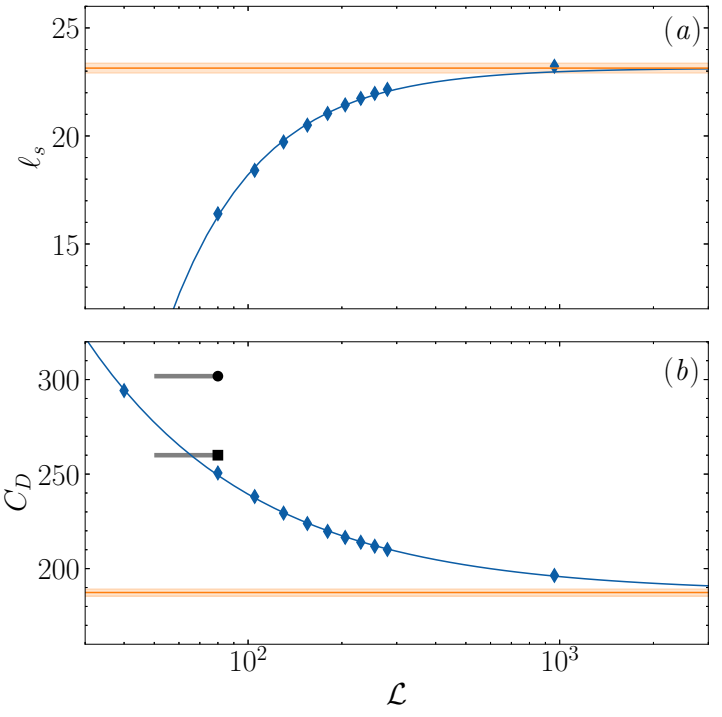

FIGURE 18. 轴向约束对 $\mathcal{R}o = 0.02$ 和 $\mathcal{T}a = 445$ ($\mathcal{R}e = 8.9$)的影响。（a）：上游回流区长度；（b）：阻力系数。 ♦：本文结果；——：在无界区域中，当 $\mathcal{R}o = 0$ 时，Tanzosh & Stone (1994) 的预测（阴影区域对应渐近值附近的 ±1%区间）；——：对本文结果进行的最佳拟合，并约束其在 $\mathcal{L} \to \infty$时趋于渐近值； •：Maxworthy（1970年）在 $\mathcal{L} = 80$ 条件下于容器中测得的阻力（根据 $\mathcal{R}e = 7.8$ 和10。4的数据插值得到，两者均具有 $\mathcal{T}a = 445$）；■：基于式（1.5）对相同实验数据的外推。灰色条表示实验中所用颗粒沿“观察箱”上升时的 $\mathcal{L}$ 范围，阻力即在该观察箱内测定。

$\mathcal{L} \approx 10^4$ 后，阻力才可能与理论预测值的偏差在1%以内。在图18（b）中，我们加入了Maxworthy（1970）针对同一组参数（圆点）确定的阻力。该结果与理论预测值的差异约为55%。基于外推式（1.5）得到的“修正”结果（黑色方块）仍将 C_D高估了约35%。

我们以较小的泰勒数 $\mathcal{T}a = 193$ 重复了分析，且仍然取 $\mathcal{R}e = 8.9$ ($\mathcal{R}o = 0.046$)。结果见图19。在这种情况下，上游回流明显更小（$\ell_s \approx 10$）。然而，图19(a)表明，计算域必须比前一种情况（$\mathcal{L} \approx 10^3$）更长，数值估算的 ℓ_s 才能与零-$\mathcal{R}o$ 预测相差不超过百分之一；而且只有当计算域长度超过 $\approx 2 \times 10^3$ 时，阻力系数才与 (1.3) 相差不超过百分之一。不过请注意，由于 $\mathcal{R}o$ 大于前一种情况，Tanzosh & Stone (1994) 的零-$\mathcal{R}o$ 预测预计会略欠准确。因此，即使计算域无限长，也无法保证与这些预测相差不超过百分之一。

上述结果重新绘制于图20中，其中计算域半长按泰勒数重新缩放，遵循 Hocking等（1979）的渐近分析。可以看出，两组结果均遵循幂律，其参数略微依赖于 $\mathcal{R}o$。

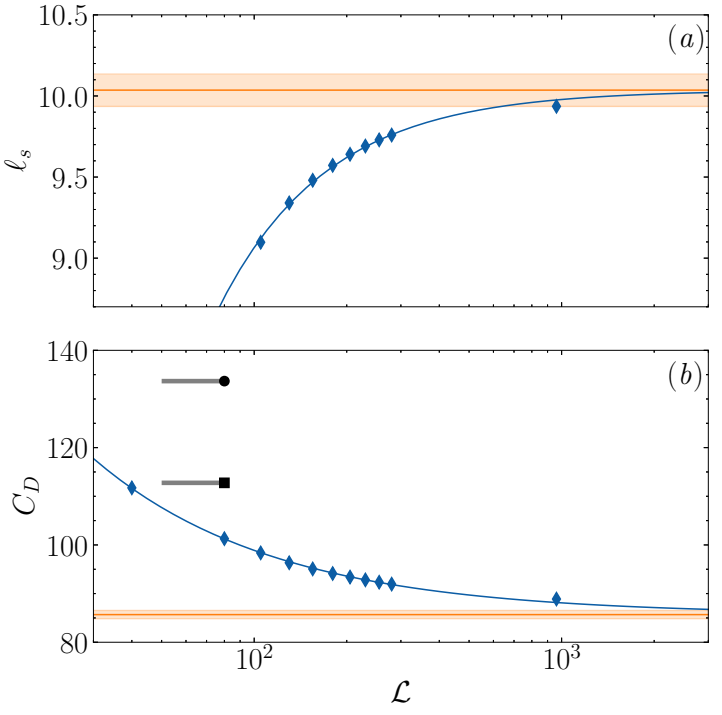

FIGURE 19. 与图18相同，适用于 $\mathcal{R}o = 0.046$ 和 $\mathcal{T}a = 193$ （即仍为 $\mathcal{R}e = 8.9$）。

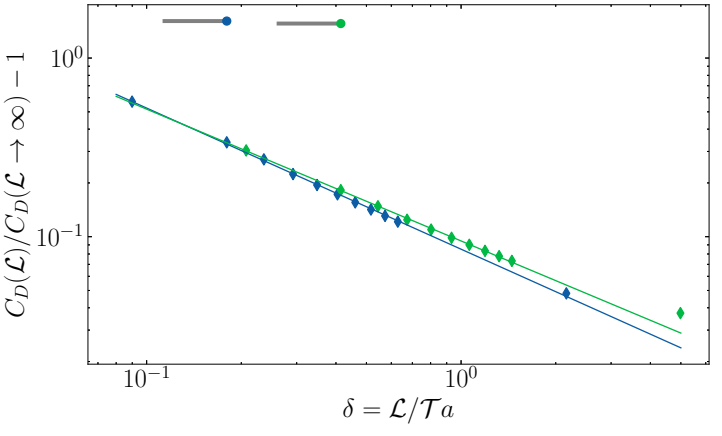

FIGURE 20. 阻力系数随归一化计算域半尺寸的变化 $\delta = \mathcal{L}/\mathcal{T}a$。♦：$\mathcal{R}o = 0.046$，$\mathcal{T}a = 193$；♦：$\mathcal{R}o = 0.02$，$\mathcal{T}a = 445$。圆点和灰线表示 Maxworthy 的实验条件。实线：关联式 (B 1)。

这些结果可由以下经验公式准确拟合

$$\frac{C_D(\mathcal{L})}{C_D(\mathcal{L}\to\infty)} - 1 \approx 7.78\times10^{-2}(1+4.7\mathcal{R}o)\delta^{-0.83+2.0\mathcal{R}o}\,. \tag{B 1}$$

当然，依赖于 $\mathcal{R}o$ 的修正项适用范围有限，鉴于其仅基于两组低-$\mathcal{R}o$ 数据，预计其有效范围不会超出 $\mathcal{R}o \approx 0.1$。此外，对 $\mathcal{R}o$ 的敏感性可能是人为造成的，因为我们对约束效应的评估

是基于与零-$\mathcal{R}o$ 预测值 (1.3) 的差异，而随着 $\mathcal{R}o$ 增大，该预测值的准确性预计会降低。尽管如此，这一拟合或许有助于在未来的实验中粗略估算轴向约束效应。当然，必须牢记，封闭容器中采用的无滑移条件与当前模拟中施加于两个端面的边界条件（以及海绵层的存在）并不相同。此外，模拟中球体固定在两端面中间，而实验中球体朝其中一个端面移动、远离另一个端面，这一事实也会造成显著差异。

总的来说，在当前问题中，计算域的轴向长度，或等价地说，实验容器的高度至关重要。这是因为在低-$\mathcal{R}o$ 大-$\mathcal{T}a$ 状态下，泰勒柱会与端壁发生直接的运动学相互作用。在此状态下，轴向约束效应是实验数据与阻力预测式 (1.3) 之间出现偏差的主要原因。因此，在 §4 中，我们只讨论几乎不受这些效应影响的结果。实际操作中，我们舍弃了这样一些数值模拟结果：球体尾流中的轴向速度在进入海绵区之前，尚未衰减至至少 $0.9\,U_\infty$ 。因此，我们排除了在标准计算域上、 $\mathcal{L}=180$ 条件下获得的 ($\mathcal{T}a>150$, $\mathcal{R}o<0.125$) 范围内的结果，并以在扩展计算域上、$\mathcal{L}=962$ 条件下获得的结果取而代之。

REFERENCES

Auguste, A. & Magnaudet, J. 2018 轻质上升球体的路径振荡与阻力增强。 *J. Fluid Mech.* **841**, 228–266。Aurégan, T. 2020 旋转流体中沿轴平移的球体周围流动的直接数值模拟。 *Master Thesis Rep.*, ISAE Sup'A´ero, 图卢兹, 法国, 参见: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03927971。Baker, D. J. 1967 旋转流体中的剪切层。 *J. Fluid Mech.* **29**, 165–175。Bush, J. W. M., Stone, H. A. & Bloxham, J. 1992 有界旋转流体中无黏液滴的运动。 *Phys. Fluids A* **4**, 1142–1147。Bush, J. W. M. Stone H. A. & Bloxham J. 1995 *J.* , , , *Fluid Mech.* **282** 247 278 液滴轴向运动。, –。Bush, J. W. M., Stone, H. A. & Tanzosh, J. P. 1994 旋转黏性流体中的粒子运动：历史综述与最新进展。 *Curr. Top. Phys. Fluids* **1**, 337–355。Calmet, I. & Magnaudet, J. 1997 湍流通道流中高施密特数传质的大涡模拟。 *Phys. Fluids* **9**, 438–455。Cheng, H. K. & Johnson, E. R. 1982 无限域快速旋转流体中障碍物上方的惯性波。 *Proc. R. Soc. Lond. A– Math. Phys. Eng. Sci.* **383**, 71–87。Cheng, J. S. Stellmach S. Ribeiro A. Grannan A. King E. M. & Aurnou J. M. , , , , , , , , 2015 实验室—数值模型：行星核中的快速旋转对流。*Geophys. J. Int.* **201**, 1–17。Childress, S. 1964 旋转黏性流体中球体的缓慢运动。 *J. Fluid Mech.* **20**, 305 314–。Dennis, S. C. R., Ingham, D. B. & Singh, S. N. 1982 球体在旋转黏性流体中的缓慢平移。 *J. Fluid Mech.* **117**, 251–267。Greenspan, H. P. 1968 *The Theory of Rotating Fluids*。剑桥大学出版社。Hocking, L. M., Moore, D. W. & Walton, I. C. 1979长旋转容器中沿轴运动的球体所受阻力。 *J. Fluid Mech.* **90**, 781–793。Johnson, E. R. 1982 有限高度地形上深层旋转流中障碍物形状和黏度的影响。 *J. Fluid Mech.* **120**, 359–383。Johnson, T. A. & Patel V. C. 1999 300 *J.* 球体 *Fluid Mech.* **378** 19 70 绕流，雷诺数最高达。 , –。Kozlov, V., Zvyagintseva, E., Kudymova, E. & Romanetz, V. 2023有限长度旋转竖直圆柱中轻质自由球体和液体的运动。 *Fluids* **8**, 49。

Legendre, D. & Magnaudet, J. 1998黏性线性剪切流中球形气泡所受的升力。 *J. Fluid Mech.* **368**, 81–126。Legendre, D., Magnaudet, J. & Mougin, G. 2003 黏性液体中两个并排上升的球形气泡之间的流体动力相互作用。 *J. Fluid Mech.* **497**, 133–166。Lighthill, M. J. 1967 行进强迫效应在色散系统中产生的波及其在旋转流体动力学中的应用。 *J. Fluid Mech.* **27**, 725–752。Loper, D. E. 2001 无限域旋转流体中浮力流体团驱动的泰勒柱结构。 *J. Fluid Mech.* **427**, 131–165。Machicoane, N., Cortet, P.-P., Voisin, B. & Moisy, F. 2015 源的多极阶数对旋转流体中惯性波束衰减的影响。

Phys. Fluids , 。 **27** 066602

Machicoane, N., Labarre, V., Voisin, B., Moisy, F. & Cortet, P.-P. 2018 水平圆柱水平平移产生的惯性波尾流。 *Phys. Rev. Fluids* **3**, 034801。Magnaudet, J. & Mercier, M. J. 2020 穿过尖锐界面和分层层流运动的颗粒、液滴和气泡。 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **52**, 61–91。Magnaudet,

J. & Mougin G. 2007 *J. Fluid* 固定 *Mech.* **572** 331 337

椭球形气泡的尾流失稳。, –。Magnaudet, J., Rivero, M. & Fabre, J. 1995 刚性球体或球形气泡周围的加速流。第1部分。稳态应变流。 *J. Fluid Mech.* **284**, 97–135。Maxworthy, T. 1965 旋转黏性流体中球体缓慢运动的实验测定。 *J. Fluid Mech.* **23**, 373–384。Maxworthy, T. 1968 观测到的球体穿过短旋转流体圆柱的运动。 *J. Fluid Mech.* **31**, 643–655。Maxworthy, T. 1970 球体沿旋转的微黏性流体轴线运动所产生的流动。 *J. Fluid Mech.* **40**, 453–479。Minkov, E., Ungarish, M. & Israeli, M. 2000 旋转流体中上升颗粒产生的运动——数值解。第1部分。短容器。 *J. Fluid Mech.* **413**, 111 148–。Minkov, E., Ungarish, M. & Israeli, M. 2002 旋转流体中上升颗粒产生的运动——数值解。第2部分。长容器情形。 *J. Fluid Mech.* **454**, 345 364–。Moore, D. W. & Saffman, P. G. 1968 物体穿过有限长度容器中旋转流体的上升运动。 *J. Fluid Mech.* **31**, 635–642。Moore, D. W. & Saffman, P. G. 1969 旋转流体中自由垂直剪切层的结构及缓慢上升物体产生的运动。

Philos. Trans. R. Soc. London , –。 **264** 597 634

Natarajan, R. & Acrivos, A. 1993 球体和圆盘周围稳态流的失稳。*J. Fluid Mech.* **254**, 323–344。Poon, E. K. W., Ooi, A. S. H., Giacobello, M., Iaccarino, G. & Chung, D. 2014 层流区以上横向旋转球体的绕流。

J. , –。 *Fluid Mech.* **759** 751 781

Pritchard, W. G. 1969 物体沿均匀旋转流体轴线运动产生的运动。 *J. Fluid Mech.* **39**, 443–464。Proudman,

J. 1916 *Proc. R. Soc. Lond.* 关于 *A* **92** 408 424

具有涡量的液体中固体的运动。, –。Rao, C. V. S. & Sekhar, T. V. S. 1995 球体在旋转黏性流体中的平移：数值研究。 *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **20**, 1253–1262。Sahoo, B., Sarkar, S., Sivakumar, R. & Sekhar, T. V. S. 2021 关于旋转黏性流体中泰勒柱现象的数值捕捉。 *Eur. J. Mech. B–Fluids* **89**, 126–138。Schiller, L. & Naumann, A. 1933 阻力系数关联式。 *Zeit. Ver. Deut. Ing.* **77**, 318 320–。Slinn, D. N. & Riley, J. J. 1998 不可压缩分层流中湍流边界层模拟模型。 *J. Comput. Phys.* **144**, 550–602。Stewartson,

K. 1952 *Math.* 关于 *Proc. Camb. Philos. Soc.* **48** 168 177

球体沿旋转流体轴线的缓慢运动。, –。Tanzosh, J. P. & Stone, H. A. 1994 旋转黏性流中刚性颗粒的运动：积分方程方法。 *J. Fluid Mech.* **275**, 225–256。

Taylor, G. I. 1917 *Proc. R. Soc. Lond. A* **93** 99 113 非无旋流动中固体在流体中的运动。 , – . Taylor, G. I. 1922 *Proc. R. Soc. Lond. A– Math. Phys. Eng. Sci.* **102** 180 189 球体在旋转液体中的运动。 , – . Taylor, G. I. 1923 *Proc. R. Soc. Lond. A– Math. Phys. Eng. Sci.* **104** 213 218 旋转流体中固体运动的实验。 , – . Tomboulides, A. G. & Orszag, S. A. 2000 球体绕流中转捩流动与弱湍流的数值研究。 *J. Fluid Mech.* **416**, 45–73. Torres, C. R., Hanazaki, H., Ochoa, J., Castillo, J. & van Woert, M. 2000 分层扩散流体中垂直运动球体的绕流。 *J. Fluid Mech.* **417**, 411–436. Ungarish, M. 1993 *Hydrodynamics of Suspensions: Fundamentals of Centrifugal and Gravity Separation* 。施普林格出版社，柏林。Ungarish, M 1996 旋转流体中缓慢上升的颗粒或液滴所受地转阻力的若干剪切层修正与惯性修正。 *Journal of Fluid Mechanics* **319**, 219–249. Ungarish, M. & Vedensky, D. 1995 大泰勒数下，轴向受限旋转流体中上升圆盘的运动。 *J. Fluid Mech.* **291**, 1–32. Vedensky, D. & Ungarish, M. 1994 任意泰勒数下，无限域旋转流体中缓慢上升圆盘所产生的运动。 *J. Fluid Mech.* **262**, 1–26. Wang, Y-X., Lu, X-Y. & Zhuang, L-X. 2004 接近实心球的旋转黏性流动的数值分析。 *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **44**, 905–925. Weisenborn, A. J. 1985 *J. Fluid Mech.* **153** 215 227 球体在旋转黏性流体中缓慢运动时所受的阻力。 , – . Whitham, G. B. 1974 *Linear and Nonlinear Waves. Part II. Dispersive Waves*。威利出版社。Zhang, J., Mercier, M. & Magnaudet, J. 2019 分层流体中沉降物体阻力增强的核心机制。 *J. Fluid Mech.* **875**, 622–656。