arXiv:2302.02138v1 [math.NT] 4 Feb 2023

具有正下密度的 Dombi 反例

Jeffrey Shallit 计算机
科学学院 滑铁卢大学 加拿
大安大略省滑铁卢 N2L
3G1
shallit@uwaterloo.ca

2023年2月7日

摘要

令 $r(k,\ A,\ n)$ 表示将 n 表示为集合 $A \subseteq \mathbb{N}$中 k 个元素之和的表示数。2002 年，Dombi 猜想，若 A 是余无限的，则序列 $(r(k,\ A,\ n))_{n\geq 0}$ 不可能严格递增。我们利用自动机理论和逻辑中的工具，给出了一个明确的反例，其中 $\mathbb{N} \setminus A$ 具有正下密度。

1 引言

令 $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ 为自然数，并令 $A \subseteq \mathbb{N}$。定义 $r(k, A, n)$ 为 A 中元素的 k 元组之和等于 n 的个数。Dombi [5] 猜想，不存在一个无限集合 F，使得 $r(3, \mathbb{N} \setminus F, n)$ 严格递增。最近，Bell等人 [2] 找到了这一猜想的一个反例。然而，他们的例子中的 F 相当稀疏；其上密度为 0。在本文中，我们给出一个简单明确的例子，它是一个 F，满足 $r(3, \mathbb{N}\setminus F, n)$ 严格递增，且 F 具有正下密度。我们方法的新颖之处在于运用了自动机理论和逻辑中的工具。

2 这个例子

令 $F = \{3, 12, 13, 14, 15, 48, 49, 50, \ldots\}$ 为由二进制展开长度为偶数且以 11 开头的自然数组成的集合。这是一个自动集合 [1]；也就是说，存在一个有限自动机，恰好接受 F中各数的二进制展开。它如图1所示。这里，0 是初始状态，3 是唯一的接受状态。输入是 n的二进制表示，从最高有效位开始。

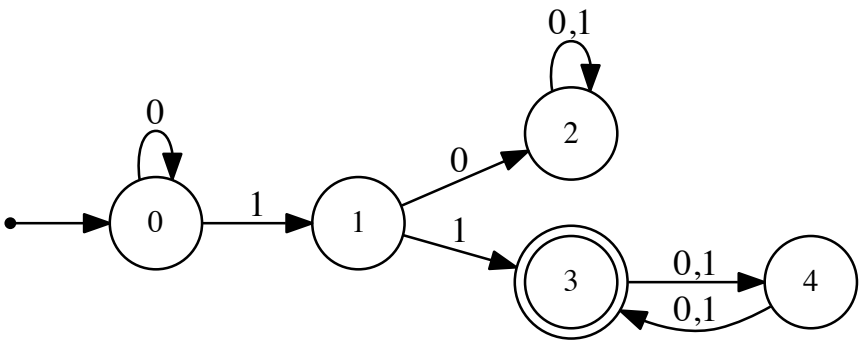

图1： F的自动机。

对于集合 $X \subseteq \mathbb{N}$，定义 $D_X(n) = \frac{1}{n}|\{X \cap \{0,1,\ldots,n-1\}\}|$。回顾一下， X 的下密度定义为 $\liminf_{n\to\infty} D_X(n)$，而上密度定义为 $\limsup_{n\to\infty} D_X(n)$。

命题1。 F 的下密度为 $1/9$，上密度为 $1/3$。

证明。 F 的特征序列为

$$000\,1\,\overbrace{\{0\cdots0\}}^{8}\overbrace{\{1\cdots1\}}^{4}\overbrace{\{0\cdots0\}}^{32}\overbrace{\{1\cdots1\}}^{16}\cdots\overbrace{\{0\cdots0\}}^{2\cdot4^n}\overbrace{\{1\cdots1\}}^{4^n}\cdots.$$

F 的下密度为

$$\liminf_{n\to\infty} D_X(3\cdot4^n) = \frac{1+4+16+\cdots+4^{n-1}}{3\cdot4^n} = \frac{\frac{4^n-1}{3}}{3\cdot4^n} = \frac{1}{9},$$

上密度为

$$\liminf_{n\to\infty} D_X(4^n) = \frac{1+4+16+\cdots+4^{n-1}}{4^n} = \frac{\frac{4^n-1}{3}}{4^n} = \frac{1}{3}.$$

□

定理2。 序列 $r(3、\ \mathbb{N}\setminus F、\ n)$ 严格递增。

证明。 下面给出证明概要。定义 $A := \mathbb{N}\setminus F$ and $d(n) = r(3,A,n) - r(3,A,n-1)$。我们将证明，对所有 n，都有 $d(n) > 0$ 。为此，我们证明

$$d(n) \geq 4d(\lfloor n/4 \rfloor) - 18. \tag{1}$$

然后用一个简单的归纳法。

为了证明界（1），我们证明 $f(n) := d(n) - 4d(\lfloor n/4 \rfloor)$ 是一个自动序列[1]，，也就是说，存在一个计算 f 的带输出确定性有限自动机（DFAO），我们还将明确确定该自动机。一旦得到 f 的自动机，就可以通过简单地检查与各个状态相关联的（有限多个）输出来确定 f 的取值范围。

为了求出 f 的确定性有限自动机输出机，我们首先注意到 $A := \mathbb{N} \setminus F$ 是一个自动集合，因为 F 是。接着，n 是 A 中三个元素之和这一断言可以用一阶逻辑表达，因此根据 B¨uchi 和 Bruy`ere 的一个定理，[4], 这个集合

$$G := \{(n, i, j, k) : n = i + j + k \text{ for } i, j, k \in A\}$$

也同样是自动的。可以使用名为 `Walnut` [6, 7] 的免费软件，通过以下命令显式计算 G 的自动机：

```
morphism x "0->01 1->23 2->22 3->44 4->33":
morphism y "0->0 1->0 2->0 3->1 4->0":
promote X x:
image FF y X:
def g "FF[i]=@0 & FF[j]=@0 & FF[k]=@0 & n=i+j+k":
```

所得自动机有 143 个状态。

接下来，我们利用如下事实：对应于某个特定 n 的三元组 (i, j, k) 的数量 $r(3, A, n)$ 具有一个线性表示 [3]。这意味着存在一个行向量 v、一个矩阵值态射 γ 和一个列向量 w，使得对于所有求值为 n 的二进制字符串 x （将 x 视为二进制数时），都有 $r(3, A, n) = v\gamma(x)w$。v 的维数称为该线性表示的秩。此外，可以通过 `Walnut` 命令，根据 G 的自动机计算出这个线性表示

```
def r3an n "$g(i,j,k,n)":
```

同样，我们可以使用以下命令计算 $r(3, A, n-1)$、$r(3, A, \lfloor n/4 \rfloor)$ 和 $r(3, A, \lfloor n/4 \rfloor - 1)$ 的线性表示

```
def r3anm1 n "$g(i,j,k,n-1)":
def r3an4 n "$g(i,j,k,n/4)":
def r3an4m1 n "$g(i,j,k,n/4-1)":
```

它们的秩分别为 143,446,446。利用这四个线性表示，通过一个涉及分块矩阵的简单构造，我们可以计算出以下对象的线性表示

$$f(n) := d(n) - 4d(\lfloor n/4 \rfloor) = r(3, A, n) - r(3, A, n-1) - 4(r(3, A, \lfloor n/4 \rfloor) - r(3, A, \lfloor n/4 \rfloor - 1)).$$

所得线性表示的秩为 1178。

接下来，我们可以使用 Sch¨utzenberger [3, 第 2] 章中的算法来最小化这个线性表示，从而得到一个秩为 16 的 f 的线性表示 (v', γ', w')。我们在下面明确给出它：

$$v'^T = \begin{bmatrix} 100 \\ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \gamma'(0) = \frac{1}{276} \begin{bmatrix} 276 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 276 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 276 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 276 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 276 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 276 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 276 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -616 & -348 & 344 & 156 & -202 & 156 & 414 & 208 & -680 & -8 & 692 & -572 & -634 \\ 0 & 0 & 0 & 244 & -36 & -288 & -566 & 405 & -566 & 161 & 12 & 1408 & -280 & -252 & 542 & 971 \\ 0 & 0 & 0 & 276 & 552 & 92 & 46 & 23 & 46 & -253 & -368 & 92 & 276 & -460 & 138 & 253 \\ 0 & 0 & 0 & -380 & -324 & 168 & 334 & -219 & 334 & 161 & 384 & -668 & 56 & 492 & -274 & -553 \\ 0 & 0 & 0 & 448 & 504 & 168 & 472 & 126 & 196 & -322 & -168 & -392 & 56 & -336 & 140 & -70 \\ 0 & 0 & 0 & -344 & -180 & 216 & 712 & -252 & 712 & 92 & 60 & -1148 & 164 & 396 & -556 & -964 \\ 0 & 0 & 0 & -132 & -252 & -84 & -6 & 75 & -6 & 207 & 84 & 12 & -120 & 168 & -162 & -195 \\ 0 & 0 & 0 & 364 & 444 & 56 & -226 & 203 & -226 & -161 & -332 & 360 & 80 & -388 & 62 & 429 \end{bmatrix}$$

$$\gamma'(1) = \frac{1}{552} \begin{bmatrix} 0 & 552 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 552 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 552 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 552 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 552 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 552 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 552 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -104 & -600 & -16 & -724 & 218 & -724 & 322 & 568 & 1632 & -496 & 32 & 692 & 942 \\ 0 & 0 & 0 & -444 & -396 & 420 & 306 & -99 & 306 & 345 & 408 & -1164 & 48 & 816 & -294 & -957 \\ 0 & 0 & 0 & -300 & 180 & 612 & 714 & -231 & 714 & 69 & -336 & -1428 & 480 & 432 & -870 & -945 \\ 0 & 0 & 0 & 616 & 72 & -528 & -1076 & 846 & -1076 & 230 & -24 & 2704 & -544 & -600 & 1124 & 1922 \\ 0 & 0 & 0 & 324 & 468 & 156 & 642 & 393 & 642 & -483 & 120 & -732 & 144 & -312 & -54 & -249 \\ 0 & 0 & 0 & 376 & 216 & -480 & -284 & 606 & -284 & 230 & -72 & 1120 & -160 & -696 & 428 & 890 \\ 0 & 0 & 0 & 772 & 420 & -596 & -726 & 565 & -726 & -207 & -232 & 1820 & -352 & -1016 & 914 & 1291 \\ 0 & 0 & 0 & -980 & -516 & 748 & 1302 & -1049 & 1302 & -69 & 632 & -2788 & 464 & 1264 & -1186 & -2351 \end{bmatrix} \quad w' = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \\ -6 \\ -5 \\ -1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

现在，简单的基于队列的算法 [7, §4.11] 证明，所有形如 $v'\gamma'(x)$ 的 $x \in \{0,1\}^*$ 向量构成的集合 S 是有限的，且其基数为 268。由此，我们很容易构造一个计算 $f(n)$ 的确定性有限自动机输出机 M：初始状态为 v'，状态集为 S，对于 $s \in S$，符号 $a \in \{0,1\}$ 上的转移 $\delta(s,a)$ 由 $s\gamma'(a)$ 给出。与状态 s 相关联的输出为 $s \cdot w'$。

通过检查 M，我们看到 f 的取值范围是

$$\{-18,-15,-14,-12,-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,13,18\}.$$

因此，我们已经证明了 $f(n) = d(n) - 4d(\lfloor n/4 \rfloor) \geq -18$。

现在我们通过对 n 归纳法，验证对于 $n \geq 87$，$d(n) > n/5 + 7$。基例是$87 \leq n < 348$，很容易验证。

现在假设 我已知 $n \geq 348$ 并且 $d(n') > n'/5 + 7$ 对于 $87 \leq n' < n$成立。然后通过归纳法

$$d(n) \geq 4d(\lfloor n/4 \rfloor) - 18 > 4(\lfloor n/4 \rfloor/5 + 7) - 18 \geq 4((n/4-1)/5 + 7) - 18 > n/5 + 7,$$

如所需。

检查得出 $d(n) > 0$ 对于 $0 \leq n < 87$成立后，可知 $d(n) > 0$ 对于所有 n均成立。 □

参考文献

[1] J.-P. Allouche 和 J. Shallit。自动序列：理论、应用与推广。剑桥大学出版社，2003。

[2] J. P. Bell 和 J. Shallit。加法数论中关于 Dombi 猜想的反例。匈牙利数学学报，即将发表，2023。[3] J. Berstel 和 C. Reutenauer。《非交换有理级数及其应用》，载于《数学及其应用百科全书》第 137 卷。剑桥大学出版社，2011。[4] V. Bruy`ere、G. Hansel、C. Michaux 和 R. Villemaire。整数的逻辑与 p-可识别集合。比利时数学学会通报 1 (1994)，191–238。勘误，Bull. Belg. Math. Soc. 1 (1994)，577。[5] G. Dombi。某些集合的加法性质。算术学报 103 (2002)，137–146。[6] H. Mousavi。 Walnut中的自动定理证明。Arxiv 预印本 arXiv:1603.06017[cs.FL]，可见于 http://arxiv.org/abs/1603.06017，2016。[7] J. Shallit。《自动序列的逻辑方法：运用 Walnut探索词组合学》，载于伦敦数学学会讲义系列第 482 卷。剑桥大学出版社，2022。