arXiv:2302.02144v1 [math.DS] 4 Feb 2023

具有严格平衡律且非线性项符号不定、具有无限多项式增长的反应扩散系统的整体存在性。

SAID KOUACHI

Abstract. 本文旨在证明具有非线性项的一般反应扩散方程组的解的整体存在性，这些非线性项仅满足两个主要性质：拟正性和平衡律，但也带来两个难点：其符号会改变，且具有无限多项式增长。我们通过在一定时间后固定反应项的符号来克服第一个难点，并通过构造恰当的多项式李雅普诺夫泛函来解决第二个难点。

1. 引言

我们考虑以下反应扩散系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(t,x,u,v) = -\varphi(t,x,u,v) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(t,x,u,v) = \varphi(t,x,u,v) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{on } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{2}$$

以及初始数据

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad v(0,x) = v_0(x) \qquad \text{in } \Omega, \tag{3}$$

其中，$\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ 表示有界开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的边界 ∂上的外法向导数，该区域属于 $\mathbb{C}^1$ 类，且 a 和 b 为正常数。假设初始数据在 Ω 上有界且非负。反应项 $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 不一定具有固定符号，其

$$\varphi(t,x,u,0) = \varphi(t,x,0,v) = 0, \text{ for all } u \geq 0,\ v \geq 0,\ \ t > 0,\ x \in \Omega, \tag{4}$$

并且相对于第三个和第四个变量至多呈多项式增长：(5) 多项式增长：$|\varphi(t,x,s_1,s_2)| \leq C_1 + C_2(s_1+s_2)^r$，对所有 $s_1, s_2 \geq 0$,

Date：2022年12月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：35K45、35K57；次分类号：35K45。*Key words and phrases.* 反应扩散系统、整体存在性、李雅普诺夫泛函。本研究由阿贝斯·拉格鲁尔·亨舍拉大学理工学院资助，项目代码：C00L03UN400120220001。

对于某些 $r \geq 1$ 和正常数 C_1 及 C_2。我们关注问题 (1)-(3) 的正解关于时间的整体存在性。当反应项 φ具有固定符号时，整体存在性是显然的，并且已有许多相关结果（见 [13] 和 [6] [17], [15], ）。显然，这里满足严格的质量控制（也称为守恒律）：

$$f(t,x,u,v)+g(t,x,u,v)=0, \text{ for all } u\geq 0,\ v\geq 0,\quad t>0,\ x\in\Omega, \tag{6}$$

由此可知，在齐次边界条件 (2) 下，解的总质量保持不变。

由于反应项 $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 局部利普希茨，因此存在唯一的正则解，它在某个最大区间 $(0,T_{\max})$ 上局部依赖于时间，并满足 $u,\ v\in C((0,T)\ \ L^p(\Omega))\cap L^\infty((0,T-\tau)\times\Omega)$，对所有 $p>n$ 以及所有 $\tau\in(0,T)$ 均成立（例如参见 [1] 和 [7]）。此外

$$\text{If } \lim_{t\to T_{\max}}\left(\|u(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)}\right)<+\infty,\ \text{ then } T_{\max}=+\infty. \tag{7}$$

当反应项恒定同号时，整体解的时间存在性显而易见：例如，当反应项 φ 为正时，由最大值原理可得分量 u 一致有界；再利用严格平衡律 (6)，可推得 v 有界，从而自动得到整体时间存在性。此外，当扩散系数 a 和 b 相等时，将两个方程相加，利用解的正性并应用最大值原理，即可推出整体存在性。

由于 (7)，在我们的情形下这一点并不显而易见，因为除了 $a\neq b$ 之外，反应项也不恒定同号，且最大值原理不适用。

我们将 $(0,T)$ 中满足下述条件的最大正时间记为 $\overline{t}$：

$$\varphi(\overline{t},\overline{x},\overline{u},\overline{v})=0, \tag{8}$$

对某个 $(\overline{x},\overline{u},\overline{v})\ \in\Omega\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$。若这样的 $\overline{t}$ 不存在，则反应项 φ 在 $(0,T)$ 上不变号，根据上述讨论，整体存在性随即成立。否则，将出现以下两种情形之一：

$$f(t,x,u,v)<0, \text{ for a all } t\in\left(\overline{t},T\right),\ x\in\Omega,\quad (u,v)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \tag{9}$$

or

$$f(t,x,u,v)>0, \text{ for a all } t\in\left(\overline{t},T\right),\ x\in\Omega,\quad (u,v)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+. \tag{10}$$

对质量（或者用数学术语来说，对解的 L1 范数）的一致控制表明，有限时间内不应发生爆破。遗憾的是，情况并非如此简单。为说明问题的复杂性，
[3], [4], [2], [20], 等文献中的作者要求至多具有二次增长的反应项满足 LlogL 熵型的李雅普诺夫结构

$$(\log u)\,f+(\log v)\,g\leq 0, \text{ for a all } u>0,\ v>0, \tag{11}$$

并且除某些特殊情形外，仅证明了弱解的整体存在性。

反应项会改变符号，这意味着没有一个方程是良性的，因为无论是 u 还是 v，都不能先验地认为其有界，或至少在某个 Lp-空间中当 p 足够大时有界，从而无法应用众所周知的正则化效应，并推导出问题 (1)-(3) 的强解在时间上的整体存在性。我们应当指出，具有二次非线性项的解的整体存在性已由 [20]证明

无论是在整个空间还是在有界区域中，且无需使用控制质量条件。

2. 符号与预备性观察

众所周知，要证明（1）的解的整体存在性（例如参见[7] 和 [6]），只需对某个 $p>n/2$，推导出 $\|\varphi\|_p$ 在 $[0,T_{\max}[$ 上的一致估计。这里我们采用一种改进的多项式李雅普诺夫泛函方法，类似于 [8] 中使用的方法（另见 [11] [12] 和 [10]），以推导系统（1）的解（u，v）的 L^p- 界，并据此得出其在时间上的整体存在性。

勒贝格空间 $\mathbb{L}^p(\Omega)$和 $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$，以及 Ω 上连续函数的空间$\mathbb{C}(\Omega)$，分别赋予以下范数

$$\|u\|_p^p = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x)|^p\,dx,$$
$$\|u\|_\infty = \max_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

由于（1）的非线性右端项在 $\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$上连续可微，因此，对于 $\mathbb{C}(\Omega)$ 或 $\mathbb{L}^p(\Omega)$ $p\in(1,+\infty)$中的任意初始数据，很容易直接验证它在算子分数幂定义域的有界子集上满足利普希茨连续性

$$\begin{pmatrix} -a\Delta & 0 \\ 0 & -b\Delta \end{pmatrix}. \tag{12}$$

在这些假设下，以下局部存在性结果是众所周知的（参见 A. Friedman [5], [7], [19] 和 [18]）。

命题 1. 系统 (1.1)-(1.3) 在 $[0,T_{\max}[\times\Omega$ 上存在唯一的经典解 (u,v)。若 $T_{\max}<\infty$，则

$$\lim_{t\nearrow T_{\max}}\{\|u(t,.)\|_\infty+\|v(t,.)\|_\infty\}=\infty, \tag{2.3}$$

其中 $T_{\max}$ 表示 $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ 中最终的爆破时间。

在陈述结果之前，对于固定整数 $p\geq 1$，我们定义以下多项式泛函，它在下文中非常重要

$$t\mapsto L(t)=\int_\Omega H_p\left(u(t,x),v(t,x)\right)dx, \tag{13}$$

其中

$$H_p(u,v)=\sum_{i=0}^{p}C_p^i\theta_i u^i v^{p-i}, \tag{14}$$

其中系数 C_p^i 由下式给出

$$C_p^i=\frac{p!}{i!.(p-i)!}$$

它是用阶乘函数 $n!$ 定义的。

有限正项序列 $\{\theta_i\}$ 定义如下

$$\theta_i=c^{i+1}K^{i^2},\ i=0,\ 1,\ 2,..., \tag{15}$$

当非线性项满足 (9) 且

$$\theta_i = C^{i+1}K^{i^2},\ i = 0,\ 1,\ 2, ..., \tag{16}$$

当非线性项满足（10）时，其中常数 c 和 C 满足以下不等式

$$cK^{2p+1} < 1 < CK,$$

且 K 是满足下式的任意正常数

$$K^2 > \frac{(a+b)^2}{4ab}. \tag{17}$$

3. 主要结果的陈述与证明

本文的主要结果如下

定理2. 假设非线性项 $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 关于第三和第四个变量至多具有多项式增长，并满足条件（4），那么对于问题（1）-（3）的所有正解，由（13）-（14）给出的泛函在区间（$0, T_{\max}$）上一致有界

证明。对 L 关于 t 求导，得到

$$L'(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{p} \left(iC_p^i \theta_i u^{i-1} v^{p-i} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_\Omega \sum_{i=0}^{p-1} \left((p-i) C_p^i \theta_i u^i v^{p-i-1} \right) \frac{\partial v}{\partial t} dx. \tag{18}$$

利用以下众所周知的关系

$$iC_p^i = pC_{p-1}^{i-1},\ \text{for all}\ \ i = 1, ..., p, \tag{19}$$

并交换指标，得到

$$\begin{aligned} L'(t) &= p\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i \int_\Omega u^i v^{p-1-i} \left[(a\theta_{i+1}\Delta u + b\theta_i \Delta v) + (\theta_{i+1} f(u,v) + \theta_i g(u,v)) \right] dx \\ &= I + J, \end{aligned}$$

其中

$$I = p\sum_{i=0}^{p-1} \int_\Omega C_{p-1}^i u^i v^{p-1-i} \left(a\theta_{i+1}\Delta u + b\theta_i \Delta v \right) dx, \tag{20}$$

and

$$J = p\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i \int_\Omega \left(-\theta_{i+1} + \theta_i \right) f(t, x, u(t,x), v(t,x)) u^i v^{p-1-i} dx. \tag{21}$$

将格林公式应用于积分 I 可得

$$I = -p\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i \int_\Omega \left[a\nabla \left(\theta_{i+1} u^i v^{p-1-i} \right) \nabla u + b\nabla \left(\theta_i u^i v^{p-1-i} \right) \nabla v \right] dx$$

再次使用（19）并交换指标后，积分 I 变为

(22)
$$I=-p(p-1)\sum_{i=0}^{p-2}C_{p-2}^{i}\int\limits_{\Omega}u^{i}v^{p-2-i}\left(a\theta_{i+2}\left|\nabla u\right|^{2}+(a+b)\,\theta_{i+1}\nabla u\nabla v+b\theta_{i}\left|\nabla v\right|^{2}\right)dx.$$

我们将证明

(23)
$$I\leq 0;\quad J\leq 0\ \text{ in the interval }\left(\overline{t},T_{\max}\right).$$

显然，由 (15) 可得

(24)
$$\frac{\theta_{i}\theta_{i+2}}{\theta_{i+1}^{2}}=K^{2},\ i=0,1,...p-2,$$

这意味着关于 ∇u 和 ∇v 的二次型在积分 I 下非正。因此我们有

(25)
$$I\leq 0,\ \text{for all } t\in\left(\overline{t},T_{\max}\right).$$

对于积分 J，有两种情况：要么 (9)，要么 (10)。

在第一种情况下，我们取

$$\theta_{i}=c^{i+1}K^{i^{2}},\ i=0,\ 1,\ 2,...,$$

其中，常数 c 的选取使序列 $\{\theta_{i}\}$ 递减。也就是说

(26)
$$cK^{2p+1}<1,$$

其中

$$K^{2}>\frac{(a+b)^{2}}{4ab}.$$

Then

$$-\theta_{i+1}+\theta_{i}\geq 0,\ i=0,\ 1,\ 2,....$$

并且由于由 (9) 可知，反应项 f 非正，因此我们得出

(27)
$$J\leq 0,\ \text{for all } t\in\left(\overline{t},T_{\max}\right).$$

结合 (27) 和 (25)，得到 (23)。

在第二种情况下，我们选取一个常数 $C>\frac{1}{K}$，并且

$$\theta_{i}=C^{i+1}K^{i^{2}},\ i=0,\ 1,\ 2,...$$

显然，序列 $\{\theta_{i}\}$ 递增。按照与第一种情况相同的推理，我们再次得到 (27) 和 (25)。

回顾一下：在两种情形 (9) 和 (10) 中，我们已证明泛函$L(t)$ 在区间 $\left(\overline{t},T_{\max}\right)$ 上递减。也就是说

$$L(t)\leq L(\overline{t}),\ \text{for all } t\in\left(\overline{t},T_{\max}\right).$$

显然，我们得出 $L(t)$ 在区间 $\left(\overline{t},T_{\max}\right)$ 内一致有界。在剩余区间 $\left(0,\overline{t}\right)$ 中，对于所有 $\tau\in(0,T)$，u 和 v 都属于 $L^{\infty}([0,T-\tau]\times\Omega)$，因为它们是经典的，因此一致有界。最后，我们可以说，我们的泛函在局部存在性的整个区间 $(0,T_{\max})$ 内一致有界：也就是说，存在一个与时间无关的正常数 M，使得

$$L(t)\leq M,\ \text{for all } t\in(0,T_{\max}).$$

至此，定理的证明结束。 □

由于泛函 $L(t)$ 中的系数 θ_i 有下界，因此我们可以找到另一个常数 R，使得

$$\int_\Omega (u+v)^p\,dx \le R.L(t),\ \text{for all } t\in(0,T_{\max})\,.$$

上述两个不等式表明，对于所有 $p\ge 1$，问题 (1)-(3) 的解属于 $L^p(\Omega)$；并且由于非线性项 $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 关于 u 和 v 至多具有多项式增长，因此根据前面的注释，我们可以推出解在时间上的整体存在性，即 $T_{\max}=+\infty$。

我们证明了以下结论

推论3. 假设非线性项 $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 关于第三和第四个变量至多具有多项式增长，那么对于具有非负且一致有界初始数据并满足齐次诺伊曼边界条件的系统 (1)，所有解都在全局时间内存在。

注1. 上述推论对于更一般的边界条件仍然成立

$$\begin{cases}\lambda_1 u+(1-\lambda_1)\partial_\eta u=0,\\ \\ \lambda_2 v+(1-\lambda_2)\partial_\eta v=0,\\ ,\end{cases}\qquad \text{在 } \mathbb{R}^+\times\partial\Omega \text{ 上,} \tag{28}$$

其中，对于 $i=1,\ 2$，采用了不同类型的边界条件：齐次罗宾型（$0<\lambda_i<1$）、齐次诺伊曼型（$\lambda_i=0$）或齐次狄利克雷型（$1-\lambda_i=0,$ ）。也可以采用齐次狄利克雷条件与齐次罗宾边界条件的混合形式（$1-\lambda_i=0,\ i=1$ 或 2 和 $0<\lambda_j<1,\ j=1,2,$ 且 $i\ne j$）。

4. Applications

4.1. 第一种情况。我们从以下系统开始

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\Delta u=-c(t,x)\psi(u,v), & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega,\\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-b\Delta v=c(t,x)\psi(u,v), & \text{in } \mathbb{R}^+\times\Omega,\end{cases} \tag{29}$$

其中 $c(t,x)\in C(\mathbb{R}^+\times\Omega\ \mathbb{R})$ 不一定具有恒定符号，且

$$\psi(0,v)=\psi(u,0)=0,\ \text{for a all } u\ge 0,\ v\ge 0, \tag{30}$$

这保证了解在 Ω 上任意时间的正性。当 $c(t,x)$ 与时间无关时，例如

$$c(x)<0 \text{ in } (-1,0)\,,\ \ c(0)=0,\ \ c(x)>0 \text{ in } (0,1)\,,$$

作者在 [17], 证明了解在$L_\infty([0,\infty)\times(0,1)$和 $L^\infty([0,\infty)\times(-1,0)$中局部一致有界，但他们没有证明整体存在性。在一些非常特殊的情况下，具有适当非齐次狄利克雷条件的系统(1)可能会在有限时间内发生爆破（例如参见 [14,22]）。最近，在相同情形下，S. Kouachi [8] 通过使用

下文中的同一泛函(13)。据我们所知，关于一般 $c(t,x)$的问题，迄今在所有空间维数下仍是一个开放问题（见 [15]）。根据推论3

命题 4. 假设非线性项 $\psi(u,v) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ 关于 u 和 v 至多具有多项式增长，满足 (30)，且 $c(t,x) \in C(\mathbb{R}^+ \times \Omega\ \mathbb{R})$ 不一定具有恒定符号，那么以下所有解

$$
(31)\qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(t,x,u,v) = -c(t,x)\psi(u,v) & in\ \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(t,x,u,v) = c(t,x)\psi(u,v) & in\ \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad on\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \qquad v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \qquad in\ \Omega, \end{cases}
$$

都是全局的。

证明. 由于反应项 $c(t,x)\psi(u,v)$ 满足推论3的所有条件，因此问题 (31) 的解显然都是全局的。□

4.2. 耦合可逆化学反应。具有以下系统的特殊情形

$$
(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = -\ h_1 u^l v^q + h_2 u^r v^s, & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = \ h_1 u^l v^q - h_2 u^r v^s, & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases}
$$

该系统描述了以下可逆化学反应

$$
lA + qB \underset{k}{\overset{h}{\rightleftarrows}} rA + sB,
$$

其中， u 和 v 分别是反应物 A 和 B 的浓度。文献 [10] 的作者以及近期文献 [15] 的作者，在对反应物的反应级数施加限制性条件的情况下，经过略微调整，得到了以下部分结果

$$
(33)\qquad \begin{cases} l + q \leq 1 \text{ or } r + s \leq 1, \\ \text{or } r + s > l + q > 1 \text{ and } l - r < sl - qr < s - q, \\ \text{or } l + q > r + s > 1 \text{ and } s - q < sl - qr < l - r. \end{cases}
$$

系统(32)具有形式(29)，其中 $c(t,x)$符号恒定，而 $\psi(u,v)$则不然

$$
c(t,x) \equiv 1 \text{ and } \psi(u,v) = h_1 u^l v^q - h_2 u^r v^s.
$$

在这种情况下，推论3总是适用的，因此我们有以下命题

命题 5. 问题的解

$$
(34)\qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(t,x,u,v) = -h_1 u^l v^q + h_2 u^r v^s & in\ \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = g(t,x,u,v) = h_1 u^l v^q - h_2 u^r v^s & in\ \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad on\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \qquad v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \qquad in\ \Omega, \end{cases}
$$

是全局的。

证明。该证明可直接由推论3得出。 □

4.3. 向 $m \times m$ 可逆化学系统的推广。

4.3.1. 三重可逆化学反应。考虑以下三重

反应扩散系统

$$\partial_t u - d_1 \Delta u = a_1 u^{p_1} v^{q_1} w^{r_1} - a_2 u^{p_2} v^{q_2} w^{r_2}, \tag{35}$$

$$\partial_t v - d_2 \Delta v = a_1 u^{p_1} v^{q_1} w^{r_1} - a_2 u^{p_2} v^{q_2} w^{r_2}, \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{36}$$

$$\partial_t w - d_3 \Delta w = -a_1 u^{p_1} v^{q_1} w^{r_1} + a_2 u^{p_2} v^{q_2} w^{r_2}, \tag{37}$$

满足诺伊曼或狄利克雷齐次边界条件，且初始数据在 Ω 上非负并一致有界，其中常数 a_i、p_i、q_i、r_i、$i = 1$、2 均为正数。系统（35）—（37）描述了以下可逆化学反应的模型

$$p_1 U + q_1 V + r_1 W \rightleftarrows p_2 U + q_2 V + r_2 W. \tag{38}$$

在 [9], 中，我们在非线性项增长满足以下非常严格的条件下，得到了整体存在性:

$$p_i + q_i + r_i \leq 1, \quad i = 1,\ 2, \tag{39}$$

or

$$\begin{array}{rcl} p_j + q_j + r_j & > & p_i + q_i + r_i > 1, \quad i = 1,\ j = 2 \text{ or } i = 2,\ j = 1 \\ & & and \\ & & \left\{ \begin{array}{l} p_i - p_j < (p_i q_j - p_j q_i) + (p_i r_j - p_j r_i), \\ q_i - q_j < (q_i p_j - q_j p_i) + (q_i r_j - q_j r_i), \\ r_i - r_j < (r_i p_j - r_j p_i) + (r_i q_j - r_j q_i). \end{array} \right. \end{array} \tag{40}$$

应用推论3可得到以下命题

命题6. 具有齐次诺伊曼边界条件和正初始数据的系统(35)-(37)的解是全局的。

证明. 我们分别将推论3应用于以下u-w和v-w系统:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = a_1 u^{p_1} v^{q_1} w^{r_1} - a_2 u^{p_2} v^{q_2} w^{r_2} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - c\Delta w = -a_1 u^{p_1} v^{q_1} w^{r_1} + a_2 u^{p_2} v^{q_2} w^{r_2} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \qquad w(0,x) = w_0(x) \geq 0, & \text{in } \Omega, \end{array} \right. \tag{41}$$

and

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = a_1 u^{p_1} v^{q_1} w^{r_1} - a_2 u^{p_2} v^{q_2} w^{r_2} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - c\Delta w = -a_1 u^{p_1} v^{q_1} w^{r_1} + a_2 u^{p_2} v^{q_2} w^{r_2} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0, \qquad w(0,x) = w_0(x) \geq 0, & \text{in } \Omega, \end{array} \right. \tag{42}$$

分别如此。系统 (41) 和 (42) 都与系统 (34) 的情形相同。可立即应用推论3，分别得到 u 和 w 的有界性，进而同时得到 v 和 w 的有界性。系统 (35)-(37) 的整体存在性也随之自动成立。□

4.3.2. 一般可逆化学反应。考虑以下一般可逆化学反应

$$\sum_{i\in I} n_i R_i \underset{k}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \sum_{j\in J} n_j R_j \quad \text{with } I\cup J=\{1,...,p\} \quad \text{and } I\cap J=\{\emptyset\}, \tag{43}$$

其中， n_1、 n_2、...、 n_p分别表示参与反应的分子 R_1、 R_2、...、 R_p的数目，常数 h 和 l 取决于温度、位置 x和时间 t。

应用质量守恒定律和菲克第二定律（通量），可得到如下超二次反应扩散系统

$$\begin{cases} n_k\dfrac{\partial c_k}{\partial t}=\nabla.d_k\nabla c_k-h\prod\limits_{i\in I}c_i^{n_i}+l\prod\limits_{j\in J}c_j^{n_j}, & k\in I,\\ n_k\dfrac{\partial c_k}{\partial t}=\nabla.d_k\nabla c_k+h\prod\limits_{i\in I}c_i^{n_i}-l\prod\limits_{j\in J}c_j^{n_j}, & k\in J, \end{cases} \tag{44}$$

其中， c_1、 c_2、...、 c_p分别表示 R_1、 R_2、...、 R_p的浓度，而n_1、 n_2、...、 n_p分别是称为 R_1、 R_2、...、 R_p的阶数的正常数。常数 h 和 l 为正常数。根据推论3, 关于系统（44）有如下结果

推论7. 对于具有正的有界初始数据的系统（44）的解，对所有 $t>0$均存在。

证明. 系统（44）满足下述系统（47）的所有条件，因此存在全局解。□

5. The general case of reaction diffusion systems

一般而言，我们可以将我们的结果应用于形如以下形式的 m 反应扩散方程系统

$$\begin{cases} \forall\ j=1,...,m & \\ \frac{\partial u_j}{\partial t}-d_j\Delta u_j=f_j(t,x,u), & \text{on } \mathbb{R}^+\times\Omega,\\ \frac{\partial u_j}{\partial \eta}=0, & \text{on } \mathbb{R}^+\times\partial\Omega,\\ u_j(0,x)=u_{j0}(x)\geq 0, & \text{on } \Omega, \end{cases} \tag{45}$$

其非线性项至多呈多项式增长，并满足以下质量的部分严格控制

$$\forall\ i=1,...,m,\ \exists\ j\neq i \text{ such that } f_i(t,x,u)+f_j(t,x,u)=0, \quad \text{on } \mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{R}^n. \tag{46}$$

通过将推论3应用于任意一对方程:

$$\begin{cases} \forall\ i,\ j=1,...,m \text{ with } i\neq j & \\ \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t}-d_i\Delta u_i=f_i(t,x,u), & \text{on } \mathbb{R}^+\times\Omega,\\ \frac{\partial u_j}{\partial t}-d_j\Delta u_j=f_j(t,x,u), & \text{on } \mathbb{R}^+\times\Omega, \end{cases} & \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta}=\frac{\partial u_j}{\partial \eta}=0, & \text{on } \mathbb{R}^+\times\partial\Omega,\\ u_i(0,x)=u_{i0}(x)\geq 0, \quad u_j(0,x)=u_{j0}(x)\geq 0, & \text{on } \Omega, \end{cases} \tag{47}$$

对于满足质量的部分严格控制 (46) 的非线性项，我们可以写出如下内容

命题 8. 对于具有至多多项式增长的非线性项且满足质量的部分严格控制 (46) 的 m 个反应扩散方程 (45) 的一般系统，其正解是全局的。

证明。将推论3应用于具有满足严格部分质量控制（46）的非线性项的一对方程（47），即可得到两个分量u_i 的有界性。最后可得到一般系统（45）所有分量的有界性。□

注 2。描述一般可逆化学反应（43）的超二次反应扩散系统（44），是系统（45）的一个特例，其非线性项至多具有多项式增长，并满足成对严格质量控制（46）。借助推论3，可以轻松证明解的整体存在性。

References

[1] H. Amann，《半线性抛物型系统的整体存在性》。《纯粹与应用数学杂志》360（1985）47-83。[2] M.C. Caputo、T. Goudon、A. Vasseur。《四物种二次反应扩散系统的解在任意空间维数下均有界且 C¹光滑》，即将在《分析与偏微分方程》发表。[3] L. Desvillettes、K. Fellner、M. Pierre、J. Vovelle，《关于二次反应扩散系统的整体存在性》。《非线性研究进展》7（2007），491{511。[4] J. Fischer，《熵耗散反应扩散系统重整化解的整体存在性》。《理性力学与分析档案》218（2015），第553–587页。[5] A. Friedman，《抛物型偏微分方程》普伦蒂斯·霍尔出版社，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1964年。[6] A. Haraux 和 A. Youkana，《关于 K. Masuda 的一个反应扩散方程结果》。《东北数学杂志》40（1988），159-163。[7] D. Henry，《半线性抛物方程的几何理论》。数学讲义840，施普林格出版社，纽约，1984年。[8] S. Kouachi，《具有守恒律和非恒定符号非线性项的耦合反应扩散方程的整体存在性》，arXiv:2212.05623 [math.AP] 11 2022年12月。[9] Said Kouachi。《用于某些可逆化学反应建模的三元反应扩散方程组的整体存在性》。2022年。（hal-03878666）。[10] S. Kouachi，《用于某些可逆化学反应建模的耦合反应扩散系统的整体存在性》，《偏微分方程动力学》，第8卷，第2期（2011年6月），第79-88页。[11] S. Kouachi，《通过李雅普诺夫泛函证明反应扩散系统整体解的存在性》，《电子微分方程杂志》68（2001），1-10。[12] S. Kouachi，《通过李雅普诺夫泛函证明无齐次边界条件的反应扩散系统整体解的存在性》。《电子微分方程杂志》第2002卷（2002），第88期，第1-13页。[13] S. Kouachi 和 A. Youkana，《一类反应扩散系统的整体存在性与渐近行为》。《波兰科学院通报》49卷，第◦ 3 期（2001）。[14] Michel Pierre、Didier Schmitt。《具有超二次增长的质量耗散反应扩散系统有限时爆破的例子》。《离散与连续动力系统》。doi:10.3934/dcds.2022039。[15] M. Pierre，《具有质量控制的反应扩散系统的整体存在性：综述》，《米兰数学杂志》，第78卷 / 2010年。[16] M. Pierre 和 D. Schmitt，《具有质量耗散的反应扩散系统中的爆破》，《SIAM评论》第42卷，第1期（2000年3月），第93-106页。[17] M. Pierre 和 D. Schmitt，《具有守恒律的反应扩散系统的整体存在性》，载于 G. R. Goldestein 和 G. A. Goldestein 编，《关于半群、非线性算子及其应用的库拉索会议论文集》（1993年）。[18] F. Rothe，《反应扩散系统的整体解》，数学讲义1072，施普林格出版社，柏林（1984年）。

[19] J. Smoller, 《激波与反应扩散方程》，施普林格出版社，纽约（1983年）。[20] P. Souplet。《具有质量耗散和二次增长的反应扩散系统的整体存在性》。《演化方程杂志》18（2018）1713–1720。

Department of Mathematics and Informatics, College of Science and Technology, University of Abbes Laghrour Khenchela. Algeria.*Email address*:
kouachi@univ-khenchela.dz