arXiv:2302.02147v1 [cond-mat.quant-gas] 4 Feb 2023

自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体腔量子电动力学中的多稳态

Kashif Ammar Yasir[1], * 和 Gao Xianlong[1], †[1] *Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China.*（日期：2023年2月7日）

我们研究了由强泵浦激光驱动、包含自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的腔系统中稳态多稳态的出现。施加的磁场将玻色-爱因斯坦凝聚体分裂为赝自旋态，随后，在两束反向传播、直接与超冷原子相互作用的拉曼激光作用下，这些赝自旋态变得对动量敏感。在推导所有相关子系统的稳态动力学后，我们展示了腔光子数多稳态行为的出现，这与此前对腔-原子系统的研究不同。不过，这种多稳态可通过相关系统参数进行调节。此外，我们展示了赝自旋-↑和自旋-↓态原子布居数的混合稳定性行为，这些态呈现所谓的双不稳定形式。这些原子数态的集体行为具有一个有趣的跃迁界面，位于两种自旋态的布居数之间；该界面可通过自旋轨道耦合和塞曼场效应增强并加以控制。此外，我们还展示了通过提高赝自旋态的机械耗散率所产生的次级界面。这些界面可能由腔介导的合成自旋态的非平凡行为所致。我们的发现不仅对光学开关研究至关重要，也可为未来利用腔量子电动力学研究合成原子态的机械特性奠定基础。

关键词：腔量子电动力学、自旋轨道耦合、玻色-爱因斯坦凝聚体、多稳态、光学开关

I. 引言

腔量子电动力学（QED）——高度反射、相对而置的镜面所限制的强光子模式——被视为产生相干光子相互作用的有趣工具[1–4]。这些受限的相干光学模式与原子、超冷原子等其他物理对象的相互作用，进一步彰显了腔量子电动力学的优势[5–7]。这种相干原子-光相互作用的结合甚至能够切实检验量子计算的基础[8, 9]。此外，在腔量子电动力学中引入冷原子和超冷原子（尤其是在腔光力学中，光的力学效应会操纵一端镜面的运动），为多组分（混合）腔量子电动力学开辟了另一个方向 [10]。混合腔量子电动力学推动了对哈密顿混沌的研究 [11], 、混沌诱导的量子力学局域化[12, 13], 、原子诱导的光力学冷却 [14], 、多粒子量子纠缠 [15–18] 以及高保真态转移 [19, 20]。混合腔量子电动力学中的量子非线性光学进一步引出了多重电磁诱导透明的概念[21–26]。在混合光力学系统中操控超冷原子的合成原子间态，进一步提升了混合腔量子电动力学的运行能力 [27–29]。

与此同时，自旋轨道（SO）耦合是量子粒子的动量与其自身自旋 [30–32], 之间的重要联系，已被证明是研究自旋霍尔效应[33, 34] 和拓扑绝缘体 [35–38],的关键工具，也日益受到关注[39–42]。近期，人们在光学腔[43–45] 和光机械系统中实现了自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）；在光机械系统中，自旋轨道耦合已被用于冷却机械镜[46], ，为在赝自旋态层面操控光子相互作用奠定了基础。自旋轨道耦合介导的缀饰态在光学腔中的相互作用，进一步促使人们在透射探测光中发现了拓扑态 [47]。然而，尽管已有这些研究，仍有必要研究稳态稳定性行为，因为这将揭示此类混合系统的动力学特性。

本文展示了在由单模外部泵浦激光驱动、包含自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的腔中，实现稳态行为多稳态的可能性。外加磁场激发原子赝自旋态，而两束反向传播的拉曼光束直接与腔内受限的原子模相互作用，从而在经磁场调控的赝自旋态之间产生自旋轨道耦合。我们根据系统的总哈密顿量所导出的量子朗之万方程，计算了所有相关自由度的稳态行为。由稳态方程可知，腔内光子数不仅具有多个稳定态（即多稳态行为），这与以往研究不同，而且还可通过其他相关系统参数进行调节。此外，我们阐明了在拉曼过程介导的自旋轨道耦合和拉曼耦合作用下，两种自旋态中的稳态原子布居呈现独特且兼具稳定与不稳定的行为。我们还通过考察两种布居随外部激光功率变化的集体行为，展示了它们之间的相互依赖关系，观察到

* kayasir@zjnu.edu.cn
† gaoxl@zjnu.edu.cn

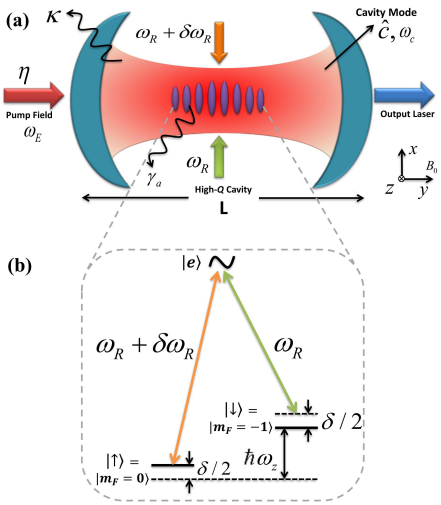


图1。（a）包含自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的高-Q 法布里-珀罗腔示意图。泵浦激光 η （频率为 ω_E）驱动腔，激发强腔模，进而使腔与受囚禁的自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体发生耦合。强度为 B_0 的偏置磁场与沿$\hat{y}$ 轴受囚禁的原子态相互作用，使原子赝态之间发生塞曼分裂 $\hbar\omega_z$ 。与此同时，两束反向传播的拉曼激光沿$\hat{x}$ 轴横向与原子相互作用，产生自旋轨道耦合。（b）能级激发图，展示了偏置磁场 B_0 和反向传播的拉曼激光诱导的激发。

两种原子数曲线的交点。这可能是自旋轨道耦合缀饰态中发生相变所致。这一特征可通过相关参数加以增强和控制，尤其是原子机械阻尼。

本文结构安排如下：第 II 节介绍系统建模及数学计算的详细过程。第III 节展示腔内光子数稳态行为的结果。第IV 节介绍赝自旋态稳态行为中出现多稳态的结果。最后，第V 节给出本研究的结论。

II. 系统描述与哈密顿量

这些 $N \approx 1.8 \times 10^5$ ^{87}Rb 玻色子被囚禁在一台高Q 精细度的 法布里-珀罗腔中，腔长为 $L \approx 12.5 \times 10^{-3}$米，见图1(a) [48–51]。频率为 ω_E 、强度为$|\eta| = \sqrt{P \times \kappa/\hbar\omega_E}$的外部泵浦激光，其中 P为功率，驱动腔并产生强腔模 $\omega_c \approx 1.9 \times 2\pi GHz$，其失谐为 $\Delta_c = \omega_E - \omega_c$，衰减率为 κ。偏置磁场的 $10G$与B_0 囚禁在腔内的超冷原子相互作用，并在 $\hbar\omega_z$ 条件下产生塞曼劈裂 $|\omega_z/\kappa| >> 1$ [43]。之后，为了产生自旋-轨道耦合，两束反向传播的拉曼激光（ω_R 和$\omega_R + \delta\omega_R$），波长为 $\lambda = 804.1nm$，失谐为$\delta = 1.6E_R$ [32]，沿x轴横向激发原子。这使超冷原子（ $5S_{1/2}$、$|\uparrow\rangle = |F = 2, m_F = 0\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle = |F = 2\rangle$ 在电子流形 $m_F = -1\rangle$内的两个内部赝自旋态发生耦合，其谱为 $F = 2$，见图1(b)。我们从近期公开发表的实验研究中选取了这些特定参数值[48–50] ，以确保我们的研究结果具有实验可行性。不过，我们的研究结果也可能适用于一系列选定的参数值，而这在很大程度上取决于耦合强度。

在绝热近似和旋波近似 [32, 44–46],下，所考虑系统的总哈密顿量可写为：

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = &\int d\boldsymbol{r}\hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger(\boldsymbol{r})\left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \mathcal{V}_{Lat}\right)\hat{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r}) \\ &+ \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\sum_{\sigma,\acute{\sigma}}\mathcal{U}_{\sigma,\acute{\sigma}}\hat{\psi}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{r})\hat{\psi}^\dagger_{\acute{\sigma}}(\boldsymbol{r})\hat{\psi}_{\acute{\sigma}}(\boldsymbol{r})\hat{\psi}_\sigma(\boldsymbol{r}) \\ &+ \hbar\Delta_c\hat{c}^\dagger\hat{c} - i\hbar\eta(\hat{c} - \hat{c}^\dagger). \end{aligned} \quad (1)$$

其中，$\hat{}\,\boldsymbol{\psi} = [\hat{}\,\hat{}\,\psi_\uparrow, \hat{}\,\psi_\downarrow]^T$ 表示分别对应于原子赝自旋态 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 的玻色场算符。$\hat{}\,\mathcal{H}_0 = \hbar^2\boldsymbol{k}^2\sigma_0/2m_a + \tilde{\alpha}k_x\sigma_y + \frac{\delta}{2}\sigma_y + \frac{\Omega_z}{2}\sigma_z$ 是包含强度为 $\tilde{\alpha} = E_R/k_L$的自旋轨道相互作用的单粒子哈密顿量。其中， $\delta = -g\mu_B B_z$为拉曼失谐，$\Omega_z = -g\mu_B B_y$ 为拉曼耦合，分别对应于沿$\hat{}\,z$ 轴和$\hat{}\,y$轴方向的磁场效应 [32, 46]。由于沿$\hat{}\,x$轴方向发生一维自旋轨道耦合，准动量是一维的 $\boldsymbol{k} = [k_x, 0, 0]$ 。σ_x、$_y$、$_z$ 表示泡利矩阵，单位矩阵为 σ_0。由纵向场（由泵浦激光驱动的腔模）和横向场（反向传播的拉曼光束）产生的二维晶格势可写为 $\mathcal{V}_{Lat} = \hbar\hat{c}^\dagger\hat{c}U_0[cos^2(kx) + cos^2(ky)]$ [46], ，其中$\hat{c}$ 和$\hat{c}^\dagger$ 分别对应于波数为 k的腔模的湮灭算符和产生算符。$U_0 = g_0^2/\Delta_a$ 对应于由拉比振荡 g_0 和腔-原子失谐 Δ_a [46]所定义的势阱深度。原子间相互作用可定义为$\mathcal{U}_\sigma$、$_{\acute{\sigma}} = 4\pi a^2_\sigma$、$_{\acute{\sigma}}\hbar^2/m_a$，其中$a_\sigma$、$_{\acute{\sigma}}$ 为s波散射。最后两项分别对应于腔内光学模及其与泵浦驱动的关系，如前文所述。

我们假设赝自旋态的种内和种间相互作用分别为$U_\uparrow$, $_\uparrow = U_{\downarrow,\downarrow} = U$ 和$U_{\uparrow,\downarrow} = U_{\downarrow,\uparrow} = \varepsilon U$，激光构型参数为 ε [32, 46]。随后，将平面波试探形式$\hat{}\,\boldsymbol{\psi}\hat{}\,(r) = e^{ikr}\,\hat{}\,\boldsymbol{\varphi}\,\hat{}$（其中$\hat{}\,\boldsymbol{\varphi} = [\hat{}\,\hat{}\,\varphi_\uparrow, \hat{}\,\varphi_\downarrow]^T$）代入玻色波函数，并计算相应的积分。利用归一化条件 $|\hat{}\,\varphi_\uparrow|^2 + |\hat{}\,\varphi_\downarrow|^2 = N$，我们推导出量子朗之万方程[46, 51] ，以将相关的阻尼和噪声纳入腔-原子系统。

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = \dot{\hat{c}} = (i\Delta - iG\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \kappa)\hat{c} + \eta + \sqrt{2\kappa}\hat{c}_{in}, \tag{2}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} = \dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}} = (\frac{\Omega\sigma_0}{2} + \tilde{\alpha}\boldsymbol{k_x}\sigma_y + \frac{\delta}{2}\sigma_y + \frac{\Omega_z}{2}\sigma_z - \gamma + G\hat{c}^{\dagger}\hat{c})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{2}U\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{2}\varepsilon U\hat{\varphi}^{\dagger}_{\sigma}\hat{\varphi}_{\acute{\sigma}}\hat{\varphi}_{\sigma} + \sqrt{\gamma}f_a. \tag{3}$$

这里， σ、 $\acute{\sigma} \in \{\uparrow,\downarrow\}$ 和 κ 对应腔内光子衰减率。 $\Delta = \Delta_c - NU_0/2$ 是有效原子-腔失谐， $\hat{c}_{\rm in}$ 表示与腔模相关的马尔可夫输入噪声，其均值为零 $\langle\hat{c}_{in}(t)\rangle = 0$ ，并满足δ关联 $\langle\hat{c}_{in}(t)\hat{c}^{\dagger}_{in}(\acute{t})\rangle = \delta(t-\acute{t})$ 定义在条件 $\hbar\omega_c >> k_BT$ [52]之下。原子模 的外部谐振俘获势此前被忽略，因为假设其与自旋无关；但它会导致原子运动阻尼。 γ 对应于赝态阻尼 $\hat{}$，且 f_a 是相关的马尔可夫噪声算符，其具有 δ 关联 $\langle\hat{}f_a(t)\hat{}f^{\dagger}_a(\acute{t})\rangle = \delta(t-\acute{t})$，条件为$\hbar\Omega >> k_BT$。

此外， $g_a = \frac{\omega_c}{L}\sqrt{\hbar/m_{bec}4\omega_r}$ 是原子-腔耦合，有效反冲频率为 $\Omega = 4\omega_r$ ， 质量为$m_{bec} = \hbar\omega_c^2/(L^2U_0^2\omega_r)$ [46, 51]。利用泡利矩阵的定义，量子朗之万方程可写为:

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = \dot{\hat{c}} = (i\Delta - iG(\hat{\varphi}^{\dagger}_{\uparrow}\hat{\varphi}_{\uparrow} + \hat{\varphi}^{\dagger}_{\downarrow}\hat{\varphi}_{\downarrow}) - \kappa)\hat{c} + \eta + \sqrt{2\kappa}\hat{c}_{in} \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\hat{\varphi}_{\uparrow}\\ \hat{\varphi}_{\downarrow}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\Omega}{2} + \frac{\Omega_z}{2} + G\hat{c}^{\dagger}\hat{c} + \frac{1}{2}UN - \gamma + \sqrt{\gamma}f_a & -i(\alpha + \frac{\delta}{2}) + \frac{1}{2}U(\varepsilon - 1)\hat{\varphi}^{\dagger}_{\downarrow}\hat{\varphi}_{\uparrow}\\ i(\alpha + \frac{\delta}{2}) + \frac{1}{2}U(\varepsilon - 1)\hat{\varphi}^{\dagger}_{\uparrow}\hat{\varphi}_{\downarrow} & \frac{\Omega}{2} - \frac{\Omega_z}{2} + G\hat{c}^{\dagger}\hat{c} + \frac{1}{2}UN - \gamma + \sqrt{\gamma}f_a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\varphi}_{\uparrow}\\ \hat{\varphi}_{\downarrow}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中， $\alpha = \tilde{\alpha}\boldsymbol{k_x}$。上述量子朗之万方程用于描述集体系统的动力学，至关重要。

复杂混合系统的稳态行为对于构建整体图景至关重要。在本研究中，我们将控制并讨论装置中各个相关子系统的稳态动力学。稳态行为的求取基于以下假设：将各子系统视为经典变量（因此省略变量上的帽子），并令量子朗之万方程中的时间导数为零，此时方程可写为:

$$c_s = \frac{\eta}{\kappa + i\big(\Delta + G(\varphi^{\dagger}_{\uparrow}\varphi_{\uparrow} + \varphi^{\dagger}_{\downarrow}\varphi_{\downarrow})\big)}, \tag{6}$$

$$\varphi_{\uparrow,\downarrow} = \frac{(\pm\alpha \mp \frac{\delta}{2})\varphi_{\downarrow,\uparrow}}{\frac{\Omega\pm i\Omega_z}{2} + Gc^{\dagger}_sc_s + \frac{1}{4}UN(\varepsilon+1) - \gamma}, \tag{7}$$

$$\varphi^{\dagger}_{\uparrow,\downarrow} = \frac{(\pm\alpha \mp \frac{\delta}{2})\varphi^{\dagger}_{\downarrow,\uparrow}}{\frac{\Omega\mp i\Omega_z}{2} + Gc^{\dagger}_sc_s + \frac{1}{4}UN(\varepsilon+1) - \gamma}. \tag{8}$$

腔内稳态光子的总数可定义为 $|c^{\dagger}_sc_s| = n_s$。此外，假设原子赝自旋态 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 中玻色子的总数分别为 $|\varphi^{\dagger}_{\uparrow}\varphi_{\uparrow}| = N_{\uparrow}$ 和 $|\varphi^{\dagger}_{\downarrow}\varphi_{\downarrow}| = N_{\downarrow}$，则可将稳态方程改写为:

$$n_s = \frac{\eta^2}{\kappa^2 + \big(\Delta + G(N_{\uparrow} + N_{\downarrow})\big)^2}, \tag{9}$$

$$N_{\uparrow} = \frac{(\alpha - \frac{\delta}{2})^2N_{\downarrow}}{\big(\frac{\Omega}{2} + Gn_s + \frac{1}{4}UN(\varepsilon+1) - \gamma\big)^2 + \big(\frac{\Omega_z}{2}\big)^2}, \tag{10}$$

$$N_{\downarrow} = \frac{(\alpha - \frac{\delta}{2})^2N_{\uparrow}}{\big(\frac{\Omega}{2} + Gn_s + \frac{1}{4}UN(\varepsilon+1) - \gamma\big)^2 + \big(\frac{\Omega_z}{2}\big)^2}. \tag{11}$$

这里需要注意，求解方程10 和11后，我们会得到两个赝自旋态中原子数的相似稳态响应。这是因为原子与腔之间的耦合参数相同，两个原子态都与同一个腔模相互作用。如果考虑不同强度的腔-原子耦合，那么响应显然会有所不同。

III. 腔内光子数的多稳态

在不存在自旋轨道耦合 α 和塞曼场效应 Ω_z 以及 δ 的情况下，系统的稳态响应与腔原子光力学系统几乎相同[11, 27], ，呈现双稳态。此类系统的双稳态行为已在文献中得到广泛研究，因此这里不再讨论这种行为。然而，在存在自旋轨道耦合和塞曼场效应时，稳态动力学将发生显著变化，因为此时系统不仅具有腔-原子耦合 G ，其赝自旋态也与塞曼场效应发生自旋轨道耦合。塞曼场诱导的赝自旋态如同两种不同的组分，在腔-原子耦合作用下彼此耦合角动量，因此，稳态动力学将呈现出不同于以往研究的行为；以往研究中系统仅表现为双稳态。而在本文中，系统表现为多稳态（具有两个以上的稳定态），如图2所示，其中绘出了腔内光子数随归一化外部泵浦场耦合η/κ的变化。

从图2(a)中可以看出，稳态腔光子数

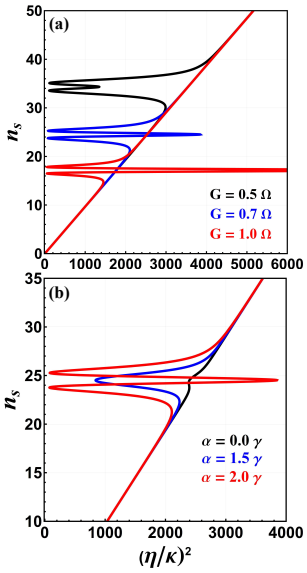


图2. 腔光子数n_s 随归一化外部泵浦激光强度η/κ 变化的稳态行为，分别对应不同的腔-原子耦合 G (a)和自旋轨道耦合强度 α (b)。(a)中，黑色、蓝色和红色曲线分别对应 $G = 0.5\Omega$、0.7Ω和1.0Ω，取值为 $\alpha = 2.0\gamma$。而在(b)中，黑色、蓝色和红色曲线分别对应 $\alpha = 0.0\gamma$、 1.5γ和 2.0γ，取值为 $G = 0.7\Omega$。赝自旋态的频率取为$\Omega \approx 19\times 2\pi$kHz。其他参数取为$\Omega_z = 0.5\Omega$、 $\delta = 0$、 $U/\Omega = 5.5$、 $\Delta = 2.5\kappa$以及 $\kappa \approx 1.3\times 2\pi$MHz [49, 50]。

n_s 在固定的自旋轨道耦合 $\alpha = 2.0\gamma$下具有多个稳定态。更准确地说，它包含三个稳定态和两个不稳定态。这两个不稳定态对应两个鞍点，代表系统中出现了高阶非线性或混沌。可以说，在这些不稳定态下，腔光子数 n_s 呈现不可预测的混沌行为。三个稳定态则确定了 n_s 具有可预测性的区域，并为我们提供了在稳定范围内运行系统的参数选择空间。如图2(a)中的蓝色和红色曲线所示，增强腔-原子耦合会使这些多稳态向低光子数区域移动，并向更高的外部泵浦驱动强度范围扩展。这意味着， G 的增加会缩小稳态下的总光子数；这显而易见，因为在强耦合范围内，更多光子被用于紧密束缚腔模。类似地，若保持腔-原子耦合不变而改变自旋轨道耦合，则可以观察到稳态腔光子数从双稳态动力学向多稳态行为的转变，如图2(b)所示，其中 $G = 0.7\Omega$保持恒定，而α 则发生变化。可以看出，在没有自旋轨道耦合时，光子数遵循双稳态曲线（见图2(b)中的黑色曲线）。但是，当施加并增大自旋轨道耦合 α时，腔光子数会从双稳态转变为多稳态行为，如下图所示

图中蓝色和红色曲线2(b)，其中 $\alpha = 1.5\gamma$ 和$\alpha = 2.0\gamma$ 分别如此。正如前文所述，原因在于，此时赝自旋态不仅通过自旋轨道相互作用彼此耦合，还分别作为两个不同的实体与腔模耦合。因此，这些结果证明了在 n_s 存在自旋轨道耦合原子态时会出现多稳态。

然而，如图3所示，这些多稳态动力学在很大程度上取决于其他系统参数。拉曼耦合 Ω_z 的存在及增强似乎会先缩小外部泵浦强度 η 范围内的多稳态区域，随后在取值较大时抑制多稳态效应，如图3(a)中的蓝色和红色曲线所示。这是因为，在拉曼耦合 Ω_z取值较高时，原子赝态彼此分离得更远，从而增强塞曼场相互作用[32], ；与腔-原子耦合类似，这会抑制多稳态光子模式。这一特性对于利用我们的系统实现参量光学开关可能至关重要。不过，它也很大程度上取决于自旋轨道耦合的强度。当拉曼失谐 δ变化时，随着拉曼失谐 δ减小，不同稳定态之间的光子数差异会增大，如图3(b)所示。黑色、蓝色和红色曲线分别表示拉曼失谐$\delta = +1\kappa$、 $\delta = 0\kappa$ 和 $\delta = -1\kappa$。减小 δ 会缩小能级间的劈裂，使更多光子得以汇入光子稳定态。这也可能与自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体[46]本征能谱的不对称行为有关。

此外，与 Ω_z 和腔-原子耦合 G类似，种间相互作用（不同赝自旋态之间的相互作用）强度也会抑制多稳态光子数，如图3(c)所示。原因也相同：种间相互作用取值越高，两种赝自旋态之间的相互作用越强，从而抑制稳定态中的光子数。在图3(d)中，可以观察到腔衰减率与原子自由度相关耗散之比的影响 κ/γ。比值 κ/γ 减小意味着相较于腔衰减率，原子耗散在增加，如黑色、蓝色和红色曲线所示，其中 $\kappa/\gamma > 1$、$\kappa = 1\gamma$ 和 $\kappa < 1\gamma$ 分别对应上述情况。这显而易见，因为原子机械耗散会直接影响腔内的光子数 n_s ，从而产生光子数更高的稳定态。多稳态对所有这些参数的依赖性不仅至关重要，也为稳态动力学提供了可控性[27]。

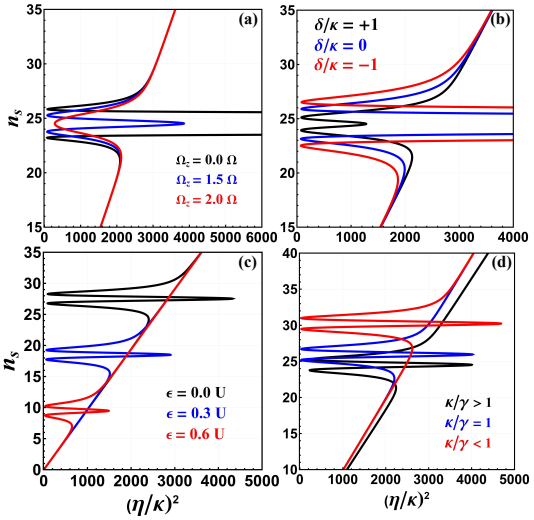


图 3. 稳态腔光子数 n_s 随 η/κ 变化的关系，其中 $G = 0.7\Omega$ 和 $\alpha = 2.0\gamma$保持不变。图 (a) 展示了拉曼耦合 Ω_z的影响，而图 (b)、(c) 和 (d) 分别展示了拉曼失谐 δ、种间相互作用强度 ϵ和腔衰减率 κ的影响。计算中使用的其他参数与图 2相同。

IV. 赝自旋态的多稳态分析

到目前为止，我们讨论了腔内光子数的多稳态，但研究赝自旋态原子数（或玻色粒子数）的稳态行为 $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$。本节将对赝自旋态中的原子数进行稳定性分析。我们发现， $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$ 的稳态行为与稳态光子数的行为不同。不过，有趣的是，它也与传统的原子光机械系统有很大差异，如图4所示。这里需要指出，我们只展示了赝自旋↑态的结果，因为自旋↓ 态的行为完全相同。不过，后文还将讨论赝自旋↑ 和自旋↓的联合稳态谱。

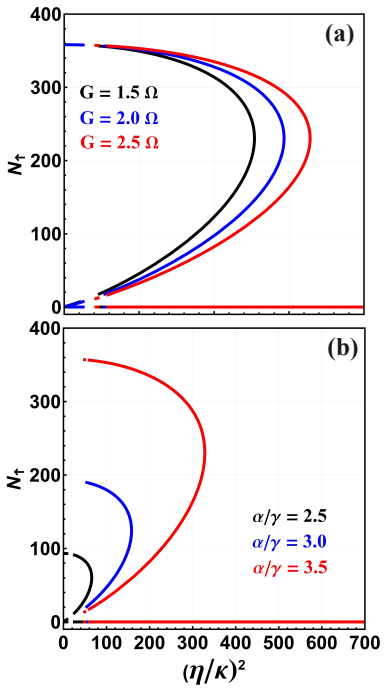


图 4. 赝自旋-↑态的稳态原子数 $N_\uparrow$ 随 η/κ 变化的关系，分别考察腔-原子耦合 G (a) 和自旋轨道耦合强度 α (b) 的影响。在图 (a) 中，黑色、蓝色和红色曲线分别对应于 $G = 1.5\Omega$、2.0Ω 和 2.5Ω，此时 $\alpha = 2.0\gamma$。图 (b) 中，黑色、蓝色和红色曲线分别表示 $\alpha = 2.5\gamma$、 3.0γ 和 3.5γ，此时 $G = 2.0\Omega$。计算中使用的其他参数与图 2相同。

通过分析图4可以发现，稳态$N_\uparrow$ 具有一个稳定态和两个不稳定态，与以往的研究相比，这种情况相当不同寻常。其原因在于原子自由度的赝自旋态之间存在自旋轨道相互作用。一方面，这些赝态与腔模耦合；另一方面，它们又通过自旋轨道耦合彼此相互耦合。由于腔-原子耦合 G，两个赝态都呈现多稳态行为，但其稳定性也取决于赝自旋态之间的耦合所对应的自旋轨道耦合。可以把这种情况想象成三个彼此耦合的球：只要其中一个球的状态发生变化，就会影响所有球的状态。在以往的研究中，如果腔内存在多个自由度，它们之间是通过腔场耦合，而非直接相互耦合。不过，我们将在本文后续部分进一步分析这一行为。这里我们将考察不同系统参数对 $N_\uparrow$稳态行为的影响。

腔-原子耦合的增强 G 以及自旋-轨道耦合的增强 α 似乎会使自旋-↑态的布居随外部泵浦激光强度而增加，如图4(a)中的黑色、蓝色和红色曲线所示。

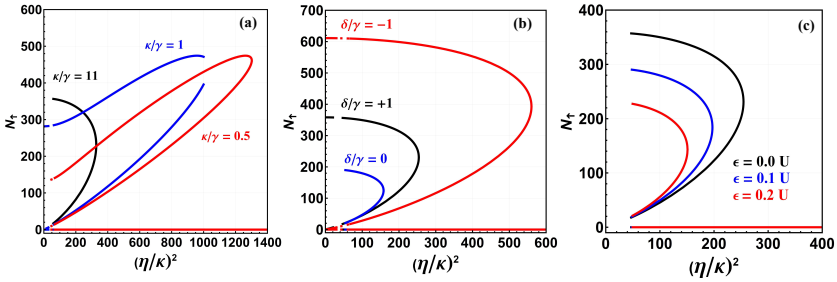


图 5. 原子赝自旋 $N_\uparrow$ 态的稳态布居数↑ 随归一化 η/κ 的变化，考察腔衰减率 κ （a）、拉曼失谐 δ （b）和种间相互作用 ϵ （c）的影响。在（a）中，黑色、蓝色和红色曲线分别表示 $\kappa/\gamma = 11$、
$\kappa/\gamma = 1$ $\kappa/\gamma = 0.5$ $\delta = +1\kappa$ $\delta = 0\kappa$ $\delta = -1\kappa$ 和。在（b）中，黑色、蓝色和红色曲线分别对应于、和；在（c）中，黑色、蓝色和红色曲线分别表示 $\epsilon = 0.0U$、 $\epsilon = 0.1U$ 和 $\epsilon = 0.2U$。其余参数与图2中相同。

和4(b)。然而，总布居数 $N_\uparrow$ 保持不变。这是因为 G 和 α 都会增强赝态与腔模之间的耦合，使它们更加依赖外部驱动强度。这最终会增强光对赝自旋态的力学效应，使稳定态和不稳定态随外部驱动强度向更远处移动，而总布居数保持不变。这些结果可称为双不稳定态，因为所谓的双不稳定态包含两个不稳定态和一个稳定态。同样，其他系统参数也会改变自旋-↑ 态中原子布居的稳态行为，如图5所示。腔衰减率与原子阻尼之比 κ/γ 的降低会增强双不稳定态随外部泵浦激光强度变化的趋势，与光子数的情况类似，如图5(a)所示。其原因相同：原子阻尼的增加似乎会对原子布居产生贡献。但有趣的是，此处原子布居 $N_\uparrow$ 起初较低， κ/γ较小时如此，但随着 η 增加，原子布居似乎也会增加。

然而，拉曼失谐的变化会显著改变稳态行为。当 $\delta = 0\kappa$时，稳态原子布居数 $N_\uparrow$ 达到最小值；但当我们 δ 从对称情形转变为非对称情形时， $N_\uparrow$ 双不稳定态中的布居数显著增加，如图5（b）中的蓝色和红色曲线所示，其中 $\delta = +\kappa$ 和$\delta = -1\kappa$分别如此。其原因在于，相变发生偏移的不对称性使原子赝自旋态释放更多粒子进入双不稳定态；在负相移情形下，这些效应似乎更为显著 $\delta = -1\kappa$。然而，赝态之间的种间相互作用对 $N_\uparrow$ 双稳态的影响，与其对腔内光子数态 n_s的影响相似，如图5（c）所示。原因也相同：赝态间相互作用越强，双稳态原子态中的不稳定粒子就越少。这些结果不仅为双不稳定性的发生提供了证据，也说明了稳态行为具有参数可控性。

为了进一步探究不同赝自旋态中原子布居的稳态动力学，我们绘制 $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$ 随归一化 η/κ的变化，如图所示。6。可以注意到，稳态 $N_\uparrow$ 与 $N_\downarrow$之间出现了转变。这清楚地表明，原子模在自旋-↑ 态与自旋-↓ 态之间发生了相变。这也可能解释了先前结果中为何存在一个稳定态和两个不稳定态，因为另一个稳定态似乎与另一种赝自旋态的其他布居数耦合。

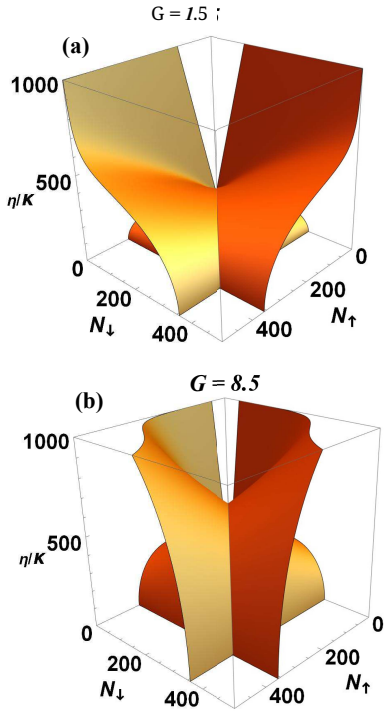


图 6. 总稳态布居 $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$，原子赝自旋↑ 和自旋↓ 态分别随归一化 η/κ 相对于腔-原子耦合 G变化。在 (a) 中， $G = 1.5$ Ω，而在 (b) 中 $G = 8.5\Omega$，取值为 $\alpha = 2.0\gamma$。这里，偏红色的曲线表示 $N_\uparrow$的稳定性动力学，而偏黄色的曲线对应布居数 $N_\downarrow$。数值计算中使用的其余参数与图2相同。

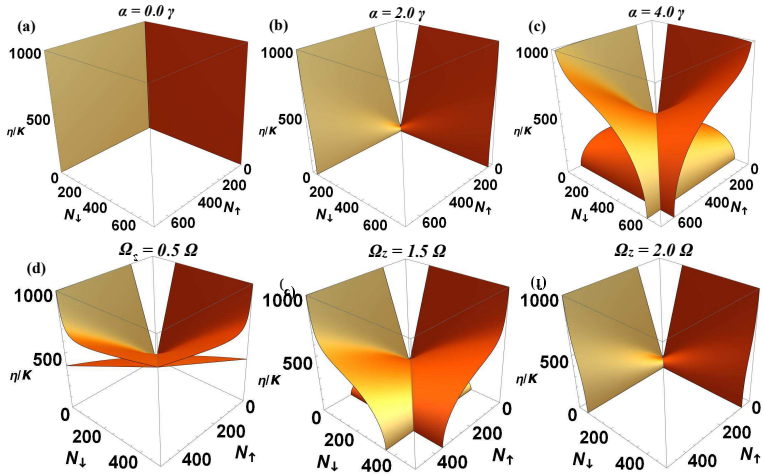


图 7. 布居数的集体动力学 $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$ 相对于归一化 η/κ 随自旋轨道耦合 α (a-c) 以及拉曼耦合 Ω_z (d-f)。 $\alpha = 0.0\gamma$， $\alpha = 2.0\gamma$ 和 $\alpha = 4.0\gamma$ 分别用于 (a)、(b) 和 (c)。而 $\Omega_z = 0.5\Omega$、$\Omega_z = 1.5\Omega$ 和 $\Omega_z = 2.0$分别用于 (d)、(e) 和 (f)。其他参数与图2相同。

其背后的原因当然是这些亚原子态之间的自旋轨道耦合，它在具有相反自旋的赝态中诱导出另一个不稳定态（而非稳定态）。换言之，腔模产生的光的力学效应最初使原子布居形成双稳态，但随后赝态之间的自旋轨道耦合会将其中一个稳定态转变为不稳定态。这种超冷原子中的腔介导自旋轨道相互作用对于引入多组分混合相互作用的新物理至关重要，并已成为近期多项研究的主题 [47]。如果增大腔-原子耦合，那么 $N_\uparrow$ 与 $N_\downarrow$ 之间的跃迁界面似乎会在更高的外部泵浦激光强度下向上移动，如图6(a) 和 6(b) 所示，其中 $G = 1.5\Omega$ 移至 $G = 8.5\Omega$。这显而易见，因为腔模的强度（它导致腔与原子之间的耦合）与外部泵浦激光的强度成正比。然而，所有这些特征都显著依赖于其他相关系统参数，我们将在本文接下来讨论这些参数。

由于自旋轨道耦合 α 以及塞曼场效应诱导的拉曼耦合 Ω_z 都会导致原子赝自旋态的分裂与产生，而这正是腔模和原子赝态稳态动力学发生变化的主要原因。因此，考察这些赝自旋态在自旋轨道耦合↑ 和自旋轨道耦合↓作用下的集体行为 α 以及在拉曼耦合 Ω_z作用下的集体行为十分重要，如图7(a-c) 和 7(d-f) 所示。在不存在自旋轨道耦合$\alpha = 0$的情况下，可以很容易地观察到，态 $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$ 中的布居数表现出相似的行为，并且随着外部泵浦强度的变化始终为零，见图7(a)。这显而易见，因为在这种构型下不存在赝自旋态，玻色-爱因斯坦凝聚体作为一个整体发挥作用。然而，当我们开始施加并增大自旋轨道耦合 α时，交点在 $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$ 之间随 η 变化的交点开始出现，情况与图6 所示类似。在 α较小时，这种过渡连接出现在较低的布居数处。然而，随着 α增大，它会移至 $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$的较高取值处，如图 7(b) 和 7(c) 所示，其中分别为 $\alpha = 2.0\gamma$ 和 $\alpha = 4.0\gamma$。其解释与一维情形相同：在 α 较高时，稳定态会饱和于较高的布居数，因为此时有更多原子不仅与 α相互作用，也与 G相互作用。换言之，在 α 较高时，更多原子容易受到光的力学效应的影响。与一维情形类似，这里的拉曼耦合 Ω_z似乎会抑制赝自旋态中的原子数，如图 7(d-f) 所示，其中分别为 $\Omega_z = 0.5\Omega$、$\Omega_z = 1.5\Omega$ 和 $\Omega_z = 2.0\Omega$。不仅 $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$ 似乎在较低取值处便达到饱和，而且 $N_\uparrow$ 与 $N_\downarrow$ 之间的交点也转移至较低原子数区域。正如前文所述，其原因在于更高的塞曼场效应会使赝自旋-↑ 态与自旋-↓ 态之间发生更高阶的分裂，从而减少赝态间的原子束缚。换言之，在塞曼场效应较强时，自旋轨道相互作用主导光的力学效应，因此受外部泵浦激光强度影响的原子布居数会更少。

进一步地，腔衰减率与原子阻尼之比 κ/γ 也会显著改变稳态原子数、赝自旋-↑ 和自旋-↓态，如图8(a-c) 所示，其中 $\kappa/\gamma = 5.0$， κ/γ =1。0 和 $\kappa/\gamma = 0.5$分别对应这些情形。可以看到，当我们增大原子耗散 γ 并保持腔衰减率 κ 不变时， γ 似乎会对原子自旋-↑态与自旋-↓态之间的相互作用产生影响。这导致原子布居 $N_\uparrow$ 和$N_\downarrow$ 之间出现了另一个跃迁界面，这确实非常有趣。这与探测光透明度增强的出现相似

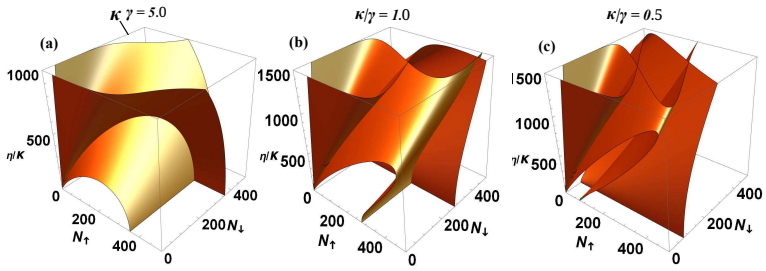


图8. $N_\uparrow$ 和 $N_\downarrow$ 在归一化 η/κ 下，受腔衰减率与原子阻尼之比 κ/γ的影响。（a-c）分别对应腔衰减率与原子阻尼之比 $\kappa/\gamma = 5.0$、$\kappa/\gamma = 1.0$ 和 $\kappa/\gamma = 0.5$。其余参数与图2相同。

在自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的情形中，参见文献[47]，，原子耗散表现为探测光的增益。这一现象还导致探测光透射体模中拓扑边缘态的形成，相关讨论见同一研究 [47]。因此，原子布居 $N_\uparrow$ 与 $N_\downarrow$ 之间出现次级跃迁界面，可能是赝原子自旋态发生非平庸相变的结果（或原因），并可为这一方向的多项研究奠定基础。

V. 结论

总之，我们展示了自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体与腔耦合系统的多稳态稳态行为。在阐明稳态动力学后，我们展示了腔光子数的多稳态现象，即存在多个稳定态和不稳定态，且这些状态可由系统参数控制。稳定态与不稳定态之间这种可控的光学开关对于现代光学器件至关重要。此外，我们还讨论了每个赝自旋态中的原子布居数也会出现类似的多稳态现象，并表明原子布居数具有两个不稳定态（所谓的双不稳定）状态，对应于外部泵浦驱动。自旋态的布居数似乎也彼此依赖，因为当我们整体观察时，两者之间会出现过渡界面。当原子机械阻尼率增加到高于腔衰减率时，自旋态布居数之间还会出现另一个界面，这一独特特征也因此变得更加重要。这可能与腔内自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的非平凡光学相互作用有关 [47]。这项研究不仅为探讨多个稳定态和不稳定态之间的光学开关提供了另一种思路，对于不同原子合成态之间的稳态相互作用也至关重要。

致谢

K.A.Y. 感谢国家自然科学基金委员会国际青年科学家研究基金（项目编号：KYZ04Y22050）、浙江师范大学科研经费（项目编号：ZC304021914）以及浙江省博士后研究项目（项目编号：ZC304021952）的支持。G.X.L. 感谢国家自然科学基金委员会项目（项目编号：11835011 和 11774316）的支持。

[1] H. Walther、B. T. H. Varcoe、B. G. Englert 和 T. Becker, *Rep. Prog. Phys.* **69** 1325–1382（2006）。[2] S. Haroche 和 J.-M. Raimond, 《探索量子：原子、腔与光子》，牛津大学出版社（2006）。[3] S. Haroche 和 J. M. Raimond, *Scientific American* **268** 54 60 1993 -（）。[4] S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **85** 1083（2013）。[5] A. Blais、Arne L. Grimsmo、S. M. Girvin 和 A. Wallraff, *Rev. Mod. Phys.* **93**, 025005（2021）。[6] R. Miller *et al.*, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38** S551（2005）。[7] P. Goy、J. M. Raimond、M. Gross 和 S. Haroche, *Phys.* （）。[8] *Rev. Lett.* **50** 1903 1983 C. Monroe, *Nature* **416** 238-246（2002）。[9] J. Stajic, *Science* **339** 1163（2013）。[10] F. Brennecke、S. Ritter、T. Donner 和 T. Esslinger, *Science* **322**, 235（2008）。[11] K. Zhang、W. Chen、M. Bhattacharya 和 P. Meystre, *Phys. Rev. A* **81**, 013802（2010）。[12] K. A. Yasir、M. Ayub 和 F. Saif, *J. Mod. Opt.* **61**, 1318（2014）。[13] M. Ayub、K. A. Yasir 和 F. Saif, *Laser Phys.* **24**, 115503 2014（）。[14] M. Paternostro、G. D. Chiara 和 G. M. Palma, *Phys.*, *Rev. Lett.* **104** 243602 2010（）。[15] M. Abdi, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 143601（2012）。[16] M. Abdi, *et al.*, *Phys. Rev. A* **89**, 022331（2014）。[17] E. A. Sete, *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B* **31**, 2821（2014）。[18] S. G. Hofer, *et al.*, *Phys. Rev. A* **84**, 052327（2011）。[19] Ying-Dan Wang 和 A. A. Clerk, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 153603 2012（）。

[20] S. Singh, *et al.*, *Phys. Rev. A* **86**, 021801（2012）。[21] G. S. Agarwal 和 S. Huang, *Phys. Rev. A* **81**, 041803 2010(R)（）。[22] S. Weis, *et al.*, *Science* **330**, 1520（2010）。[23] B. Peng, *et al.*, *Nat. Commun.* **10**, 1038（2014）。[24] A. H. Safavi-Naeini, *et al.*, *Nature* **472**, 69（2011）。[25] K. A. Yasir、Zhaoxin Liang、G. Xianlong 和 W. M. Liu, *Eur. Phys. J. Plus* **138**, 29（2023）。[26] A. Munir、K. A. Yasir、W. M. Liu 和 G. Xianlong, *Eur.*, （）。[27] *Phys. J. Plus* **137** 1143 2022 K. A. Yasir 和 W. M. Liu, *Sci. Rep.* **5**, 10612（2015）。[28] K. A. Yasir, *Opt. Commun.* **488**, 126820（2021）。[29] K. A. Yasir 和 W. M. Liu, *Sci. Rep.* **6**, 22651（2016）。[30] V. Galitski 和 I. B. Spielman, *Nature* **494**, 49（2013）。[31] X. J. Liu *et al*。, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 046402（2009）。[32] Y. J. Lin *et al*。, *Nature* **462**, 628（2009）。[33] Y. K. Kato *et al*。, *Science* **306**, 1910-1913（2004）。[34] M. Konig *et al*。, *Science* **318**, 766-770（2007）。[35] B. A. Bernevig、T. L. Hughes 和 S. C. Zhang, *Science* **314** 1757 1761 2006 , -（）。[36] D. Hsieh, *et al*。, *Nature* **452**, 970-974（2008）。[37] X. Li、E. Zhao 和 W. V. Liu, *Nat. Commun.* **4**, 4023（2013）。[38] K. Sun *et al*., *Nat. Phys.* **8**, 67-70 (2012). [39] J. D. Koralek *et al*., *Nature* **458**, 610-613 (2009). [40] C. Hamner, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 070401 (2015). [41] Y. J. Lin, K. Jim *é* *í* *Nature* nez-Garc a, 和 I. **471** 83 2011 B. Spielman, , ( ). [42] H. Hu *et al*., *Phys. Rev. Lett.* **108**, 010402 (2012). [43] Y. Deng *et al*., *Phys. Rev. Lett.* **112**, 143007 (2014). [44] B. Padhi 和 S. Ghosh, *Phys. Rev. A* **90**, 023627 (2014). [45] L. Dong *et al*., *Phys. Rev. A* **89**, 011602(R) (2014). [46] K. A. Yasir, L. Zhuang 和 W. M. Liu, *Phys. Rev. A* , ( ). [47] K. A. **95** 013810 2017 Yasir, L. Zhuang 和 W. M. Liu, *npj Quantum* *Inf.* **8** 109 2022 , ( ). [48] S. Zibrov, *et al*., *Phys. Rev. A* **72**, 011801(R) (2005). [49] F. Brennecke, *et al*., *Nature* **450**, 268-271 (2007). [50] F. Brennecke, S. Ritter, T. Donner 和 T. Esslinger, *Science* **322**, 235-238 (2008). [51] M. Paternostro, G. D. Chiara 和 G. M. Palma, *Phys.*, ( ). *Rev. Lett.* **104** 243602 2010 [52] J. Dalibard *et al*., *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523 (2011).