自相似无限二叉树是斯坦纳问题的一个解

D. Cherkashin*和 Y. Teplitskaya†

2023年2月7日

arXiv:2302.02189v1 [math.MG] 4 Feb 2023

摘要

我们考虑一个一般的度量斯坦纳问题：求一个集合 $\mathcal{S}$，使其长度最小且$\mathcal{S}\cup A$ 连通，其中 A 是给定完备度量空间 X的一个给定紧子集；这样的解称为斯坦纳树。

论文 [7] 给出了一个平面斯坦纳树的例子，该树具有无限多个分支点，并连接一个不可数点集。我们证明，这样的集合可以具有正的豪斯多夫维数；此前这是一个开放问题（相应的树是一个自相似分形）。

数学学科分类： 49Q10, 05C63。

关键词： 斯坦纳树问题、自相似分形、无限二叉树、显式解。

1 引言

斯坦纳问题有多种不同但或多或少等价的表述，其问题是寻找一个集合 $\mathcal{S}$，使其长度（一维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^1$）最小，并满足 $\mathcal{S}\cup A$ 连通，其中 A 是给定完备度量空间 X中的一个紧子集。

文献 [6], 证明，在对环境空间 X 作出相当温和的假设时（这些假设在欧几里得平面情形下无论如何都成立），斯坦纳问题存在解。此外，每个具有有限长度 $\mathcal{S}$ 的解都具有以下性质：

- $\mathcal{S}\cup A$ 是紧的，
- $\mathcal{S}\setminus A$ 至多有可数个连通分支，且每个连通分支的长度都严格为正，
- $\overline{\mathcal{S}}$ 不含环（圆 $\mathbb{S}^1$ 的同胚像），
- 中每个连通分支的闭包都是一棵拓扑树（即一个连通、局部连通且紧致的无环集合），其端点位于 A 上（因此特别地，它至多有可数个分支点），且在 A 的每个连通分支上至多有一个端点，并且所有分支点的阶数均有限（即从这些点伸出的分支数有限），
- 如果 A 有有限个连通分支，那么 $\mathcal{S}\setminus A$ 也只有有限个连通分支，其中每个连通分支的闭包都是一个有限的测地嵌入图，端点位于 A 上，并且在 A 的每个连通分支上至多有一个端点，
- 对于每个满足 $A\subset U$ 的开集 $U\subset X$，集合 $\mathcal{S}':=\mathcal{S}\setminus U$ 是某个有限测地嵌入图的子集。此外，对于几乎处处的 $\varepsilon>0$，有：对于 $U=\{x\colon \operatorname{dist}(x,\ A)\ <\varepsilon\}$，集合 $\mathcal{S}'$ 是一个有限测地嵌入图（特别地，它有有限个连通分支和有限个分支点）。

斯坦纳问题的一个解称为斯坦纳树；上述性质解释了当 A为全不连通集时为何如此命名。用 $\mathbb{M}(A)$表示 A 的斯坦纳树集合。从现在起，我们关注$X=\mathbb{R}^2$ （但以下性质对 $\mathbb{R}^d$也成立），并假设 A 是全不连通集；我们将 A 中的点称为终端点。在这种情况下，测地线就是一条直线段。将 [6] 中最后列出的性质与欧几里得斯坦纳树的一些众所周知的事实（见 [1, 3]）结合起来，可得到以下性质。斯坦纳树中一个顶点的最大度（图论意义下）不超过 3。此外，只有终端点的度可以为 1 或 2，其他所有顶点的度均为 3，称为斯坦纳点。度为 3 的顶点称为分支点。斯坦纳树中任意两条相邻边之间的角至少为 $2\pi/3$。

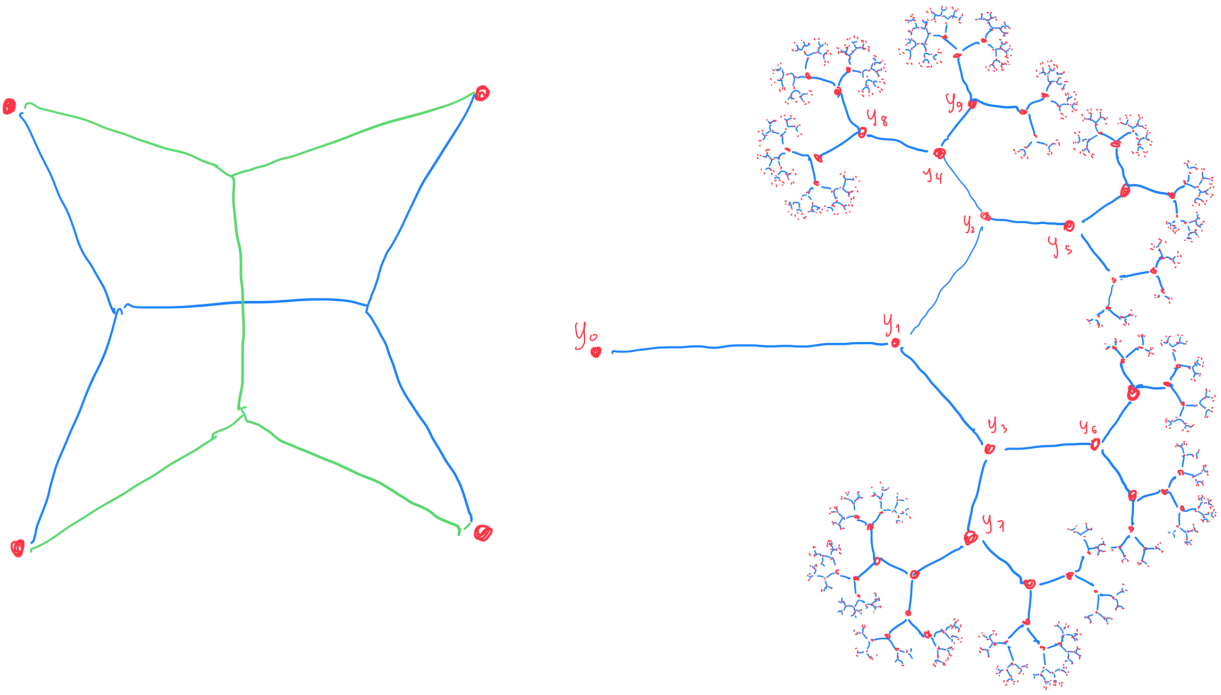

图 1：左侧包含两棵连接正方形顶点的斯坦纳树；右侧给出了一个 $\Sigma(\Lambda)$ 的例子

请注意，斯坦纳树可能并不唯一，参见图 1 左侧。

分支，尤其是三分支点，是一维形状优化问题中一种众所周知的现象。过去十年间，有几篇论文研究了灌溉问题的各种形式中分支点为无限个的情形 [5, 4, 2]。斯坦纳问题中相应的结果由 [7] 证明（见定理 1）。

如果斯坦纳树中的每个终端点的度都为一，那么这棵树称为满树。在斯坦纳树问题中，关注满树是合理的，因为任何非满树都可以轻易地切分为若干满分支。反过来，也可以相对容易地将若干正则三叉树（正则三叉树是三条线段的并集，它们有一个公共端点，且两两夹角均等于 $2\pi/3$）通过终端点连接起来，从而得到一个具有无限多个分支点的树的简单例子。

1.1 一个普适施泰纳树

本小节将构造一个由 [7] 生成、含有无限多个斯坦纳点的唯一斯坦纳树。

设 S_∞ 是一棵无限树，其顶点为 y_0、y_1、y_2，……，边由 y_0y_1 和 y_ky_{2k}、y_ky_{2k+1}、$k \geq 1$ 给出。因此，S_∞ 是一棵无限二叉树，另有一个顶点 y_0 连接到所有其他顶点 y_k、$k \geq 2$ 的共同父节点 y_1 上。[7] 的目标是将 S_∞ 嵌入平面，使得 S_∞ 的每个有限子树的像都是其度为 1 或 2 的顶点集合所对应的唯一斯坦纳树。下面通过指定 y_0、y_1、y_2，……在平面上的位置来定义此嵌入。

设 $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是一个正实数序列。定义 S_∞ 的嵌入 $\Sigma(\Lambda)$，使其成为一棵有根二叉树，根为 $y_0 = (0, 0)$，第一个后代为 $y_1 = (1, 0)$，且第 $(i+1)$ 层与第 i 层的边长之比为 λ_i。当 $\{\lambda_i\}$ 足够小时，集合 $\Sigma(\Lambda)$ 是一棵树，见图 1 右侧。

令 $A_\infty(\Lambda)$ 为 $\Sigma(\Lambda)$ 的所有叶节点（极限点）与 $\{y_0\}$ 的集合之并。

定理 1 (Paolini–Stepanov–Teplitskaya, [7])。若由 $\lambda_i < 1/5000$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \pi/5040$ 给出，则二叉树 $\Sigma(\Lambda)$ 是 $A_\infty(\Lambda)$ 的唯一斯坦纳树。

下面的推论解释了为什么完全二叉斯坦纳树具有普适性，即它包含一个具有给定组合结构的子树。

*数学与信息学研究所，保加利亚科学院。该工作得到保加利亚教育与科学部“提升数学科学研究能力（PIKOM）”科学计划（编号：DO1- 67/05.05.2022）的资助。

†数学研究所，莱顿大学，荷兰

推论 1. 在定理 *1* 的条件下， $\Sigma(\Lambda)$ 的每个连通闭子集 S 都具有自然树结构。此外，每个这样的 S 都是顶点 P 的集合 P 的唯一斯坦纳树，其中顶点的度为 1 和2 。

证明。 设 $S \subset \Sigma(\Lambda)$ 和 $P \subset S$ 满足推论的条件。显然， S 是一棵树。设 $S' \neq S$ 是 S 的一棵任意斯坦纳树，并假设 $\mathcal{H}^1(S') \leq \mathcal{H}^1(S)$。那么显然，$\mathcal{H}^1((\Sigma(\Lambda) \setminus S) \cup S') \leq \mathcal{H}^1(\Sigma(\Lambda))$；但另一方面， $\{y_0\} \cup A_\infty \subset (\Sigma(\Lambda) \setminus S) \cup S'$，这与定理 1 中的极小性或唯一性相矛盾。 □

证明定理 1 后， [7] 的作者提出了以下问题:

> 我们的证明要求序列 $\{\lambda_j\}$ 相当快地趋于零（事实上，至少要可求和）。对于常数序列 $\lambda_j = \lambda$ （其中 $\lambda > 0$ 足够小）的情形，同样的构造是否仍能得到一棵斯坦纳树，这是一个开放问题。这似乎相当有趣，因为在这种情况下得到的树将是一个自相似分形。

本文的结果给出了肯定的回答。

定理 2. 若二叉树 $\Sigma(\Lambda)$ 由常数序列 $\lambda_i = \lambda < \frac{1}{300}$ 给出，则它是 $A_\infty(\Lambda)$ 的斯坦纳树。

显然，在定理 2 的条件下

$$\mathcal{H}^1(\Sigma(\Lambda)) = \sum_{i=0}^{\infty} (2\lambda)^i = \frac{1}{1-2\lambda}$$

且 A_∞ 的豪斯多夫维数为 $-\ln 2 \ln \lambda$。

$\Sigma(\Lambda)$ 中每个顶点 y_k 的后代集合都有一条经过 y_k 的对称轴。定理 2 的证明思路是逐步证明存在一棵 A_∞ 的斯坦纳树，它具有越来越多这样的对称性，然后取极限。

事实上，与前一项证明所用的硬分析相反，此处的证明采用软分析。该证明使用对称性论证，而非稳定性论证（定理 1 的证明基于对微小扰动后差值的一般估计）。事实上，定理 1 的证明允许我们对不同分支使用不同的 λ_i ，这完全破坏了定理 2 的证明中所用的对称性。

与定理 1 相比，另一个不足之处是我们无法证明斯坦纳树的唯一性。总而言之，证明或否定这样一个命题颇具挑战性，仍是一个开放问题：具有连续边的比值一致有界的满二叉树，是其终端点对应的唯一斯坦纳树。

2 定理 2 的证明

在证明过程中，固定 $\lambda < \frac{1}{300}$、 $\varepsilon = \frac{\lambda^2}{1-\lambda}$。设 $Y_1B_1C_1$ 是一个等腰三角形，其费马–托里拆利点为 T_1 ，满足 $|Y_1T_1| = 1$、 $|T_1B_1| = |T_1C_1| = \lambda$；由余弦定理可得 $|Y_1B_1| = |Y_1C_1| = \sqrt{1+\lambda+\lambda^2}$ 和 $|B_1C_1| = \sqrt{3}\lambda$。类似地，设 $Y_2B_2C_2$ 是一个等腰三角形，其费马–托里拆利点为 T_2 ，满足 $|Y_2T_2| = 1/4$、 $|T_2B_2| = |T_2C_2| = \lambda$；则有 $|Y_2B_2| = |Y_2C_2| = \sqrt{1/16 + \lambda/4 + \lambda^2}$ 和 $|B_2C_2| = \sqrt{3}\lambda$。

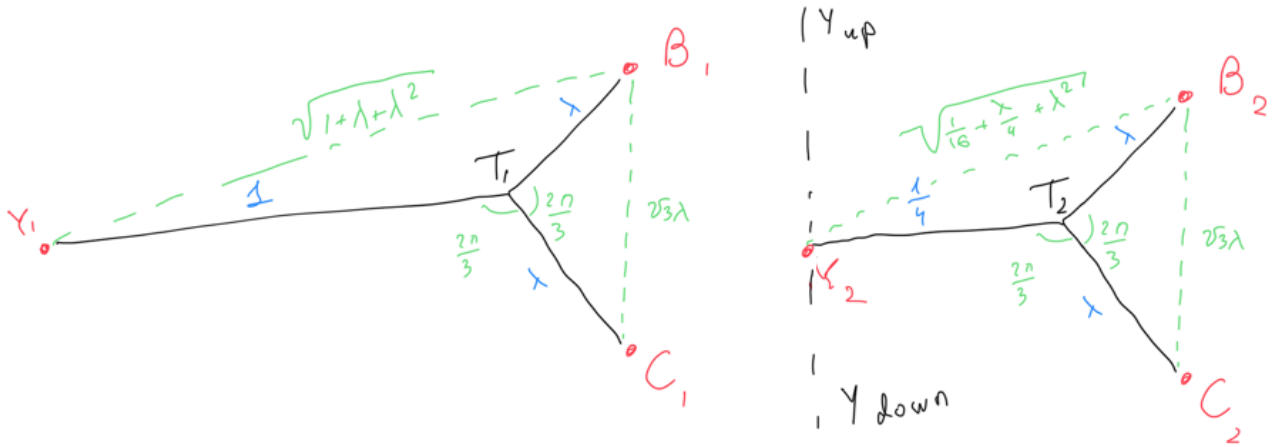

图2：引理中三角形的构造

设 $b_i \subset B_\varepsilon(B_i)$ 和 $c_i \subset B_\varepsilon(C_i)$ 是关于 $Y_iB_iC_i$ 的对称轴 l_i 对称的集合，其中 $i = 1, 2$。最后，设 Y_{up}, Y_{down} 是满足 $Y_{up}Y_{down} \parallel B_2C_2$, $Y_2 \in [Y_{up}Y_{down}]$ 且 $|Y_2Y_{up}| = |Y_2Y_{down}| = 1/2$ 的点。

以下引理或多或少是众所周知的（例如，参见 [7] 中的引理 A.6），因此我们在附录中证明它。回顾一下，正则三叉树是三条具有公共端点且两两夹角均为 $2\pi/3$ 的线段的并集。

引理 0。 *(i)* 对于每个 $\mathcal{S} \in \mathbb{M}(\{Y_1\} \cup b_1 \cup c_1)$，集合 $\mathcal{S} \setminus B_{10\varepsilon}(B_1) \setminus B_{10\varepsilon}(C_1)$ 都是正则三叉树。

(ii) 每个 $\mathcal{S} \in \mathbb{M}([Y_{up}Y_{down}] \cup b_2 \cup c_2)$ 在 $B_{10\varepsilon}(B_2) \cup B_{10\varepsilon}(C_2)$之外都是正则三叉树。

引理1。 存在 $\mathcal{S} \in \mathbb{M}(\{Y_1\} \cup b_1 \cup c_1)$，其关于 l_1 对称。

证明。 设 F 是射线 $[Y_1T_1)$ 上的一点，使得 $|Y_1F| = 1 + \frac{3}{2}\lambda$，并记 DEF 为满足以下条件的等边三角形： Y_1 是线段 $[DE]$ 的中点，且 B_1C_1 平行于 DE。考虑线段 $[Z_lZ_r] \subset [DF]$ 和 $[V_lV_r] \subset [EF]$，使得 $|Z_lZ_r| = [V_lV_r] = \lambda$ 和 $Z := DF \cap T_1B_1$， $V := EF \cap T_1C_1$ 是这些线段的中点。注意到 l_1 是 DEF 的对称轴，并且 $[Z_lZ_r]$、 $[V_lV_r]$ 也关于 l_1 对称。

根据引理 0(i)，每个极小集 $\mathcal{S}$ 都是从 $B_{10\varepsilon}(B_1) \cup B_{10\varepsilon}(C_1)$ 向外延伸的正则三叉树 $Y_1B_1'C_1'$。我们断言，三叉树 $Y_1B_1'C_1'$ 与线段 $[Z_lZ_r]$和 $[V_lV_r]$相交。事实上，考虑笛卡尔坐标系，其中 $Y_1 = (0, 0)$、$B_1 = (1 + \lambda/2, \sqrt{3}\lambda/2)$ 和 $C_1' = (1 + \lambda/2, -\sqrt{3}\lambda/2)$。于是 $Z = (1 + 3\lambda/8, 3\sqrt{3}\lambda/8)$、 $Z_l = (1 + 3\lambda/8 - \sqrt{3}\lambda/4, 3\sqrt{3}\lambda/8 + \lambda/4)$ 和 $Z_r = (1 + 3\lambda/8 + \sqrt{3}\lambda/4, 3\sqrt{3}\lambda/8 - \lambda/4)$。由于中心 T_1' 位于三角形 $Y_1B_1'C_1'$ 内部，其 x 坐标小于 B_1' 的 x 坐标，且 y 坐标小于 B_1' 的 y 坐标。

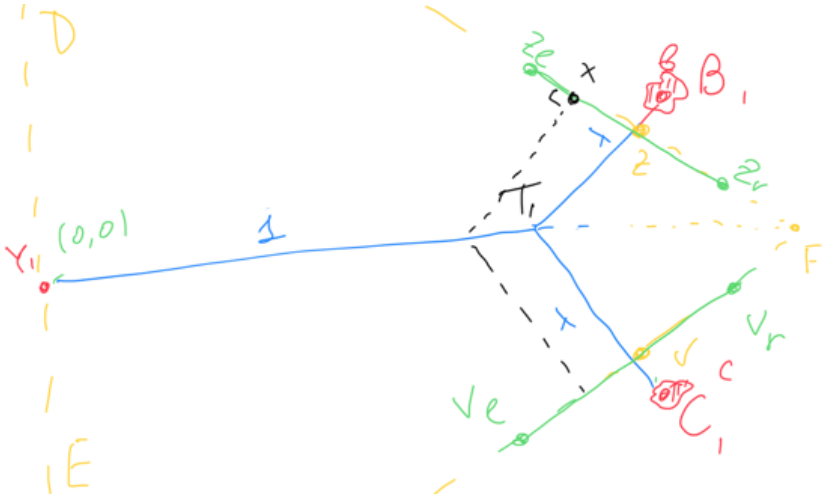

图3：引理1的证明示意图

我们考虑斯坦纳问题的以下辅助数据： $A_{mid} = [Z_lZ_r] \cup [V_lV_r] \cup \{Y_1\}$, $A_{up} = [Z_lZ_r] \cup b$,$A_{down} = [V_lV_r] \cup c$。根据引言中提到的 [6], 的结果，每个 $\mathbb{M}(A_i)$都非空。线段$[Z_lZ_r]$ 和 $[V_lV_r]$ 将每个 $\mathcal{S} \in \mathbb{M}(\{Y_1\} \cup b \cup c)$分成3部分，分别连接 A_{mid}、A_{up} 和 A_{down}，因此

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) \geq \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_{mid}) + \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_{up}) + \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_{down}), \tag{1}$$

其中 $\mathcal{S}_i \in \mathbb{M}(A_i)$。我们声称，事实上，等式(1)成立。

已知（参见重心坐标系），从闭等边三角形内一点到各边的距离之和与该点的位置无关。因此， $\mathbb{M}(A_{mid})$ 是正则三脚架的集合，且每个这样的三叉树都关于 l_1对称。此外，对于每个点 $x \in [Z_lZ_r]$，存在唯一的正则三叉树 $\mathcal{S}_x \in \mathbb{M}(A_{mid})$，并且 $\mathcal{S}_x$ 在 x处与 $[Z_lZ_r]$ 正交。

现在考虑任意的 $\mathcal{S}_{down} \in \mathbb{M}(A_{down})$。令 $\mathcal{S}_{up}$ 为关于 l_1与 $\mathcal{S}_{down}$ 对称的集合；显然$\mathcal{S}_{up} \in \mathbb{M}(A_{up})$。对于 $x \in \mathcal{S}_{down} \cap [V_lV_r]$，集合 $\mathcal{S}_x \cup \mathcal{S}_{up} \cup \mathcal{S}_{down}$ 连接了 $\{Y_1\} \cup b \cup c$，并且在 (1) 中取等号，因此 $\mathcal{S}_x \cup \mathcal{S}_{up} \cup \mathcal{S}_{down}$ 是 $\{Y_1\} \cup b \cup c$的斯坦纳树。根据构造，它关于 l_1对称。

□

引理2. 存在 $\mathcal{S} \in \mathbb{M}([Y_{up}Y_{down}] \cup b_2 \cup c_2)$，它关于 l_2对称。

证明。 根据引理 0[(ii)]，每棵斯坦纳树 $\mathcal{S}$ 在 $B_{10\varepsilon}(B_2) \cup B_{10\varepsilon}(C_2)$ 之外都与一棵正则三叉树重合。显然，它最长的线段垂直于 $Y_{up}Y_{down}$。我们要证明它在 Y_2处与 $Y_{up}Y_{down}$ 相接，即三条线段之一是 l_2的子集。反设不然，则 $l_2 \cap \mathcal{S}$ 是一个点，记作 L，并令$n \parallel B_2C_2$ 为包含 L的直线。于是 n 将 $\mathcal{S}$ 分成三个连通分支，分别记作 $\mathcal{S}_Y$、 $\mathcal{S}_b$和 $\mathcal{S}_c$。

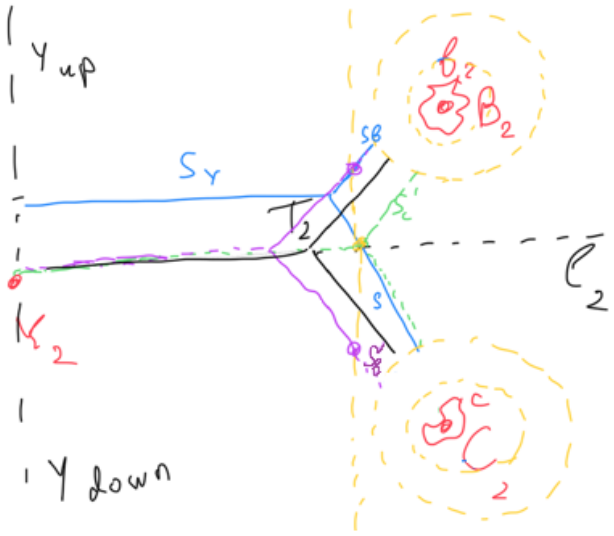

图4：引理2的证明图示

不失一般性， L 属于 $\mathcal{S}_c$。我们来构造另外两个竞争者 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ ，它们连接$[Y_{up}Y_{down}]$、 b 和 c。令 $\mathcal{S}_1 = [Y_2L] \cup \mathcal{S}_c \cup \mathcal{S}'_c$ ，其中 $\mathcal{S}'_c$ 是 $\mathcal{S}_c$ 关于 l_2的反射。设 $h := \text{dist}\,(Y_2,\ \mathcal{S}_Y \cap [Y_{up}Y_{down}])$。因此

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_1) = \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_Y) - \sqrt{3}h + 2\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_c).$$

令 $\mathcal{S}_2 := \mathcal{T} \cup \mathcal{S}_b \cup \mathcal{S}'_b$，其中 $\mathcal{S}'_b$ 是关于 l_2 的 $\mathcal{S}_b$ 的反射，而 $\mathcal{T}$ 是连接 Y_2 与 $n \cap \mathcal{S}_b$ 和 $n \cap \mathcal{S}_{b'}$ 的正则三叉树。因此

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_2) = \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_Y) + \sqrt{3}h + 2\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_b).$$

由于 $\mathcal{S}$ 是一棵斯坦纳树，有 $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) \le \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_1)$、 $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) \le \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_2)$，显然 $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) = \frac{\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_1) + \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_2)}{2}$。于是 $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_1) = \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_2)$，因此 $\mathcal{S}_1$， $\mathcal{S}_2$ 属于 $\mathbb{M}([Y_{up}Y_{down}] \cup b \cup c)$。由于 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 关于 l_2 对称，命题得证。

□

现在我们已准备证明定理 2，即证明对于 $\lambda_j = \lambda < \frac{1}{300}$ ，集合 $\Sigma(\Lambda)$ 是一棵斯坦纳树 or 终端点集合 A_∞。

令 b_1 和 c_1 分别为终端点的子集，它们是 y_2 和 y_3的后代。由于 $\varepsilon = \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^k + \ldots$，我们有 $b_i \subset B_\varepsilon(B_i)$、 $c_i \subset B_\varepsilon(C_i)$。对 $Y_1 = y_0$、 $B_1 = y_2$、 $C_1 = y_3$、b_1 和 c_1 应用引理1，我们证明存在一棵关于直线(y_0y_1)对称的斯坦纳树，其终端点为 A_∞。

令 $[Z_lZ_r]$ 和 $[V_lV_r]$ 为上一次应用引理1得到的线段。现在分别将 b_2 和 c_2 定义为 y_4 和 y_5的后代。然后对 $[Y_{up}Y_{down}] = [Z_lZ_r]$、 $B_2 = y_4$、 $C_2 = y_5$、b_2 和 c_2 应用引理2（这些数据与所需数据相似，尺度因子为 λ），我们证明存在一棵包含 $[y_0y_1]$并在 y_1 处分支的斯坦纳树（因为 y_1 属于 b 和 c的对称轴）。

现在，由于 λ_i 是常数， $\Sigma(\Lambda) \setminus [y_0y_1]$ 的上部和下部连通分支与 $\Sigma(\Lambda)$相似（尺度因子为 λ）。因此，第二次应用引理 1 和引理 2 表明，存在一棵包含$[y_0y_1] \cup [y_1y_2] \cup [y_1y_3]$的斯坦纳树。这个过程逐步还原 $\Sigma(\Lambda)$；因此，经过第 k 步，我们知道 A_∞ 的每棵斯坦纳树的长度至少为

$$\sum_{i=0}^{k-1} (2\lambda)^i.$$

因此长度 度至少为 $\Sigma(\Lambda)$的长度，这意味着 $\Sigma(\Lambda) \in \mathbb{M}(A_\infty)$.

致谢。 作者感谢 Fedor Petrov 和 Pavel Prozorov 审阅证明的早期版本。

参考文献

[1] Edgar N. Gilbert 和 Henry O. Pollak。施泰纳最小树。《*SIAM* 应用数学杂志》， 16(1):1–29，1968年。

[2] Michael Goldman。分支输运泛函的自相似极小化子。《印第安纳大学数学杂志》，69(4):1073–1104，2020年。

[3] Frank K. Hwang、Dana S. Richards 和 Pawel Winter。《斯坦纳树问题》，第 53 卷。爱思唯尔，1992年。

[4] Andrea Marchese 和 Annalisa Massaccesi。一个具有无穷多个分支点的最优灌溉网络。《ESAIM：控制、优化与变分法》，22(2)：543–561，2016年。

[5] Jean-Michel Morel 和 Filippo Santambrogio。最优灌溉模式的正则性。《理性力学与分析档案》，195(2)：499–531，2010年。

[6] Emanuele Paolini 和 Eugene Stepanov。斯坦纳问题的存在性与正则性结果。《变分法与偏微分方程》，46(3-4)：837–860，2013年。

[7] Emanuele Paolini、Eugene Stepanov 和 Yana Teplitskaya。一个连接不可数集合的无限斯坦纳树示例。《变分法进展》，8(3)：267–290，2015年。

3 附录

引理 *0* 的证明。 在此证明中 $i \in \{1,2\}$。假设对于 $\varepsilon \le \rho \le 10\varepsilon$， $\mathcal{S}$ 与每个圆 $\partial B_\rho(B_i)$ 至少相交于 2 个点。那么，我们可以如下用一个更短的竞争者替换 $\mathcal{S}$。令 $\mathcal{S}_b = \mathcal{S} \cap B_\varepsilon(B_i)$。根据定义和余面积不等式

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) \ge \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_b) + 2 \cdot 9\varepsilon + \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_i),$$

其中 $\mathcal{S}_1 \in \mathbb{M}(\{Y_1\} \cup \partial B_{10\varepsilon}(B_1) \cup c_1)$， $\mathcal{S}_2 \in \mathbb{M}([Y_{up}Y_{down}] \cup \partial B_{10\varepsilon}(B_2) \cup c_2)$。现在取 $\mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_b \cup \partial B_\varepsilon(B_i) \cup \mathcal{R}_B$，其中 $\mathcal{R}_B$ 是连接 $\mathcal{S}_i$ 与 $\partial B_\varepsilon(B_i)$ 的半径。这个竞争者的长度为

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_b) + 2\pi\varepsilon + 9\varepsilon + \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_i),$$

这就导致矛盾，因为 $2\pi < 9$。对称的构造表明，当 $\varepsilon \le \rho \le 10\varepsilon$ 时， $\mathcal{S}$ 与每个圆 $\partial B_\rho(C_i)$ 至少相交于 2 个点的情形同样不可能。

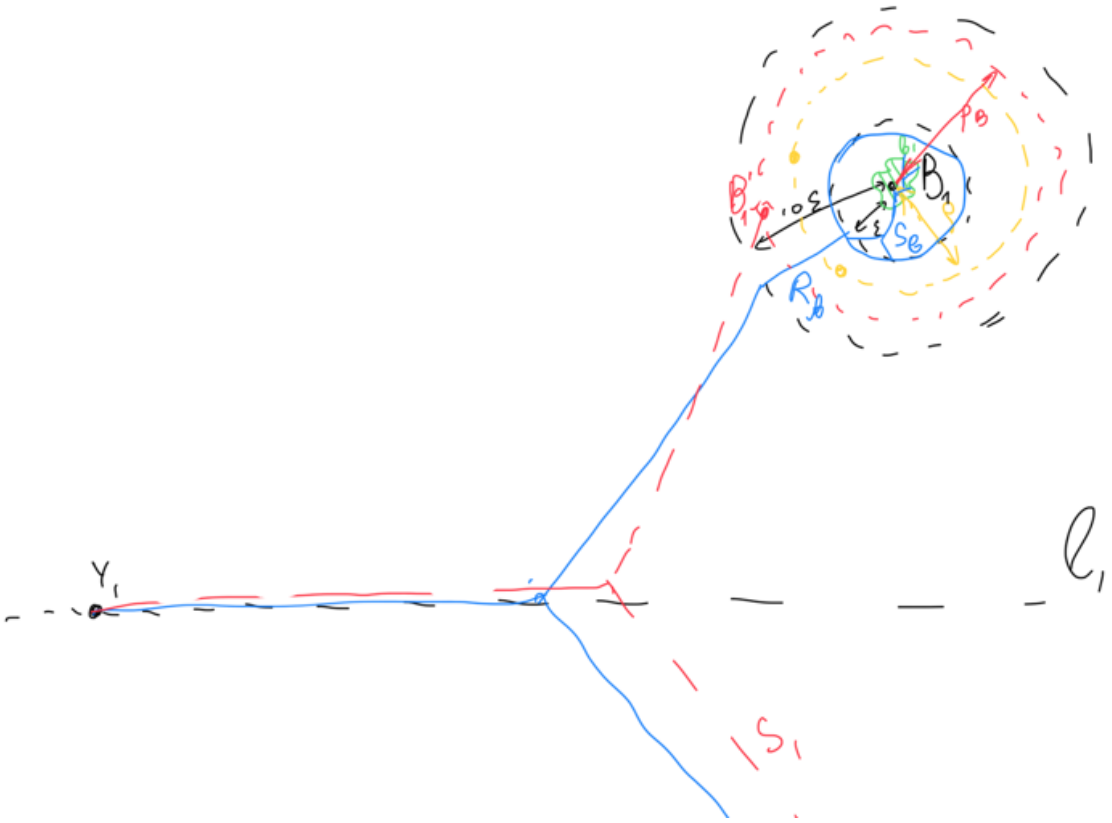

图5：引理 0 证明示意图

因此，存在 ρ_b、 $\rho_c \in [\varepsilon, 10\varepsilon]$，使得 $\mathcal{S} \cap \partial B_{\rho_b}(B_i)$ 是一点 B_i'，且 $\mathcal{S} \cap \partial B_{\rho_c}(C_i)$ 是一点 C_i'。显然，$\mathcal{S} = \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_b \cup \mathcal{S}_c$，其中 $\mathcal{S}_b = \mathcal{S} \cap B_{\rho_b}(B_i)$、 $\mathcal{S}_c = \mathcal{S} \cap B_{\rho_c}(C_i)$ 和 $\mathcal{S}_1 \in \mathbb{M}(\{Y_1\} \cup \{B_i'\} \cup \{C_i'\})$，$\mathcal{S}_2 \in \mathbb{M}([Y_{up}Y_{down}] \cup \{B_i'\} \cup \{C_i'\})$。显然， $\mathcal{S}_i$ 是一个三叉树，或两条线段的并集。我们断言 $\mathcal{S}_i$ 是一个三叉树。根据三角不等式

$$|\mathcal{H}^1([T_iB_i] \cup [T_iC_i]) - \mathcal{H}^1([T_iB_i'] \cup [T_iC_i'])| < 20\varepsilon. \tag{2}$$

现在证明第 (i) 项。由 (2)，连接 $[T_1Y_1] \cup [T_1C_1'] \cup [T_1B_1']$、$Y_1$、 B_1' 和 C_1' 的（非正则）三叉树的长度至多为 $1 + 2\lambda + 20\varepsilon$。同理，2-线段的长度至少为

$$\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} + \sqrt{3}\lambda - 30\varepsilon > 1 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\lambda - 30\varepsilon.$$

回忆一下， $\varepsilon = \frac{\lambda^2}{1-\lambda}$；不难验证

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\lambda - 30\varepsilon > 1 + 2\lambda + 20\varepsilon$$

对于 $\lambda < 1/300$。因此，我们证明 $\mathcal{S}_1$ 包含一棵连接 Y_1、 B_1' 和 C_1' 的三叉树；由极小性论证可知，它是正则的。

现在讨论第 (ii) 项。由 (2)，连接 $[T_2Y_2] \cup [T_2C_2'] \cup [T_2B_2']$、$Y_2$、 B_2' 和 C_2' 的（非正则）三叉树的长度至多为 $1/4 + 2\lambda + 20\varepsilon$。同样，2-线段构造的长度至少为

$$1/4 + \lambda/2 + \sqrt{3}\lambda - 30\varepsilon.$$

其余计算与第一项相同。

□