arXiv:2302.02196v1 [math.NA] 4 Feb 2023

拉普拉斯与亥姆霍兹层势的递归解析求积（ $\mathbb{R}^3$ *）

SHOKEN KANEKO†，NAIL A. GUMEROV‡，和 RAMANI DURAISWAMI † ‡

摘要。 本文针对采用多项式形函数的分片平面边界单元，提出一种解析求值方法，用于计算拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的配置边界元法中产生的层势。该方法基于散度定理进行降维，并采用多项式单元所得线积分递归求值方案（RIPE）计算由此得到的线积分。该方法用于求值拉普拉斯核和亥姆霍兹核对应的单层势、双层势、伴随双层势和超奇异势。在统一框架下，该方法能够自然处理近奇异、奇异和超奇异积分，无需分别进行修改。所提出的框架兼具高精度与高效率。

关键词。 边界元法，奇异积分，解析求积

MSC 分类号。65R20, 65N35, 65N38

1. 引言。 构建边界元法（BEM）中需要求解的线性方程组，离不开对层势进行准确、高效且误差可控的数值计算。这并非易事，因为被积函数并非简单的解析函数，而是具有奇异性或近奇异性。对于带限多项式积分效果良好的求积方案（例如高斯-勒让德求积），在求值点靠近单元时往往会产生不准确的结果。多年来，人们开发了许多技术，以便在此类情况下准确计算边界积分
[11, 6, 10, 12, 14, 16, 22, 1, 13, 20, 21]。Ref.[16] 对这一主题进行了最新且全面的综述。已开发的方法包括：通过坐标变换进行奇异性消除 [11, 10, 12], 、奇异性扣除 [6], 、降维 [14, 22], 、自适应细分 [1], 以及展开求积 [13, 20, 21]。PART 方法 [11] 通过坐标变换，利用变换的雅可比行列式减弱发散被积函数的影响。[12] 提出了另一种坐标变换方法，即使用双曲正弦变换。奇异性扣除方法 [6] 将被积函数拆分为奇异部分和正则部分，前者通过解析方法求值，后者则采用高斯-勒让德求积。计算层势的另一种方法是推导积分的解析表达式。Newman 开发了一种方法，可对四边形单元上采用任意阶形函数的拉普拉斯核层势进行求值 [17]。Lenoir 和 Salles 则针对 Galerkin 边界元法中的常数元和线性元，开发了一种利用散度定理降维的半解析方法 [14, 15], ；其中，与亥姆霍兹核奇异部分相关的层势通过解析方法求值，而正则部分则采用传统求积。最近，Zhu 和 Veerapaneni [22]提出了一种针对高阶曲边单元上拉普拉斯层势的方法，该方法利用斯托克斯定理和四元数代数进行降维。

*提交给编辑的日期：2022年12月6日。**经费支持：**本研究部分由马里兰大学与陆军研究实验室之间的合作研究协议 W911NF2020213 提供支持，技术监督员为 David Hull、Ross Adelman 和 Steven Vinci。Shoken Kaneko 获得了日本学生支援机构和渡边基金会提供的奖学金。

†马里兰大学计算机科学系，美国马里兰州大学公园市（kaneko60@umd.edu）。

‡马里兰大学高级计算机研究所，马里兰大学，美国马里兰州大学公园市（ramanid@umd.edu）。

我们提出了一种方法，可对分片平面边界元上采用高阶多项式形函数的亥姆霍兹核和拉普拉斯核，解析计算配点边界元法中出现的全部四种层势。该方法基于散度定理，将曲面积分化为单元平面上的线积分，并通过引入辅助向量场推导递推关系，从而高效计算所得线积分。与 [14] 相比，我们在统一框架下处理拉普拉斯核和亥姆霍兹核，并能够通过递推关系解析计算一般阶数多项式形函数对应的积分。 [22] 中的方法与我们的方法最为相近，因为它同样基于降维并支持多项式单元。不过，我们的工作在若干方面不同于 [22]: **(1)** 我们的方法是解析的，且仅使用递推关系；与之相反， [22]对线积分采用高斯-勒让德求积；**(2)** 我们的方法适用于拉普拉斯核和亥姆霍兹核，以及全部四种基本层势，即单层势、双层势、伴随双层势和超奇异势；**(3)** 我们的方法依赖散度定理，因此仅适用于平面单元，而 [22] 基于流形上的斯托克斯定理，能够处理曲边单元；**(4)** [22] 包含一个 $O(p^6)$ 坐标变换步骤，而我们的方法在拉普拉斯情形下的整体复杂度为 $O(p^3)$，其中 p 为多项式阶数。需要指出的是，平面单元上的散度定理可由斯托克斯定理推导，因此本方法也可以等价地用斯托克斯定理来表述。

基于递推的方法有一项优点，即可以进行误差控制：一旦达到预设阈值，某些递推关系便可立即截断；而固定阶数的高斯-勒让德求积则不具备这一特性。当求积是更复杂求解器的一部分时，误差控制尤为重要。此类求解器包含多个组件，例如通过快速多极子法 (FMM) [5] 加速、并采用迭代法求解的边界元法；为避免冗余计算，不同部分产生的数值误差都应保持一致。虽然可以通过经典方法（如高斯-克朗罗求积）实现自适应误差控制，但如第 5 节所示，这些方法的效率不如我们的方法。我们方法中针对分片常数单元的最简单情形最初由 Gumerov 和 Duraiswami [8]开发，并应用于一个用于求解亥姆霍兹方程 [9]的生产级配点边界元法求解器。

2. 边界元法与层势。边界元法广泛用于偏微分方程的数值求解，例如亥姆霍兹方程和拉普拉斯方程，分别表示为

$$-k^2u(\mathbf{r}) - \nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad -\nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \tag{2.1}$$

其中波数为 k，场为 u，源项为 f。式（2.1）的弱形式可用单层势和双层势 V、K [19] 表示:

$$\{(c_p\gamma_{0,p} + K\gamma_{0,q} - V\gamma_{1,q})u\}(\mathbf{r}_p) = \{N_0 f\}(\mathbf{r}_p), \tag{2.2}$$

其中， $c_p = 1/2$、 γ_0 和 γ_1 分别为边界迹和法向导数算子， N_0 为牛顿势算子，定义在边界 Γ 上的层势为:

$$\{V\psi\}(\mathbf{r}_p) \equiv \int_{\mathbf{r}_q\in\Gamma} G(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q)\psi(\mathbf{r}_q)d\Gamma, \quad \{K\phi\}(\mathbf{r}_p) \equiv \int_{\mathbf{r}_q\in\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q)}{\partial \mathbf{n}_q}\phi(\mathbf{r}_q)d\Gamma, \tag{2.3}$$

其中 $G(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q)$ 是亥姆霍兹或拉普拉斯格林函数:

$$G_{\mathrm{H}}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad G_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q) = \frac{1}{4\pi r}, \quad r \equiv |\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p|. \tag{2.4}$$

某些边界元法公式 [3, 7]采用边界积分方程的法向导数形式，其中包含伴随双层势 K' 和超奇异势 D。

$$(2.5)\ \{K'\psi\}(\mathbf{r}_p) \equiv \int_{\mathbf{r}_q\in\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q)}{\partial \mathbf{n}_p}\psi(\mathbf{r}_q)d\Gamma,\quad \{D\phi\}(\mathbf{r}_p) \equiv \int_{\mathbf{r}_q\in\Gamma} \frac{-\partial^2 G(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_q)}{\partial \mathbf{n}_p \partial \mathbf{n}_q}\phi(\mathbf{r}_q)d\Gamma.$$

在配点边界元法中，边界 Γ 被离散为若干单元，通常为三角形，并对这些单元上的层势积分进行求值。密度函数ψ、 ϕ 通过局部多项式函数（也称为形函数）进行近似。

根据求值点与单元之间的距离以及奇异度，层势在单元上的求值涉及的积分可分为以下几类：(1) 远场，即求值点远离单元，通常通过快速多极子法（FMM）进行聚类以加速计算；(2) 中间距离，此时不使用快速多极子法，但标准高斯-勒让德求积仍然有效；(3) 近场，此时高斯-勒让德求积会变得不准确，因此需要对近奇异积分进行特殊处理；(4) 求值点位于单元上，此时被积函数具有奇异性或超奇异性，需要采用其他特殊技术。针对上述每一类情况，都已发展出相应技术。对于远场，作者还开发了另一种基于递推的方法，用于高效计算快速多极子法（FMM）中产生的多极子积分 [9]。展开求积法也已与快速多极子法（FMM）结合使用 [20, 21]。

3. 问题描述。假设有一个平面三角形单元 S，其顶点为 $\mathbb{R}^3$ 中的 $\mathbf{v}_1$, 、$\mathbf{v}_2$, 和 $\mathbf{v}_3$，其中单元坐标系 ($\hat{\mathbf{i}}$,$\hat{\mathbf{j}}$,$\hat{\mathbf{k}}$) 的原点位于单元平面上，$\hat{\mathbf{i}}$ 和 $\hat{\mathbf{j}}$ 是位于单元平面内的单位向量，且 $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{n}_{\text{face}}$，其中 $\mathbf{n}_{\text{face}}$ 是该单元的单位法向量。我们还为边 j 定义边坐标系 ($\hat{\mathbf{i}}^j$,$\hat{\mathbf{j}}^j$, $\hat{\mathbf{k}}^j$)：$\hat{\mathbf{i}}^j = (\mathbf{v}_{(j+1)\%3} - \mathbf{v}_j)/|\mathbf{v}_{(j+1)\%3} - \mathbf{v}_j|$，$\hat{\mathbf{k}}^j = \mathbf{n}_{\text{face}}$，且 $\hat{\mathbf{j}}^j = \hat{\mathbf{k}}^j \times \hat{\mathbf{i}}^j \equiv -\mathbf{n}^j$。$\mathbf{n}^1$, 、$\mathbf{n}^2$, 和 $\mathbf{n}^3$ 分别是边 ($\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$)、($\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$) 和 ($\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_1$) 在单元平面内的外向边法向量。边界单元关联的坐标系如图 1 所示。下文中，上标 j 表示边索引，而不是指数。$\mathbf{r}_p$ 和 $\check{\mathbf{r}}_p$ 分别表示观测点及其在单元平面上的正交投影。点 $\mathbf{r}_q$ 和 $\mathbf{r}_p$ 在单元坐标系中分别表示为 $\mathbf{r}_q = (x, y, z)^T$ 和 $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)^T$。另定义 $r \equiv |\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p|$、$\boldsymbol{\rho} \equiv \mathbf{r}_q - \check{\mathbf{r}}_p$、 $\rho \equiv |\boldsymbol{\rho}|$,$h \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}_p - \check{\mathbf{r}}_p)$、 $x_d \equiv x - x_p$, $y_d \equiv y - y_p$ 和 $z_d \equiv z - z_p$。

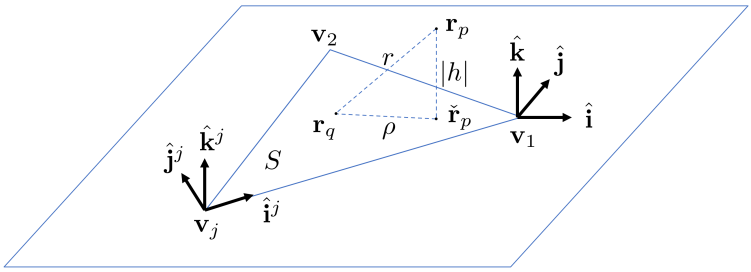


FIG. 1. *A boundary element and its associated coordinate frames. We have the*单元坐标系（$\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$）*and*边坐标系（$\hat{\mathbf{i}}^j$, $\hat{\mathbf{j}}^j$, $\hat{\mathbf{k}}^j$）*for each edge with index* j. *The origin ofthe element frame is set to*$\mathbf{v}_1$.

在此设定中，空间中的一个点可表示为：

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{v}_1 + u\,(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + v\,(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + w\mathbf{n}_{\text{face}}, \tag{3.1}$$

其中，(*u*， *v*) 是二维参考坐标系中的坐标，其中 $0 \le u$， $v \le 1$ 且 $u + v \le 1$；而 (*x*， *y*， *z*) 是单元坐标系中的坐标。从参考坐标系到单元坐标系的投影是一个线性变换：

$$(x, y)^T = \Xi(u, v)^T, \tag{3.2}$$

其中 Ξ 是 (2×2) 变换矩阵。单元坐标系中的点可用其在边坐标系中的坐标表示为：

$$(x, y, z)^T = B(x^j, y^j, z^j)^T + \mathbf{b}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} \alpha_x & \beta_x & 0 \\ \alpha_y & \beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

对于给定单元，确定 Ξ、 B 和 $\mathbf{b}$ 的值很直接。

p_s 阶单元的形函数 $N(u,\ v)$ 具有以下形式：

$$N_{p_s}(u, v) = \sum_{b'=0}^{p_s} \sum_{c'=0}^{p_s - b'} a_{b',c'} u^{b'} v^{c'} = \sum_{b=0}^{p_s} \sum_{c=0}^{p_s - b} A_{b,c} x^b y^c. \tag{3.4}$$

形函数由 (*u*， *v*) 参考坐标系中的 $a_{b',\ c'}$ 系数确定。将 (3.2) 代入 (3.4) 并求解一个线性方程组，即可得到单元坐标系表达式中的系数 $A_{b,\ c}$。由于根据 (3.2)，系数 $a_{b',\ c'}$ 和 $A_{b,\ c}$ 只有在 $b + c = b' + c'$ 时才会相互影响，因此可通过求解 $p_s + 1$ 个小型线性方程组来实现；每个方程组均可使用针对 Vandermonde 方程组的高效稳定算法求解 [2], ，这一阶段的计算复杂度为 $O(p_s^3)$。

4. 方法：多项式单元递归积分（RIPE）。

4.1. 通过散度定理降维。 我们假设单元为平面三角形，并通过散度定理将曲面积分化为曲线积分，再将曲线积分离散为沿各直边进行的线积分之和。我们寻找向量场 $\mathbf{m}_i$ ，使其在单元平面上的曲面散度等于所讨论的被积函数，即多项式形函数与格林函数的乘积：

$$\sum_i A_i \nabla_s \cdot \mathbf{m}_i = N(u(x, y), v(x, y)) G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q), \tag{4.1}$$

然后，我们可以应用散度定理来计算所关注的逐单元层势。这如图 2 所示。单层势V_e、双层势 K_e、伴随双层势 $K_e^{'}$ 以及超奇异

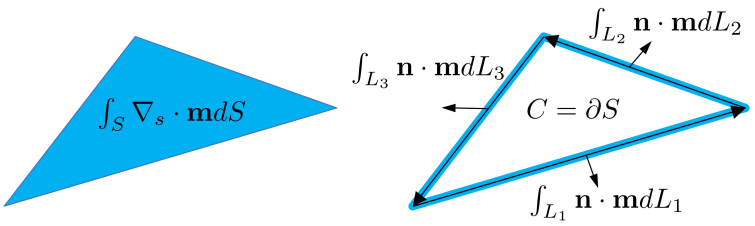


FIG. 2. *Left: the surface integral over element S of a function which can be written as the surface divergence of a vector field . Right: after the application of the divergence theorem the surface integral over S is converted into a contour integral over the contour $C = \partial S$ and further into line integrals due to the straightness of the edges.*

势 D_e 均可写为:

(4.2)

$$
\begin{aligned}
V_e =& \int_{S_q} G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) N(\mathbf{r}_q) dS_q = \int_{S_q} \sum_i A_i \nabla_s \cdot \mathbf{m}_i dS_q = \sum_i A_i \int_{S_q} \nabla_s \cdot \mathbf{m}_i dS_q \\
=& \sum_i A_i \left(\oint_C \mathbf{n}_C \cdot \mathbf{m}_i dC + T^{(i)}_{\text{sing}} \right) = \sum_i A_i \left(\sum_j \int_{L_j} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_i dL_j + T^{(i)}_{\text{sing}} \right), \\
K_e =& \int_{S_q} \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial \mathbf{n}_q} N(\mathbf{r}_q) dS_q = \sum_i A_i \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial z} \int_{L_j} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_i dL_j + \frac{\partial T^{(i)}_{\text{sing}}}{\partial z} \right), \\
K'_e =& \int_{S_q} \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial \mathbf{n}_p} N(\mathbf{r}_q) dS_q = \sum_i A_i \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_p} \int_{L_j} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_i dL_j + \frac{\partial T^{(i)}_{\text{sing}}}{\partial \mathbf{n}_p} \right), \\
-D_e =& \int_{S_q} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial \mathbf{n}_p \partial \mathbf{n}_q} N(\mathbf{r}_q) dS_q = \sum_i A_i \left(\sum_j \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_p \partial z} \int_{L_j} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_i dL_j + \frac{\partial^2 T^{(i)}_{\text{sing}}}{\partial \mathbf{n}_p \partial z} \right),
\end{aligned}
$$

其中，$\nabla_s = \nabla - \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla)$ 是单元平面内的曲面散度算子，$C = \partial S_q$ 是单元表面的轮廓线 S_q。需要注意的是，如果 $\check{\mathbf{r}}_p$（即 $\mathbf{r}_p$ 在单元平面上的投影）落在单元上，并且被积函数 $\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{m}_i$ 在单元上的 $\mathbf{r}_q = \check{\mathbf{r}}_p$ 处具有奇异性，则必须将与 $\mathbf{m}_i$ 相关的奇异项 $T^{(i)}_{\text{sing}}$ 加入曲线积分中。在这种情况下，应用散度定理时必须去除奇异性，即必须从 S 上的曲线积分中减去以单元上奇异点为中心的无穷小圆 C_ε 的曲线积分：$T^{(i)}_{\text{sing}} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{n}_{C_\varepsilon} \cdot \mathbf{m}_i dC_\varepsilon$。因此，问题归结为计算与每条边相关的线积分 $\int_{L_j} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_i dL_j$，以及与单元相关的奇异项。一种计算这些线积分的方法是采用高斯-勒让德求积，从而得到半解析方法 [22]。如果这些线积分可以通过解析方式计算，则根据微积分基本定理，还可以进一步归结为计算各条边端点处的值。图 3 对比了基于高斯-勒让德求积的传统曲面积分方法与所提出的 RIPE 方法。

为执行这一策略，我们需要找到向量场 $\mathbf{m}_i$ 的表达式，使其曲面散度等于被积函数 $G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) N(\mathbf{r}_q)$，或者至少等于项 $\int_{L_j} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{m}_i dL_j$ 和 $T^{(i)}_{\text{sing}}$。虽然所提出的方法可以自然地推广到

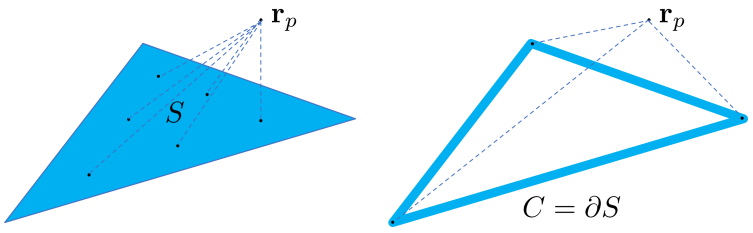


FIG. 3。 *Conventional Gauss-Legendre quadrature requires evaluation of the integrand at multiple nodes on the element S which may be near or coincide with the evaluation point or collocation node $\mathbf{r}_p$. After application of the divergence theorem, the surface integral over S is converted into an integral over the contour $C = \partial S$ and further into line integrals which in the end results in the evaluation of analytical expressions at the endpoints of the edges i.e. at the vertices.*

多边形单元，但为了简洁高效，这里我们只考虑三角形单元。在本文其余部分，$\partial f/\partial x = \partial_x f = f_{(x)}$均表示函数 f 关于变量 x的偏导数。

4.2. 含任意阶多项式的拉普拉斯核。

4.2.1. 单层势。 我们的目标是找到曲面散度等于所讨论的被积函数的向量场，也就是说，该被积函数是一个由 x 和 y 构成的、次数最高为 p_s 的多项式与格林函数的乘积：

$$\nabla_s \cdot \mathbf{m}_{b,c} = \frac{x^b y^c}{4\pi r}, \quad b, c \geq 0, \quad b + c \leq p_s. \tag{4.3}$$

我们引入辅助向量场$\mathbf{m}_{b,\ c,\ a}$，它们满足以下关系：

$$\nabla_s \cdot \mathbf{m}_{b,c,a} = \frac{x^b y^c r^a}{4\pi r}, \quad a, b, c \geq 0, \quad a + b + c \leq p_s. \tag{4.4}$$

LEMMA 4.1（辅助向量场的递推关系——拉普拉斯核）。若场$\mathbf{m}_{b-1,\ c,\ a+1}$ 和$\mathbf{m}_{b,\ c,\ a-1}$ 满足(4.4)，则由下式给出的场$\mathbf{m}_{b+1,\ c,\ a-1}$ ：

$$a\mathbf{m}_{b+1,c,a-1} = -b\mathbf{m}_{b-1,c,a+1} + ax_p\mathbf{m}_{b,c,a-1} + \left(\frac{x^b y^c r^a}{4\pi}\hat{\mathbf{i}}\right), \quad a \geq 1, \tag{4.5}$$

对于索引元组 $(b+1, c, a-1)$，也满足 (4.4)。

证明。 若向量场 $\mathbf{m}_{b-1,c,a+1}$ 和 $\mathbf{m}_{b,c,a-1}$ 满足 (4.4)，则对 (4.5) 右端取曲面散度可得：

$$\begin{aligned} &- b\nabla_s \cdot \mathbf{m}_{b-1,c,a+1} + ax_p \nabla_s \cdot \mathbf{m}_{b,c,a-1} + \nabla_s \cdot \left(\frac{x^b y^c r^a}{4\pi}\hat{\mathbf{i}}\right) \\ &= -b\frac{x^{b-1} y^c r^a}{4\pi r} + ax_p \frac{x^b y^c r^{a-1}}{4\pi r} + y^c \frac{ax^{b+1} r^{a-1} - ax_p x^b r^{a-1} + bx^{b-1} r^{a+1}}{4\pi r} \\ &= a\frac{x^{b+1} y^c r^{a-1}}{4\pi r}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

因此，$\nabla_s \cdot \mathbf{m}_{b+1,c,a-1} = x^{b+1} y^c r^{a-1}/(4\pi r)$，这意味着$\mathbf{m}_{b+1,c,a-1}$ 满足索引元组 $(b+1, c, a-1)$ 对应的 (4.4)。 □

定义如下：

$$\xi_{b,c,a} \equiv \int \mathbf{m}_{b,c,a} \cdot \mathbf{n}^j dx^j, \quad i_m \equiv \int r^m dx^j, \quad k_m \equiv -y_p^j \int \frac{r^m}{\rho^2} dx^j. \tag{4.7}$$

由 (4.5) 可得：

$$\xi_{b+1,c,a} = -\frac{b}{a+1}\xi_{b-1,c,a+2} + x_p \xi_{b,c,a} + \frac{\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{n}^j}{(a+1)4\pi} \int x^b y^c r^{a+1} dx^j, \tag{4.8}$$

根据对称性，还成立以下递推关系：

$$\xi_{b,c+1,a} = -\frac{c}{a+1}\xi_{b,c-1,a+2} + y_p \xi_{b,c,a} + \frac{\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{n}^j}{(a+1)4\pi} \int x^b y^c r^{a+1} dx^j. \tag{4.9}$$

这些递推关系适用于 $b \geq 0$ 和 $c \geq 0$。对于 $b = c = 0$，以下场 $\mathbf{m}_{0,0,a}$：

$$\mathbf{m}_{0,0,a} = \frac{r^{a+1}}{(a+1)4\pi\rho^2}\boldsymbol{\rho}, \tag{4.10}$$

满足 (4.4)，可用于启动递推。由此得到：

$$\xi_{0,0,a} = \int \frac{r^{a+1}}{(a+1)4\pi\rho^2}\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}^j dx^j = \frac{y_p^j}{(a+1)4\pi} \int \frac{r^{a+1}}{\rho^2} dx^j = \frac{-k_{a+1}}{(a+1)4\pi}. \tag{4.11}$$

积分 k_m 和 i_m 可通过以下递推关系高效计算：

$$k_{m+2} = (z_p^j)^2 k_m - y_p^j i_m, \quad i_{m+2} = ((y_p^j)^2 + (z_p^j)^2)\frac{m+2}{m+3} i_m + \frac{x_d^j r^{m+2}}{m+3}, \tag{4.12}$$

其初始项可在附录 A 中写成闭式。后续将用到：

$$\begin{gathered} \partial_{x_p^j} k_l = y_p^j \frac{r^l}{\rho^2}, \quad \partial_{y_p^j} k_l = x_d^j \frac{r^l}{\rho^2} - l i_{l-2}, \quad \partial_{z_p^j} k_l = -l z_d^j k_{l-2}, \\ \partial_{x_p^j} i_l = -r^l, \quad \partial_{y_p^j} i_l = l y_p^j i_{l-2}, \quad \partial_{z_p^j} i_l = -l z_d^j i_{l-2}. \end{gathered} \tag{4.13}$$

接下来需要计算 (4.8) 和 (4.9) 中形式为 $\int x^b y^c r^a dx^j$ 的最后一个积分。回忆 $x = \alpha_x x^j + \beta_x y^j + \gamma_x$ 和 $y = \alpha_y x^j + \beta_y y^j + \gamma_y$。此外，对于边 j 上的点，$y^j = z^j = 0$。根据从 x^j 到 x_d^j 的坐标变换，可将其写为：

$$\begin{aligned} &\kappa_{b,c,a} \equiv \int x^b y^c r^a dx^j = \int (\alpha_x x_d^j - \hat{\alpha})^b (\alpha_y x_d^j - \hat{\beta})^c r^a dx_d^j, \\ &\hat{\alpha} \equiv -(\beta_x y^j + \gamma_x) - \alpha_x x_p^j, \quad \hat{\beta} \equiv -(\beta_y y^j + \gamma_y) - \alpha_y x_p^j, \quad \gamma^2 \equiv r^2 - (x_d^j)^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

后续将用到：

$$\hat{\alpha}^{(x_p^j)} = -\alpha_x, \quad \hat{\beta}^{(x_p^j)} = -\alpha_y, \quad \hat{\alpha}^{(y_p^j)} = \hat{\alpha}^{(z_p^j)} = \hat{\beta}^{(y_p^j)} = \hat{\beta}^{(z_p^j)} = 0. \tag{4.15}$$

函数 $\kappa_{b、c、a}$ 满足以下递推关系：

$$\begin{aligned} \kappa_{b+1,c+1,a} &= \alpha_x \alpha_y \kappa_{b,c,a+2} - \hat{\beta}\kappa_{b+1,c,a} - \hat{\alpha}\kappa_{b,c+1,a} - \left(\hat{\alpha}\hat{\beta} + \alpha_x \alpha_y \gamma^2\right)\kappa_{b,c,a}, \\ \kappa_{b+2,c,a} &= \alpha_x^2 \kappa_{b,c,a+2} - 2\hat{\alpha}\kappa_{b+1,c,a} - \left(\hat{\alpha}^2 + \alpha_x^2 \gamma^2\right)\kappa_{b,c,a}, \\ \kappa_{b,c+2,a} &= \alpha_y^2 \kappa_{b,c,a+2} - 2\hat{\beta}\kappa_{b,c+1,a} - \left(\hat{\beta}^2 + \alpha_y^2 \gamma^2\right)\kappa_{b,c,a}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

以下特殊情形用于初始化递推：

$$\begin{aligned}\kappa_{0,0,a} &= i_a, \quad \kappa_{1,0,a} = \alpha_x \int x_d^j r^a dx_d^j - \hat{\alpha} i_a = \alpha_x \frac{r^{a+2}}{a+2} - \hat{\alpha}\kappa_{0,0,a},\\ \kappa_{0,1,a} &= \alpha_y \int x_d^j r^a dx_d^j - \hat{\beta} i_a = \alpha_y \frac{r^{a+2}}{a+2} - \hat{\beta}\kappa_{0,0,a}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

稍后我们将使用以下关系：

$$\begin{aligned}\partial_{x_p^j}\kappa_{b,c,a} &= \partial_{x_p^j}\int x^b y^c r^a dx^j = \int x^b y^c \partial_{x_p^j}(r^a) dx^j = -\int x^b y^c \partial_{x^j}(r^a) dx^j\\ &= -x^b y^c r^a + \alpha_x b\kappa_{b-1,c,a} + \alpha_y c\kappa_{b,c-1,a},\\ \partial_{y_p^j}\kappa_{b,c,a} &= -a y_d \kappa_{b,c,a-2}, \quad \partial_z \kappa_{b,c,a} = a z_d \kappa_{b,c,a-2},\\ \partial^2_{z,x_p^j}\kappa_{b,c,a} &= -x^b y^c a z_d r^{a-2} + \alpha_x b\kappa^{(z)}_{b-1,c,a} + \alpha_y c\kappa^{(z)}_{b,c-1,a}\\ &= a z_d(-x^b y^c r^{a-2} + \alpha_x b\kappa_{b-1,c,a-2} + \alpha_y c\kappa_{b,c-1,a-2}).\end{aligned} \tag{4.18}$$

注意，我们还需要计算与$\mathbf{m}_{b,c,a}$相关的奇异项：

$$T_{b,c,a} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon} \mathbf{m}_{b,c,a}\cdot\mathbf{n}_{C_\varepsilon} dC_\varepsilon, \tag{4.19}$$

若 $\check{}\mathbf{r}_p$ 落在单元上，且被积函数在单元上存在奇异性，其中C_ε 表示以奇异点为中心、半径为 ε 的圆，$\mathbf{n}_{C_\varepsilon}$ 表示沿圆的向内单位法向量。该奇异项也满足以下递推关系：

$$T_{b+1,c,a}=\frac{-b}{a+1}T_{b-1,c,a+2} + x_p T_{b,c,a}, \quad T_{b,c+1,a}=\frac{-c}{a+1}T_{b,c-1,a+2} + y_p T_{b,c,a}, \tag{4.20}$$

并且，若对 $b = c = 0$使用式 (4.10) 中的场，则以下为初始值：

$$T_{0,0,a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon} \mathbf{m}_{0,0,a}\cdot\mathbf{n}_{C_\varepsilon} dC_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon} \frac{r^{a+1}\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{n}_{C_\varepsilon}}{(a+1)4\pi\rho^2} dC_\varepsilon = -\frac{|h|^{a+1}}{2(a+1)}. \tag{4.21}$$

因此，通过执行上述递推关系，我们可以计算任意阶数为 p_s 的多项式形函数对应的单层势所需的所有项。计算 $\kappa_{b,c,a}$ 和 $\xi_{b,c,a}$ 的步骤见算法 4.1 和算法 4.2。数值 $\xi_{b,c,0}$ 是计算层势所需的线积分。使用算法 4.2 计算 $\xi_{b,c,a}$ 系数的步骤，在拉普拉斯单层势的 (b, c, a) 指标空间中示于图 4。对 z 和/或$\mathbf{r}_p$求导及二阶导数，可推导出双层势、伴随双层势和超奇异势的类似递推关系。同样的方案也适用于计算这些层势，包括后文所示的亥姆霍兹核。

以下是我们的主要定理：

Theorem 4.2（通过辅助向量场递推计算层势积分——拉普拉斯核）。算法 4.1 和算法 4.2 可用于计算不定积分 $\xi_{b,\ c,\ 0} = \int \mathbf{m}_{b,\ c}\cdot\mathbf{n}^j dx^j$，该积分是根据 (4.2)计算由形函数 $x^b y^c$ 加权的单层势所必需的。

证明。根据引理 4.1，由初始条件 (4.17)、(4.11)，递推关系 (4.16)、(4.8) 和 (4.9) 以及数学归纳法即可得到该定理。 r- □

或者，也可以按如下方式执行递推关系，使 $\xi_{b,c,0}$ 按 $b + c$ 的升序依次得到。如果使用 RIPE 的应用程序具有动态截断阶数并评估和接受结果的机制，这种方式可能会有用。

算法 4.1 计算 $\kappa_{b,\ c,\ a}$，其中 $b+c+a \le p_s$

1. 在 a 轴上运行递推关系 (4.17)，计算所有 $\kappa_{0,0,a}$ 项。 2. 使用 (4.17) 计算所有 $\kappa_{0,1,a}$ 项。 3. 对于 $c = 2, 3, ..., p_s$，在 $b = 0$ 平面上运行递推关系 (4.16)，计算所有 $\kappa_{0,c,a}$ 项。 4. 使用 (4.17) 计算所有 $\kappa_{1,0,a}$ 项。 5. 对于 $b = 2, 3, ..., p_s$，在 $c = 0$ 平面上运行递推关系 (4.16)，计算所有 $\kappa_{b,0,a}$ 项。 6. 对于每个 c 平面，使用递推关系 (4.16)，针对 $c = 0, 1, ..., p_s - 1$ 以及 $b = 0, 1, ..., p_s - c - 1$，计算所有其余的 $\kappa_{b+1,c+1,a}$ 项。

算法 4.2 计算 $\xi_{b,\ c,\ a}$，其中 $b+c+a \le p_s$

1. 使用表达式 (4.11) 计算种子项$\xi_{0,\ 0,\ 0}$。 2. 使用表达式 (4.11) 沿 a 轴计算所有 $\xi_{0,\ 0,\ a}$ 项。 3. 使用式 (4.9) 在 $b = 0$ 平面内计算所有 $\xi_{0,\ c,\ a}$ 项，其中 $c = 1$，2，……，p_s。 4. 对每个满足 $c = 0$，1，……，p_s 的 c 平面，使用递推关系 (4.8) 计算所有剩余的 $\xi_{b,\ c,\ a}$ 项，其中$b = 1$，2，……，$p_s - c$。

4.2.2. 双层势。 对式 (4.8) 和 (4.9) 关于 z 求导，可得用于计算双层势的递推关系：(4.22)

$$\xi^{(z)}_{b+1,c,a} = \frac{-b}{a+1}\xi^{(z)}_{b-1,c,a+2} + x_p\xi^{(z)}_{b,c,a} + \frac{\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{n}^j}{4\pi}z_d\int x^b y^c r^{a-1}dx^j,$$
$$\xi^{(z)}_{b,c+1,a} = \frac{-c}{a+1}\xi^{(z)}_{b,c-1,a+2} + y_p\xi^{(z)}_{b,c,a} + \frac{\hat{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{n}^j}{4\pi}z_d\int x^b y^c r^{a-1}dx^j, \quad \xi^{(z)}_{0,0,a} = \frac{z_p^j k_{a-1}}{4\pi},$$

其中 $\xi^{(z)}_{b\ c\ ,,a} \equiv \partial_z\xi_{b,c,a}$。对于奇异项 $T^{(z)}_{b\ c\ ,,a} \equiv \partial_z T_{b,c,a}$，由 (4.20) 可得：

$$\begin{aligned} &T^{(z)}_{b+1,c,a} = x_p T^{(z)}_{b,c,a} - \frac{b}{a+1}T^{(z)}_{b-1,c,a+2}, \quad T^{(z)}_{b,c+1,a} = y_p T^{(z)}_{b,c,a} - \frac{c}{a+1}T^{(z)}_{b,c-1,a+2}, \\ &T^{(z)}_{0,0,a} = \frac{z_p^j|h|^{a-1}}{2} \quad \text{if } |h| \neq 0 \text{ else } 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

4.2.3. 伴随双层势递推关系。

$$\begin{aligned} \xi^{(x_p^j)}_{b+1,c,a} &= -\frac{b}{a+1}\xi^{(x_p^j)}_{b-1,c,a+2} + \alpha_x\xi_{b,c,a} + x_p\xi^{(x_p^j)}_{b,c,a} + \frac{\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{n}^j}{(a+1)4\pi}\partial_{x_p^j}\kappa_{b,c,a+1}, \\ \xi^{(y_p^j)}_{b+1,c,a} &= -\frac{b}{a+1}\xi^{(y_p^j)}_{b-1,c,a+2} + \beta_x\xi_{b,c,a} + x_p\xi^{(y_p^j)}_{b,c,a} - \frac{\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{n}^j}{4\pi}y_d^j\kappa_{b,c,a-1}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} \xi^{(x_p^j)}_{b,c+1,a} &= -\frac{c}{a+1}\xi^{(x_p^j)}_{b,c-1,a+2} + \alpha_y\xi_{b,c,a} + y_p\xi^{(x_p^j)}_{b,c,a} + \frac{\hat{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{n}^j}{(a+1)4\pi}\partial_{x_p^j}\kappa_{b,c,a+1}, \\ \xi^{(y_p^j)}_{b,c+1,a} &= -\frac{c}{a+1}\xi^{(y_p^j)}_{b,c-1,a+2} + \beta_y\xi_{b,c,a} + y_p\xi^{(y_p^j)}_{b,c,a} - \frac{\hat{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{n}^j}{4\pi}y_d^j\kappa_{b,c,a-1}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

(4.26)

$$\xi^{(x_p^j)}_{0,0,a} = \frac{-y_p^j}{(a+1)4\pi}\frac{r^{a+1}}{\rho^2}, \quad \xi^{(y_p^j)}_{0,0,a} = \frac{1}{4\pi}\left(i_{a-1} - \frac{x_d^j r^{a+1}}{(a+1)\rho^2}\right), \quad \xi^{(z_p^j)}_{b,c,a} = -\xi^{(z)}_{b,c,a},$$

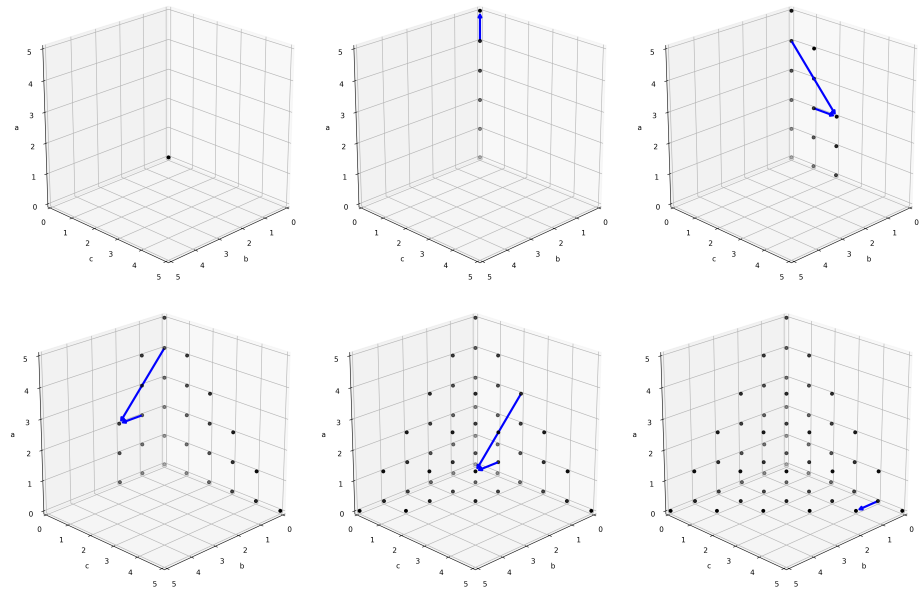


FIG. 4 *Computing $\xi_{b\,c\,a}$ using Algorithm 4 2. The blue arrows indicate terms in the recurrence , , , relations used in each step here for the Laplace single layer potential with $p_s = 5$. Step 1 (top left): compute seed term $\xi_{0,\,0,\,0}$, step 2 (top center): compute $\xi_{0,\,0,\,a}$ using recurrences along the a-axis, step 3 (top right): compute $\xi_{0\,c\,a}$ on the $b = 0$ plane using recurrences in the c-directions step 4-6 , , , , , (bottom left to right): compute $\xi_{b\,c\,a}$ for $b > 0$ using recurrences in the b-direction.*

与 $\xi^{(x_p^j)}_{b,\,c,\,a} \equiv \partial_{x_p^j}\xi_{b,\,c,\,a}$ 和 $\xi^{(y_p^j)}_{b,\,c,\,a} \equiv \partial_{y_p^j}\xi_{b,\,c,\,a}$。对于奇异项 $T^{(x_p)}_{b,\,c,\,a} \equiv \partial_{x_p}T_{b,\,c,\,a}$ 以及 $T^{(y_p)}_{b,c,a} \equiv \partial_{y_p}T_{b,\,c,\,a}$ 我们有：

(4.27)

$$T^{(x_p)}_{b+1,\,c,\,a} = x_p T^{(x_p)}_{b,\,c,\,a} - \frac{b}{a+1}T^{(x_p)}_{b-1,\,c,\,a+2} + T_{b,\,c,\,a}, \qquad T^{(y_p)}_{b+1,\,c,\,a} = x_p T^{(y_p)}_{b,\,c,\,a} - \frac{b}{a+1}T^{(y_p)}_{b-1,\,c,\,a+2},$$

(4.28)

$$T^{(x_p)}_{b,c+1,a} = y_p T^{(x_p)}_{b,c,a} - \frac{c}{a+1}T^{(x_p)}_{b,c-1,a+2}, \quad T^{(y_p)}_{b,c+1,a} = y_p T^{(y_p)}_{b,c,a} - \frac{c}{a+1}T^{(y_p)}_{b,c-1,a+2} + T_{b,c,a},$$

(4.29)

$$T^{(x_p)}_{0,0,a} = T^{(y_p)}_{0,0,a} = 0, \quad T^{(z_p^j)}_{b,c,a} = -T^{(z)}_{b,c,a}.$$

4.2.4. 超奇异拉普拉斯势。对于此势，我们得到：4.30

( )

$$\xi^{(z,x_p^j)}_{b+1,c,a} = -\frac{b}{a+1}\xi^{(z,x_p^j)}_{b-1,c,a+2} + \alpha_x\xi^{(z)}_{b,c,a} + x_p\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c,a} + \frac{\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{n}^j}{(a+1)4\pi}\kappa^{(z,x_p^j)}_{b,c,a+1},$$

$$\xi^{(z,y_p^j)}_{b+1,c,a} = -\frac{b}{a+1}\xi^{(z,y_p^j)}_{b-1,c,a+2} + \beta_x\xi^{(z)}_{b,c,a} + x_p\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c,a} - \frac{\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{n}^j(a-1)}{4\pi}y_d^j z_d\int x^b y^c r^{a-3}dx^j,$$

$$\xi^{(z,z_p^j)}_{b+1,c,a} = -\frac{b}{a+1}\xi^{(z,z_p^j)}_{b-1,c,a+2} + x_p\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c,a} - \frac{\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{n}^j}{4\pi}\left(\kappa_{b,c,a-1} + z_d^2(a-1)\kappa_{b,c,a-3}\right),$$

(4.31)

$$\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c+1,a} = -\frac{c}{a+1}\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c-1,a+2} + \alpha_y \xi^{(z)}_{b,c,a} + y_p \xi^{(z,x_p^j)}_{b,c,a} + \frac{\hat{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{n}^j}{(a+1)4\pi}\kappa^{(z,x_p^j)}_{b,c,a+1},$$

$$\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c+1,a} = -\frac{c}{a+1}\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c-1,a+2} + \beta_y \xi^{(z)}_{b,c,a} + y_p \xi^{(z,y_p^j)}_{b,c,a} - \frac{\hat{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{n}^j(a-1)}{4\pi} y_d^j z_d \int x^b y^c r^{a-3} dx^j,$$

$$\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c+1,a} = -\frac{c}{a+1}\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c-1,a+2} + y_p \xi^{(z,z_p^j)}_{b,c,a} - \frac{\hat{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{n}^j}{4\pi}\left(\kappa_{b,c,a-1} + z_d^2(a-1)\kappa_{b,c,a-3}\right),$$

(4.32)

$$\xi^{(z,x_p^j)}_{0,0,a} = \frac{1}{4\pi}\partial_{x_p^j}(z_p^j k_{a-1}) = \frac{1}{4\pi} z_p^j \partial_{x_p^j} k_{a-1} = \frac{1}{4\pi} z_p^j y_p^j \frac{r^{a-1}}{\rho^2}$$

$$\xi^{(z,y_p^j)}_{0,0,a} = \frac{1}{4\pi}\partial_{y_p^j}(z_p^j k_{a-1}) = \frac{1}{4\pi} z_p^j \partial_{y_p^j} k_{a-1} = \frac{1}{4\pi} z_p^j (x_d^j \frac{r^{a-1}}{\rho^2} - (a-1) i_{a-3})$$

$$\xi^{(z,z_p^j)}_{0,0,a} = \frac{1}{4\pi}\partial_{z_p^j}(z_p^j k_{a-1}) = \frac{k_{a-1}}{4\pi} + \frac{a-1}{4\pi}(z_p^j)^2 k_{a-3} = \frac{1}{4\pi}(a k_{a-1} + (a-1) y_p^j i_{a-3}),$$

与 $\xi^{(z,x_p^j)}{}_{b,c,a} \equiv \partial^2_{z\ ,x_p^j}\xi_{b,c,a}$ 和 $\xi^{(z,y_p^j)}{}_{b,c,a} \equiv \partial^2_{z\ ,y_p^j}\xi_{b,c,a}$.

对于奇异项 $T^{(z,x_p)}{}_{b,c,a} \equiv \partial^2_{z,x_p} T_{b,c,a}$ 和 $T_{(z,a}{}^{y_p} \equiv \partial^2_{z)\,b,c,,y_p} T_{b,c,a}$，有：(4.33)

$$T^{(z,x_p)}_{b+1,c,a} = -\frac{b}{a+1}T^{(z,x_p)}_{b-1,c,a+2} + x_p T^{(z,x_p)}_{b,c,a} + T^{(z)}_{b,c,a},$$

$$T^{(z,y_p)}_{b+1,c,a} = -\frac{b}{a+1}T^{(z,y_p)}_{b-1,c,a+2} + x_p T^{(z,y_p)}_{b,c,a}, \quad T^{(z,z_p)}_{b+1,c,a} = -\frac{b}{a+1}T^{(z,z_p)}_{b-1,c,a+2} + x_p T^{(z,z_p)}_{b,c,a},$$

(4.34)

$$T^{(z,y_p)}_{b,c+1,a} = -\frac{c}{a+1}T^{(z,y_p)}_{b,c-1,a+2} + y_p T^{(z,y_p)}_{b,c,a} + T^{(z)}_{b,c,a},$$

$$T^{(z,x_p)}_{b,c+1,a} = -\frac{c}{a+1}T^{(z,x_p)}_{b,c-1,a+2} + y_p T^{(z,x_p)}_{b,c,a}, \quad T^{(z,z_p)}_{b,c+1,a} = -\frac{c}{a+1}T^{(z,z_p)}_{b,c-1,a+2} + y_p T^{(z,z_p)}_{b,c,a},$$

(4.35)

$$T^{(z,x_p^j)}_{0,0,a} = T^{(z,y_p^j)}_{0,0,a} = 0, \quad T^{(z,z_p^j)}_{0,0,a} = \frac{|h|^{a-1} + (z_p^j)^2(a-1)|h|^{a-3}}{2} \quad \text{if } |h| \neq 0 \text{ else } 0.$$

4.3. 任意阶多项式的亥姆霍兹核。

4.3.1. 单层势。 我们希望求出如下形式的向量场:

$$\nabla_s \cdot \mathbf{m}_{b,c} \equiv \frac{x^b y^c e^{ikr}}{4\pi r}. \tag{4.36}$$

为此，引入以下辅助向量场:

$$\nabla_s \cdot \mathbf{m}_{b,c,a} \equiv \frac{x^b y^c r^a e^{ikr}}{4\pi r}. \tag{4.37}$$

LEMMA 4.3（辅助向量场的递推关系——亥姆霍兹核）。如果向量场 $\mathbf{m}_{b+1,\ c,\ a}$、$\mathbf{m}_{b,\ c,\ a}$、$\mathbf{m}_{b-1,\ c,\ a+1}$以及$\mathbf{m}_{b,\ c,\ a-1}$ 满足(4.37) 和 $a \geq 1$，那么由下式给出的向量场$\mathbf{m}_{b+1,\ c,\ a-1}$:

(4.38)

$$\frac{a}{ik}\mathbf{m}_{b+1,c,a-1} = x_p \mathbf{m}_{b,c,a} - \mathbf{m}_{b+1,c,a} - \frac{b}{ik}\mathbf{m}_{b-1,c,a+1} + \frac{a x_p}{ik}\mathbf{m}_{b,c,a-1} + \frac{x^b y^c r^a e^{ikr}}{4\pi ik}\hat{\mathbf{i}}$$

对于指标组 $(b+1, c, a-1)$，也满足 (4.37)。

证明。若向量场 $\mathbf{m}_{b,c,a}$、$\mathbf{m}_{b+1,c,a}$、$\mathbf{m}_{b-1,c,a+1}$ 和 $\mathbf{m}_{b,c,a-1}$ 满足 (4.37)，对 (4.38) 右端取曲面散度可得：$\frac{ax^{b+1}y^c r^{a-1}e^{ikr}}{4\pi ikr}$，因此，$\nabla_s \cdot \mathbf{m}_{b+1,c,a-1} = \frac{x^{b+1}y^c r^{a-1}e^{ikr}}{4\pi r}$，这意味着 $\mathbf{m}_{b+1,c,a-1}$ 对指标组 $(b+1,c,a-1)$ 满足 (4.37)。 □

由此得到以下递推关系，以及由对称性得到的对应关系：

$$\begin{aligned}\xi_{b+1,c,a} &= x_p\xi_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}\xi_{b-1,c,a+1} + \frac{ax_p}{ik}\xi_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{i}}}{4\pi ik}\theta_{b,c,a},\\ \xi_{b,c+1,a} &= y_p\xi_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}\xi_{b,c-1,a+1} + \frac{ay_p}{ik}\xi_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{j}}}{4\pi ik}\theta_{b,c,a},\end{aligned} \tag{4.39}$$

其中定义：

$$\xi_{b,c,a} \equiv \int \mathbf{m}_{b,c,a}\cdot\mathbf{n}^j dx^j, \quad \theta_{b,c,a} \equiv \int x^b y^c r^a e^{ikr} dx^j. \tag{4.40}$$

难点在于计算 $\theta_{b,c,a}$。假设 $k|r-r_0| \le 1$ with $r_0 \equiv |\mathbf{r}^p - \mathbf{v}^j|$，这在边界元法中通常成立，因为网格尺寸通常设定为小于 $\lambda/6$with λ 波长，于是将 e^{ikr} 项展开为泰勒级数：(4.41)

$$\begin{aligned}\theta_{b,c,a} &= \int x^b y^c r^a e^{ikr} dx^j = e^{ikr_0}\int x^b y^c r^a e^{ik(r-r_0)} dx^j\\ &\approx e^{ikr_0}\sum_{l=0}^{p_e-1}\frac{(ik)^l}{l!}\int x^b y^c r^a (r-r_0)^l dx^j = e^{ikr_0}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)}\int x^b y^c r^{a+l} dx^j\\ &= e^{ikr_0}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)}\kappa_{b,c,a+l}, \quad A_l^{(p)} \equiv \frac{(ik)^l}{l!}\sum_{m=0}^{p-l-1}\frac{(-ikr_0)^m}{m!}.\end{aligned}$$

为便于后续使用，我们还定义：

$$S_s \equiv \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} k_{l+s}, \quad U_s \equiv \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} i_{l+s}. \tag{4.42}$$

这些函数的以下导数也将在后续用于计算单层势的导数：

$$\partial_{x_p^j} S_{a+1} = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)}\partial_{x_p^j} k_{l+a+1} = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} y_p^j \frac{r^{l+a+1}}{\rho^2} \approx \frac{y_p^j r^{a+1} e^{ikr}}{4\pi\rho^2}, \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}\partial_{y_p^j} S_{a+1} &= \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)}\left(x_d^j\frac{r^{l+a+1}}{\rho^2} - (l+a+1)i_{l+a-1}\right)\\ &\approx \frac{x_d^j r^{a+1}e^{ikr}}{4\pi\rho^2} - \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\left(\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)}(l i_{l+a-1} + (a+1)i_{l+a-1})\right)\\ &\approx \frac{x_d^j r^{a+1}e^{ikr}}{4\pi\rho^2} - \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} iki_{l+a} - (a+1)U_{a-1}\\ &= \frac{x_d^j r^{a+1}e^{ikr}}{4\pi\rho^2} - (ikU_a + (a+1)U_{a-1}),\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\partial_z S_{a+1} = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)}(l+a+1)z_d k_{l+a-1} \approx z_d(ikS_a + (a+1)S_{a-1}), \tag{4.45}$$

$$\partial_z U_a = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)}(l+a)z_d i_{l+a-2} \approx z_d(ikU_{a-1} + aU_{a-2}). \tag{4.46}$$

因此，通过计算 $\kappa_{b,\ c,\ a}$ 的值，且最大 a 索引为 $p_s + p_e - 1$，即可计算 $\theta_{b,\ c,\ a}$ 的近似值。注意，**(4.41)** 是系数网格中沿 a轴的离散卷积；当 p_s 和 p_e 都较大时，可利用快速傅里叶变换（FFT）加速计算。

以下递推关系可用于生成向量场 $\mathbf{m}_{0,0,a}$，这些向量场是启动 b 轴和 c 轴上的递推所必需的（**4.39**）：

$$\mathbf{m}_{0,0,a+1} = -\frac{a+1}{ik}\mathbf{m}_{0,0,a} + \frac{1}{ik}\boldsymbol{\chi}_{a+1}, \quad \mathbf{m}_{0,0,0} = \frac{1}{ik}\boldsymbol{\chi}_0, \quad \boldsymbol{\chi}_a \equiv \frac{r^a e^{ikr}}{4\pi\rho^2}\boldsymbol{\rho}. \tag{4.47}$$

由此递推关系可得 $\xi_{b,c,a}$ 系数的递推关系：

(4.48)

$$\begin{aligned}
\xi_{0,0,a+1} &= -\frac{a+1}{ik}\xi_{0,0,a} + \frac{1}{ik}\int \boldsymbol{\chi}_{a+1}\cdot\mathbf{n}^j dx^j = -\frac{a+1}{ik}\xi_{0,0,a} + \frac{y_p^j}{ik}\int \frac{r^{a+1}e^{ikr}}{4\pi\rho^2}dx^j \\
&\approx -\frac{a+1}{ik}\xi_{0,0,a} - \frac{e^{ikr_0}}{4\pi ik}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} k_{l+a+1} = -\frac{a+1}{ik}\xi_{0,0,a} - \frac{1}{ik}S_{a+1}, \\
\xi_{0,0,0} &= \frac{y_p^j}{ik}\int \frac{e^{ikr}}{4\pi\rho^2}dx^j \approx \frac{e^{ikr_0}}{4\pi ik}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} y_p^j \int \frac{r^l}{\rho^2}dx^j = -\frac{1}{ik}S_0.
\end{aligned}$$

奇异项也满足以下递推关系：

$$\begin{aligned}
T_{b+1,c,a} &= x_p T_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}T_{b-1,c,a+1} + \frac{ax_p}{ik}T_{b,c,a-1}, \\
T_{b,c+1,a} &= y_p T_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}T_{b,c-1,a+1} + \frac{ay_p}{ik}T_{b,c,a-1}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

若使用递推关系（**4.47**）选取向量场 $\mathbf{m}_{0,0,a}$ ，则沿 a 轴有以下递推关系：

(4.50)

$$T_{0,0,a+1} = -\frac{a+1}{ik}T_{0,0,a} + \frac{1}{ik}\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon} \boldsymbol{\chi}_{a+1}\cdot\mathbf{n}_{C_\varepsilon} dC_\varepsilon = -\frac{a+1}{ik}T_{0,0,a} - \frac{|h|^{a+1}e^{ik|h|}}{2ik}.$$

注意，此方程对 $a=-1$ 成立，并给出种子项 $T_{0,0,0} = ie^{ik|h|}/(2k)$.

4.3.2. 双层势。$\xi_{0,\ 0,\ a}$ 的导数为：

$$\xi_{0,0,0}^{(z)} \approx -z_d^j S_{-1}, \quad \xi_{0,0,a+1}^{(z)} \approx -\frac{a+1}{ik}\xi_{0,0,a}^{(z)} - z_d S_a - \frac{(a+1)z_d}{ik}S_{a-1}. \tag{4.51}$$

沿 b 轴和 c 轴的递推关系：

$$\begin{aligned}
\xi_{b+1,c,a}^{(z)} &= x_p\xi_{b,c,a}^{(z)} - \frac{a}{ik}\xi_{b+1,c,a-1}^{(z)} - \frac{b}{ik}\xi_{b-1,c,a+1}^{(z)} + \frac{ax_p}{ik}\xi_{b,c,a-1}^{(z)} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{i}}}{4\pi ik}\theta_{b,c,a}^{(z)}, \\
\xi_{b,c+1,a}^{(z)} &= y_p\xi_{b,c,a}^{(z)} - \frac{a}{ik}\xi_{b,c+1,a-1}^{(z)} - \frac{c}{ik}\xi_{b,c-1,a+1}^{(z)} + \frac{ay_p}{ik}\xi_{b,c,a-1}^{(z)} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{j}}}{4\pi ik}\theta_{b,c,a}^{(z)}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

这里，导数 $\theta^{(z)}_{b\,c\,,,a} \equiv \partial_z \theta_{b,c,a}$ 可计算如下：

(4.53)

$$\begin{aligned}
\theta^{(z)}_{b,c,a} &\approx e^{ikr_0}\sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)}(a+l)z_d \int x^b y^c r^{a+l-2} dx^j \\
&= e^{ikr_0} a z_d \sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} \int x^b y^c r^{a+l-2} dx^j + e^{ikr_0}\sum_{l=1}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} l z_d \int x^b y^c r^{a+l-2} dx^j \\
&= e^{ikr_0} a z_d \sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} \int x^b y^c r^{a+l-2} dx^j + e^{ikr_0} ikz_d \sum_{l=1}^{p_e-1} A_{l-1}^{(p_e-1)} \int x^b y^c r^{a+l-2} dx^j \\
&\approx e^{ikr_0} a z_d \sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} \int x^b y^c r^{a+l-2} dx^j + e^{ikr_0} ikz_d \sum_{l=0}^{p_e-1} A_l^{(p_e)} \int x^b y^c r^{a+l-1} dx^j \\
&= z_d(a\theta_{b,c,a-2} + ik\theta_{b,c,a-1}).
\end{aligned}$$

若向量场$\mathbf{m}_{0,0,a}$ 按递推关系（**4.47**）选取，则沿 a 轴的奇异项满足以下递推关系：

$$\begin{aligned}
T^{(z)}_{0,0,0} &= -\partial_z \frac{e^{ik|h|}}{2ik} = \frac{-z_d e^{ik|h|}}{2\,|h|} \quad \text{if } z \neq z_p \text{ else } 0, \\
T^{(z)}_{0,0,a+1} &= -\frac{a+1}{ik} T^{(z)}_{0,0,a} + \frac{z_d\left(i(a+1) - k\,|h|\right) e^{ik|h|}\,|h|^{a-1}}{2k}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

沿 b 轴和 c 轴的奇异项递推关系如下：

$$\begin{aligned}
T^{(z)}_{b+1,c,a} &= x_p T^{(z)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik} T^{(z)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik} T^{(z)}_{b-1,c,a+1} + \frac{a x_p}{ik} T^{(z)}_{b,c,a-1}, \\
T^{(z)}_{b,c+1,a} &= y_p T^{(z)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik} T^{(z)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik} T^{(z)}_{b,c-1,a+1} + \frac{a y_p}{ik} T^{(z)}_{b,c,a-1}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

4.3.3. 伴随双层势。种子项：

$$\xi^{(x_p^j)}_{0,0,0} = -\frac{y_p^j e^{ikr}}{4\pi ik\rho^2}, \quad \xi^{(y_p^j)}_{0,0,0} = U_{-1} - \frac{x_d^j e^{ikr}}{4\pi ik\rho^2}. \tag{4.56}$$

沿 a 轴的递推关系如下：

$$\begin{aligned}
\xi^{(x_p^j)}_{0,0,a+1} &= -\frac{a+1}{ik}\xi^{(x_p^j)}_{0,0,a} - \frac{1}{ik} S^{(x_p^j)}_{a+1} = -\frac{a+1}{ik}\xi^{(x_p^j)}_{0,0,a} - \frac{y_p^j r^{a+1} e^{ikr}}{4\pi ik\rho^2}, \\
\xi^{(y_p^j)}_{0,0,a+1} &= -\frac{a+1}{ik}\xi^{(y_p^j)}_{0,0,a} + U_a + \frac{a+1}{ik} U_{a-1} - \frac{x_d^j r^{a+1} e^{ikr}}{4\pi ik\rho^2}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

沿 b 轴和 c 轴的递推关系如下：

$$\begin{aligned}
\xi^{(x_p^j)}_{b+1,c,a} =& x_p \xi^{(x_p^j)}_{b,c,a} + \alpha_x \xi_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(x_p^j)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}\xi^{(x_p^j)}_{b-1,c,a+1} \\
&+ \frac{a x_p}{ik}\xi^{(x_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{a\alpha_x}{ik}\xi_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j \cdot \hat{\mathbf{i}}}{4\pi ik}\theta^{(x_p^j)}_{b,c,a}, \\
\xi^{(y_p^j)}_{b+1,c,a} =& x_p \xi^{(y_p^j)}_{b,c,a} + \beta_x \xi_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(y_p^j)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}\xi^{(y_p^j)}_{b-1,c,a+1} \\
&+ \frac{a x_p}{ik}\xi^{(y_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{a\beta_x}{ik}\xi_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j \cdot \hat{\mathbf{i}}}{4\pi ik}\theta^{(y_p^j)}_{b,c,a},
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{(x_p^j)}_{b,c+1,a} =& y_p\xi^{(x_p^j)}_{b,c,a} + \alpha_y\xi_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(x_p^j)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}\xi^{(x_p^j)}_{b,c-1,a+1} \\
&+ \frac{ay_p}{ik}\xi^{(x_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{a\alpha_y}{ik}\xi_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{j}}}{4\pi ik}\theta^{(x_p^j)}_{b,c,a}, \\
\xi^{(y_p^j)}_{b,c+1,a} =& y_p\xi^{(y_p^j)}_{b,c,a} + \beta_y\xi_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(y_p^j)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}\xi^{(y_p^j)}_{b,c-1,a+1} \\
&+ \frac{ay_p}{ik}\xi^{(y_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{a\beta_y}{ik}\xi_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{j}}}{4\pi ik}\theta^{(y_p^j)}_{b,c,a},
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

其中我们使用了:

$$
\begin{aligned}
\theta^{(x_p^j)}_{b,c,a} &\approx -x^b y^c r^a e^{ikr} + \alpha_x b\theta_{b-1,c,a} + \alpha_y c\theta_{b,c-1,a}, \\
\theta^{(y_p^j)}_{b,c,a} &\approx -y_d^j(a\theta_{b,c,a-2} + ik\theta_{b,c,a-1}).
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

奇异项的递推关系如下:

(4.61)

$$
\begin{aligned}
T^{(x_p)}_{b+1,c,a} &= x_pT^{(x_p)}_{b,c,a} + T_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T^{(x_p)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}T^{(x_p)}_{b-1,c,a+1} + \frac{ax_p}{ik}T^{(x_p)}_{b,c,a-1} + \frac{a}{ik}T_{b,c,a-1}, \\
T^{(y_p)}_{b+1,c,a} &= x_pT^{(y_p)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T^{(y_p)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}T^{(y_p)}_{b-1,c,a+1} + \frac{ax_p}{ik}T^{(y_p)}_{b,c,a-1},
\end{aligned}
$$

(4.62)

$$
\begin{aligned}
T^{(x_p)}_{b,c+1,a} &= y_pT^{(x_p)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T^{(x_p)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}T^{(x_p)}_{b,c-1,a+1} + \frac{ay_p}{ik}T^{(x_p)}_{b,c,a-1}, \\
T^{(y_p)}_{b,c+1,a} &= y_pT^{(y_p)}_{b,c,a} + T_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T^{(y_p)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}T^{(y_p)}_{b,c-1,a+1} + \frac{ay_p}{ik}T^{(y_p)}_{b,c,a-1} + \frac{a}{ik}T_{b,c,a-1}.
\end{aligned}
$$

注意, $T_{(x_p)0,\ 0,\ a} = T^{(y_p}_{0\,0)\,,\ ,\ a} = 0$, $\xi^{(z_p^j)}_{b,\ c,\ a} = -\xi^{(z)}_{b\ c\,,\ ,\ a}$, 且 $T_{(z_p^j)b,\ c,\ a} = -T_{(z)b,\ c,\ a}$。

4.3.4. 超奇异势。种子项:

$$
\begin{aligned}
&\xi^{(z,x_p^j)}_{0,0,0} = y_p^jz_p^j\frac{e^{ikr}}{4\pi\rho^2r}, \quad \xi^{(z,y_p^j)}_{0,0,0} = z_d(ikU_{-2} - U_{-3}) + z_p^j\frac{x_d^je^{ikr}}{4\pi\rho^2r}, \\
&\xi^{(z,z_p^j)}_{0,0,0} = (z_d^jS_{-1})^{(z)} = S_{-1} + z_d^jS^{(z)}_{-1} = S_{-1} + (z_p^j)^2(ikS_{-2} - S_{-3}).
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

沿 a 轴的递推关系:

$$
\begin{aligned}
\xi^{(z,x_p^j)}_{0,0,a+1} =& -\frac{a+1}{ik}\xi^{(z,x_p^j)}_{0,0,a} + y_p^jz_p^j\frac{(kr - i\,(a+1))\,r^{a-1}e^{ikr}}{4\pi k\rho^2}, \\
\xi^{(z,y_p^j)}_{0,0,a+1} =& -\frac{a+1}{ik}\xi^{(z,y_p^j)}_{0,0,a} + z_d(ikU_{a-1} + (2a+1)U_{a-2} + \frac{a^2-1}{ik}U_{a-3}) \\
&+ z_p^j\frac{x_d^j\,(kr - i\,(a+1))\,r^{a-1}e^{ikr}}{4\pi k\rho^2}, \\
\xi^{(z,z_p^j)}_{0,0,a+1} =& -\frac{a+1}{ik}\xi^{(z,z_p^j)}_{0,0,a} + S_a + (\frac{a+1}{ik} + z_d^2ik)S_{a-1} \\
&+ z_d^2((2a+1)S_{a-2} + \frac{a^2-1}{ik}S_{a-3}).
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

沿 b 轴和 c 轴的递推关系：

$$
\begin{aligned}
\xi^{(z,x_p^j)}_{b+1,c,a} =& x_p\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c,a} + \alpha_x\xi^{(z)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(z,x_p^j)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}\xi^{(z,x_p^j)}_{b-1,c,a+1} \\
&+ \frac{ax_p}{ik}\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{a\alpha_x}{ik}\xi^{(z)}_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{i}}}{4\pi ik}\theta^{(z,x_p^j)}_{b,c,a}, \\
\xi^{(z,y_p^j)}_{b+1,c,a} =& x_p\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c,a} + \beta_x\xi^{(z)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(z,y_p^j)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}\xi^{(z,y_p^j)}_{b-1,c,a+1} \\
&+ \frac{ax_p}{ik}\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{a\beta_x}{ik}\xi^{(z)}_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{i}}}{4\pi ik}\theta^{(z,y_p^j)}_{b,c,a}, \\
\xi^{(z,z_p^j)}_{b+1,c,a} =& x_p\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(z,z_p^j)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}\xi^{(z,z_p^j)}_{b-1,c,a+1} + \frac{ax_p}{ik}\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{i}}}{4\pi ik}\theta^{(z,z_p^j)}_{b,c,a},
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c+1,a} =& y_p\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c,a} + \alpha_y\xi^{(z)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c-1,a+1} \\
&+ \frac{ay_p}{ik}\xi^{(z,x_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{a\alpha_y}{ik}\xi^{(z)}_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{j}}}{4\pi ik}\theta^{(z,x_p^j)}_{b,c,a}, \\
\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c+1,a} =& y_p\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c,a} + \beta_y\xi^{(z)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c-1,a+1} \\
&+ \frac{ay_p}{ik}\xi^{(z,y_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{a\beta_y}{ik}\xi^{(z)}_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{j}}}{4\pi ik}\theta^{(z,y_p^j)}_{b,c,a}, \\
\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c+1,a} =& y_p\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c-1,a+1} + \frac{ay_p}{ik}\xi^{(z,z_p^j)}_{b,c,a-1} + \frac{\mathbf{n}^j\cdot\hat{\mathbf{j}}}{4\pi ik}\theta^{(z,z_p^j)}_{b,c,a}.
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

此处我们使用：

$$
\begin{aligned}
&\theta^{(z,x_p^j)}_{b,c,a} \approx -x^by^c(a+ikr)r^{a-2}z_de^{ikr} + \alpha_xb\theta^{(z)}_{b-1,c,a} + \alpha_yc\theta^{(z)}_{b,c-1,a}, \\
&\theta^{(z,y_p^j)}_{b,c,a} \approx -y_d^j(a\theta^{(z)}_{b,c,a-2} + ik\theta^{(z)}_{b,c,a-1}), \quad \theta^{(z)}_{b,c,a} \approx z_d(a\theta_{b,c,a-2} + ik\theta_{b,c,a-1}), \\
&\theta^{(z,z_p^j)}_{b,c,a} \approx -z_d^j(a\theta^{(z)}_{b,c,a-2} + ik\theta^{(z)}_{b,c,a-1}) - (a\theta_{b,c,a-2} + ik\theta_{b,c,a-1}).
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

奇异项的递推关系：

(4.68)

$$
\begin{aligned}
&T^{(z,x_p)}_{0,0,a} = T^{(z,y_p)}_{0,0,a} = 0, \quad T^{(z,z_p)}_{0,0,0} = \frac{ike^{ik|h|}}{2}, \\
&T^{(z,z_p)}_{0,0,a+1} = -\frac{a+1}{ik}T^{(z,z_p)}_{0,0,a} - \frac{e^{ik|h|}|h|^{a-1}}{2k}(-2(a+1)k|h| + i(a(a+1) - k^2|h|^2)),
\end{aligned}
$$

(4.69)

$$
\begin{aligned}
T^{(z,x_p)}_{b+1,c,a} &= x_pT^{(z,x_p)}_{b,c,a} + T^{(z)}_{b,c,a} - \frac{b}{ik}T^{(z,x_p)}_{b-1,c,a+1} + \frac{a}{ik}(x_pT^{(z,x_p)}_{b,c,a-1} + T^{(z)}_{b,c,a-1} - T^{(z,x_p)}_{b+1,c,a-1}), \\
T^{(z,y_p)}_{b+1,c,a} &= x_pT^{(z,y_p)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T^{(z,y_p)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}T^{(z,y_p)}_{b-1,c,a+1} + \frac{ax_p}{ik}T^{(z,y_p)}_{b,c,a-1}, \\
T^{(z,z_p)}_{b+1,c,a} &= x_pT^{(z,z_p)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T^{(z,z_p)}_{b+1,c,a-1} - \frac{b}{ik}T^{(z,z_p)}_{b-1,c,a+1} + \frac{ax_p}{ik}T^{(z,z_p)}_{b,c,a-1},
\end{aligned}
$$

(4.70)

$$
\begin{aligned}
T^{(z,x_p)}_{b,c+1,a} &= y_pT^{(z,x_p)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T^{(z,x_p)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}T^{(z,x_p)}_{b,c-1,a+1} + \frac{ay_p}{ik}T^{(z,x_p)}_{b,c,a-1}, \\
T^{(z,y_p)}_{b,c+1,a} &= y_pT^{(z,y_p)}_{b,c,a} + T^{(z)}_{b,c,a} - \frac{c}{ik}T^{(z,y_p)}_{b,c-1,a+1} + \frac{a}{ik}(y_pT^{(z,y_p)}_{b,c,a-1} + T^{(z)}_{b,c,a-1} - T^{(z,y_p)}_{b,c+1,a-1}), \\
T^{(z,z_p)}_{b,c+1,a} &= y_pT^{(z,z_p)}_{b,c,a} - \frac{a}{ik}T^{(z,z_p)}_{b,c+1,a-1} - \frac{c}{ik}T^{(z,z_p)}_{b,c-1,a+1} + \frac{ay_p}{ik}T^{(z,z_p)}_{b,c,a-1}.
\end{aligned}
$$

4.4. 复杂度。对于拉普拉斯核，计算算法 4.1 和算法 4.2 中的递推关系，其复杂度为 $O(p_s^3)$。请注意，这是计算所有带有因子 $x^b y^c$ 且适用于 $b+c \le p_s$ 的项的复杂度。随后，可以将一个形函数对应的层势计算为 $O(p_s^2)$ 项的线性组合。若采用阶数为 $b+c+p_e'$、其中 p_e' 个次数用于处理非多项式部分（即被积函数中的格林函数部分）的高斯-勒让德求积来计算层势，并假设使用 $O((p_s+p_e')^2)$ 个求积节点，则计算一个层势的复杂度为 $O((p_s+p_e')^2)$。对于亥姆霍兹情形，若用 p_e 次泰勒级数展开来表示振荡项 e^{ikr}，则 RIPE 方法中递推关系的复杂度在简单实现下为 $O(p_s^3 p_e)$，若使用快速傅里叶变换计算卷积，则为 $O(p_s^2(p_s+p_e)\log(p_s+p_e))$。对于高斯-勒让德求积，复杂度为 $O((p_s+p_e')^2)$，其中使用 p_e' 次来处理非多项式部分。请注意，尽管 p_e 和 p_e' 都用于指定积分计算的精度，但二者不能直接对应；对于近场中的求值点，高斯-勒让德求积需要更大的 p_e'，因为在奇异性附近，被积函数无法用低阶多项式很好地近似。另一方面，RIPE 方法中的 p_e 在近场可以更小，因为它是泰勒级数的展开阶数。这意味着，合适的方法取决于求值点与单元之间的距离。若使用 $p_s = O(1)$ 的低阶单元，则拉普拉斯核和亥姆霍兹核对应的 RIPE 方法复杂度分别降为 $O(1)$ 和 $O(p_e)$。低阶情形和一般情形的复杂度汇总于表 1。

	拉普拉斯		亥姆霍兹	
	$p_s \approx 1$	通用	$p_s \approx 1$	一般
RIPE	$O(1)$	$O(p_s^3)$	$O(p_e)$	$O(p_s^3 p_e)$
RIPE（+快速傅里叶变换）	-	-	-	$O(p_s^2(p_s+p_e)\log(p_s+p_e))$
高斯-勒让德	$O(p_e'^2)$	$O((p_s+p_e')^2)$	$O(p_e'^2)$	$O((p_s+p_e')^2)$

TABLE 1

Complexity for evaluating layer potentials for p_s of $O(1)$ and general order, respectively. Notethat the complexities for Gauss-Legendre are for one layer potential evaluation, are the complexities to computes all terms with the monomial factor $x^b y^c$ for $0 \le b+c \le p_s$ in a single evaluation of the recursive algorithm. These terms can be reused when evaluating multiple layer potentials with different linear combinations of these monomial terms.

5. 数值计算。

5.1. 精度。

5.1.1. 近奇异情形。该方法针对全部四种层势进行了测试，涵盖拉普拉斯核和亥姆霍兹核。采用 QUADPACK [18]，中实现的自适应高斯-克朗罗德求积，计算边界单元上的层势P_{GK}。将 RIPE 的结果 P_{RIPE} 与该参考结果进行比较，得到相对误差 $|P_{\mathrm{RIPE}} - P_{\mathrm{GK}}|/|P_{\mathrm{GK}}|$。RIPE 中的最大展开阶数 p_e 设为 32，高斯-克朗罗德求积的误差容限设为 10^{-12}。此外，还使用 12 阶高斯-勒让德求积计算层势，该求积在三角形单元上有 33 个求积节点。三角形 $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)\}$ 以及点$\mathbf{r}_p = (1/3,\ 1/3,\ |h|)$分别用作单元和观测点。$N(x,y) = x^3$ 用作形函数。结果如图 5 所示。我们的 RIPE 方法表现出显著的精度，尤其是在颇具挑战性的近奇异区域 $|h|/D < 1$，其中 D 的

单元的最大边长。高斯-勒让德求积在这一区域并不可靠。请注意，条件 $kD = 1$ 大致对应于每个单元六个波长，这通常是边界元分析中采用的最大网格尺寸。我们还观察到，RIPE 方法在较大的 $|h|/D$ 下表现较差，而高斯-勒让德求积在这种情况下则能达到较高精度。鉴于两者互补的特性，可以根据求值点与单元之间的距离切换积分程序。

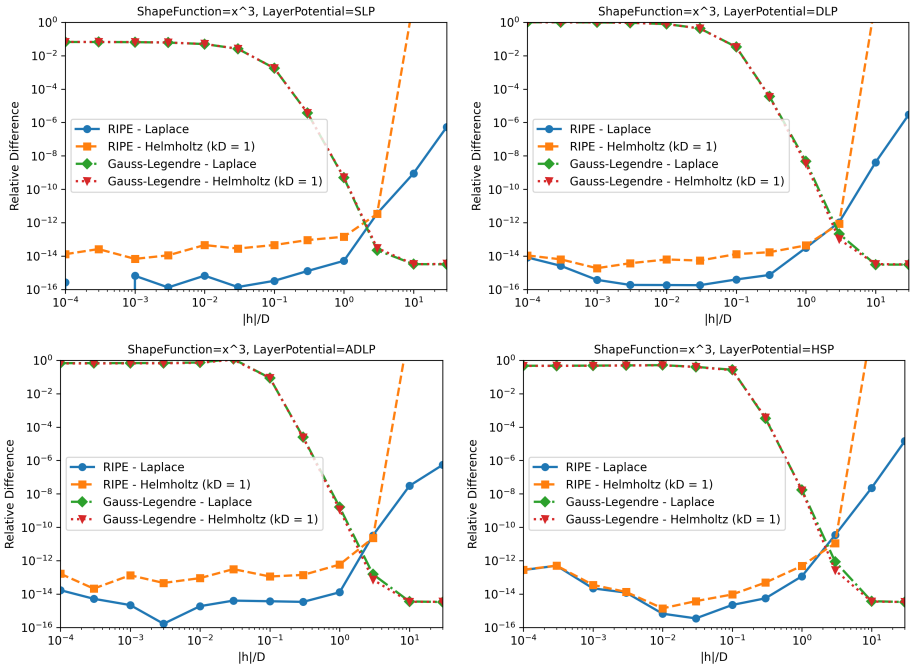


FIG. 5. *Relative difference of the layer potentials between RIPE or 12-th order Gauss-Legendre quadrature and the reference adaptive Gauss-Kronrod quadrature, for the shape function* x^3. *Results for single layer potential (top left) double layer potential (top right) adjoint double layer potential (bottom left) and hypersingular potential (bottom right).*

5.1.2. 奇异与超奇异情形。观测点$\mathbf{r}_p$ 位于单元上时（奇异与超奇异情形），无需对该框架进行任何修改即可处理。对于这些情形，将本方法与通过 20 阶高斯-勒让德求积在内部使用 Guiggiani 方法所得的结果进行了比较。采用上一节中的同一单元，并令$\mathbf{r}_p$ 位于单元中心，以计算单层势和超奇异势。使用了相容二阶拉格朗日三角形单元的六个形函数。拉普拉斯核和亥姆霍兹核的结果见表 2 至表 5。观察到相对差异$|P_{\mathrm{RIPE}} - P_{\mathrm{Gui}}|/|P_{\mathrm{Gui}}|$ 从 10^{-10} 到 10^{-13}。

5.2. 稳定性。通过测试 RIPE 方法在最高达到 $p_s = 9$ 的高阶单元上的精度，对其进行了评估。图 6 展示了拉普拉斯和亥姆霍兹层势的结果。与高斯-克朗罗德参考结果的相对差异随单元阶数增加而增大，并且在亥姆霍兹核的情况下，这种偏差更大。

	P_{RIPE}	P_{Gui}	$\lvert P_{\mathrm{RIPE}} - P_{\mathrm{Gui}}\rvert / \lvert P_{\mathrm{Gui}}\rvert$
N_1	-0.0096108650741614	-0.0096108650753968	$1.28540284 \times 10^{-10}$
N_2	-0.0096108650741614	-0.0096108650753968	$1.28539201 \times 10^{-10}$
N_3	-0.0059161308348599	-0.0059161308348537	$1.05940117 \times 10^{-12}$
N_4	0.0733163156462961	0.0733163156487268	$3.31537174 \times 10^{-11}$
N_5	0.0716914080260122	0.0716914080259944	$2.48939665 \times 10^{-13}$
N_6	0.0716914080260122	0.0716914080259944	$2.48552512 \times 10^{-13}$

TABLE 2
Single layer potentials for the Laplace kernel evaluated over the element with second-order shape functions of a conforming Lagrange triangle element. Numbers for RIPE (P_{RIPE}), Guiggiani's method (P_{Gui}) and their relative differences are shown.

	P_{RIPE}	P_{Gui}	$\lvert P_{\mathrm{RIPE}} - P_{\mathrm{Gui}}\rvert / \lvert P_{\mathrm{Gui}}\rvert$
N_1	0.3411586129005689	0.3411586129009882	$1.22913865 \times 10^{-12}$
N_2	0.3411586129005690	0.3411586129009879	$1.22799965 \times 10^{-12}$
N_3	0.5031187119584526	0.5031187119589535	$9.95654936 \times 10^{-13}$
N_4	-0.7261344637586460	-0.7261344637604444	$2.47674552 \times 10^{-12}$
N_5	-0.9322819538428125	-0.9322819538448199	$2.15320509 \times 10^{-12}$
N_6	-0.9322819538428122	-0.9322819538448149	$2.14820345 \times 10^{-12}$

TABLE 3
Hypersingular potentials for the Laplace kernel evaluated over the second-order element.

5.3. 计算时间。测量了在单元 $\{(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0)\}$ 上使用五阶形函数计算层势的时间，其中观测点为 $\mathbf{r}_P = (1/3,\ 1/3,\ |h|)$，并将其与自适应高斯-克朗罗德基准方法进行比较。RIPE 中亥姆霍兹核的展开阶数设为$p_e = 32$，高斯-克朗罗德的误差容限设为 10^{-12}。结果见图 7。RIPE 的计时对应于一次递推运行中，计算所有 $0 \le b + c \le p_s$ 项乘以形函数 $N(x,\ y) = x^b y^c$ 后的积分所用的时间；而高斯-克朗罗德的计时则对应于计算形函数 $N(x,\ y) = x^5$所对应的单个项所用的时间。在 $|h|/D$ 较小的近奇异区域中，高斯-克朗罗德需要较长的计算时间；而 RIPE 的计算时间不依赖于 $|h|/D$，因此可能快几个数量级。RIPE 的测试使用未经性能优化的 Python 原型完成，高斯-克朗罗德则通过 SciPy 对 QUADPACK 的接口进行测试。在生产级配点边界元法设置中，RIPE 方法的优势应会更加显著，因为需要计算所有 $0 \le b + c \le p_s$ 组合对应的 $x^b y^c$ 项。

6. 结论。本文提出了一种递归算法（RIPE），用于计算拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的配点边界元法中出现的层势，并针对具有任意阶多项式形函数的分片平面边界单元进行了设计。数值测试表明，在高斯-勒让德求积效果不佳的近奇异区域，RIPE 仍具有出色的精度。实验表明，RIPE 的速度比通用自适应求积方法高斯-克朗罗德求积快几个数量级。因此，RIPE 可作为高效程序，用于计算拉普拉斯和亥姆霍兹层势中的近奇异、奇异及超奇异积分。RIPE 方法的优点在于

	P_{RIPE}	P_{Gui}	$\lvert P_{\mathrm{RIPE}} - P_{\mathrm{Gui}}\rvert / \lvert P_{\mathrm{Gui}}\rvert$
N_1	-0.0097575874677327	-0.0097575874673111	$1.65408707 \times 10^{-10}$
N_2	-0.0097575874677327	-0.0097575874673111	$1.65411332 \times 10^{-10}$
N_3	-0.0059358291069226	-0.0059358291069324	$2.15796857 \times 10^{-12}$
N_4	0.0724350497721009	0.0724350497713923	$4.33315252 \times 10^{-11}$
N_5	0.0707990955161933	0.0707990955162131	$4.29383222 \times 10^{-13}$
N_6	0.0707990955161934	0.0707990955162131	$4.30321106 \times 10^{-13}$

TABLE 4
Single layer potentials for the Helmholtz kernel ($kD = 1$) over the second-order element.

	P_{RIPE}	P_{Gui}	$\lvert P_{\mathrm{RIPE}} - P_{\mathrm{Gui}}\rvert / \lvert P_{\mathrm{Gui}}\rvert$
N_1	0.3387374371700406	0.3387374371703727	$1.34783671 \times 10^{-12}$
N_2	0.3387374371700407	0.3387374371703721	$1.34571877 \times 10^{-12}$
N_3	0.5016372264001558	0.5016372264006584	$1.00193060 \times 10^{-12}$
N_4	-0.7079157406214216	-0.7079157406230446	$2.45050302 \times 10^{-12}$
N_5	-0.9144708322784949	-0.9144708322805092	$2.20267780 \times 10^{-12}$
N_6	-0.9144708322784947	-0.9144708322805069	$2.20036963 \times 10^{-12}$

TABLE 5
Hypersingular potentials for the Helmholtz kernel ($kD = 1$) over the second-order element.

它具备以下特点：(1) 通过利用辅助向量场的简单公式，实现对多项式单元的解析积分；(2) 与基于高斯-勒让德求积的方法相比，基于级数展开的公式使亥姆霍兹情形下的误差控制更为简便；(3) 在统一框架下，无需分别修改即可自然处理近奇异、奇异及超奇异积分，同时兼具精度与效率；适用于拉普拉斯核和亥姆霍兹核的全部四种标准层势。

RIPE 方法仍有多个有待进一步发展的方向。虽然它目前仅适用于平面单元，但支持流形曲面（如 [22]所示）是一个重要的发展方向，因为通过高阶几何表示减少几何误差有利于处理曲面对象 [4]。不过，我们注意到，许多实用的边界元法软件都是为平面单元编写的；许多问题所用的网格来自建筑或 CAD，实际上是平面的，或者更容易获得平面三角形网格。将 RIPE 扩展至 Galerkin 边界元法、用于其他核函数，以及将其集成到快速多极子法边界元法求解器中，都是未来工作的其他方向。

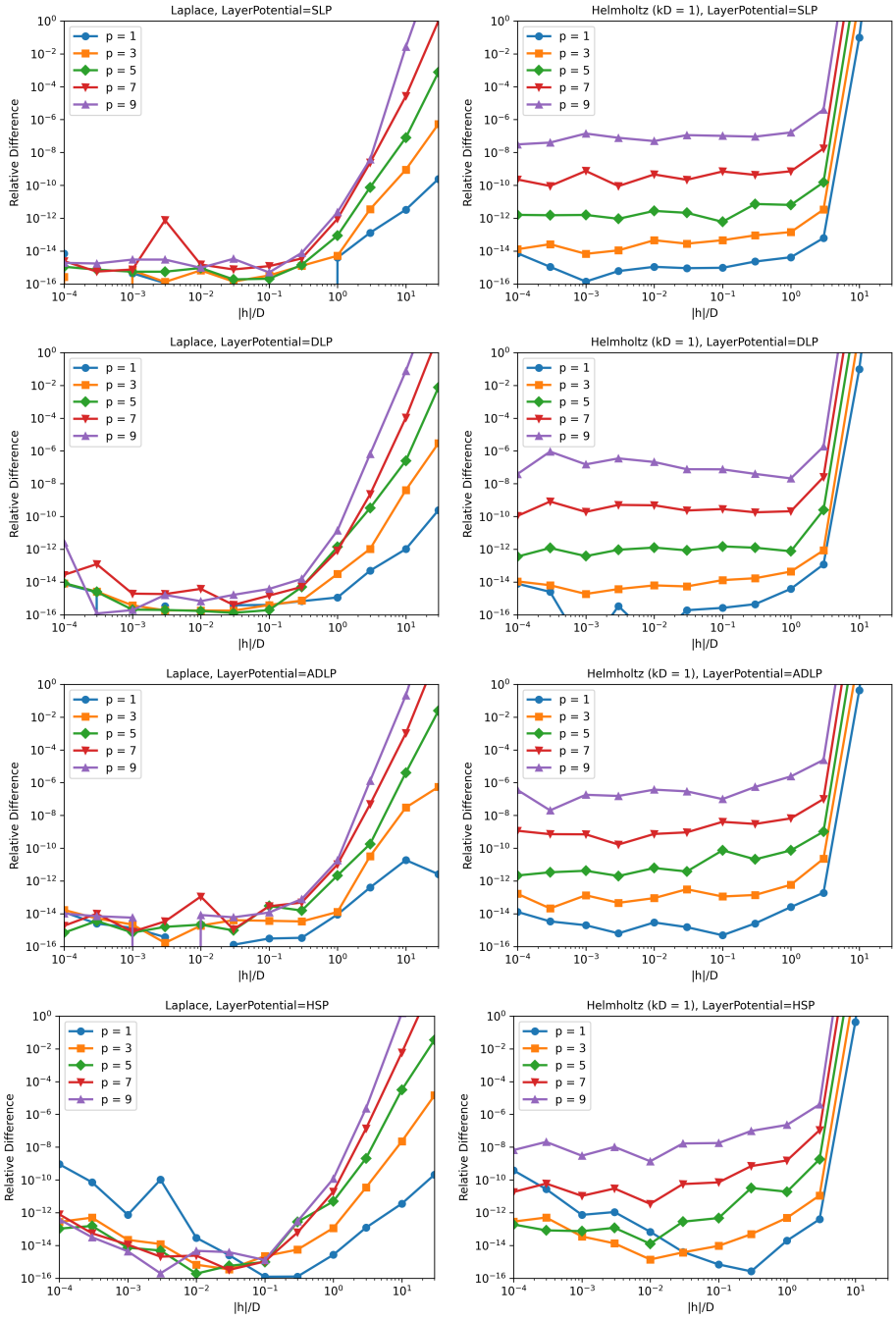
附录 A. 基本积分计算。

A.1. 积分的计算 i_m。我们展示了.....的解析计算

$$i_m(x;a) = \int r^m dx, \quad r = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad a^2 = y'^2 + z'^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{A.1}$$

对于较小的偶数和奇数 m，这些积分可以计算

$$i_0(x;a) = x, \quad i_{-1}(x;a) = \ln|r + x|, \quad i_{-2}(x;a) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}, \quad i_{-3}(x;a) = \frac{x}{a^2 r}.$$



Relative difference of the layer potentials between RIPE and the adaptive Gauss-Kronrod
FIG. 6。 *quadrature for various shape function orders. Laplace (left column) and Helmholtz (right column) ,,*

for single layer double layer adjoint double layer ,,,
and hypersingular potentials (top to bottom).

我们有如下递推关系:

$$i_{m+2} = \int r^{m+2} dx = xr^{m+2} - (m+2) \int x^2 r^m dx = xr^{m+2} - (m+2)\, i_{m+2} + (m+2) a^2 i_m.$$

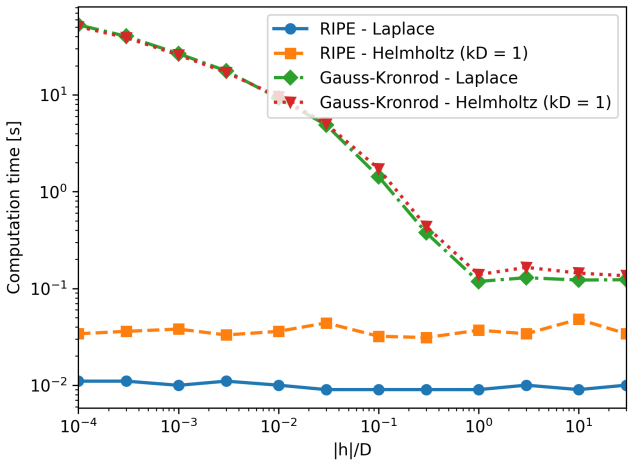


FIG. 7. *The total wall-clock time for computing all four layer potentials for a 5th order element, for RIPE and for adaptive Gauss-Kronrod quadrature. Note that the times for RIPE are the times spent to compute integrals weighted by* $x^b y^c$ *for all* $((p_s+1)(p_s+2))/2 = 21$ *terms in* $0 \le b+c \le 5$ *in one run of the recursion while the times for Gauss-Kronrod are for computing only the integral , with shape function* x^5.

$$i_{m+2} = \frac{x r^{m+2}}{m+3} + \frac{m+2}{m+3} a^2 i_m, \quad m \neq -3. \tag{A.2}$$

我们需要求出 $m \geqslant -3$ 的积分值，并且已经得到所有所需非正 m 的显式表达式；对于所有正 m ，可以从偶数 m 的 $m=0$ 和奇数 m 的 $m=-1$ 出发，通过递推关系求得。请注意，原函数 $i_m(x;a)$ 在 $a=0.$ 时可能存在奇点。对此，我们有

$$i_m(x;0) = \frac{x|x|^m}{m+1}, \quad m \neq -1, \quad i_{-1}(x;0) = \operatorname{sgn}(x) \ln|x|. \tag{A.3}$$

A.2. 积分的计算 k_m**.** 在本附录中，我们将说明如何计算积分

$$k_m(x;y',z') = z' \int \frac{r^m}{x^2+z'^2} dx, \quad r = \sqrt{x^2+y'^2+z'^2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{A.4}$$

解析地计算。注意，对于 $y'=0$ ，这些积分可化为积分 i_m ：

$$k_m(x;0,z') = z' \int \frac{r^m}{r^2} dx = z' i_{m-2}(x;|z|). \tag{A.5}$$

因此，我们只需考虑情形 $y' \neq 0.$ 。我们为所有需要的积分 k_m推导递推关系，并求出使用这些递推关系所需的初始值。我们有

$$k_{m+2} = z' \int \frac{r^{m+2}}{x^2+z'^2} dx = z' \int \frac{\left(x^2+z'^2\right)+y'^2}{x^2+z'^2} \rho^m dx = z' i_m\left(x; \sqrt{y'^2+z'^2}\right) + y'^2 k_m.$$

已知初始值（奇数阶和偶数阶）的表达式后，所有积分都可以递归计算。为此，我们有

$$k_{-1}(x;y',z') = \frac{z'}{y'|z'|} \arctan \frac{y'x}{|z'|r}, \quad k_0(x;y',z') = \frac{z'}{|z'|} \arctan \frac{x}{|z'|}, \tag{A.6}$$
$$k_1(x;y',z') = \frac{y'z'}{|z'|} \arctan \frac{y'x}{|z'|r} + z' \ln|r+x|.$$

请注意，代入原始表达式的 $y'k_{-1}(x;y',\ z')$ 即使在 z' 和 y' 趋近于零时也不会出现奇异性，但其取值取决于路径（比值 y'/z'）。

参考文献

[1] R. Adelman, N. A. Gumerov, and R. Duraiswami, *Computation of Galerkin double surface integrals in the 3-D boundary element method* 64 2016 , IEEE 天线与传播汇刊, ( ), 第 2389–2400 页。[2] A. Björck and V. Pereyra, *Solution of Vandermonde systems of equations*, 计算数学, 24 (1970), 第 893–903 页。[3] A. Burton and G. Miller, *The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems* 323 1971 201 , 英国皇家学会 A 辑会刊, ( ), 第 – 210 页。[4] L. Greengard, M. O'Neil, M. Rachh, and Fu Vico, *Fast multipole methods for the evaluation of layer potentials with locally-corrected quadratures* 10 2021 , 计算物理学杂志: X, ( ), 第 100092 页。[5] L. Greengard and V. Rokhlin, *A fast algorithm for particle simulations*, 计算物理学杂志, 73 (1987), 第 325–348 页。[6] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T. J. Rudolphi, and F. J. Rizzo, *A General Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations* 59 , 应用力学杂志, (1992), 第 604–614 页。[7] N. Gumerov, R. Adelman, and R. Duraiswami, *Fast multipole accelerated indirect boundary elements for the Helmholtz equation* 2013, 19, , 载于声学国际会议论文集，第 卷, 美国声学学会，2013 年，第 015097 页。[8] N. A. Gumerov and R. Duraiswami, *Analytical computation of boundary integrals for the Helmholtz equation in three dimensions* 2103 17196, 2021 , arXiv: 。( )。[9] N. A. Gumerov and R. Duraiswami, *Fast multipole accelerated boundary element methods for room acoustics* 150 2021 1707 1720 , 美国声学学会杂志, ( ), 第 – 页。[10] W. Hackbusch and S. A. Sauter, *On numerical cubatures of nearly singular surface integrals arising in BEM collocation* 52 1994 139 159 , Computing, ( ), 第 – 页。[11] K. Hayami and C. Brebbia, *Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3-D boundary element method* 1 1988 237 264 , 边界单元 X, ( ), 第 – 页。[12] B. M. Johnston, P. R. Johnston, and D. Elliott, *A sinh transformation for evaluating two-dimensional nearly singular boundary element integrals* , 国际数值方法与工程杂志, 69 (2007), 第 1460–1479 页。[13] A. Klöckner, A. Barnett, L. Greengard, and M. O'Neil, *Quadrature by expansion: A new method for the evaluation of layer potentials* 252 2013 332 349 , 计算物理学杂志, ( ), 第 – 页。[14] M. Lenoir and N. Salles, *Evaluation of 3-D singular and nearly singular integrals in Galerkin BEM for thin layers* 34 2012 3057 3078 , SIAM 科学计算杂志, ( ), 第 A–A 页。[15] M. Lenoir and N. Salles, *Exact evaluation of singular and near-singular integrals in galerkin bem* 2012 1 20 , ECCOMAS2012 会议论文集, ( ), 第 – 页。[16] H. Montanelli, M. Aussal, and H. Haddar, *Computing weakly singular and near-singular integrals in high-order boundary elements* 2111 13151, 2021 , arXiv 预印本 arXiv: 。( )。[17] J. N. Newman, *Distributions of sources and normal dipoles over a quadrilateral panel*, 工程数学杂志, 20 (1986), 第 113–126 页。[18] R. Piessens, E. de Doncker-Kapenga, C. W. Überhuber, and D. K. Kahaner, *Quadpack: a subroutine package for automatic integration* 1, 2012 , Springer, 第 卷, 。[19] S. A. Sauter and C. Schwab, *Boundary element methods*, 载于《边界元方法》, Springer, 2010 年, 第 183–287 页。[20] M. Wala and A. Klöckner, *A fast algorithm for quadrature by expansion in three dimensions*, 计算物理学杂志, 388 (2019), 第 655–689 页。[21] M. Wala and A. Klöckner, *Optimization of fast algorithms for global Quadrature by Expansion using target-specific expansions* 403 2020 108976 , 计算物理学杂志, ( ), 第 页。[22] H. Zhu and S. Veerapaneni, *High-order close evaluation of Laplace layer potentials: A differential geometric approach* 44 2022 1381 1404 , SIAM 科学计算杂志, ( ), 第 A –A 页。