arXiv:2302.02185v1 [math.CO] 4 Feb 2023

簇代数与数论中的完美匹配问题

Ralf Schiffler

Abstract. 本文是我在2022年5月于明尼苏达大学举行的代数组合学中的开放问题会议上所作报告的略微扩展版本。我们引入格路径上的两种严格序关系，并提出若干未解决问题。本文主题与马尔可夫数、拉格朗日谱、蛇图以及单穿孔环面上的簇代数有关。

我们的格路径只能由向北和向东的步构成，且不得越过对角线。为定义这些序关系，我们首先为每条这样的格路径 ω构造蛇图 $G(\omega)$ 和带图 $G(\omega)$。第一种序关系 $<_M$ 由蛇图的完美匹配数给出。第二种序关系 $<_L$ 则由与带图相关联的二次无理数的拉格朗日数给出。

Contents

1. 引言 1 2. 蛇图和带图 2 3. 马尔可夫数与拉格朗日谱 5 4. 格路径蛇图 5 5. 已知结果 7 6. 未解决问题 8 参考文献 11

1. 引言

我们在由向北和向东的步构成且不越过对角线的格路径上引入两种严格序关系。为定义这些序关系，我们首先为每条格路径 ω构造一个蛇图 $G(\omega)$ 和一个带图 $G(\omega)$。

蛇图和带图源自曲面簇代数理论，可用于计算簇的 Laurent 展开

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：06A07，11J06，05C70，13F60。作者获得了美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号 DMS-2054561。

©0000（版权所有者）

变量，并构造簇代数的典范基。 [**S**] 对这些结果进行了综述。

本文中的格路蛇图构成了蛇图的一个特殊类别。由于格可以看作带有一个穿孔的环面的万有覆盖，格路（稍作变形后）对应于一次穿孔环面簇代数中的一个元素。特别地，Christoffel 路径对应于簇变量。

簇变量与马尔可夫数相关。在我们的设定中，这种关系可以表述为：Christoffel 路径所对应的蛇图的完美匹配数是一个马尔可夫数，并且每个马尔可夫数都以这种方式出现。

马尔可夫的一个经典定理给出了利用马尔可夫数构造小于 3 的拉格朗日谱的方法。我们的序关系 $<_M$ 与马尔可夫数相关，而关系 $<_L$ 与拉格朗日谱相关。

我们在第 2 节回顾蛇图和带图，并在第 3 节回顾马尔可夫数和拉格朗日谱。第 4 节定义这两个序关系。第 5 节列出有关这些序关系的已知结果，第 6 节则介绍尚未解决的问题。

我想感谢 OPAC会议的组织者邀请我，并鼓励我整理这些笔记。

2. 蛇图和带图

蛇图和带图曾用于 [**MS**, **MSW**, **MSW2**] 构造曲面簇代数的典范基。这些基元素的 Laurent 展开由这些图的完美匹配参数化。在 [**MOZ**], 中，一些研究结果被推广到超簇代数的情形，方法是用双二聚体覆盖替代蛇图的完美匹配。

2.1. 蛇图。 现在我们按照[**CS1**]回顾蛇图的定义。一个瓦片 是一个有4个顶点和4条边、形状为正方形的平面图。所有瓦片的边长都相同。蛇图 G 是由有限序列的瓦片 $G_1, \ldots, G_d$ 组成的连通平面图，其构造递归地遵循以下规则：第 $i+1$个瓦片 G_{i+1} 与前一个瓦片 G_i恰好共用一条边 e_i，且这条边要么是 G_i 的北边和 G_{i+1} 的南边，要么是 G_i 的东边和 G_{i+1}的西边。图1给出了一个例子。

包含于两个瓦片中的 $d-1$ 边 e_1， e_2，..... e_{d-1} 称为 G 的内部边，其余边称为边界边。我们用 G^{NE} 表示由 G 的最后一块瓦片的北边和东边组成的二元集合。

蛇图 G 上的符号函数 f 是一个映射 f ，它将 G 的边集映射到集合{+， –}，并满足：对 G 中的每一块瓦片，北边和西边的符号相同，南边和东边的符号相同，且北边的符号与南边的符号相反。图1给出了一个示例。

注意，每个蛇图恰有两个符号函数。蛇图由其瓦片序列以及定义在其内部边上的符号函数唯一确定（至对称）。

2.2. 带图。每个蛇图 G 都会产生两个带图G，分别通过识别以下边得到：

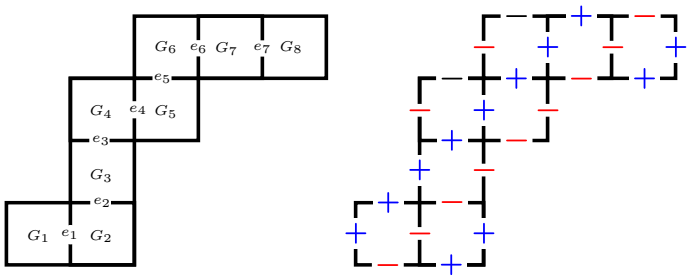

FIGURE 1. 一个包含 8 个瓦片和 7 条内部边的蛇图（左）；同一蛇图上的符号函数（右）

- 将 G 中第一块瓦片的南边与 G^{NE} 中符号相同的唯一一条边相识别；- 或将 G 中第一块瓦片的西边与 G^{NE} 中符号相同的唯一一条边相识别。

2.3. 完美匹配。图 G 的一个完美匹配是 G 的边的一个子集 P，其中 G 的每个顶点都恰好与 P 中的一条边关联。我们用 Match G 表示 G 的完美匹配集合。如果 G 是一个带图，我们将 Match G 定义为 G 的蛇图的所有完美匹配 P 的集合，其中 P 是 G 的一个完美匹配。

2.4. 与连分数的关系。蛇图与连分数之间的关系由 [**CS1**] 发现。

一个有限连分数是一个函数

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

由 n 正整数组成 $a_1, \ldots, a_n$。注意，$[a_1, \ldots, a_{n-1}, 1] = [a_1, \ldots, a_{n-1} + 1]$。类似地，一个无限连分数是一个函数

$$[a_1, a_2, \ldots] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

由无限多个正整数组成 $a_1, a_2, \ldots$。我们用记号 $[a_1, \ldots, a_n]$ 表示周期连分数 $[a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$。

现在设 G 是一个含有 d 块瓦片的蛇图，其符号函数为 f。设 $e_1, \ldots, e_{d-1}$ 为内部边的序列，e_0 为第一块瓦片的南边或西边，e_d 为最后一块瓦片的北边或东边。符号序列 $(f(e_i))_{i=0}^{d}$ 称为 G 的符号序列。它完全确定了蛇图 G。

CONVENTION 2.1. 在本文中，我们始终选择边 e_0 作为第一块的西边，并选择边 e_d 使得符号序列中的最后两个符号相同。

图1中的示例的符号序列为（+, −, −, +, +, +, +, −, −）。

对于蛇图的符号序列，我们还关联一个由正整数 $a_1, \ldots, a_n$ 组成的序列，用于统计符号序列中极大常值子序列的长度。在该例中，这个序列 $a_1, \ldots, a_n$ 等于 1, 2, 4, 2。序列 $a_1, \ldots, a_n$ 唯一确定该蛇图，因此我们将该蛇图记为 $\mathsf{G}[a_1, \ldots, a_n]$。

文献 [**CS1** 的定理 3.4 和 4.1] 表明，上述构造在蛇图与连分数（最后一个系数大于一）之间给出了一个双射，使得该连分数可由以下公式计算

$$[a_1, \ldots, a_n] = \frac{|\mathrm{Match}(\mathcal{G}[a_1, \ldots, a_n])|}{|\mathrm{Match}(\mathcal{G}[a_2, \ldots, a_n])|}. \tag{2.1}$$

这是根据完美匹配集合的基数对连分数作出的组合解释。

图1中的蛇图有29个完美匹配，并且我们有 $[a_1, \ldots, a_n] = [1, 2, 4, 2] = \frac{29}{20}$。

PROBLEM 2.2. **(已解决)** 为带图寻找公式 *(2.1)* 的类似形式。

此问题已由 PJ Apruzzese 解决如下。给定一个带图，仅考虑其内部边，为其关联一个符号序列，并像往常一样将对应的整数序列记为 $a_0, a_1, \ldots, a_n$。对应的周期连分数 $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots]$ 等于一个二次无理数

$$[\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}] = \frac{p - s + \sqrt{(p-s)^2 + 4rq}}{2q},$$

其中 $p/q = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, 且 $r/s = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$。令 $D = (p-s)^2 + 4rq$ 为根式。Apruzzese 得到以下两个公式。

THEOREM 2.3. [**Ap**] 设 $\mathcal{G}[\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}]$ 为一个带图。那么

$$\begin{aligned} |\operatorname{Match} \mathcal{G}[\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}]| &= p + s \\ &= \sqrt{D+4}. \end{aligned}$$

REMARK 2.4. 序列 a_0, a_1, ..., a_n 取决于实现给定带图的蛇图 G 的选择。事实上，沿带图任意一条内部边剪开，都会得到这样的蛇图。然而，根式 D 和总和 $p + s$ 并不依赖于这一选择。

EXAMPLE 2.5. 从图1中的蛇图 $\mathsf{G}[1, 2, 4, 2]$ 出发，我们可以构造两个带图 $\mathsf{G}\left[\overline{4, 4}\right]$ 和 $\mathsf{G}\left[\overline{1, 2, 4, 1}\right]$。它们是通过将第一块瓦片的南边（分别为西边）与最后一块瓦片的北边（分别为东边）重合得到的。

对于 $\mathsf{G}\left[\overline{4, 4}\right]$，我们有 $\frac{p}{q} = [4, 4] = \frac{17}{4}$, $\frac{r}{s} = [4] = \frac{4}{1}$，因此 $|\text{匹配 } \mathsf{G}\left[\overline{4, 4}\right]| = p + s = 18$。若改用根式公式，则有 $D = (p-s)^2 + 4rq = 16^2 - 4^3 = 320$，因此 $\sqrt{D+4} = 18$，这证实了该结果。

对于 $\mathsf{G}\left[\overline{1, 2, 4, 1}\right]$，我们有 $\frac{p}{q} = [1, 2, 4, 1] = \frac{16}{11}$、$\frac{r}{s} = [1, 2, 4] = \frac{13}{9}$，因此 $|\text{匹配 } \mathsf{G}\left[\overline{1, 2, 4, 1}\right]| = p + s = 25$。另一方面，$D = (p-s)^2 + 4rq = 7^2 - 4 \cdot 13 \cdot 11 = 621$，因此 $\sqrt{D+4} = 25$，再次证实了该结果。

PROBLEM 2.6. 求出双二聚体覆盖的（*2.1*）式的类似结果。

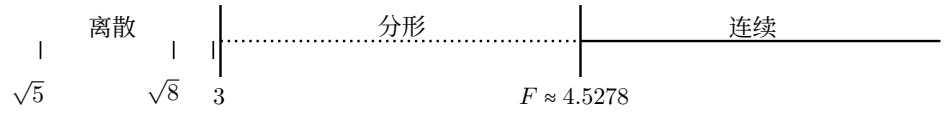

FIGURE 2. 拉格朗日谱示意图

3. 马尔可夫数与拉格朗日谱

1879年，马尔可夫研究了方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \tag{3.1}$$

现称为马尔可夫方程。(3.1) 的一个正整数解 (m_1, m_2, m_3) 称为马尔可夫三元组，马尔可夫三元组中出现的整数称为马尔可夫数。例如，(1,1,1),(1,1,2),(1,2,5),(1,5,13),(2,5,29) 都是马尔可夫三元组，而 1,2,5,13, 29 是马尔可夫数。

1913年，弗罗贝尼乌斯猜想，对于每个马尔可夫数 m，都存在唯一一个以 m 为最大数的马尔可夫三元组，参见 [**F**]。这一唯一性猜想至今仍未解决。它激发了大量研究，而马尔可夫数在数论、双曲几何、组合学和代数几何中都有重要影响。关于这一主题的概述，可参阅近期出版的教材 [**A, R**]。

马尔可夫数可以表示在一棵称为马尔可夫树的二叉树中。这棵马尔可夫树在组合意义上等价于有理数的法雷树或斯特恩-布罗科树。因此，通过考察这些树中的对应位置，$\mathbb{Q}_{[0,1)}$ 与马尔可夫数之间存在对应关系。下文将记作 $m_0 = 1$，并将所有其他马尔可夫数称为$m_{\frac{b}{a}}$，其中 $b < a$ 是互质的正整数。例如，$m_{\frac{1}{1}} = 2$，$m_{\frac{1}{2}} = 5$，$m_{\frac{1}{3}} = 13$，$m_{\frac{2}{3}} = 29$。

马尔可夫数与逼近理论中的拉格朗日数有关。给定一个实数 α，其拉格朗日数 $L(\alpha)$ 定义为所有满足以下条件的实数 L 的上确界：存在无穷多个有理数 $\frac{p}{q}$ 使得 $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Lq^2}$。因此，拉格朗日数衡量实数 α 能够被有理数逼近到何种程度。

拉格朗日谱定义为所有拉格朗日数 $L(\alpha)$ 的集合，其中 α 遍历所有无理实数。将其视为实数轴的子集时，已知拉格朗日谱在 3 以下是离散的，在 3 与一个称为弗雷曼数的数 $F \approx 4.5278$ 之间呈分形，在 F以上则是连续的，见图 2。我们推荐将 [**CF**] 作为有关拉格朗日谱的参考资料。

马尔可夫于 187 年证明了以下定理 9.

THEOREM 3。1. [**M**] *3* 以下的拉格朗日谱恰好是所有$\sqrt{9m^2 - 4/m}$的集合，其中 m 遍历所有马尔可夫数。

注意，$m < m'$ 意味着 $\sqrt{9m^2 - 4/m} < \sqrt{(9m')^2 - 4/m'}$。因此，前四个拉格朗日数为 $\sqrt{5}$，$\sqrt{8}$，$\frac{\sqrt{221}}{5} \approx 2.973$，$\frac{\sqrt{1517}}{13} \approx 2.996$.

4. 格路径蛇图

设 a, b 为互素整数，且满足 $0 < b < a$。我们用 D(a, b) 表示从 $(0, 0)$ 到 (a, b) 的所有格路径 ω 构成的集合，这些路径仅由向北（向上）和向东（向右）的步组成，且始终不越过对角线。令 D $= \cup_{(a,b)}$D(a, b)。

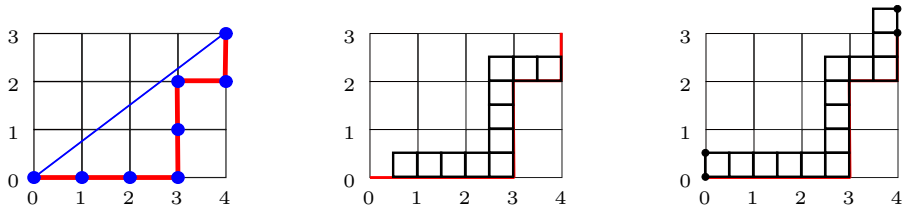

FIGURE 3. 图左侧的图片展示了 D(4,3) 中的格路 ω = RRRUURU。中间的图片展示了它的蛇图 G(ω)，右侧的图片展示了它的带图 G(ω)，其中粘合边以圆点标示。

DEFINITION 4.1. 对于 $\omega \in$ D(a, b)，我们按如下方式构造蛇图 G(ω) 和带图 G(ω)。示例如图 3 所示。

首先，沿着 ω 放置边长为 1/2 的瓦片。然后执行以下操作之一。

- 要构造 G(ω)，移除第一块和最后一块瓦片。- 要构造 G(ω)，在最后一块瓦片上方添加一块瓦片，并将第一块瓦片的左侧竖边与最后一块瓦片的右侧竖边粘合。

在图 3 的例子中，我们有 ω =RRRUURU,

$$\mathcal{G}(\omega) = \mathcal{G}[1,1,1,1,2,1,1,2,2] \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{G}(\omega)} = \mathcal{G}[\overline{2,1,1,1,1,2,1,1,2,2}].$$

对于任意格路 $\omega \in$ D，若 G(ω) = G$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$，则 G(ω) =G$[2, a_1, a_2, \overline{\ldots, a_n}]$。

或者，我们可以通过以下方式，直接根据 ω 中的步序列构造整数序列 a_1、.....、a_n：将子序列 1、1 与 ω 中的每个子序列 RR 和 DD 对应；将子序列 2 与 ω 中的每个子序列 RU 和 UR 对应。

REMARK 4.2. 这些图在一次穿孔环面的簇代数中具有重要意义。通过从格到环面的覆盖映射，将路径 ω 稍作变形，使其避开所有中间格点，这对应于环面上的一条弧 γ，它从穿孔出发并最终回到穿孔。除非这条弧是从 (0，0) 到 (a，b) 的对角线，且 ω 是最靠近对角线的路径，否则弧都会有自交。没有自交的弧对应簇变量，有自交的弧则对应所谓的广义簇变量。两种情况下，其 Laurent 展开都由蛇图 G(ω) 计算。带图 G(ω) 则计算闭曲线 γ 的 Laurent 展开；该闭曲线是将 γ 的端点稍稍移离穿孔后得到的。

4.1. 格路径上的两个严格偏序。以下定义为每条格路径 $\omega \in$ D 关联两个数：一个整数 $M(\omega)$ 和一个实数 $L(\omega)$。

DEFINITION 4.3. 设 $\omega \in$ D 是一条格路，G(ω) = G$[a_1, \ldots, a_n]$ 是其蛇图。定义

$$M(\omega) = |\operatorname{Match} \mathcal{G}(\omega)| = \text{Numerator of } [a_1, \ldots, a_n];$$

$$L(\omega) = \text{Lagrange number of } [\overline{2, a_1, \ldots, a_n}].$$

REMARK 4.4. 数值 $L(\omega)$ 可由公式 $L(\omega) = \max(\alpha - \alpha')$ 计算，其中 α 遍历 $[2, a_1, \ldots, a_n]$ 的所有循环移位，α' 是 α 的共轭，见 [**A**，命题 1.29]。回顾一下，二次无理数 $\frac{a+\sqrt{D}}{b}$ 的共轭定义为 $\frac{a-\sqrt{D}}{b}$。

此定义使我们能够在格路径上引入两个严格偏序。回忆一下，严格偏序是一种关系 $<$，它具有自反性（$a \nless a$）、反对称性和传递性。

DEFINITION 4.5. 设 $\omega, \omega' \in \mathsf{D}$ 为两条格路径。
(a) 匹配序 关系 $<_M$ 定义为：若 $M(\omega) < M(\omega')$，则 $\omega <_M \omega'$。(b) 拉格朗日序关系 $<_L$ 定义为：若 $L(\omega) < L(\omega')$，则 $\omega <_L \omega'$。

REMARK 4.6. 序关系是严格偏序 $<$ 而非非严格偏序 $\leq$，因为可能存在两条不同的格路径 $\omega \neq \omega'$，使得 $M(\omega) = M(\omega')$。因此，非严格偏序不满足反对称性条件。

REMARK 4.7. 根据定义，任意两条格路径 ω，ω' 在 $<_M$ 下或 $<_L$ 下都是可比较的，除非分别有 $M(\omega) = M(\omega')$，或 $L(\omega) = L(\omega')$。

PROBLEM 4.8. 研究偏序集 $\mathcal{D}(a, b)$ 和 $\mathcal{D}$ 在 $<_L$ 和 $<_M$ 下的性质。

5. 已知结果

$\mathsf{D}(a, b)$ 中最接近对角线的路径称为斜率为 b/a 的 ***Christoffel*** 路径。

THEOREM 5.1. 令 $\omega_0 \in \mathcal{D}(a, b)$ 表示 ***Christoffel*** 路径。则 $M(\omega_0)$ 是马尔可夫数 m_b。此外，ω_0 是偏序集 $(\mathcal{D}(a, b), <_M)$ 中的唯一极小元。

PROOF. 这源自多位学者的研究。[**BBH, P**] 建立了马尔可夫数与带一个穿孔的环面之簇代数之间的对应关系。因此，方程 $M(w_0) = m_b$ 可由簇变量的展开公式 [**MSW**] 推出。我们在此采用的蛇图 $M(\omega_0)$ 描述最早见于 [**CS2**]。w_0 是唯一极小元这一事实可由 [**LLRS** 定理 3.5] 推出。□

THEOREM 5.2. 设 $\omega \in \mathcal{D}$。那么，$L(\omega) < 3$ 当且仅当 ω 是 ***Christoffel*** 路径。在这种情况下，依照马尔可夫定理，$L(\omega) = \sqrt{9m^2 - 4}/m$，其中 $m = M(\omega)$ 是该 ***Christoffel*** 路径对应的马尔可夫数。特别地，***Christoffel*** 路径是偏序集 $(\mathcal{D}(a, b), <_L)$ 中的唯一极小元。

PROOF. 这是由马尔可夫的一个更一般结果推得的，该结果在 [**BLRS** 定理 8.4] 中以 Christoffel 词的术语重新表述（并给出了证明）。该定理指出，对于任意双无限正整数序列 A，某个量 $M(A) < 3$，当且仅当 A 是一个 Christoffel 词的双无限重复。此外，在这种情况下，$M(A) = \sqrt{rc^2 - 4}/c$，其中 c 是与 ω' 相关联的马尔可夫数。

我们的情形是这一结果的一个特殊情况，因为我们取序列 A 为双无限序列 $\ldots, 2, a_1, \ldots, a_n, 2, a_1, \ldots, a_n, \ldots$，其中带图 $\mathsf{G}(\omega)$ 是 $\mathsf{G}[2, a_1, \ldots, a_n]$。于是，量 $M(A)$ 变为 $\max(\alpha - \alpha')$，

其中 α 遍历 $[2, a_1, \ldots, a_n]$ 的所有循环移位。因此，根据注 4.4， $M(A) = L(\omega)$。

我们应当指出，这里的记号略有不同。 ω' 在 [**BLRS**] 中与我们这里的 ω 并不相同。实际上， ω 是 ω' 在态射 $\mathbf{G}$ 下的像，该态射见 [**BLRS**引理 2.2], 它将 $\mathsf{D}(a, b)$ 中的 Christoffel 路径映射到 $\mathsf{D}(a + b, b)$ 中的 Christoffel 路径。

Christoffel 路径是 $(\mathsf{D}(a, b), <_L)$ 中唯一极小元这一结论成立，是因为 Christoffel 路径是满足 $L(\omega) < 3$ 的唯一一条路径 $\omega \in \mathsf{D}(a, b)$。□

6. 未解决问题

本节列出一些未解决问题，其中部分问题附有评论。全文中，我们用 $\omega_0(a, b)$ 表示 $\mathsf{D}(a, b)$ 中的 Christoffel 路径。

PROBLEM 6.1. 证明：相对于两种偏序，$\mathcal{D}(a, b)$ 中的唯一极大元是 $\lrcorner$形路径 $\omega = \mathrm{RR}\cdots\mathrm{RUU}\cdots\mathrm{U} = \mathrm{R}^a\mathrm{U}^b$。

这条路径 ω 先沿着（a， b）矩形的下边界水平延伸，然后沿着该矩形的右边界垂直延伸。这是离对角线最远的路径。

PROBLEM 6.2. 考虑两个格点 (a, b)、(a', b') 及其各自的 *Christoffel* 路径 $\omega_0(a, b)$ 和 $\omega_0(a', b')$。以下说法是否成立？

(a) $M(\omega_0(a, b)) = M(\omega_0(a', b'))$ 当且仅当 $(a, b) = (a', b')$? *(b)* $L(\omega_0(a, b)) = L(\omega_0(a', b'))$ 当且仅当 $(a, b) = (a', b')$?

根据定理 5.1，(a) 部分等价于唯一性猜想。

对于 (b) 部分，我们指出，若两个无理数 α， β 的连分数最终相同，则称它们等价。众所周知，等价的无理数具有相同的拉格朗日数。点 (a, b) 固定时，$[2, a_1, \ldots, a_n]$ 定义中出现的循环移位也是如此。需要注意的是，在这个问题中，我们讨论的是两个不同的点 (a, b) 和 (a', b')。

据猜想， α 和 β 是等价的无理数，当且仅当拉格朗日数 $L(\alpha)$ 和 $L(\beta)$ 相等。已知这一猜想等价于唯一性猜想，参见例如 [**A**，第 39] 页。

PROBLEM 6.3. 如果 $\omega, \omega' \in \mathcal{D}(a, b)$，那么以下说法是否成立：

$$L(\omega) = L(\omega') \quad \text{implies} \quad \overline{\mathcal{G}}(\omega) \cong \overline{\mathcal{G}}(\omega')?$$

请注意，前面的问题 6.2 不是本问题的特例，因为在那里我们比较的是端点不同的路径，而这里的路径都具有相同的端点。

在图 4 中，我们给出了 $\mathsf{D}(8, 6)$ 中的两个格路径 ω_1 =RRRRUURRRUURU 和 ω_2 = RRRRURUURRRUU，满足 $L(\omega_1) = L(\omega_2)$。在这种情况下，相应的带图

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{G}(\omega_1)} &= \mathcal{G}[\overline{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2}] \\ \overline{\mathcal{G}(\omega_2)} &= \mathcal{G}[\overline{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1}] \end{aligned}$$

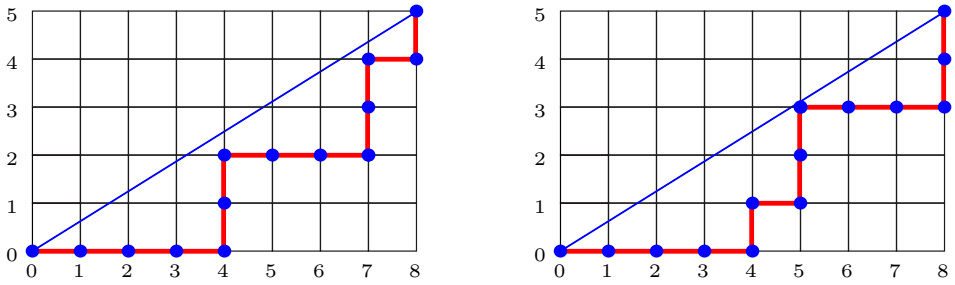

FIGURE 4. 两条格路 ω_1, ω_2 位于 D(8, 5) 中，满足 $L(\omega_1) = L(\omega_2)$。蛇图 G($\omega_1$) 和 G($\omega_2$) 同构。

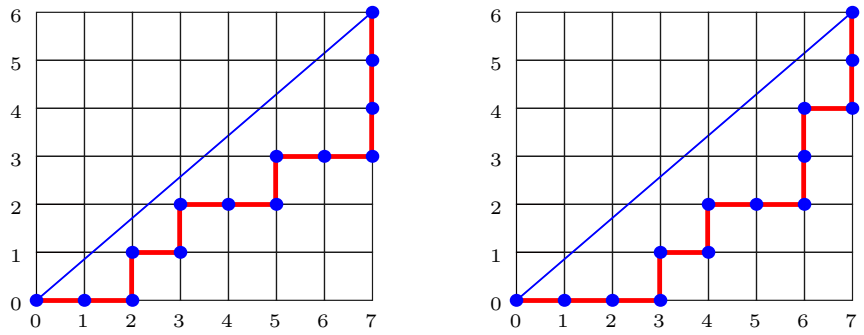

FIGURE 5. 两条格路 ω, ω' 位于 D(7, 6) 中，满足 $M(\omega) = M(\omega')$。

是同构的，这一点可以从以下事实看出：将第一个图的周期整数序列反转顺序并平移后，即可得到第二个图的周期整数序列。为完整起见，我们还指出，$M(\omega_1) = 49396$ 不等于$M(\omega_2) = 46900$。

另一方面，我们还要指出，命题 $(M(\omega) = M(\omega')) \Rightarrow (\mathrm{G}(\omega) \cong \mathrm{G}(\omega'))$ 是错误的! 例如，图 5 中所示的格路 ω = RRURURRURRUUU 和 ω' = RRRURURRUURUU 在函数 M 下的取值相同，均为 40199。连分数为

$$[1,1,2,2,2,2,1,1,2,2,1,1,2,1,1,1,1] = \frac{40199}{23549}$$

and

$$[1,1,1,1,2,2,2,2,1,1,2,1,1,2,2,1,1] = \frac{40199}{24653}.$$

我们进一步指出，如果以格路与对角线之间的格点数来衡量到对角线的距离，那么这两条路径到对角线的距离并不相同。ω 的距离为 4，ω'的距离为 6。此外，这两条路径的拉格朗日数也不同

$$L(\omega) = \frac{\sqrt{16530502037}}{40189} \quad \text{and} \quad L(\omega') = \frac{\sqrt{16545934157}}{40547}.$$

PROBLEM 6.4. 设 $\omega, \omega' \in \mathcal{D}$。**(a)** $\omega <_L \omega'$ 是否意味着 $\omega <_M \omega'$ 或 $M(\omega) = M(\omega')$？**(b)** $\omega <_M \omega'$ 是否意味着 $\omega <_L \omega'$ 或 $L(\omega) = L(\omega')$?

PROBLEM 6.5. 用格路径刻画偏序集 $\mathcal{D}(a,b)$ 中任意一种序的覆盖关系。

作为研究此问题的第一步，可以探讨：如果存在格路径 α, β，满足 $\omega = \alpha \mathrm{RU} \beta$ 和 $\omega = \alpha \mathrm{UR} \beta$，那么对于这两种序，$\omega$ 是否都小于 ω'。

PROBLEM 6.6. *Prove that* $\sup\{L(\omega) \mid \omega \in \mathcal{D}\} = 1 + \sqrt{5}$.

计算机计算结果为上述猜想提供了一些依据。

PROBLEM 6.7. 根据定义，集合 $\{L(\omega) \mid \omega \in \mathcal{D}\}$ 是拉格朗日谱的子集；根据定理 *5.2*，它包含 *3* 以下的拉格朗日谱。它包含 *3* 以上拉格朗日谱的哪一部分?

请注意，问题 6.6 中猜想的上界等于 $1 + \sqrt{5} \approx 3.23607$，它位于拉格朗日谱的分形部分。假设该猜想成立，那么每个小于 $1 + \sqrt{5}$ 的拉格朗日数，是否都能表示为格路径 $\omega \in \mathcal{D}$ 的拉格朗日数序列 $L(\omega)$ 的极限?

例如，我们证明数字 3 可以通过这种方式实现。事实上，令 α 由以下无限连分数给出

$$\alpha = [(1,1)^1, 2, 2, (1,1)^2, 2, 2, (1,1)^3, 2, 2, (1,1)^4, 2, 2, \ldots],$$

其中，记号 $(1,1)^a$ 表示由数字 1 构成的序列 1，.....，1。这个连分数与以下无限格路相关联

$$\omega = \mathrm{R}^2\mathrm{U}\,\mathrm{R}^3\mathrm{U}\,\mathrm{R}^4\mathrm{U}\,\mathrm{R}^5\mathrm{U}\cdots.$$

α 的拉格朗日数等于

$$L(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \big([a_n, a_{n+1}, \ldots] + [0, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1]\big).$$

为计算上确界，我们可以假设 n 满足 $a_n = 2$。有两种情况。首先考虑 a_n 是一个 2，2 子序列中第二个数字的情形。

$$\big([2, (1,1)^b, 2, 2, (1,1)^{b+1}, \ldots] + [0, 2, (1,1)^{b-1}, (1,1)^{b-2}, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1, 1]\big)$$

当 b 趋于无穷大时，第一个连分数趋于 $[2,1] = 1 + [1] = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$，第二个连分数趋于 $[0,2,1] = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$。这两项之和为 $\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{18+6\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = 3$。现在考虑 a_n 是一个 2, 2 子序列中第一个数字的情形。

$$\big([2, 2, (1,1)^b, 2, 2, (1,1)^{b+1}, \ldots] + [0, (1,1)^{b-1}, (1,1)^{b-2}, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1, 1]\big).$$

当 b 趋于无穷大时，第一个连分数趋于 $[2,2,1] = 2 + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{8+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$，第二个连分数趋于 $[0,1] = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$。这两个项之和为 $\frac{8+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{24+12\sqrt{5}}{8+4\sqrt{5}} = 3$。这说明 $L(\alpha) = 3$。

PROBLEM 6.8. 问题 *6.7* 中的集合是若干集合的并集 $\cup_{(a,b)}\{L(\omega) \mid \omega \in \mathcal{D}(a,b)\}$，且这些子集中的每一个都恰好包含一个小于 *3* 的数。这些子集是否两两不相交？它们是否为拉格朗日谱提供了有趣的额外结构？

参考文献

A. M. Aigner, 《马尔可夫定理与唯一性猜想百年：从无理数到完美匹配的数学之旅》。 *Springer, Cham,* 2013年。Ap. PJ. Apruzzese, 《带图完美匹配数的两个公式》，准备中。BBH. A. Beineke、T. Br¨ustle 和 L. Hille, 《具有三个顶点的簇循环箭图与马尔可夫方程》。附录由 Otto Kerner 撰写。 *Algebr. Represent. Theory* **14**(2011)，第 1 期，97–112。BLRS. J. Berstel、A. Lauve、C. Reutenauer 和 F. Saliola,

Combinatorics on words. Christoffel CRM 专 *words and repetitions in words.* 27

著丛书，。美国数学会，普罗维登斯，RI，2009 CS1. I. Canakci 和 R. Schiffler, 《簇代数与连分数》。 *Compos. Math.* **154**(3)，(2018) 565–593。CS2. I. Canakci 和 R. Schiffler, 《蛇图与连分数》， *European J. Comb.* **86**(2020)。CF. T. Cusick 和 M, Flahive, 《马尔可夫谱与拉格朗日谱》。数学调查与专著，第 30 号，美国数学会，普罗维登斯，RI，1989。F. G. Frobenius, ¨论马尔可夫数，《柏林普鲁士科学院院报》（1913年）458–487；收录于《全集》第三卷，Springer（1968）598–627。LLRS. K. Lee、L. Li、M. Rabideau 和 R. Schiffler, 《马尔可夫数的排序》， *Adv. Appl. Math.* **143** (2023)，102453。M. A. Markoff, 《论不定二元二次型》。 *Math. Ann.* **15**, （1879年）381–406。MOZ. G. Musiker、N. Ovenhouse 和 S. Zhang, 《超簇展开中的蛇图双二聚体覆盖》， *J. Algebra*, **608** (2022)，325–381。MS. G. Musiker 和 R. Schiffler, 《簇展开公式与完美匹配》， *J. Algebraic Combin.* **32** (2010)，第 2 期，187–209。MSW. G. Musiker、R. Schiffler 和 L. Williams, 《曲面簇代数的正性》， *Adv. Math.* **227**，(2011)，2241–2308。MSW2. G. Musiker、R. Schiffler 和 L. Williams, 《曲面簇代数的基》，

Compos. , , ( ), – 。

Math. **149** 2 2013 217 263

P. J. Propp, 《弗里泽图案与马尔可夫数的组合学》，预印本，arXiv:math.CO/0511633.R. C. Reutenauer, 《从 Christoffel 词到马尔可夫数》。牛津大学出版社，牛津，2019年。RS. M. Rabideau 和 R. Schiffler, 《马尔可夫数的连分数与排序》， **370**，26 (2020)，文章 107231。S. R. Schiffler, 《曲面簇代数讲义》，CIMPA暑期学校，马德普拉塔，2016年，载于 I. Assem 和 S. Trepode（编）《同调方法、表示论与簇代数》，CRM短期课程，Springer，2018年。

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF CONNECTICUT, STORRS, CT 06269-1009, USA*Email address*: schiffler@math.uconn.edu