囚禁离子量子计算与量子模拟的纠缠门

蔡正阳，[1] Chunyang-Luan，[1] 欧凌峰，[1] 涂恒超，[1]殷子涵，[1]张景宁，[2]和 Kihwan Kim[1, 2, 3, 4, *]

[1] *State Key Laboratory of Low Dimensional Quantum Physics, Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*

[2] *Beijing Academy of Quantum Information Sciences, Beijing 100193, China*

[3] *Hefei National Laboratory, Hefei 230088, P. R. China*

[4] *Frontier Science Center for Quantum Information, Beijing 100084, China*

自1995年Cirac和Zoller提出首个量子门方案以来，囚禁离子系统一直是实用量子计算和量子模拟的领先平台。囚禁离子量子门在所有物理平台中展现出最高的保真度。近年来，人们开发了振幅调制、相位调制、频率调制或多频应用等复杂量子门方案，使量子门速度更快、能够抵御多种不完美因素，并适用于多个量子比特。本文回顾囚禁离子量子门的基本原理及近期进展。

arXiv:2302.02148v1 [quant-ph] 4 Feb 2023

I. 引言

1995年，人们提出并利用囚禁离子实现了首个用于量子计算的量子门 [1–3]。自 Cirac 和 Zoller 提出这一方案以来 [1], ，囚禁离子系统一直引领着量子计算领域 [4–8] ，也推动了量子模拟的发展 [9]。Cirac-Zoller（CZ）门的实现依赖于专门使用质心振动模。CZ门要求将离子完美冷却至基态，并对目标离子进行单独寻址，因此难以实现高保真度。1999年，Mølmer和Sørenson提出了一种不同类型的纠缠门，它放宽了对完美基态冷却和单独寻址的要求；美国国家标准与技术研究院（NIST）团队随后利用最多四个量子比特实现了这类量子门[10–13]。几乎在同一时期，人们提出并实现了一种量子门：通过条件位移操作，在振动模空间中产生几何相位，且取得了不错的保真度 [14–16], 。这种量子门也称为光移（LS）门。它对实验条件的要求与 Mølmer-Sørenson（MS）门相近。后来，人们从位置和动量的相空间中的几何相位角度理解了MS门，从而统一了对MS门和LS门的认识 [12, 17]。

基本上，LS [16] 门和 MS 门都可以理解为一种依赖于量子比特态的力的特定用法。对于 LS 门， [16], 力取决于 σ_z 基中的离子量子比特态；对于 MS 门，力则取决于σ_ϕ基中的离子量子比特态，其中$\sigma_\phi = \cos\phi\ \sigma_x + \sin\phi\ \sigma_y$ [12, 17]。因此，LS 门和 MS 门分别称为 σ_z门和σ_ϕ门。LS 门和 MS 门经过改进后，保真度已超过 99.9%，这是迄今为止量子计算所有物理平台中最高的保真度 [18–20]。

一种颇具前景的方案是：在单个囚禁区中，利用 LS 门或 MS门将少量离子量子比特纠缠起来，从而扩展离子阱系统的规模，并通过逐个移动离子来连接不同的囚禁区 [21, 22], ，这种架构称为量子电荷耦合器件（QCCD）架构。这些纠缠量子门通常由单束或多束波矢**k**非零的拉曼激光束实现。采用激光实现的囚禁离子量子门已在少量离子量子比特上取得成功，并实现了较高的保真度 [18–20]。然而，对于基于 QCCD 方案的大规模量子计算而言，要在不同囚禁区中使用大量激光束可能颇具挑战。微波或射频实现方案可为在多个区域实现量子门提供另一种解决方案，因为微波或射频电路可以集成到离子阱中 [23, 24]。这些无激光门需要显著的场梯度来耦合量子比特与振动模。目前已探索了两种主要方法；一种是将静磁场梯度与微波结合使用 [25–28], ，另一种是在接近量子比特频率处使用振荡磁场梯度 [23, 24, 29]。近期，第三种方案已得到实现，它结合了接近运动频率的场梯度和接近量子比特频率的场 [30–32]。

另外，人们提出并实现了在单个囚禁区内，对大量离子中的任意两个量子比特执行纠缠门的方法；该区域内振动模的总数会随离子数增加 [33–37]。在这种情况下，必须考虑多个集体振动模的影响，并在量子门操作结束时使目标量子比特与所有相关振动模解耦。最初，人们提出通过调幅来满足这些要求 [33–35, 38]。随后，为此目的又引入了相位 [39–41]或频率调制 [42–44],以及多音调制 [45–48], 等其他方法；此外，这些方法还可用于提高成对量子门的稳健性或抗噪能力 [45]。此外，这些复杂的量子门方法还可用于实现不受速度极限约束的双量子比特门 [38]。

此外，这些方案还扩展到同时或并行地纠缠更多量子比特 [48–51]。

本文介绍囚禁离子量子纠缠门的基本原理，并回顾近年来为实现各种目的而采用复杂脉冲调制的量子门的发展。我们指出，在众多不同类型的调制中，多频方法涵盖了其他所有调制方法所能实现的一般控制，并提供了根据不同目的系统地优化量子门的方法。最后，我们总结多频方法在各种目的中的一些应用。本文综述由以下几个部分组成。第二节介绍囚禁离子系统的基础知识，例如不同类型的量子比特、冷却、量子比特初始化、探测和单量子比特操作。第三节讨论耦合到单个振动模的两能级系统之间的相互作用，以及基于量子比特态依赖力、使用或不使用激光束的纠缠门操作。第四节总结振幅、相位、频率和多频等调制方法，并说明多频方法具有最一般的控制形式。第五节介绍一个通用理论框架，并举例说明如何通过多频方法（无论是否采用单独控制）加快量子门、增强量子门对各种噪声的鲁棒性，以及同时将量子门应用于两个以上的离子。最后，我们对本文综述作出总结并展望未来。

II. 囚禁离子系统基础

离子量子比特的类型

作为量子比特时，囚禁原子离子的两个内部能级通常编码为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$。与其他人工量子比特不同，离子量子比特在本质上完全相同，这一特性有利于构建大规模系统。与其他物理平台中的量子比特相比，离子量子比特还具有更多独特优势，例如超长相干时间，可达数小时量级 [52–55]，以及近乎完美的量子比特态初始化和探测 [53, 56, 57]。量子比特通常分为三种类型，其能级劈裂分别处于数兆赫兹至数十兆赫兹、吉赫兹和数百太赫兹的频率范围，对应塞曼量子比特（图 1(a)) [58], 、超精细量子比特（图 1(b)) [16, 19, 59–61] 和光学量子比特

（分别见图 1(c)。）

塞曼量子比特由一对塞曼能级构成，如图 1(a) 所示；通过施加频率差在兆赫量级的射频（RF）或拉曼激光，可以操控它们 [58]。对于塞曼量子比特，多普勒冷却、边带冷却和态初始化都可以简单实现

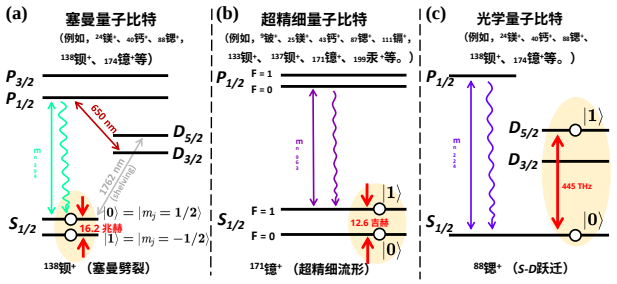


图 1. 三种典型离子量子比特的能级结构（能级间隔未按比例绘制）。(a) 塞曼量子比特的能级间隔约为几至几十兆赫（如 ^{138}钡$^+$ 等）。(b) 超精细量子比特由一对基态超精细能级构成，其能级间隔约为几至几十吉赫（如 ^{171}镱$^+$ 等）。(c) 光学量子比特由一个基态和另一个亚稳能级构成，由频率约为几百太赫的光场驱动（如 ^{88}锶$^+$ 等）。

而无需高频边带、窄线宽激光器等先进实验条件。然而，塞曼量子比特的高效态判别需要另一个亚稳态能级，以将其中一个量子比特态暂存于该能级。此外，塞曼量子比特对磁场涨落十分敏感，因此其相干时间相对较短，约为毫秒量级。借助磁场屏蔽和永磁体，并采用动态解耦脉冲 [58]，塞曼量子比特的相干时间已延长至 ~ 2.1 s。对于光学量子比特，使用基态流形中的一个能级和亚稳态电子态中的另一个能级，两者通常由电四极跃迁或八极跃迁相隔，如图 1(c) 所示。这些跃迁可由可见光至近红外光谱区域内的单频激光驱动。由于亚稳态能级寿命较长，要实现光学跃迁，需要使用由高精细度腔稳频的窄线宽激光器（~ 1 Hz）。光学量子比特的相干时间与塞曼量子比特相近。人们已尝试通过技术手段抑制激光的相位涨落，并将相干时间延长至上能级衰减所决定的极限 [62]。

超精细量子比特由一对基态超精细能级构成，可由微波场 [29, 63] 或拉曼激光驱动，其频率差约为 GHz 量级，如图 1(b) 所示。超精细量子比特可通过对一阶磁场不敏感的“时钟”跃迁实现，其相干时间已达到数小时量级 [52–55]。此外，由基态超精细能级与共振射频场 [26, 64] 耦合构成的缀饰态也是一种可用的量子比特，可用于实现基于磁场梯度的无激光门。

冷却、态初始化和探测

要利用囚禁离子实现高保真度量子纠缠门，必须进行运动基态冷却，这可通过激光冷却方法实现。首先，基于速度依赖辐射力的多普勒冷却 [65, 66],通常可将离子冷却至毫开尔文量级，其冷却极限受被冷却离子的自然线宽限制。通过分辨边带冷却 [67, 68]可实现接近基态的冷却。此外，西西弗斯冷却 [69, 70], 或电磁诱导透明（EIT）冷却可作为替代方法，同时冷却多个离子的许多模式 [71–78]。

在施加一系列量子门操作之前，应将离子量子比特初始化为量子比特态中的一种。态初始化通常通过光抽运技术在少于几微秒的时间内完成 [79]。量子操作结束时，可以通过态相关的荧光探测来测量离子量子比特的状态 [80, 81]。离子量子比特会被投影到亮态 $|1\rangle$，该状态在探测激光的照射下会散射大量光子；或者被投影到暗态 $|0\rangle$，该状态几乎不散射光子。散射出的荧光光子由成像系统收集，并通常由光电倍增管（PMT）或电荷耦合器件（CCD）探测。最近，使用 ^{40}钙$^{+}$ 和 ^{138}钡$^{+}$ [56, 82]的光学量子比特已经实现了超过 99.99% 的探测保真度。对于单个 ^{133}钡$^{+}$ 离子的超精细量子比特，探测保真度约达到 99.97% [83]。对于使用 ^{43}钙$^{+}$ 和 ^{171}镱$^{+}$的其他超精细量子比特，已观察到超过 99% 的探测保真度 [56, 84]。态探测的持续时间通常约为几百 μs 到几毫秒。据报道，最短探测时间为 $\sim 11\ \mu$s，并通过超导纳米线单光子探测器（SNSPD）实现了 99.93% 的平均保真度 [84]。

单量子比特操作

单量子比特操作可由与量子比特频率共振的场驱动，可通过射频场 [53], 拉曼激光 [19, 85] 或单束激光 [62] 实现。单量子比特态描述为$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$，其中拉比频率为 $\Omega = \theta/t$，表示场-物质相互作用的耦合强度 [4]。

在实验中，近场微波 [53] 对 ^{43}钙$^{+}$ 的超精细量子比特实现了最高达 99.9999 % 的单量子比特门保真度。使用拉曼激光束，^{43}钙$^{+}$ 和^{9}铍$^{+}$ [18, 19]的超精细量子比特保真度均已达到 99.99% 以上。对于光学量子比特，使用单台窄线宽激光器 [62]。

为加快单量子比特门的速度，人们主要尝试了各种技术手段。采用拉曼方法时，门持续时间已缩短至小于 50 ps [85, 86]。采用微波方法，已实现时间尺度为 20 ns 的量子门 [24]。此外，通过应用调制脉冲序列并抑制不需要的激发跃迁，可以提高超快单量子比特门的保真度 [87, 88]。

对于离子量子比特，尤其是超精细量子比特的单量子比特操作，主要误差来源是技术上的不完美因素，例如微波场振幅的波动。对于光学操作，相关偶极跃迁产生的光子散射是另一个限制因素 [89], ，使其保真度低于微波量子门。采用波长较长的场，或采用能够消除与振动模耦合的共传播拉曼方案，可以显著抑制单量子比特操作中与振动模的耦合。钟态量子比特的相干时间已达到数小时 [52–55]，因此目前并不构成限制单量子比特操作保真度的因素。

III. 激光门与无激光门简述

与单个振动模耦合的二能级系统

对于多量子比特门，存储在囚禁离子内部态中的量子信息通过与集体振动模耦合，在离子之间传递。集体振动模也称为“量子总线”，在量子纠缠门中发挥着核心作用 [4, 5, 17]。对于近共振场，我们只考虑一个二能级系统和一个振动模，此时一般的相互作用哈密顿量可表示为：

$$\hat{H}_{\rm int} = \frac{\hbar}{2}\Omega[e^{i(kx-\omega t+\phi)} + e^{-i(kx-\omega t+\phi)}](\hat{\sigma}^{+} + \hat{\sigma}^{-}), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{e}}_x$、$\omega$ 和 ϕ 分别为该场的波矢、频率和相位，$\Omega = |\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_{\hbar}|$为拉比频率，且 $\hat{\sigma}^{+} = |1\rangle\langle 0|$、$\hat{\sigma}^{-} = |0\rangle\langle 1|$。我们假设该场与 x径向方向上的振动模耦合。相对于 $\hat{H}_0 = \frac{\hbar}{2}\omega_0\hat{\sigma}^{z} + \hbar\omega_{\rm m}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$变换到相互作用绘景后，上述相互作用哈密顿量（1）经旋波近似（RWA）可简化为：

$$\hat{H}'_{\rm int} = \frac{\hbar}{2}\Omega\left\{\hat{\sigma}^{+}e^{i[\eta(\hat{a}^{\dagger}e^{i\omega_{\rm m}t}+\hat{a}e^{-i\omega_{\rm m}t}-\mu t+\phi)]}\right\} + \text{h.c.}, \quad (2)$$

其中，$\mu = \omega - \omega_0$ 是场频率与量子比特频率之间的失谐 ω_0, $\omega_{\rm m}$ 是运动

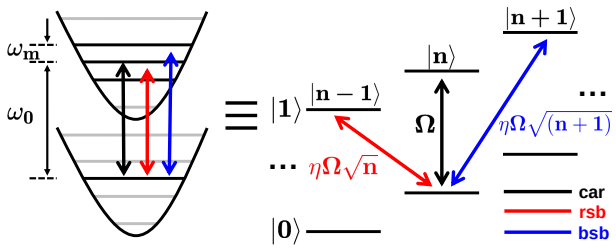


图 2. 载波与边带跃迁示意图，其中 ω_0 和 ω_m 分别为量子比特频率和运动模频率。缩写 car（黑线）、rsb（红线）和 bsb（蓝线）分别表示载波、红边带和蓝边带跃迁。

模频率，$\eta = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}$ 是兰姆-迪克参数。

通常，囚禁离子的声子数 $|n$会被冷却至 Lamb-Dicke 区域 [4, 5, 17], ，其中$\eta\sqrt{n+1} \ll 1$。在此区域内，相互作用哈密顿量（2）可进一步简化为以下形式，

$$\hat{H}_{\mathrm{LD}} = \frac{\hbar}{2}\Omega\hat{\sigma}^{+}\left[1 + i\eta\left(\hat{a}^{\dagger}e^{i\omega_m t} + \hat{a}e^{-i\omega_m t}\right)\right]e^{i(\phi-\mu t)} + \mathrm{h.c.}. \tag{3}$$

特别地，我们考虑三种类型的相互作用：载波跃迁（$\mu = 0$）、失谐蓝边带（$\mu = \omega_m + \delta$）和红边带跃迁（$\mu = -\omega_m - \delta$），

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\mathrm{car}} &= \frac{\hbar}{2}\Omega(\hat{\sigma}^{+}e^{i\phi_c} + \hat{\sigma}^{-}e^{-i\phi_c}),\\
\hat{H}_{\mathrm{bsb}} &= i\eta\frac{\hbar}{2}\Omega(\hat{\sigma}^{+}\hat{a}^{\dagger}e^{i\phi_b}e^{-i\delta t} - \hat{\sigma}^{-}\hat{a}e^{-i\phi_b}e^{i\delta t}),\\
\hat{H}_{\mathrm{rsb}} &= i\eta\frac{\hbar}{2}\Omega(\hat{\sigma}^{+}\hat{a}e^{i\phi_r}e^{i\delta t} - \hat{\sigma}^{-}\hat{a}^{\dagger}e^{-i\phi_r}e^{-i\delta t}),
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\delta \ll \omega_m$。如图 2 所示，载波跃迁$|0,\ n\rangle \leftrightarrow |1,\ n\rangle$以拉比频率 Ω 驱动，而蓝边带（$|0,\ n\rangle \leftrightarrow |1,\ n+1\rangle$）和红边带跃迁（$|0,\ n\rangle \leftrightarrow |1,\ n-1\rangle$）分别以 $\eta\Omega\sqrt{n+1}$ 和 $\eta\Omega\sqrt{n}$的拉比频率驱动。

对于由近共振场与单个振动模耦合的离子量子比特，可以通过结合蓝边带和红边带跃迁来实现量子比特态依赖力，

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\mathrm{SDF}} &= \hat{H}_{\mathrm{rsb}} + \hat{H}_{\mathrm{bsb}}\\
&= \eta\frac{\hbar}{2}\Omega(\hat{a}^{\dagger}e^{i\phi_m}e^{-i\delta t} + \hat{a}e^{-i\phi_m}e^{i\delta t})\hat{\sigma}^{\phi_S},
\end{aligned} \tag{5}$$

其中我们有 $\phi_S = (\phi_b + \phi_r - \pi)/2$, $\phi_m = (\phi_b - \phi_r)/2$, and $\hat{\sigma}^{\phi_S} = \hat{\sigma}^{x}\cos\phi_S + \hat{\sigma}^{y}\sin\phi_S$。显然，$\phi_S$和$\phi_m$ 分别与量子比特态和振动模的相位相关 [17, 90]。

为具有普适性，我们可以将上述哈密顿量推广为以下形式 [17, 90],

$$\hat{H}_{\mathrm{SDF}} = i\hbar(\gamma(t)\hat{a}^{\dagger} - \gamma^{*}(t)\hat{a})\hat{\sigma}^{\phi_S}, \tag{6}$$

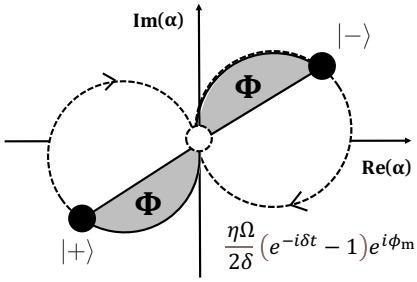


图 3. 自旋依赖力驱动运动轨迹在相空间中的演化。态 $|+\rangle$和 $|-\rangle$分别表示$\hat{\sigma}^{\phi_S}$ 的两个本征态，其本征值分别为 $+1$ 和 -1。

幺正演化可以写成

$$\hat{U}(t) = \hat{D}(\alpha(t)\hat{\sigma}^{\phi_S})\exp(i\Phi(t)), \tag{7}$$

其中，$\hat{D}$ 是位移算符，$\Phi(t)$是几何相位 [17]。$\gamma(t)$、$\alpha(t)$和$\Phi(t)$的表达式如下，

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= -i\frac{\Omega}{2}\eta e^{-i\delta t}e^{i\phi_m},\\
\alpha(t) &= \int_0^t\left(-i\frac{\Omega}{2}\eta e^{-i\delta t}e^{i\phi_m}\right)dt = \frac{\Omega\eta e^{i\phi_m}}{2\delta}\left(e^{-i\delta t}-1\right),\\
\Phi(t) &= \mathrm{Im}\left(\int_0^t \alpha(t')^{*}\mathrm{d}\alpha(t')\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

当 $\delta = 0$ 时，自旋依赖力可以简化为以下表达式，

$$\hat{H}_{\mathrm{SDF}}^{\delta=0} = \eta\frac{\hbar}{2}\Omega\left(\hat{a}^{\dagger}e^{i\phi_m} + \hat{a}e^{-i\phi_m}\right)\hat{\sigma}^{\phi_S}, \tag{9}$$

其中，相应的项为 $\gamma(t) = -i\Omega\eta e^{i\phi_m}/2$、$\alpha(t) = -i\Omega\eta e^{i\phi_m}t/2$，因此当 $\Phi(t) = 0$ 时，不会产生几何相位。

然而，当失谐 $\delta \neq 0$ 时，α 的演化将沿着圆形轨迹进行，如图 3 所示。图中沿不同方向绕行的左右两支分别对应于 $\hat{\sigma}^{\phi_S}$ 的正、负本征态，它们将产生相同的几何相位，其值等于所围面积的大小。当轨迹回到原点时，运动态与自旋态彼此解耦。

到目前为止，我们已经说明了一种产生 σ^{ϕ_S}-自旋依赖力的方法，它可直接实现 MS门。我们注意到，如 [15–17], 所述，也可以在 σ^{z}-基底中实现自旋依赖力，从而实现 LS门。

激光门

在离子阱系统中，仍可通过内部态与集体振动模之间的耦合来实现双量子比特纠缠门。本节主要关注如何利用单个集体模，之后将讨论包含多个集体振动模的一般情况。

囚禁离子纠缠门可以通过多种不同方式实现，既可以使用激光束，也可以不使用。多年来，采用可调谐激光的组合来实现多量子比特门，一直是最常见且广泛应用的方案，无论是用于超精细量子比特还是光学量子比特。超精细量子比特通常通过拉曼跃迁操控，而光学量子比特则通过窄线宽激光直接驱动跃迁。

Cirac和Zoller提出了最初的双离子量子比特纠缠门 [1] ，并通过单量子比特和双量子比特 [2, 3]实现了该门。然而，CZ门需要将集体振动模冷却至基态，并对单个离子进行激光寻址，因此难以实现高保真度量子门。

与CZ门方案不同，Mølmer-Sørenson（MS）门 [10–12] 与相关振动模的声子数 $|n$无关，因此在实验上比CZ门方案更有利。对于MS门方案，一对囚禁离子同时受到双频激光场照射，态依赖力会驱动离子，使其根据量子比特态在位置-动量相空间中沿不同的运动轨迹演化 [12, 17]。要实现纠缠操作，必须在量子门结束时使内部态解纠缠，同时积累 $\pi/4$的几何相位。MS门方案于2000年首次在 $^{9}Be^{+}$超精细量子比特 [13] 上得到演示。许多离子阱研究组已广泛演示MS门，其保真度最高可达 99.9% [18, 91]。此外，通过使用误差缓解技术 [92]，双量子比特门的有效门错误率也从 10^{-2} 级的物理不保真度降低至$(0.96 \pm 0.10) \times 10^{-3}$ 。

对于MS门，自旋翻转过程通过使用双频激光来实现，其中心频率对应于单翻转共振频率，边带频率则与振动模略有失谐，如图4所示 [93]。为简化讨论，下文仅考虑一个轴向模。这样，哈密顿量可由式（5）直接推广到双离子情形而得 [17],

$$\hat{H}_{\mathrm{SDF}} = \sum_{j=1}^{2} \eta_j \frac{\hbar\Omega}{2} (\hat{a}^{\dagger} \mathrm{e}^{-i\delta t} \mathrm{e}^{i\phi_{\mathrm{m},j}} + \hat{a} \mathrm{e}^{i\delta t} \mathrm{e}^{-i\phi_{\mathrm{m},j}}) \hat{\sigma}_j^{\phi_{\mathrm{S},j}}, \quad (10)$$

其中， η_j 和 $\phi_{\mathrm{m},\ j}$ 分别表示每个离子振动模对应的兰姆-迪克参数和相位

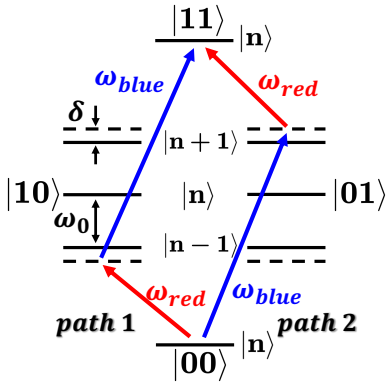


图4. MS门的两条典型路径示意图。这些路径由双频激光场驱动，且与声子数无关 $|n$； ω_0 和 δ 分别为量子比特频率和激光失谐。

分别。假设有 $\phi_{\mathrm{S},\ 1} = \phi_{\mathrm{S},\ 2} = \phi_{\mathrm{S}}$，那么，上述哈密顿量将导出以下演化算符，

$$\hat{U}(t) = \exp\left[\sum_{j=1}^{2} \left(\alpha_j(t) a^{\dagger} - \alpha_j^{*}(t) a\right) \hat{\sigma}_j^{\phi_{\mathrm{S}}} - i \frac{\theta(t)}{2} \hat{\sigma}_1^{\phi_{\mathrm{S}}} \hat{\sigma}_2^{\phi_{\mathrm{S}}}\right], \quad (11)$$

其中

$$\alpha_j(t) = -i \frac{\eta_j \Omega}{2} \int_0^t \mathrm{e}^{-i\delta t} \mathrm{e}^{i\phi_{\mathrm{m},j}} \mathrm{d}t = \frac{\Omega \eta_j \mathrm{e}^{i\phi_{\mathrm{m},j}}}{2\delta} \left(\mathrm{e}^{-i\delta t} - 1\right), \quad (12)$$

$$\theta(t) = \eta_1 \eta_2 \Omega^2 \left(\frac{t}{\delta} - \frac{\sin(\delta t)}{\delta^2}\right). \quad (13)$$

从相空间的角度来看，当式（12）的相位轨迹 $\alpha_j(t)$ 闭合后，离子内部态将与振动模完全解耦，且式（11）的第一项消失。此时，式（13）所示双离子门的几何相位 $\theta(t)$ 得到 [12], ，MS相互作用的演化可简化为 [94],

$$\hat{U}(\theta) = \exp\left(-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_1^{\phi_{\mathrm{S}}} \hat{\sigma}_2^{\phi_{\mathrm{S}}}\right). \quad (14)$$

Milburn 在 2000 [15] 提出了另一种典型的双量子比特纠缠门方案，并在$^{9}Be^{+}$ 超精细量子比特上进行了演示 [16], ，这种方案被称为 LS 门。与 MS 门方案类似，LS 门也由态依赖力驱动，并通过集体振动模在离子量子比特之间产生纠缠相互作用。然而，LS 门操作期间不需要发生 $|0 \leftrightarrow |1$态跃迁。LS 门主要通过施加两束频率差接近目标振动模频率的激光束来实现，耦合方向沿着波矢差的方向。在

在 Lamb-Dicke 区域和旋波近似下，相互作用哈密顿量可写为:

$$\hat{H}_{\mathrm{I}} = \sum_{j=1,2}\sum_{s=0,1}\frac{\hbar\eta_j}{2}\Omega_s\left|s\right\rangle\left\langle s\right|_j\left[\hat{a}e^{i(\delta t-\phi_{\mathrm{m},j})}+\hat{a}^{\dagger}e^{-i(\delta t-\phi_{\mathrm{m},j})}\right]. \tag{15}$$

当我们有 $\Omega_0 = -\Omega_1 = \Omega$ 时，可以将哈密顿量变换为以下形式:

$$\hat{H}_{\mathrm{SDF}} = \sum_{j=1}^{2}\eta_j\frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{a}^{\dagger}\mathrm{e}^{-i\delta t}\mathrm{e}^{i\phi_{\mathrm{m},j}}+\hat{a}\mathrm{e}^{i\delta t}\mathrm{e}^{-i\phi_{\mathrm{m},j}})\hat{\sigma}_j^z. \tag{16}$$

我们可以立即发现，上述式 (16) 的哈密顿量与式 (10) 的 MS 门哈密顿量几乎相同，区别仅在于 $\hat{}\sigma_j^{\phi_{\mathrm{S}}}$ 被 $\hat{}\sigma_j^z$ 取代，这表明 MS 门与 LS 门具有相似性。在这种情况下，我们可以得到一个与式 (11) 类似形式的演化算符,

$$\hat{U}(t) = \exp\left[\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_j(t)a^{\dagger}-\alpha_j^{*}(t)a\right)\hat{\sigma}_z^j - i\frac{\theta}{2}(t)\hat{\sigma}_1^z\hat{\sigma}_2^z\right], \tag{17}$$

其中， $\alpha_j(t)$ 和 $\theta(t)$ 的定义直接沿用式 (12、13)。当单量子比特相互作用项消失时，我们有:

$$\hat{U}(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_1^z\hat{\sigma}_2^z\right). \tag{18}$$

LS 门的不完美性源于多种因素，包括超出 Lamb-Dicke 区域的高阶项、激光控制误差、运动退相干、不期望的模式耦合、散射误差等。这类量子门已在超精细量子比特 [16, 19] 和光学量子比特 [20, 95] 上得到演示。钙超精细量子比特 [96] 上已实现保真度为 99.8% 的快速门，耗时 1.6 μs。利用钙光学量子比特 [97]，已直接测得不保真度为 $6(3)\times10^{-4}$ 的贝尔态，且未扣除实验误差。

人们曾认为，使用场不敏感量子比特无法实现 LS门 [17]。然而，有人提出，可通过将激光失谐设在阱频率的中间 [93, 98]，或利用窄线跃迁 [99]，用场不敏感量子比特实现 LS门。利用钟态实现的这些 LS门已得到实验验证 [100–102]。

MS门和 LS门也已应用于多种类原子离子 [103–110]。牛津团队已在 ^{43}钙$^{+}$ 超精细量子比特与 ^{88}锶$^{+}$ 塞曼量子比特之间实现了 99.8 % 的门保真度 [109]。

无激光门

微波场或射频场可用于实现高保真度的单量子比特门，并可便捷地控制振幅和相位。为了耦合量子比特与运动以实现多量子比特门，场强应在离子的有效尺寸范围（ $z_0 \sim 10\,nm$）内显著变化。然而，微波场或射频场的梯度与 $1/\lambda \sim 1/100\,mm$ 成正比，过小而无法驱动自旋-运动相互作用。换言之，微波场的兰姆-迪克参数约为 $\eta \sim 10^{-7}$，因此产生的自旋 - 运动耦合可以忽略不计。解决这一局限的一种方法是加入梯度较大的静磁场，或利用振荡磁场的近场；在这种情况下，梯度不受场波长的限制。

利用静态磁场梯度实现自旋-运动耦合的方案最初由 Mintert 和 Wunderlich 于 2001 [25]提出。当离子与静态磁场梯度 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$及近量子比特频率微波相互作用时，哈密顿量可表示如下:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}^z + \hbar\omega_m\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\\ &\quad + \frac{1}{2}\mu_z(B_0+\frac{\partial B_z}{\partial z}z)\hat{\sigma}^z + \hbar\Omega_{\mu}\hat{\sigma}^x\cos(\omega_{\mu}t),\end{aligned} \tag{19}$$

其中， ω_0 是量子比特频率， ω_m 是振动模频率， μ_z 是磁偶极矩， B_0是离子平衡位置处的磁场， $\frac{\partial B_z}{\partial z}$是磁场梯度， z 是相对于平衡位置的位移，Ω_{μ} 是表征偶极相互作用强度的拉比频率， ω_u 是接近量子比特频率的微波。位移 z 可以改写为 $z = z_0(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})$，其中 $z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}$是运动基态的尺度。应用变换$\hat{}H' = e^{\hat{}S}\hat{}He^{-\hat{S}}$（其中$\hat{}S = \eta'(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})\hat{}\sigma_z$， $\eta' = \frac{\mu_z z_0}{2\hbar\omega_m}\frac{\partial B_z}{\partial z}$）后，式 19 的相互作用部分可表示为 [25, 111]:

$$\hat{H}_I' = \frac{1}{2}\hbar\Omega_{\mu}(\hat{\sigma}^{+}e^{\eta'(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})}+\hat{\sigma}^{-}e^{-\eta'(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})})(e^{i\omega_{\mu}t}+e^{-i\omega_{\mu}t}). \tag{20}$$

因此，离子感受到一个有效的兰姆-迪克参数 η'，这意味着可以通过增大梯度 [112, 113]来增强量子比特-运动耦合。从另一个角度来看，如果移除梯度项，式 19 中的相互作用项只能驱动具有 $\delta n = 0$的自旋翻转。然而，引入梯度后， |0⟩和|1⟩的运动态之间的重叠发生了变化，这意味着可以实现具有 $\delta n \neq 0$ 的自旋翻转，如图 5(a) 所示。实验中的静态磁场梯度可由永磁体 [27, 28, 113] 或通有直流电流的导线 [114–116]产生。由于磁场随空间变化，离子的共振频率取决于位置，因此可通过施加不同的微波频率 [112, 117]实现单独寻址。测得基于频率选择的单独寻址串扰低至 10^{-5} [118]，其中串扰以所有非寻址量子比特中的激发数来衡量

。单独寻址方法已扩展到纠缠门操作，并已展示离子的最近邻或非最近邻相互作用[27]。静态磁场梯度方案的一个缺点是必须使用磁场敏感量子比特，其门保真度和相干时间可能因磁场波动而严重下降。研究人员提出并实现了一种采用微波的缀饰态量子比特——有效时钟量子比特，并证明其相干时间比裸磁敏感量子比特提高了两个数量级 [26]。缀饰态量子比特还得到了进一步发展，并已展示一种保真度为 98.5%、时长为 2.7 ms 的双量子比特门 [28, 64, 119–121]。

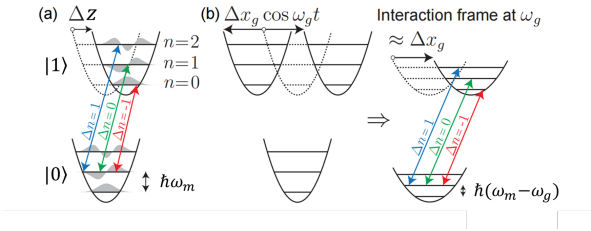


图 5. 量子比特与简谐振子耦合的示意图，其中自旋依赖位移来自：(a) 静态磁场梯度，或 (b) 振荡的近运动频率磁场梯度。改编自文献[31]。

振荡的近量子比特频率磁场梯度被提出作为耦合量子比特与运动的另一种方法 [23]。以 x 轴方向的梯度为例，相互作用哈密顿量可写为：

$$\hat{H}_I = \mu_x \frac{\partial B}{\partial x} x_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_x \cos(w_g t), \tag{21}$$

其中，ω_g 是接近量子比特频率的频率 ω_0。采用算符 $\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}^z + \hbar\omega_m\hat{a}^\dagger\hat{a}$的相互作用绘景时，$\hat{H}_I$ 可改写为：

$$\hat{H}_I' = \hbar\hat{\sigma}_x\Omega_g\hat{a}e^{-i(\delta+\omega_m)t} + h.c., \tag{22}$$

其中 $\delta = \omega_g - \omega_0$，且 $\Omega_g = \frac{\mu_x x_0}{2\hbar}\frac{\partial B}{\partial x}$。因此，可以实现量子比特-运动耦合。在实验中，2011年通过微波实现的双量子比特$\hat{\sigma}_\phi\hat{\sigma}_\phi$ 纠缠门的保真度达到 76(3) % [24]，其近量子比特频率微波梯度由集成在微加工离子阱中的电极电流产生。通过单独寻址实现了自旋翻转串扰误差约为 10^{-3}[122]。然而，残余微波场和磁场波动会显著影响双量子比特门的保真度 [123]。为缓解这两个限制，采用动态去耦方法来提高保真度达到 99.7%，门时间为 3.25 ms [29]。另一种通过调制微波振幅来降低运动模式频率波动所致误差的方法，经验证并得以实现，平均保真度达到 99.7%，门时间为 2.938 ms [124]。将振荡磁场梯度方法集成到表面离子阱中，双量子比特保真度达到 98.2% [125]。

然而，为超精细量子比特产生 GHz 频率的磁场梯度十分困难。最近，受使用移动光学晶格控制离子运动 [30], 的启发，人们提出了一种结合近运动频率振荡磁场梯度与近量子比特频率微波来耦合自旋和运动的新方法，并将其用于将边带冷却至基态 [31]。该方案中的相互作用哈密顿量如下所示：

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega_g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\hat{\sigma}_z \cos(\omega_g t) + \hbar\Omega_\mu\hat{\sigma}^x\cos(\omega_\mu t), \tag{23}$$

其中，$\Omega_g = \frac{\mu_z x_0}{2\hbar}\frac{\partial B_z}{\partial x}$，$\omega_g$ 是接近运动频率 ω_m的频率，ω_μ 是接近量子比特频率 ω_0的频率，而Ω_μ 是磁偶极相互作用的拉比频率。相对于$\hat{H}_0 = \hbar\omega_g\hat{a}^\dagger\hat{a}$ 变换到相互作用绘景并舍去快速项后，总哈密顿量将变为：

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}^z + \hbar(\omega_m - \omega_g)\hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{24}$$

$$+ \frac{1}{2}\hbar\Omega_g\hat{\sigma}^z(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \hbar\Omega_\mu\hat{\sigma}^x\cos(\omega_\mu t), \tag{25}$$

该式与静态磁场梯度方法中的哈密顿量相似，不同之处在于将图5(b)所示式（19）中的 ω_m 改为 $\omega_m - \omega_g$。在实验中，利用内禀动力学去耦 [126]，提出了一种能够抵抗量子比特频率涨落和运动退相干的鲁棒量子门。该量子门的实验实现产生了保真度接近完美的对称纠缠态，以及保真度为99.77%的反对称态 [32]。

IV. 控制方法讨论

近年来，人们为囚禁离子的纠缠门操作开发了许多调制方案。在量子门中引入调制的主要目的可归纳为以下三点：(1) 提高量子门对实验误差的鲁棒性；(2) 加快量子门操作；(3) 在单个离子阱中利用多个离子实现量子门。

如上一节所述，理想的双量子比特纠缠门在量子门结束时应满足两个条件：(a) 离子链振动模在相空间中的轨迹闭合。(b) 相空间轨迹在

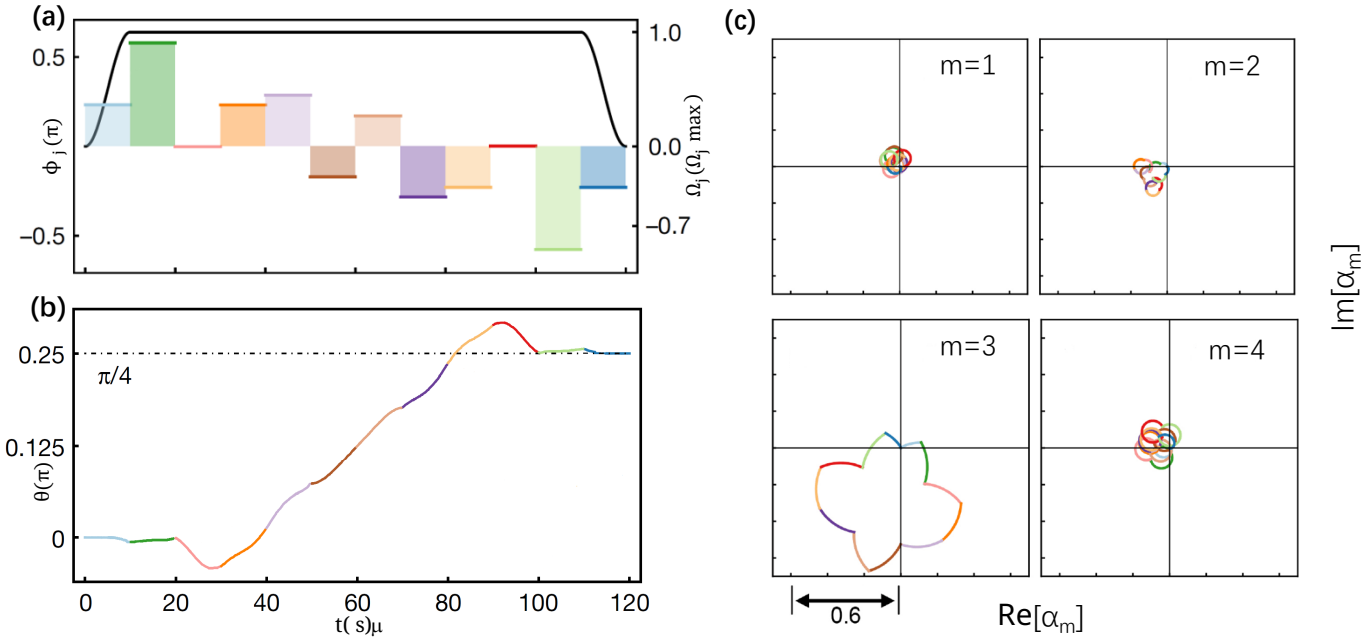


图 6. 在四离子链中间的两个离子量子比特上执行纠缠操作的方案。(a) 脉冲序列的运动相位调制方案 ϕ_j 和振幅、拉比频率 Ω_i，分别对应彩色线段和黑色实线。(b) 中间两个离子量子比特上几何相位 θ 的累积。(c) 四种振动模的相空间轨迹。修改自 [49]

该振动模对应的围成面积为 $\theta = \pi/4$。然而，由于存在实验上的不完美因素，例如驱动场的频率波动、量子门的时序误差以及振幅波动，振动模的轨迹无法按设计闭合，累积的几何相位也可能不恰好为 $\pi/4$，从而降低量子门的保真度。通过在驱动场中加入调制，可以提高量子门抵抗不完美因素的鲁棒性。

通过增大式 (10) 中的拉比频率 Ω 的振幅，可以缩短双量子比特门的持续时间。如果边带跃迁的强度 $\eta\Omega$ 与两种振动模（即质心模 (COM) 和伸展模）之间的频率差相当，我们就不能使用上一节讨论的单模描述。对于双量子比特门操作，必须考虑这两种振动模的影响。也就是说，两种振动模的相空间轨迹都应闭合，并且两种模式中相空间轨迹所围面积之和应为 $\pi/4$ [38, 51, 127–130]。这些要求可以通过调制方法实现，并已通过实验验证 [88, 96]。

一种颇具前景的量子计算扩展方案，是在长离子链中对受限的离子量子比特执行量子门 [34, 73, 82]。在单阱方案中，横向模比轴向模更常用。主要原因是，在横向模中能够实现更好的激光冷却，因为在含有大量离子的线性链中，横向模的频率高于轴向模的频率 [35, 131]。然而，随着单线性离子阱中的离子数量增加，各振动模之间的频率间隔会越来越小，因此难以仅寻址单个振动模来实现纠缠门。与快速门类似，必须使所有振动模的轨迹闭合，并使目标离子的相位之和为 $\pi/4$，如图 6 所示。

为实现这些目标，人们开发了多种不同的调制类型，例如振幅 [33–36, 38, 60, 93, 96, 124,132]，相位 [32, 39–41, 133, 134]，频率调制[42–44, 135, 136]，和多频调制 [45–48]。本文简要概述这些调制的发展，并讨论多频调制如何提供一种涵盖其他所有调制方法的通用方法。

振幅

振幅调制方法是指在门操作期间，将式（10）中驱动场的振幅 Ω 从常数改为随时间变化的序列。

有人提出了连续振幅调制方案，以增强对驱动光束光学相位波动的鲁棒性 [93]。该方案被应用于 ^{40}钙$^{+}$ 离子的光学量子比特上的MS门

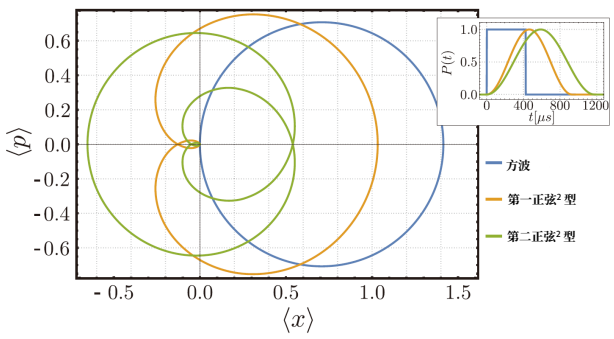


图 7. 三种振幅调制方案下的相空间轨迹：方波脉冲（蓝色）、第一种（橙色）和第二种（绿色）正弦^2 型序列，如插图 [124] 所示。

持续时间为 $50\mu s$ ，保真度为99.3% [60]。振幅整形脉冲还被用于在热态离子上实现MS门，其平均声子数为 $\bar{n} = 20$，并在 25 μs 持续时间内实现了97.4%的保真度 [132]。连续振幅调制也通过使用近场微波 [124]应用于MS门。经证实，该方案对振动模的频率波动具有鲁棒性。该量子门在 $^9Be^+$ 离子的超精细量子比特上实现，保真度达到99.7% [124]。脉冲时序及由此产生的相空间轨迹如图7所示。

提出了离散振幅调制，以实现具有多个振动模的双量子比特门 [33–35]。在该方案中，将激光场划分为强度各异的等时片段，以满足上述理想量子门的约束条件。该方法已在五离子链中的超精细 ^{171}镱$^+$离子量子比特上实现，门时间和保真度分别为190μs和 95% [36]。另一种离散振幅调制方案则将每个光脉冲的持续时间和振幅视为变量 [38]。最优脉冲序列被认为不受驱动激光光学相位的影响 [38]。上述方案已在 ^{43}钙$^+$ 离子的超精细量子比特上实现。所实现的双比特门在 1.6 μs [96]期间的保真度为 99.8%。此外，振幅调制量子门还有其他应用，例如可编程量子计算机 [37]，和并行纠缠门 [50, 137]。

相位

相位调制（PM）方法是在门操作过程中，对自旋相关力在式（10）中的振动相位 ϕ_j 进行调制。PM 方法在实验实现方面具有优势，因为它可以比振幅更精确地在实验中加以控制。最早提出的 PM 方法是按照沃尔什函数的形式，在 0 与 π 之间交替改变振动相位，以抑制特定频率的影响和时序误差；该方法已在 ^{171}镱$^+$[133]中实现。此方案无需优化脉冲序列，但为增强鲁棒性，随着所用沃尔什函数阶数的提高，量子门时长也会增加。沃尔什函数方法也应用于混合物种的 [109] 和 ^{40}钙$^+$ [20] 离子系统。与沃尔什函数方法类似，研究人员提出并实现了一种基于动态解耦脉冲技术的相位调制方案；该方案在不会显著增加动态解耦脉冲时间开销的情况下，提高了量子比特抵抗退相干噪声的鲁棒性 [134]。

有人提出了一种更灵活的分段常数相位调制方案，允许相位取连续值，可用于实现兼具鲁棒性和高保真度、且适用于多个振动模的双量子比特门 [39]。该方案在两枚 ^{171}镱$^+$ 离子的超精细量子比特中得到了实现，展示了其对激光振幅和失谐的静态或时变误差的鲁棒性。其双量子比特门的平均保真度达到 99.4%，耗时约 310 μs [40]。

我们注意到，与振幅调制相比，该方案能够迅速改变相空间中轨迹的方向，因此更适合防止离子的振动态被激发到超出 Lamb-Dicke 区域，并实现快速量子门 [51]。

频率

频率调制（FM）方法是调制激光频率 ω，可视为 μ 式（10）中的情况。引入 FM 是为了提升适用于多个振动模的双量子比特门的鲁棒性 [42]。从概念上说，FM 等效于 PM；但在实验实现中，调制的频率范围更宽，无法简单地转换为 PM。FM 通过声光调制器（AOM）直接调节驱动场的频率来实现，但这也会改变光束的偏转角，导致光束焦点位置偏移产生误差。

研究人员开发了一种连续调频激光，以最大限度地减少双量子比特门结束时残余的自旋-运动纠缠，使其能够抵抗频率误差；在如图 8 所示的 5 个离子实验中，其保真度达到 98.3 % [42] 。

通过将两束独立寻址的光束聚焦于离子链，在 200 μs [135] 中采用离散频率调制，实现了 2 离子链中 99.49 % 的双量子比特门保真度，以及 4 离子链中 99.30 % 的保真度。受机器学习启发，频率

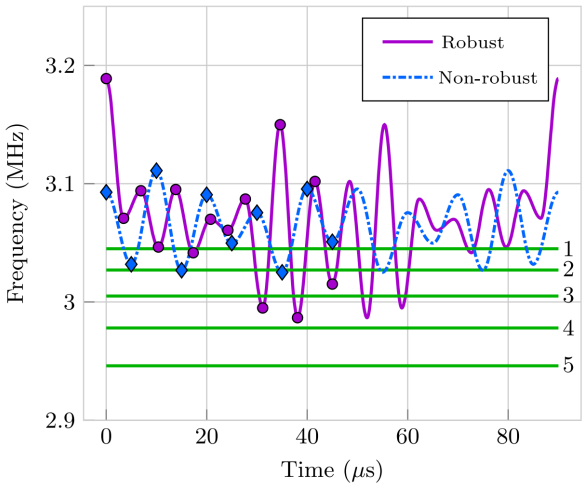


图 8. 五离子链中双比特门的频率调制脉冲，绿色线条表示模态频率。 [42]。

调制量子门通过使用大型样本集和小批量进行了优化。经批量优化的频率调制量子门在120 μs [136] 中达到了 99.08 % 的门保真度。

除了单一调制的研究外，也有采用两种调制的进展，例如振幅调制加频率调制 [43, 44],振幅调制加相位调制 [32, 41, 49]。

表 I 总结了近期双量子比特门实验实现的一些代表性工作。

多频方法

多频调制方法通过以不同振幅的多个频率的激光场同时驱动多个运动模来实现量子门。它提供了通用且系统化的控制方法，涵盖振幅、相位和频率调制的所有效应。

第 j 个离子上的 MS 门所用的场可简化为$\gamma_j(t) = \Omega_j e^{-i\mu t} e^{i\phi_{\mathrm{m},j}}$ 如式（10）所示。该场的振幅、相位和频率分别为 Ω_j、$\phi_{\mathrm{m},j}$和 μ。将它们设为时间的函数，即可生成具有振幅、相位和频率调制的任意波形；这些函数可通过傅里叶展开表示为

$$\gamma_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_{n,j} \exp(-in\omega t), \tag{26}$$

其中，$\Omega_{n,j}$ 是频率为 $n\omega$的 n^{th} 分量的复振幅，且 $\omega = \frac{2\pi}{\tau_g}$ 在量子门持续时间内具有τ_g 。这种傅里叶展开可视为应用多频分量。根据傅里叶级数的完备性，我们发现多频方法的普适性，它可实现振幅、相位和频率的任意调制。

提出多频方法旨在提升量子门性能并实现全局纠缠门 [45]。研究指出，在非理想条件下，多音门的相位轨迹比单音门 [45]更接近闭合。实验中，研究人员在 $^{171}\mathrm{Yb}^+$ 和 $^{88}\mathrm{Sr}^+$ 离子上实现了这些多频 MS 门，并通过实验验证了多频量子门对门时间误差和频率失谐漂移的鲁棒性 [46, 47]。随后，多频方法得到进一步发展，纳入了鲁棒性条件的一般约束，以减轻频率漂移、门时间偏移和载波耦合的影响，从而实现鲁棒的全局纠缠门 [48, 94]。下一节将讨论用于实现鲁棒性、加速和多比特操作的多频方法的细节。

V. 多频方法

本节首先详细回顾基于各种态依赖力的囚禁离子门，主要关注超精细量子比特，并讨论多频方法的一般框架。最后，我们将探讨多频方法在快速全局纠缠门中的应用，包括系统具备和不具备单独寻址能力的情形。

各种类型的自旋依赖力

我们先简要回顾基于自旋依赖力的纠缠门理论，涵盖 $\hat{}\sigma_\phi$ 量子门和 $\hat{}\sigma_z$ 量子门 [17]两种情况。如上所述，非共传播的拉曼激光可以驱动量子比特态之间的跃迁。这里我们考虑由电子激发态 $|e$介导的拉曼耦合，其激光配置如图 9 (a, b) 所示，并假设拉曼过程的净波矢平行于离子阱的 x轴。为减小自发辐射，激发态的失谐量 Δ 较大，因此两种情况下均满足条件 $\Delta \gg \omega_{\mathrm{hf}}$。离子与多束激光之间的相互作用哈密顿量写为如下形式（令普朗克常数为 $\hbar = 1$），

$$\hat{H}(t) = \sum_i \sum_\alpha \sum_{s\in\{0,1\}} g_{\alpha,i,s} \cos\left(\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r}_i - \omega_\alpha t - \phi_{\alpha,i}\right) \times \left(|e\rangle\langle s|_i + |s\rangle\langle e|_i\right), \tag{27}$$

其中，$\mathbf{k}_\alpha$ 和 ω_α 分别为相应拉曼激光的波矢和频率。借助单离子寻址能力，可以独立调节单光子拉比频率 $g_{\alpha,i,s}$ 以及相位 $\phi_{\alpha,i}$，从而为构造

表 I. 双量子比特门实验实现汇总。

调制	Ions	量子比特	控制方法	离子数	保真度	门时间	Year	参考文献
振幅	^{40}钙$^{+}$ ^{171}镱$^{+}$	光学	激光	Two	99。3%	$50\mu s$	2008	[60]
振幅	^{43}钙$^{+}$	超精细	激光	Five	95。0%	$190\mu s$	2014	[36]
振幅		超精细	激光	Two	99.8%	$1.6\mu s$	2018	[96]
振幅	^{9}Be^{+}	超精细	微波	Two	99。7%	$\sim 3000\mu s$	2019	[124]
相位	^{43}钙$^{+}$ ^{88}锶$^{+}$ ^{171}镱$^{+}$	超精细、塞曼	激光	Two	99.8%	$49.2\mu s$	2020	[109]
相位	^{25}镁$^{+}$	超精细	激光	Two	99。4%	$\sim 310\mu s$	2020	[40]
相位	^{40}钙$^{+}$	超精细	微波	Two	$1^{+0}_{-0.0017}$	$740\mu s$	2021	[32]
相位	^{171}镱$^{+}$	光学	激光	Two	99。94%	$35\mu s$	2021	[97]
频率	^{171}镱$^{+}$	超精细	激光	Five	98.6%	$90\mu s$	2018	[42]
频率	^{171}镱$^{+}$	超精细	激光	Four	99。30%	$200\mu s$	2020	[135]
None	^{43}钙$^{+}$	缀饰态	微波	Two	98.5%	$2.7ms$	2016	[28]
None	^{43}钙$^{+}$	超精细	微波	Two	99.7%	$3.25ms$	2016	[29]
None		超精细	激光	Two	99.9%	$\sim 100\mu s$	2016	[19]
None	^{9}Be^{+}	超精细	激光	Two	99。92%	$\sim 30\mu s$	2016	[18]
None	^{9}Be^{+}	超精细	微波	Two	97.4%	$\sim 105\mu s$	2018	[138]
None	^{9}Be^{+} ^{171}镱$^{+}$	超精细	微波	Two	98。2%	$808\mu s$	2019	[125]
None		超精细	激光	Two	99.8%	$30\mu s$	2020	[139]

多量子比特纠缠操作（包括全局门 [140, 141]）提供了足够的自由度。

对于 σ_ϕ 量子门，量子比特态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 可以用对磁场不敏感的超精细能级编码，即钟态；这些态具有相同的单光子拉比频率：$g_{\alpha,i,0} = g_{\alpha,i,1} \equiv g_{\alpha,i}$。如图9(a)所示，可以通过单色（下标为“A”）和双频（下标为“Br”和“Bb”）拉曼激光驱动量子比特能级之间的跃迁，两束拉曼光的频率差约为超精细分裂 $\omega_{\rm hf}$，受激拉曼过程相对于载波跃迁的失谐记为 μ。如果拉曼激光 A 的频率高于或低于拉曼激光 B 中的两个频率，那么消去激发态后，有效激光-离子相互作用的自旋部分将取决于拉曼激光之间的光学相位差。因此，这类纠缠门称为相位敏感门。（例如，见图9(c)，其中拉曼激光的频率可设为 $\omega_{Br} = \omega_A - \omega_{\rm hf} + \mu$ 和 $\omega_{Bb} = \omega_A - \omega_{\rm hf} - \mu$。）消去激发态并引入朗道-迪克近似后，旋转框架中的有效激光-离子相互作用哈密顿量为

$$\hat{H}_I(t) = \sum_m \omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \cos\mu t \sum_i \Omega_i \times \left[\hat{\sigma}_i^{\phi_i} + \sum_m \eta_{i,m}\left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)\hat{\sigma}_i^{(\phi_i - \frac{\pi}{2})}\right], \tag{28}$$

其中，有效拉比频率和自旋相位分别为 $\Omega_i = {}^{g_{A,\,i}g_{Br\,i}}$ 以及 $\phi_i = \phi_{A,\,i} - \phi_{Br,\,i} - \delta k\bar{x}_i$，这里我们假设 $g_{Br,\,i} = {}^{2\Delta}g_{Bb,\,i}$ 以及 $\phi_{Br,\,i} = \phi_{Bb,\,i}$。此处，净传递波矢 $\delta k\hat{\mathbf{e}}_x = \mathbf{k}_A - \mathbf{k}_{Br} = \mathbf{k}_A - \mathbf{k}_{Bb}$沿 x 方向，单位矢量为 $\hat{\mathbf{e}}_x$，并且 $\bar{x}_i$ 是第 i 个离子的平衡位置。按位点和模式分辨的兰姆-迪克参数为 $\eta_{i,\,m} = \eta_m b_{i,\,m}$，其中 $\eta_m = \delta k\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_m}}$ 和 $b_{i,\,m}$ 是对角化离子晶体集体运动的矩阵中的元素。

另一方面，如果拉曼激光 A 的频率介于拉曼激光 B 的频率之间，如图 9(d) 所示，则有效离子-激光相互作用哈密顿量变为，

$$\hat{H}_I(t) = \sum_m \omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \sum_i \Omega_i\Big[\cos(\mu t - \phi_i) - \sin(\mu t - \phi_i)\sum_m \eta_{i,m}\left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)\Big]\hat{\sigma}_i^x. \tag{29}$$

在这种情况下，自旋部分与拉曼激光束的相位差无关，因此可实现相位不敏感门。

除了依赖于 $\hat{\sigma}_\phi$ 的力之外，还可以利用磁敏感超精细态产生依赖于 $\hat{\sigma}_z$ 的力，所用的激光配置如图 9(b) 所示，其中 A 和 B 光路上均有单色激光。采用图 9(e) 所示的激光频率，即 $\omega_B = \omega_A - \mu$，有效哈密顿量变为

$$\hat{H}_I(t) = \sum_m \omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \sum_i \Omega_i\Big[\cos(\mu t - \phi_i) - \sin(\mu t - \phi_i)\sum_m \eta_{i,m}\left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)\Big]\hat{\sigma}_i^z. \tag{30}$$

请注意，在这种情况下，有效拉比频率 Ω_i取决于差分 AC-斯塔克效应，因此该方案仅适用于磁敏感离子量子比特。对于采用钟态量子比特的光移位或 $\hat{\sigma}_z$量子门，另有一种替代方案 [93, 98, 99], ，该方案已被霍尼韦尔离子阱团队 [101]采用。

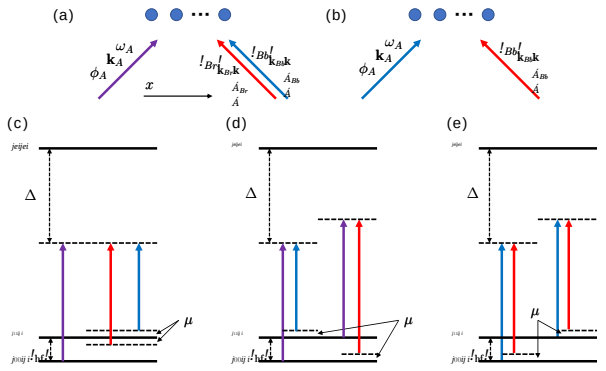


图9. 激光几何构型。(a) 两束不共传播的拉曼激光照射囚禁离子链。其中一束拉曼激光为单色，另一束为双频。失谐接近量子比特态跃迁频率。假设净传递波矢的方向沿轴向。(b) 与(a)相同，但使用两束单色拉曼激光束。失谐接近相关运动模的频率。(c、d) 相位敏感门(c)和相位不敏感门的相关能级与激光频率。(e) 对$\hat{\sigma}^z$ 量子门而言，与(c、d)相同。

多频方法的一般框架

对于囚禁离子系统，囚禁势的周期为量子操作提供了一个自然的时间尺度。前述涉及单个运动模的纠缠门的特征时间尺度远长于囚禁周期。相反，快速门的运行时间尺度与囚禁周期相当。直观地说，为了在如此短的操作时间内对囚禁离子系统施加足够大的影响，激光强度以及拉比频率都很高，这会导致不可忽略的失谐载波耦合，并使兰姆–迪克近似失效。

为推导快速门方案，我们聚焦于相位不敏感的$\hat{\sigma}^x$ 量子门和光移$\hat{\sigma}^z$ 量子门。尽管激光配置不同，通过在式（29）中以$\hat{\sigma}_i^\alpha(\alpha = x,$ 或 $z)$ 代替$\hat{\sigma}_i^x$，并在式（30）中以$\hat{\sigma}_i^\alpha(\alpha = x,$ 或 $z)$ 代替$\hat{\sigma}_i^z$，即可统一推导过程。我们不考虑相位敏感门的原因是，载波项与边带项的量子比特部分之间存在 $\pi/2$的相位差，因此载波耦合的影响无法抵消。从式（29）和式（30）中的有效哈密顿量可以看出，受激拉曼过程的失谐 μ 会在自旋依赖力中引入强度调制函数。在门时长远大于囚禁周期的慢区间，失谐 μ 可以选为接近某个单个运动模的频率，从而只有该模式被激发，而其他模式在动力学过程中可以被有效消除。在这种情况下，单色调制就足以将量子比特态与运动模解耦。然而，在快速区间，μ与多个运动模之间的频率差与拉比频率Ω相当，因此多个运动模会参与动力学过程，且需要将它们解耦。为应对这一复杂情况，文献 [45, 48, 51] 提出了多色调制方案。与前述单色调制方案相比，该方案引入了更多控制参数，以满足多项约束；这些约束既要求运动模解耦，也要求施加有效自旋-自旋相互作用。

在Lamb-Dicke 区域，多色调制在旋转框架下的有效哈密顿量写作如下：

$$\hat{H}_I(t) = \sum_{i=1}^{N}\Big[f_{\mathrm{car},i}(t) + f_{\mathrm{sdf},i}(t) \times \sum_{m=1}^{N}\eta_{i,m}\left(\hat{a}_m e^{-i\omega_m t} + \hat{a}_m^\dagger e^{i\omega_m t}\right)\Big]\hat{\sigma}_i^\alpha, \tag{31}$$

其中 $\alpha \in \{x,\ z\}$，载波项和自旋依赖力项的多色调制函数为

$$f_{\mathrm{car},i}(t) = \Omega_i \sum_{k=1}^{K} r_{i,k}\cos\left(\nu_k t - \phi_{i,k}\right), \tag{32}$$
$$f_{\mathrm{sdf},i}(t) = \Omega_i \sum_{k=1}^{K} r_{i,k}\sin\left(\nu_k t - \phi_{i,k}\right),$$

其中 Ω_i 是自旋依赖力的强度，$\vec{r}$是一个归一化的无量纲 K 维向量（$\|\vec{r}_i\|_2 = 1$），用于表征不同频率分量之间的激光功率分布。频率分量由门持续时间 τ 决定，使得 $\nu_k = 2k\pi/\tau(k = 1,\ \ldots\ldots,\ K)$，从而保证在动力学结束时载波耦合的贡献始终为零。为使推导简洁明了，我们设定 $\phi_{i,\ k} = 0$ 对于 $\forall i$ 和 $\forall k$ 均成立，而不考虑实际系统中可能存在的位置和频率依赖性。为保证一般性，稍后我们将考虑对于光学相位整体波动具有鲁棒性的量子门方案。

利用 Magnus 展开，我们得到演化算符 $U(t)$ 如下，

$$\hat{U}(t) = \exp\left[-i\sum_{i,m}\hat{B}_{i,m}(t)\hat{\sigma}_i^\alpha + i\sum_{i<j}\Theta_{i,j}(t)\hat{\sigma}_i^\alpha\hat{\sigma}_j^\alpha\right], \tag{33}$$

其中，$\hat{B}_{i,m}(t) = \beta_{i,m}^*(t)\hat{a}_m + \beta_{i,m}\hat{a}_m^\dagger$，其中 $\beta_{i,m}(t)$ 和$\Theta_{i,j}$ 可求得为

$$\beta_{i,m}(t) = \eta_{i,m}\int_0^t f_{\mathrm{sdf},i}(t')e^{i\omega_m t'}dt', \tag{34}$$
$$\Theta_{i,j}(t) = 2\sum_m \eta_{i,m}\eta_{j,m}\int_0^t\int_0^{t'} f_{\mathrm{sdf},i}(t') \times f_{\mathrm{sdf},j}(t'')\sin\omega_m\left(t'-t''\right)dt'dt''. \tag{35}$$

为了构造具有有效自旋-自旋相互作用的目标幺正算符，即 $\hat{U}_{\rm tar}(\tau) = \exp(-i\sum_{i<j} J_{i,j}\hat{\sigma}_i^{\alpha}\hat{\sigma}_j^{\alpha})$，我们得到以下约束条件，这些条件须在时刻$t=\tau$满足，

$$\beta_{i,m}(\tau) = 0, \quad \Theta_{i,j}(\tau) = J_{i,j}. \tag{36}$$

对于含有 N 个离子的系统，约束条件的数量为 $N^2+N-(N-1)-2$。因此，只要变分调制方案提供更多控制参数，就存在解。此外，变分调制方案总是能提供更多自由度，因此可以根据实际物理考量搜索优化方案。例如，我们可以通过优化代价函数 $C(\{\Omega_i, \vec{r}_i, \vec{\phi}_i\}) = \max_i|\Omega_i|$，使最大拉比频率尽可能小。

全局控制下多频方法的框架

在一般的囚禁离子系统中，单独控制需要高度聚焦的激光束，其光束腰斑小于离子间的空间间距。因此，这不仅需要复杂的实验仪器来产生并控制各束单独的激光束，还会在量子系统的操控过程中引入额外误差。例如，由于高度聚焦的光束具有陡峭的强度分布，离子位置的微小移动会导致拉曼过程中的振幅严重波动。此外，邻近离子所感受到的残余电磁场也会引起相干串扰误差。因此，能够降低单独控制要求的纠缠量子门方案始终备受关注。

在没有单独控制的情况下，控制参数简化为 $\Omega_i \equiv \Omega$、$\vec{r}_i \equiv \vec{r} = (r_1, \ldots\ldots, r_K)$ 和 $\vec{\phi}_i \equiv \vec{\phi} = (\phi_1, \ldots\ldots, \phi_K)$，其中 K 为频率分量的数量。为简便起见，我们进一步假设 $\phi_k = \phi$。在这一对称情形下，自然可以定义集体自旋算符 $\hat{S}_m^{\alpha} = \sum_{i=1}^{N} b_{i,m}\hat{\sigma}_i^{\alpha}$，而式（33）中的演化算符可简化为以下形式，

$$\hat{U}(t) = \exp\Big[-i\sum_{m=1}^{N}(\hat{a}_m A_m^*(t) + \text{h.c.})\,\hat{S}_m^{\alpha} + i\sum_{m=1}^{N}\Theta_m(t)\hat{S}_m^{\alpha 2}\Big], \tag{37}$$

with

$$A_m(t) = \eta_m\Omega\int_0^t f_{\rm sdf}(t')e^{i\omega_m t'}dt', \tag{38}$$

$$\Theta_m(t) = \eta_m^2\Omega^2\int_0^t\int_0^{t'} f_{\rm sdf}(t')f_{\rm sdf}(t'') \times \sin[\omega_m(t'-t'')]\,dt'dt''. \tag{39}$$

对于全连接纠缠门，我们要求在动力学过程结束时满足以下约束 $t=\tau$

，

$$A_m(\tau) = 0, \quad \forall m, \qquad \Theta_1(\tau) = \pi/4, \quad \Theta_{m>1} = 0, \tag{40}$$

其中，第一部分是前述的运动-自旋解纠缠条件。对于表示一般自旋-自旋相互作用的目标幺正算符 $\hat{U}(\tau) = \exp(-\sum_{i<j} J_{i,j}\hat{\sigma}_i^{\alpha}\hat{\sigma}_j^{\alpha})$，有效相互作用强度$J_{i,j}$ 可由下式得到

$$J_{i,j} = 2\sum_m \Theta_m(\tau)b_{i,m}b_{j,m}. \tag{41}$$

换言之，对于给定的一组 $J_{i,j}$，只有当式（41）中的线性方程组存在非零解时，才存在无需单独控制的量子门方案。

快速且鲁棒的全局纠缠门的考量

当量子门时长与囚禁周期相当时，上述门方案会对光学相位的波动和离子平衡位置的漂移变得敏感。这些效应会导致调制函数的初始相位不确定。此外，所需的拉比频率与激光强度成正比，也会随着量子门时长缩短而增大。因此，演化过程中某些运动模会受到强烈驱动，兰姆-迪克近似可能并不总是成立。换言之，不能忽略兰姆-迪克参数的高阶项。在这种情况下，在兰姆-迪克近似下得到的方案在实验实现中可能会受到超出兰姆-迪克近似范围的误差影响。这里我们引入两组约束，以确保所得门方案对于初始相位和高阶项具有鲁棒性。

为获得对初始相位漂移具有鲁棒性的门方案，我们注意到，式（32）中的调制函数可分解为 $f_{\rm sdf}(t) \equiv f_s(t)\cos\phi + f_c(t)\sin\phi$，其中

$$f_s(t) = \Omega\sum_{k=1}^{K} r_k\sin\nu_k t, \quad f_c(t) = \Omega\sum_{k=1}^{K} r_k\cos\nu_k t. \tag{42}$$

请注意，在获得针对 $\phi=0$ 的量子门方案之前，我们考虑带有 $f_{\rm sdf}(t) = f_s(t)$ 的线性约束。要求对任意 ϕ 均满足线性约束 $A_m(\tau)=0$，等价于增加另一组带有 $f_{\rm sdf}(t) = f_c(t)$ 的线性约束。类似地，我们将针对 $\Theta_m(\tau)$ 的二次约束分解为四组约束。图10展示了轴向俘获频率为 $\omega_z = 2\pi\times 1$ 兆赫的双离子链中的双量子比特门方案。不失一般性，我们假设驱动轴向模，并将门持续时间设为 3.2 μ秒。正如预期，鲁棒门方案

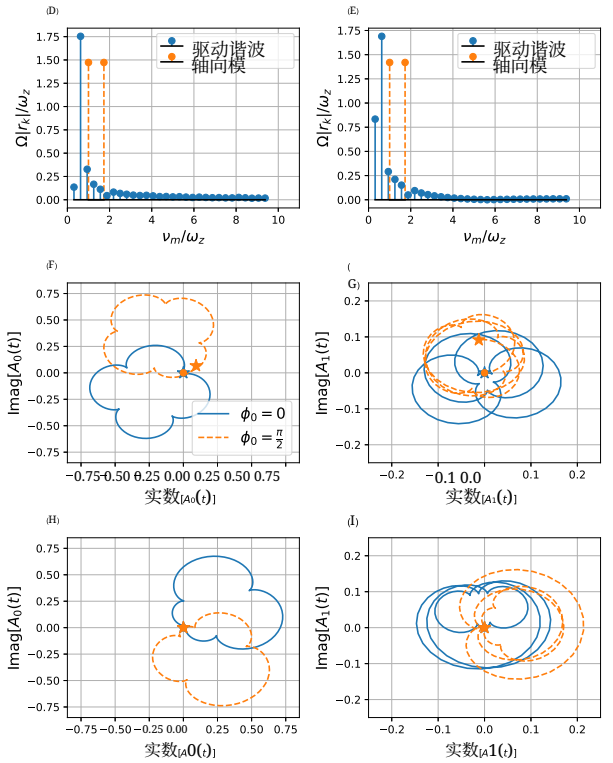


图10. 对初始相位漂移具有鲁棒性的双量子比特纠缠门。这里假设激光耦合到轴向-z模，质心模频率ω_0等于轴向俘获频率 $\omega_z = 2\pi \times 1$ 兆赫。门持续时间为 $\tau = 3.2$ μ秒，考虑 $K = 30$ 个不同驱动谐波，其频率为 $\nu_k = 2k\pi/\tau$, $k = 1, 2, \ldots K$。(a) 未考虑对初始相位漂移的鲁棒性时，该门方案的驱动振幅。图中给出了初始相位 ϕ_0取不同值时，质心模(c)和伸缩模(d)的相空间轨迹。(b、e、f) 与(a、c、d)相同，但采用了考虑初始相位漂移的鲁棒门方案。在(c-f)中，门操作结束时轨迹的端点以星号标出。门方案在条件 $\phi_0 = 0$下得出；只有对于鲁棒门，当初始相位漂移为 $\phi_0 = \pi/2$时，端点才会返回原点。

通过上述步骤获得的方案对初始相位漂移不敏感，因为在量子门操作结束时，两个运动模的轨迹端点都回到原点，如图10（e、f）所示。在兰姆-迪克近似下，不考虑初始相位漂移的量子门方案的保真度在 $\phi_0 = \pi/2$ 时降至98.9%，而鲁棒门的保真度始终完美，不受初始相位影响。然而，鲁棒性的代价是拉比频率$|\Omega|/\omega_z$ 的无量纲幅值从约 1.81 增至 1.93。对于门持续时间更短的量子门方案，增幅会更加显著。

为抑制超出 Lamb-Dicke 近似的误差，一种自然的做法是首先将式（31）中的有效哈密顿量展开到 Lamb-Dicke 参数 η_m 的二阶。在这种情况下，根据 Magnus 展开，式（37）中的演化算符包含二阶项，这些项与调制函数呈线性关系。因此，还需要满足另一组线性约束。尽管二阶项引起的误差有所抑制，但由此得到的门方案的拉比频率始终远高于原门方案。因此，这些方案仅在超快区间表现良好，此时超出 Lamb-Dicke 近似的误差较为显著。

关于多量子比特门的单独控制能力的评述

相反，凭借单独寻址每个量子比特的能力，多量子比特纠缠门方案可以更加灵活。例如，文献 [49] 中通过单独相位调制实现的全局纠缠门方案，只需让单独激光器照射选定的离子并关闭其他激光器，就可以简化为涉及较少离子的类似量子门。直观而言，对于仅涉及多量子比特系统中少数离子的纠缠门，采用单独控制的门方案通常比不采用单独控制的方案更高效。然而，对于具体的目标量子门，必须认真权衡单独控制与全局控制。

VI. 结论与展望

本文回顾了用于囚禁离子量子计算和量子模拟的量子门。对于单量子比特门，研究表明，门操作的持续时间可缩短至皮秒量级；采用微波和激光束均已实现远高于典型纠错要求的保真度。对于双量子比特纠缠门，其主要速度极限由振动模的频率决定，且已实现接近这一极限的量子门。量子门的保真度受光子散射、振动模加热和退相干、量子比特退相干、激光场振幅涨落等因素限制。原则上，这些误差还可进一步降低至低于 10^{-4} 不保真度的水平。目前的一大挑战是如何以可扩展的方式实现如此高保真的量子门，无论是采用离子穿梭，还是在单个离子阱中囚禁多个离子。囚禁离子的一种有趣量子门是全局门，每次操作等效于执行 $\approx N^2/2$ 个量子门 [49, 140, 141]。如果全局门能以接近离子阱频率的速度实现，那么每个双量子比特门的速度可视为提高相同的倍数

$\approx N^2/2$。

Note- 在准备本文期间，我们得知参考文献 [142] 回顾了囚禁离子量子门，内容与本文相似。

本研究得到量子科学与技术创新计划（项目编号：2021ZD0301602）以及国家自然科学基金委员会（项目编号：92065205和11974200）的资助。

* kimkihwan@mail.tsinghua.edu.cn

[1] J. I. Cirac 和 P. Zoller，利用冷囚禁离子进行量子计算，《物理评论快报》**74**，4091（1995年）。[2] C. Monroe、D. M. Meekhof、B. E. King、W. M. Itano 和 D. J. Wineland，基本量子逻辑门的演示，《物理评论快报》**75**，4714（1995年）。[3] F. Schmidt-Kaler、H. H¨affner、M. Riebe、S. Gulde、G. Lancaster、T. Deuschle、C. Becher、C. F. Roos、J. Eschner 和 R. Blatt，Cirac–Zoller受控非量子门的实现，《自然》**422**，408（2003年）。[4] D. Leibfried、R. Blatt、C. Monroe 和 D. Wineland，单个囚禁离子的量子动力学，《现代物理评论》**75**，281（2003年）。[5] H. H¨affner、C. F. Roos 和 R. Blatt，利用囚禁离子进行量子计算，《物理学报告》**469**，155（2008年）。[6] T. D. Ladd、F. Jelezko、R. Laflamme、Y. Nakamura、C. Monroe 和 J. L. O'Brien，量子计算机，《自然》**464**，45（2010年）。[7] R. Blatt 和 C. F. Roos，利用囚禁离子进行量子模拟，《自然·物理》**8**，277（2012年）。[8] C. Monroe 和 J. Kim，离子阱量子处理器的扩展，《科学》**339**，1164（2013年）。[9] C. Monroe、W. C. Campbell、L.-M. Duan、Z.-X. Gong、A. V. Gorshkov、P. Hess、R. Islam、K. Kim、N. M. Linke、G. Pagano、*et al.*，利用囚禁离子对自旋系统进行可编程量子模拟，《现代物理评论》**93**，025001（2021年）。[10] A. Sørensen 和 K. Mølmer，热运动中离子的量子计算，《物理评论快报》**82**，1971（1999年）。[11] K. Mølmer 和 A. Sørensen，热囚禁离子的多粒子纠缠，《物理评论快报》**82**，1835（1999年）。[12] A. Sørensen 和 K. Mølmer，热运动中离子的纠缠与量子计算，《物理评论A》**62**，022311（2000年）。[13] C. A. Sackett、D. Kielpinski、B. E. King、C. Langer、V. Meyer、C. J. Myatt、M. Rowe、Q. Turchette、W. M. Itano、D. J. Wineland、*et al.*，四粒子的实验纠缠，《自然》**404**，256（2000年）。[14] E. Solano、R. L. de Matos Filho 和 N. Zagury，两个囚禁离子的确定性贝尔态及运动态测量，《物理评论A》**59**，R2539（1999年）。[15] G. Milburn、S. Schneider 和 D. James，利用温热离子进行离子阱量子计算，《物理学进展》：物理学进展 **48**，801（2000年）。[16] D. Leibfried、B. DeMarco、V. Meyer、D. Lucas、M. Barrett、J. Britton、W. M. Itano、B. Jelenkovi´c、C. Langer、T. Rosenband、*et al.*，一种实验演示的稳健、高保真的几何双离子量子比特相位门，《自然》**422**，412（2003年）。[17] P. J. Lee、K.-A. Brickman、L. Deslauriers、P. C. Haljan、L.-M. Duan 和 C. Monroe，囚禁离子量子门的相位控制，《B辑光学杂志：量子与半经典光学》**7**，S371（2005年）。[18] J. P. Gaebler、T. R. Tan、Y. Lin、Y. Wan、R. Bowler、A. C. Keith、S. Glancy、K. Coakley、E. Knill、D. Leibfried、*et al.*，离子量子比特的高保真通用门集，《物理评论快报》**117**，060505（2016年）。[19] C. Ballance、T. Harty、N. Linke、M. Sepiol 和 D. Lucas，使用囚禁离子超精细态量子比特的高保真量子逻辑门，《物理评论快报》**117**，060504（2016年）。[20] C. R. Clark、H. N. Tinkey、B. C. Sawyer、A. M. Meier、K. A. Burkhardt、C. M. Seck、C. M. Shappert、N. D. Guise、C. E. Volin、S. D. Fallek、*et al.*，利用钙光学量子比特进行高保真贝尔态制备，《物理评论快报》**127**，130505（2021年）。[21] D. Kielpinski、C. Monroe 和 D. J. Wineland，大规模离子阱量子计算机的架构，《自然》（伦敦）**417**，709（2002年）。[22] T. S. Metodi、D. D. Thaker、A. W. Cross、F. T. Chong 和 I. L. Chuang，量子逻辑阵列微架构：可扩展的量子数据移动与计算，载于 *38th Annual IEEE/ACM International Symposium on Microarchitecture (MICRO'05)*（IEEE，2005年），第12页–第[23] 页。[23] C. Ospelkaus、C. E. Langer、J. M. Amini、K. R. Brown、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，基于振荡磁场的囚禁离子量子逻辑门，《物理评论快报》**101**，090502（2008年）。[24] C. Ospelkaus、U. Warring、Y. Colombe、K. Brown、J. Amini、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，囚禁离子的微波量子逻辑门，《自然》**476**，181（2011年）。[25] F. Mintert 和 C. Wunderlich，利用长波辐射实现离子阱量子逻辑，《物理评论快报》**87**，257904（2001年）。[26] N. Timoney、I. Baumgart、M. Johanning、A. Var´on、M. B. Plenio、A. Retzker 和 C. Wunderlich，利用微波缀饰态实现量子门与存储器，《自然》**476**，185（2011年）。[27] A. Khromova、C. Piltz、B. Scharfenberger、T. Gloger、M. Johanning、A. Var´on 和 C. Wunderlich，在磁场梯度中利用囚禁离子实现设计型自旋拟分子，《物理评论快报》**108**，220502（2012年）。[28] S. Weidt、J. Randall、S. Webster、K. Lake、A. Webb、I. Cohen、T. Navickas、B. Lekitsch、A. Retzker 和 W. Hensinger，利用全局辐射场实现囚禁离子量子逻辑，《物理评论快报》**117**，220501（2016年）。[29] T. Harty、M. Sepiol、D. Allcock、C. Ballance、J. Tarlton 和 D. Lucas，利用近场微波实现高保真囚禁离子量子逻辑，《物理评论快报》**117**，140501（2016年）。[30] S. Ding、H. Loh、R. Hablutzel、M. Gao、G. Maslennikov 和 D. Matsukevich，移动光学晶格辅助的囚禁离子运动微波控制，《物理评论快报》**113**，073002（2014年）。[31] R. Srinivas、S. C. Burd、R. T. Sutherland、A. C. Wilson、D. J. Wineland、D. Leibfried、D. T. Allcock 和 D. H. Slichter，利用微波和近运动频率振荡磁场梯度实现的囚禁离子自旋-运动耦合

，《物理评论快报》**122** ，163201（2019年）。

[32] R. Srinivas、S. Burd、H. Knaack、R. Sutherland、A. Kwiatkowski、S. Glancy、E. Knill、D. Wineland、D. Leibfried、A. C. Wilson， *et al.*，囚禁离子量子比特的高保真无激光通用控制，《自然》**597**，209（2021年）。[33] S.-L. Zhu、C. Monroe 和 L.-M. Duan，利用横向声子模进行囚禁离子量子计算，《物理评论快报》**97**，050505（2006年）。[34] S.-L. Zhu、C. Monroe 和 L.-M. Duan，通过对激光束进行最小限度的控制，实现大型离子晶体中的任意速度量子门，EPL（《欧洲物理快报》）**73**，485（2006年）。[35] G.-D. Lin、S.-L. Zhu、R. Islam、K. Kim、M.-S. Chang、S. Korenblit、C. Monroe 和 L.-M. Duan，非谐线性离子阱中的大规模量子计算，EPL（《欧洲物理快报》）**86**，60004（2009年）。[36] T. Choi、S. Debnath、T. Manning、C. Figgatt、Z.-X. Gong、L.-M. Duan 和 C. Monroe，针对可扩展纠缠的囚禁离子量子比特间多模耦合的最优量子控制，《物理评论快报》**112**，190502（2014年）。[37] S. Debnath、N. M. Linke、C. Figgatt、K. A. Landsman、K. Wright 和 C. Monroe，利用原子量子比特演示小型可编程量子计算机，《自然》**536**，63（2016年）。[38] A. M. Steane、G. Imreh、J. P. Home 和 D. Leibfried，囚禁离子中用于快速相位不敏感量子门的脉冲力序列，New J. Phys. **16**，053049（2014年）。[39] T. J. Green 和 M. J. Biercuk，量子比特-振子系统中的相位调制解耦与误差抑制，《物理评论快报》**114**，120502（2015年）。[40] A. R. Milne、C. L. Edmunds、C. Hempel、F. Roy、S. Mavadia 和 M. J. Biercuk，对静态和时变误差具有鲁棒性的相位调制纠缠门，《物理评论应用》**13**，024022（2020年）。[41] C. D. Bentley、H. Ball、M. J. Biercuk、A. R. Carvalho、M. R. Hush 和 H. J. Slatyer，用于大型离子寄存器中可配置、并行且抗误差纠缠门的数值优化，Advanced Quantum Technologies **3**，2000044（2020年）。[42] P. H. Leung、K. A. Landsman、C. Figgatt、N. M. Linke、C. Monroe 和 K. R. Brown，利用频率调制驱动力在钙离子晶体中实现鲁棒双比特门，《物理评论快报》**120**，020501（2018年）。[43] P. H. Leung 和 K. R. Brown，在长离子晶体中纠缠任意一对量子比特，《物理评论A》**98**，032318（2018年）。[44] K. A. Landsman、Y. Wu、P. H. Leung、D. Zhu、N. M. Linke、K. R. Brown、L. Duan 和 C. Monroe，在任意长的囚禁离子链中实现双量子比特纠缠门，《物理评论A》**100**，022332（2019年）。[45] F. Haddadfarshi 和 F. Mintert，在存在运动加热时实现囚禁离子的高保真量子门，New J. Phys. **18**，123007（2016年）。[46] A. E. Webb、S. C. Webster、S. Collingbourne、D. Bretaud、A. M. Lawrence、S. Weidt、F. Mintert 和 W. K. Hensinger，囚禁离子的稳健纠缠门，《物理评论快报》**121**，180501（2018年）。[47] Y. Shapira、R. Shaniv、T. Manovitz、N. Akerman 和 R. Ozeri，囚禁离子量子比特的鲁棒纠缠门，《物理评论快报》**121**，180502（2018年）。[48] Y. Shapira、R. Shaniv、T. Manovitz、N. Akerman、L. Pe-leg，L. Gazit ，R. Ozeri ，和 A. Stern ，鲁棒

囚禁离子的多量子比特非绝热门理论，《物理评论A》**101**，032330（2020年）。[49] Y. Lu、S. Zhang、K. Zhang、W. Chen、Y. Shen、J. Zhang、J.-N. Zhang 和 K. Kim，《任意离子量子比特上的全局纠缠门》，《自然》**572**，363（2019年）。[50] C. Figgatt、A. Ostrander、N. M. Linke、K. A. Landsman、D. Zhu、D. Maslov 和 C. Monroe，《通用离子阱量子计算机上的并行纠缠操作》，《自然》**572**，368（2019年）。[51] K. Wang、J.-F. Yu、P. Wang、C. Luan、J.-N. Zhang 和 K. Kim，《无需单独寻址囚禁离子的快速多量子比特全局纠缠门》，《量子科学与技术》**7**，044005（2022年）。[52] C. Langer、R. Ozeri、J. D. Jost、J. Chiaverini、B. De- Marco、A. Ben-Kish、R. Blakestad、J. Britton、D. Hume、W. M. Itano， *et al.*，《利用原子离子的长寿命量子比特存储器》，《物理评论快报》**95**，060502（2005年）。[53] T. Harty、D. Allcock、C. J. Ballance、L. Guidoni、H. Janacek、N. Linke、D. Stacey 和 D. Lucas，《囚禁离子量子比特的高保真制备、量子门、存储与读出》，《物理评论快报》**113**，220501（2014年）。[54] Y. Wang、M. Um、J. Zhang、S. An、M. Lyu、J.-N. Zhang、L.-M. Duan、D. Yum 和 K. Kim，《相干时间超过十分钟的单量子比特量子存储器》，《自然·光子学》**11**，646（2017年）。[55] P. Wang、C.-Y. Luan、M. Qiao、M. Um、J. Zhang、Y. Wang、X. Yuan、M. Gu、J. Zhang 和 K. Kim，《估计相干时间超过一小时的单离子量子比特》，《自然·通讯》**12**，1（2021年）。[56] A. Myerson、D. Szwer、S. Webster、D. Allcock、M. Curtis、G. Imreh、J. Sherman、D. Stacey、A. Steane 和 D. Lucas，《囚禁离子量子比特的高保真读出》，《物理评论快报》**100**，200502（2008年）。[57] S. L. Todaro、V. Verma、K. C. McCormick、D. Allcock、R. Mirin、D. J. Wineland、S. W. Nam、A. C. Wilson、D. Leibfried 和 D. Slichter，《利用集成于离子阱中的超导光子探测器读出囚禁离子量子比特的状态》，《物理评论快报》**126**，010501（2021年）。[58] T. Ruster、C. T. Schmiegelow、H. Kaufmann、C. Warschburger、F. Schmidt-Kaler 和 U. G. Poschinger，《长寿命塞曼囚禁离子量子比特》，Applied Phys. B **122**，1（2016年）。[59] B. B. Blinov、D. Leibfried、C. Monroe 和 D. J. Wineland，《利用囚禁离子的超精细量子比特进行量子计算》，《量子信息处理》**3**，45（2004年）。[60] J. Benhelm、G. Kirchmair、C. F. Roos 和 R. Blatt，《迈向利用囚禁离子实现容错量子计算》，《自然·物理》**4**，463（2008年）。[61] S. Olmschenk、K. C. Younge、D. L. Moehring、D. N. Matsukevich、P. Maunz 和 C. Monroe，《对囚禁镱+ 超精细量子比特的操控与探测》，《物理评论A》**76**，052314（2007年）。[62] A. Bermudez、X. Xu、R. Nigmatullin、J. O' Gorman、V. Negnevitsky、P. Schindler、T. Monz、U. Poschinger、C. Hempel、J. Home， *et al.*，《评估囚禁离子处理器迈向容错量子计算的进展》，《物理评论X》**7**，041061（2017年）。[63] C. M. Shappert、J. T. Merrill、K. Brown、J. M. Amini、C. Volin、S. C. Doret、H. Hayden、C. Pai 和 A. Harter，《利用近场微波和复合脉冲补偿实现空间均匀的单量子比特门操作》

，New J. Phys.**15** ，083053（2013年）。

[64] J. Randall、S. Weidt、E. Standing、K. Lake、S. Webster、D. Murgia、T. Navickas、K. Roth 和 W. Hensinger，囚禁离子的微波缀饰态量子比特和量子三能级系统的高效制备与探测，《物理评论A》 **91**，012322（2015年）。[65] D. J. Wineland 、 R. E. Drullinger 和 F. L. Walls，束缚共振吸收体的辐射压力冷却，《物理评论快报》 **40**，1639（1978年）。[66] W. Neuhauser、M. Hohenstatt、P. Toschek 和 H. Dehmelt，抛物势阱中受限可见原子云的光学边带冷却，《物理评论快报》 **41**，233 1978年（）。[67] C. Monroe、D. Meekhof、B. King、S. R. Jefferts、W. M. Itano、D. J. Wineland 和 P. Gould，将束缚原子分辨边带拉曼冷却至3d零点能，《物理评论快报》 **75**，4011（1995年）。[68] C. Roos 、 T. Zeiger 、 H. Rohde 、 H. N¨agerl 、 J. Eschner、D. Leibfried、F. Schmidt-Kaler 和 R. Blatt，光学跃迁上的量子态工程以及保罗阱中的退相干，《物理评论快报》 **83**，4713（1999年）。[69] J. Dalibard 和 C. Cohen-Tannoudji，通过偏振梯度实现低于多普勒极限的激光冷却：简单理论模型，《美国光学学会杂志B辑》 **6**，2023（1989年）。[70] S. Ejtemaee 和 P. Haljan，囚禁离子的3d西西弗斯冷却，《物理评论快报》 **119**，043001（2017年）。[71] G. Morigi、J. Eschner 和 C. H. Keitel，利用电磁诱导透明实现基态激光冷却，《物理评论快报》 **85**，4458（2000年）。[72] C. Roos、D. Leibfried、A. Mundt、F. Schmidt-Kaler、J. Eschner 和 R. Blatt，利用电磁诱导透明进行基态激光冷却的实验演示，《物理评论快报》 **85**，5547（2000年）。[73] Y. Lin、J. P. Gaebler、T. R. Tan、R. Bowler、J. D. Jost、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，离子链中运动模的伴随电磁诱导透明激光冷却，《物理评论快报》 **110**，153002 （ 2013 年）。[74] R. Lechner 、 C. Maier 、 C. Hempel、P. Jurcevic、B. P. Lanyon、T. Monz、M. Brownnutt、R. Blatt 和 C. F. Roos，长离子链的电磁诱导透明基态冷却，《物理评论A》 **93**，053401（2016年）。[75] N. Scharnhorst、J. Cerrillo、J. Kramer、I. D. Leroux、J. B. W¨ubbena、A. Retzker 和 P. O. Schmidt，利用多个电磁诱导透明共振的多模冷却方案的实验与理论研究，《物理评论A》 **98**，023424 2018年（）。[76] E. Jordan、K. A. Gilmore、A. Shankar、A. Safavi- Naini、J. G. Bohnet、M. J. Holland 和 J. J. Bollinger，含有超过100个离子的二维囚禁离子晶体的近基态冷却，《物理评论快报》 **122**，053603（2019年）。[77] L. Feng、W. Tan、A. De、A. Menon、A. Chu、G. Pagano 和 C. Monroe，采用电磁诱导透明三脚架方案对大型囚禁离子链进行高效基态冷却，《物理评论快报》 **125**，053001（2020年）。[78] M. Qiao、Y. Wang、Z. Cai、B. Du、P. Wang、C. Luan、W. Chen、H.-R. Noh 和 K. Kim，静止二维离子晶体的双电磁诱导透明基态冷却，《物理评论快报》 **126**，023604（2021年）。[79] D. Wineland、J. Bergquist、W. M. Itano 和 R. Drullinger，关于电磁囚禁、激光冷却离子的双重共振和光抽运实验，《光学快报》**5**，245（1980）。[80] J. C. Bergquist、R. G. Hulet、W. M. Itano 和 D. J. Wineland，单原子中量子跃迁的观测，《物理评论快报》**57**，1699（1986）。[81] W. Nagourney、J. Sandberg 和 H. Dehmelt，搁置式光学电子放大器：量子跃迁的观测，《物理评论快报》**56**，2797（1986）。[82] L. A. Zhukas、P. Svihra、A. Nomerotski 和 B. B. Blinov，高保真同时探测囚禁离子量子比特寄存器，《物理评论A》**103**，062614（2021）。[83] J. E. Christensen、D. Hucul、W. C. Campbell 和 E. R. Hudson，借助人工制造的原子核实现量子比特的高保真操控，npj《量子信息》**6**，1（2020）。[84] S. Crain、C. Cahall、G. Vrijsen、E. E. Wollman、M. D. Shaw、V. B. Verma、S. W. Nam 和 J. Kim，使用超导纳米线单光子探测器高速、低串扰地探测一个171镱+ 量子比特，《通讯·物理》**2**，1（2019）。[85] W. Campbell、J. Mizrahi、Q. Quraishi、C. Senko、D. Hayes、D. Hucul、D. Matsukevich、P. Maunz 和 C. Monroe，单原子量子比特的超快门，《物理评论快报》**105**，090502（2010）。[86] W.-X. Guo、Y.-K. Wu、Y.-Y. Huang、L. Feng、C.-X. Huang、H.-X. Yang、J.-Y. Ma、L. Yao、Z.-C. Zhou 和 L.-M. Duan，利用共振激光脉冲实现皮秒级离子量子比特操控与自旋-声子纠缠，《物理评论A》**106**，022608（2022）。[87] J. Mizrahi、C. Senko、B. Neyenhuis、K. Johnson、W. Campbell、C. Conover 和 C. Monroe，利用单原子实现超快自旋-运动纠缠与干涉测量，《物理评论快报》**110**，203001（2013）。[88] J. Wong-Campos、S. Moses、K. Johnson 和 C. Monroe，利用超快光脉冲实现双原子纠缠，《物理评论快报》**119**，230501（2017）。[89] R. Ozeri、W. M. Itano、R. Blakestad、J. Britton、J. Chiaverini、J. D. Jost、C. Langer、D. Leibfried、R. Reichle、S. Seidelin、 *et al.*，自发光子散射导致的囚禁离子量子门误差，《物理评论A》**75**，042329（2007）。[90] P. C. Haljan、K.-A. Brickman、L. Deslauriers、P. J. Lee 和 C. Monroe，用于相位稳定量子门和自旋与运动纠缠态的囚禁离子自旋依赖力，《物理评论快报》**94**，153602（2005）。[91] J. P. Home、D. Hanneke、J. D. Jost、J. M. Amini、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，可扩展离子阱量子信息处理的完整方法集，《科学》**325**，1227（2009）。[92] S. Zhang、Y. Lu、K. Zhang、W. Chen、Y. Li、J.-N. Zhang 和 K. Kim，在囚禁离子系统中实现超越物理保真度的误差缓解量子门，《自然·通讯》**11**，1（2020）。[93] C. F. Roos，采用振幅调制激光束的离子阱量子门，New J. Phys. **10**，013002（2008）。[94] T. Manovitz、Y. Shapira、L. Gazit、N. Akerman 和 R. Ozeri，具备鲁棒纠缠门和量子相干反馈的囚禁离子量子计算机，《PRX量子》**3**，010347（2022）。[95] B. C. Sawyer 和 K. R. Brown，适用于第2族原子离子的波长不敏感多物种纠缠门，《物理评论A》**103**，022427（2021）。

[96] V. Sch¨afer、C. Ballance、K. Thirumalai、L. Stephenson、T. Ballance、A. Steane 和 D. Lucas，囚禁离子量子比特的快速量子逻辑门，《自然》555，75（2018）。[97] C. R. Clark、H. N. Tinkey、B. C. Sawyer、A. M. Meier、K. A. Burkhardt、C. M. Seck、C. M. Shappert、N. D. Guise、C. E. Volin、S. D. Fallek、H. T. Hayden、W. G. Rellergert 和 K. R. Brown，利用$ ˆ{40}钙$ ˆ+光学量子比特制备高保真贝尔态，《物理评论快报》

127, 130505 2021 2105 05828 （），[ ] arXiv：。物理学，物理学：量子物理。[98] K. Kim、C. Roos、L. Aolita、H. H¨aeffner、V. Nebendahl 和 R. Blatt，用于离子阱量子计算的光学跃迁几何相位门，《物理评论A》77，050303（2008）。[99] L. Aolita、K. Kim、J. Benhelm、C. F. Roos 和 H. H¨aeffner，利用超精细钟态实现高保真离子阱量子计算，《物理评论A》76（2007）。[100] T. Monz、K. Kim、A. Villar、P. Schindler、M. Chwalla、M. Riebe、C. F. Roos、H. H¨aeff ner、W. H¨ansel、M. Hennrich、 *et al.*，利用无退相干量子比特实现通用离子阱量子计算，《物理评论快报》103，200503（2009）。[101] C. Baldwin、B. Bjork、M. Foss-Feig、J. Gaebler、D. Hayes、M. Kokish、C. Langer、J. Sedlacek、D. Stack 和 G. Vittorini，面向钟态量子比特的高保真光移门，《物理评论A》103，012603（2021）。[102] D. J. Gorman、B. Hemmerling、E. Megidish、S. A. Moeller、P. Schindler、M. Sarovar 和 H. Haeffner，在囚禁离子量子模拟器中调控振动辅助能量传递，《物理评论X》8，011038（2018）。[103] J. P. Home，混合物种离子链中的量子科学与计量学，《先进原子、分子与光物理学》62，231（2013）。[104] T. R. Tan、J. P. Gaebler、Y. Lin、Y. Wan、R. Bowler、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，囚禁离子量子比特的多元素逻辑门，《自然》528，380（2015）。[105] C. Ballance、V. Sch¨afer、J. P. Home、D. Szwer、S. C. Webster、D. Allcock、N. M. Linke、T. Harty、D. Aude Craik、D. N. Stacey、 *et al.*，使用两种不同原子同位素实现混合量子逻辑并检验贝尔不等式，《自然》（伦敦）528，384（2015）。[106] I. V. Inlek、C. Crocker、M. Lichtman、K. Sosnova 和 C. Monroe，用于量子网络的多物种囚禁离子节点，《物理评论快报》118，250502（2017）。[107] V. Negnevitsky、M. Marinelli、K. K. Mehta、H.-Y. Lo、C. Fl¨uhmann 和 J. P. Home，利用混合物种囚禁离子寄存器实现重复多量子比特读出与反馈，《自然》（伦敦）563，527（2018）。[108] C. Bruzewicz、R. McConnell、J. Stuart、J. Sage 和 J. Chiaverini，适用于钙+/锶+ 囚禁离子晶体的双物种多量子比特逻辑基元，npj《量子信息》5，1（2019）。[109] A. C. Hughes、V. M. Sch¨afer、K. Thirumalai、D. P. Nadlinger、S. R. Woodrow、D. M. Lucas 和 C. J. Ballance，高保真混合物种纠缠门的基准测试，《物理评论快报》125，080504（2020），arXiv：2004.08162 [量子物理]。[110] P. Wang、J. Zhang、C.-Y. Luan、M. Um、Y. Wang、M. Qiao、T. Xie、J.-N. Zhang、A. Cabello 和 K. Kim，使用两种原子离子对科亨-施佩克情境性的显著无漏洞检验，《科学·进展》

vances **8**，eabk1660（2022年）。[111] S. W¨olk 和 C. Wunderlich，利用缀饰态研究动态场梯度中囚禁离子的量子动力学，New J. Phys. **19**，083021（2017年）。[112] M. Johanning、A. Braun、N. Timoney、V. Elman、W. Neuhauser 和 C. Wunderlich，利用射频辐射对囚禁离子进行单独寻址并耦合运动态与自旋态，《物理评论快报》**102**，073004（2009年）。[113] K. Lake、S. Weidt、J. Randall、E. Standing、S. Webster 和 W. Hensinger，利用长波辐射在囚禁离子中产生自旋-运动纠缠，《物理评论A》**91**，012319（2015年）。[114] J. Chiaverini 和 W. Lybarger Jr，利用微型离子阱阵列实现无激光囚禁离子量子模拟，且不发生自发散射，《物理评论A》**77**，022324（2008年）。[115] B. Lekitsch、S. Weidt、A. G. Fowler、K. Mølmer、S. J. Devitt、C. Wunderlich 和 W. K. Hensinger，微波囚禁离子量子计算机蓝图，Sci. Adv. **3**，e1601540（2017年）。[116] J. Welzel、F. Stopp 和 F. Schmidt-Kaler，横向磁场梯度中之字形离子晶体的自旋与运动动力学，J. Phys. B: Atom. Mole. Opt. Phys. **52**，025301（2018年）。[117] S. X. Wang、J. Labaziewicz、Y. Ge、R. Shewmon 和 I. L. Chuang，在表面电极离子阱中利用磁场梯度对离子进行单独寻址，Appl. Phys. Lett. **94**，094103（2009年）。[118] C. Piltz、T. Sriarunothai、A. Var´on 和 C. Wunder-lich，基于囚禁离子的量子字节及其 10^{-5} 的最近邻串扰，《自然·通讯》**5**，1（2014年）。[119] S. Webster、S. Weidt、K. Lake、J. McLoughlin 和 W. Hensinger，微波缀饰态离子量子比特的简易操控，《物理评论快报》**111**，140501（2013年）。[120] I. Cohen、S. Weidt、W. K. Hensinger 和 A. Retzker，适用于微波和基于激光的实现的囚禁离子多量子比特门，New J. Phys. **17**，043008（2015年）。[121] S. Weidt、J. Randall、S. Webster、E. Standing、A. Ro-driguez、A. Webb、B. Lekitsch 和 W. Hensinger，利用长波辐射实现囚禁离子的基态冷却，《物理评论快报》**115**，013002（2015年）。[122] U. Warring、C. Ospelkaus、Y. Colombe、R. J¨ordens、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，利用微波场梯度对单个离子进行寻址，《物理评论快报》**110**，173002（2013年）。[123] U. Warring、C. Ospelkaus、Y. Colombe、K. R. Brown、J. Amini、M. Carsjens、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，囚禁离子微波近场量子控制技术，《物理评论A》**87**，013437（2013年）。[124] G. Zarantonello、H. Hahn、J. Morgner、M. Schulte、A. Bautista-Salvador、R. Werner、K. Hammerer 和 C. Ospelkaus，稳健且节省资源的微波近场纠缠量子门，《物理评论快报》（）。[125] H. Hahn、G. Zarantonello、M. Schulte、A. Bautista-Salvador、K. Hammerer 和 C. Ospelkaus，适用于离子阱量子计算机的集成式 9be+ 多量子比特门器件，npj《量子信息》**5**，1（2019年）。[126] R. Sutherland、R. Srinivas、S. C. Burd、H. M. Knaack、A. C. Wilson

D. Slichter 和 S. Libby，《无需激光且同时不受量子比特与运动退相干影响的囚禁离子纠缠门》，《物理评论A》**101**，042334（2020年）。[127] J. J. Garc´ıa-Ripoll、P. Zoller 和 J. I. Cirac，《采用激光相干控制技术实现离子阱量子计算中速度优化的双量子比特门》，《物理评论快报》**91**，157901（2003年）。[128] L.-M. Duan，《通过快速量子门扩展离子阱量子计算》，《物理评论快报》**93**，100502（2004年）。[129] R. L. Taylor、C. D. Bentley、J. S. Pedernales、L. Lamata、E. Solano、A. R. Carvalho 和 J. J. Hope，《囚禁离子大规模量子模拟中的快速门研究》，《科学报告》**7**，1（2017年）。[130] E. Torrontegui、D. Heinrich、M. Hussain、R. Blatt 和 J. J. Garc´ıa-Ripoll，《利用共振脉冲序列实现超快速双量子比特离子门》，New J. Phys. **22**，103024（2020年）。[131] K. Kim、M.-S. Chang、R. Islam、S. Korenblit、L.-M. Duan 和 C. Monroe，《利用多个横向模式实现囚禁离子间的纠缠与可调自旋-自旋耦合》，《物理评论快报》**103**，120502（2009年）。[132] G. Kirchmair、J. Benhelm、F. Z¨ahringer、R. Gerritsma、C. F. Roos 和 R. Blatt，《运动处于热态时离子的确定性纠缠》，New J. Phys. **11**，023002（2009年）。[133] D. Hayes、S. M. Clark、S. Debnath、D. Hucul、I. V. Inlek、K. W. Lee、Q. Quraishi 和 C. Monroe，《多量子比特纠缠门中的相干误差抑制》，《物理评论快报》**109**，020503（2012年）。[134] T. Manovitz、A. Rotem、R. Shaniv、I. Cohen、Y. Shapira、N. Akerman、A. Retzker 和 R. Ozeri，《莫尔默-瑟伦纠缠门的快速动力学解耦》，《物理评论快报》**119**，220505（2017年）。[135] Y. Wang、S. Crain、C. Fang、B. Zhang、S. Huang，Q. Liang, P. H. Leung, K. R. Brown, and J. Kim，使用基于微机电系统的光束转向系统进行单个量子比特寻址的高保真度双量子比特门，《物理评论快报》**125**, 150505 (2020). [136] M. Kang, Q. Liang, B. Zhang, S. Huang, Y. Wang, C. Fang, J. Kim, and K. R. Brown，面向离子链中鲁棒双量子比特门的频率调制脉冲批量优化，《物理评论应用》**16**, 024039 (2021). [137] N. Grzesiak, R. Bl¨umel, K. Wright, K. M. Beck, N. C. Pisenti, M. Li, V. Chaplin, J. M. Amini, S. Debnath, J.- S. Chen, *et al.*，在囚禁离子量子计算机上实现高效的任意同时纠缠量子门，《自然·通讯》**11**, 1 (2020). [138] T. R. Tan, J. P. Gaebler, R. Bowler, Y. Lin, J. D. Jost, D. Leibfried, and D. J. Wineland，囚禁离子的缀饰态相位门演示，《物理评论快报》 **110**, 263002 2018 1301 3786 ( ), [ ] arXiv: . physics, physics:quant-ph . [139] C. Baldwin, B. Bjork, J. Gaebler, D. Hayes, and D. Stack，囚禁离子高保真纠缠操作的子空间基准测试，《物理评论研究》**2**, 013317 (2020). [140] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, *et al.*，六原子“薛定谔猫”态的制备，《自然》**438**, 639 (2005). [141] T. Monz, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Chwalla, D. Nigg, W. A. Coish, M. Harlander, W. H¨ansel, M. Hennrich, and R. Blatt，14量子比特纠缠：制备与相干性，《物理评论快报》**106**, 130506 (2011). [142] D. Yum and T. Choi，囚禁离子量子计算机中量子纠缠的进展，《当代应用物理》**41**, 163 (2022)。