arXiv:2302.02207v1 [math.NT] 4 Feb 2023

同余子群与任意 K_∞-型的韦尔定律

¨WERNER MULLER

Abstract. 设 G 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的约化代数群，且 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ 是一个算术子群。设 $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ 是一个极大紧子群。我们研究固定 K_∞-型 σ 在 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 中的 $G(\mathbb{R})$ 正则表示的尖点谱和剩余谱计数函数的渐近行为。Sarnak 提出了一个猜想，指出 σ 型尖点谱的计数函数满足 Weyl 定律，而剩余谱的增长阶较低。利用阿瑟迹公式，我们将该猜想归结为一个关于艾森斯坦级数常数项中出现的 L-函数的问题。若 G 满足 Finis 和 Lapid 提出的性质 (L)，我们便证明了该猜想。这包括数域上的经典群。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 8 3. 算术流形 11 4. 艾森斯坦级数与交织算子 13 5. 正规化因子 16 6. 局部交织算子的对数导数 22 7. 剩余谱 27 8. 迹公式的谱侧 34 9. 迹公式的几何侧 41 10. 主定理的证明 44 参考文献 48

日期：2023年2月7日。2020年数学主题分类。主要分类：11F72，次要分类：58J35。关键词和短语：韦尔定律、局部对称空间。

1. Introduction

设 G 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的连通半单代数群，$\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ 是一个算术子群，我们假设它无挠。自守形式理论中的一个基本问题，是研究 R_Γ 在 $G(\mathbb{R})$ 中的正则表示在 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 中的谱分解。离散谱结构的确定尤为重要。令 $L^2_{\text{离散}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 表示 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 的离散部分，即所有 R_Γ 的不可约子表示张成空间的闭包。记 R_Γ 对应的限制为 $R_{\Gamma,\,\text{dis}}$。令 $\Pi_{\text{dis}}(G(\mathbb{R}))$ 表示 $G(\mathbb{R})$ 的不可约酉表示的同构类集合，其中的表示出现于 R_Γ 中。根据定义，我们有

$$R_{\Gamma,\text{dis}} = \widehat{\bigoplus}_{\pi\in\Pi_{\text{dis}}(G(\mathbb{R}))} m_\Gamma(\pi)\pi, \tag{1.1}$$

其中

$$m_\Gamma(\pi) = \dim \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{R})}(\pi, R_\Gamma) = \dim \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{R})}(\pi, R_{\Gamma,\text{dis}})$$

是 π 在 R_Γ 中出现的重数。除了离散系列表示等特殊情形外，我们无法指望显式描述 $\Pi(G(\mathbb{R}))$ 上的重数函数 m_Γ。因此，研究极限重数问题 [FLM2] 和韦尔定律等渐近问题是可行的，而本文的主题正是韦尔定律。

首先，我们回顾一下，离散谱可分解为尖点谱和剩余谱。令 $\mathbf{K}_\infty$ 为 $G(\mathbb{R})$ 的极大紧子群。令 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 为 $G(\mathbb{R})$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的复化的包络代数的中心。回想一下，Γ 的尖点形式是一个光滑且右 $\mathbf{K}_\infty$-有限的函数 $\phi\colon \Gamma\backslash G(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$，它是 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的共同特征函数，并且满足

$$\int_{\Gamma\cap N_P(\mathbb{R})\backslash N_P(\mathbb{R})} \phi(nx)dn = 0 \tag{1.2}$$

对于 G 的真有理抛物子群 P 的所有幺幂根基 N_P，上述条件均成立。根据朗兰兹的艾森斯坦级数理论 [La1], ，尖点形式是谱分解的基本构件。注意，每个尖点形式 $\phi \in C^\infty(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 在 $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ 上快速衰减，因此平方可积。令 $L^2\,\mathbf{cus}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 为所有尖点形式线性张成空间的闭包。正则表示 R_Γ 在 $L^2\,\mathbf{cus}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 上的限制离散分解，而 $L^2\,\mathbf{cus}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 是 $L^2\,\mathbf{dis}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 的子空间。记 $L^2\,\mathbf{dis}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 中 $L^2\,\mathbf{cus}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 的正交补为 $L^2\,\mathbf{res}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$。这就是剩余子空间。令 (σ, V_σ) 为 $\mathbf{K}_\infty$ 的一个不可约酉表示。设

$$L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}), \sigma) := (L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})) \otimes V_\sigma)^{\mathbf{K}_\infty}. \tag{1.3}$$

以类似的方式定义子空间 $L^2_{\text{离散}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})\ \sigma)$、$L^2_{\text{尖点}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})\ \sigma)$ 和 $L^2_{\text{残余}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})\ \sigma)$。那么，$L^2_{\text{尖点}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})\ \sigma)$ 就是具有固定 $\mathbf{K}_\infty$-型 σ 的尖点形式空间。令 $X := \sim G(\mathbb{R})/\mathbf{K}_\infty$ 为与 $G(\mathbb{R})$ 相伴的黎曼对称空间，$X = \Gamma\backslash X$ 为相应的局部对称空间。由于我们假设 Γ 无挠，X 是一个流形。令 $E_\sigma \to \Gamma\backslash X$ 为与 σ 相伴的局部齐性向量丛

并令 $L^2(X, E_\sigma)$ 为 E_σ 的平方可积截面空间。存在一个典范同构

$$L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}), \sigma) \cong L^2(X, E_\sigma). \tag{1.4}$$

$_{G(\mathbb{R})} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$是 $G(\mathbb{R})$的卡西米尔元。因此， $-\Omega_{G(\mathbb{R})} \otimes$Id在希尔伯特空间 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})\ \sigma)$ 中诱导出一个有下界的自伴算子 Δ_σ 。根据同构(1.4)，我们有

$$\Delta_\sigma = (\nabla^\sigma)^* \nabla^\sigma - \lambda_\sigma \,\mathrm{Id}, \tag{1.5}$$

其中， ∇^σ 是 E_σ 上的典范不变联络， λ_σ 表示 σ的卡西米尔特征值。特别地，若 σ_0 是平凡表示，则 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})\ \sigma_0) \cong L^2(X)$，且$\Delta_{\sigma_0}$ 等于 X上的拉普拉斯算子 Δ。

Δ_σ 在子空间 $L^2{}_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})\ \sigma)$上的限制具有纯点谱，由特征值 $\lambda_0(\sigma) < \lambda_1(\sigma) < \cdots$ 组成，且其重数有限。令 $\mathcal{E}(\lambda_i(\sigma))$为对应于 $\lambda_i(\sigma)$的特征空间。于是我们定义特征值计数函数$N_{\Gamma,\mathrm{dis}}(\lambda, \sigma)$， $\lambda \geq 0$，如下：

$$N_{\Gamma,\mathrm{dis}}(\lambda, \sigma) = \sum_{\lambda_i(\sigma) \leq \lambda} \dim \mathcal{E}(\lambda_i(\sigma)). \tag{1.6}$$

尖点谱和剩余谱的计数函数 $N_{\Gamma,\mathrm{cus}}(\lambda, \sigma)$ 和 $N_{\Gamma,\mathrm{res}}(\lambda, \sigma)$，分别通过将 Δ_σ 限制到尖点子空间和剩余子空间来定义。主要目标是确定当 $\lambda \to \infty$ 时这些计数函数的渐近行为。如果 X 是紧的，则韦尔定律成立。回顾一下，对于维数为 n 的紧黎曼流形 X ，韦尔定律指出，流形 X 上拉普拉斯算子 Δ 的特征值中，按重数计数且满足 $\lambda_i \leq \lambda$ 的特征值个数 $N_X(\lambda)$ 满足

$$N_X(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}(X)}{(4\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2}+1)} \lambda^{n/2} + o(\lambda^{(n/2)}) \tag{1.7}$$

当 $\lambda \to \infty$ 时。证明 (1.7) 的一种标准方法是热方程方法。利用波动方程，可以得到一个更精确的版本，并估计余项：

$$N_X(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}(X)}{(4\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2}+1)} \lambda^{n/2} + O(\lambda^{(n-1)/2}) \tag{1.8}$$

当 $\lambda \to \infty$ 时。这是 Avakumovic [Av] 和 H¨ormander 的结果。对于黎曼流形，不作进一步假设时，余项是最优的 [Av]。更一般地，可以考虑厄米向量丛 $E \to X$ 上带有厄米联络的 Bochner-Laplace 算子 Δ_E。对于 Δ_E 的特征值计数函数 $N_X(\lambda, E)$，也有类似公式 (1.7)。唯一的区别是，右侧首项系数中出现了 E 的秩。

对于非一致格 Γ ，自伴算子 Δ_σ 具有很大的连续谱，因此 Δ_σ 的几乎所有特征值都会嵌入连续谱中，这使得研究它们变得十分困难。关于球尖点谱，已有不少结果。有关尖点谱增长的首批结果

归功于塞尔伯格 [Se1]。他证明，对于每个同余子群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，尖点谱的计数函数满足 Weyl定律，即

$$N_\Gamma(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)}{4\pi}\lambda^2 - \frac{2m}{\pi}\lambda\log\lambda + O(\lambda), \tag{1.9}$$

如 $\lambda \to \infty$。这表明，对于同余子群，特征值大量存在。另一方面，基于他们关于格的变形下尖点形式消失的研究，Phillips 和 Sarnak [Sa2] 猜想，除单穿孔环面的 Teichm¨uller 空间外，对于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 中的一个一般非一致格 Γ，$\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ 上的拉普拉斯算子的点谱是有限的，且包含于 $[0, 1/4)$。在具有尖点的流形这一更一般的背景下，Colin de Verd`ere [CV] 证明，对于有限面积非紧双曲曲面的度量进行一般的紧支撑共形变形后，所有特征值 $\lambda \geq 1/4$ 都会消失。

若 $\mathrm{rank}(G) > 1$，情况则大不相同。根据马古利斯的结果，不可约格具有刚性，且不可约格是算术的。人们预期算术群具有丰富的离散谱。以下猜想归功于 Sarnak [Sa1]。

猜想 1.1. 设 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ 为一个同余子群。那么对于每个 $\nu \in \Pi(K_\infty)$,$N_{\Gamma,\,\mathrm{cus}}(\lambda;\,\nu)$ 满足 Weyl定律，而 $N_{\Gamma,\,\mathrm{res}}(\lambda;\nu)$ 具有低阶增长。

关于该猜想已有一些一般性结果。设 G 是一个连通实半单李群，K 是 G 的极大紧子群，$\Gamma \subset G$ 是一个无挠格。令 $n = \dim G/K$。Donnelly [Do, Theorem 9.1] 已为尖点谱建立了如下上界

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{N_{\Gamma,\mathrm{cus}}(\lambda;\nu)}{\lambda^{n/2}} \leq \frac{\dim(\nu)\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G/K)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \tag{1.10}$$

这对每个 $\nu \in \Pi(K)$ 都成立。关于剩余谱，[Mu1, Theorem 0.1] 证明，对于一般的格，有

$$N_{\Gamma,\mathrm{res}}(\lambda;\nu) \ll 1 + \lambda^{2n}. \tag{1.11}$$

然而，这并非预期的最优上界。一般来说，人们预期剩余谱的重数为 $O(\lambda^{n/2})$，而对于算术群，其重数为 $O(\lambda^{(n-1)/2})$，如 $\lambda \to \infty$。

猜想 (1.1) 已在若干情形下得到验证。大多数结果针对球谱。高秩情形的首个结果归功于 S.D. Miller [Mil]，他证明了 $\Gamma = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ 球尖点形式的韦尔定律。作者 [Mu3] 对 $\Gamma \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ 的一个主同余子群证明了该定律。证明方法沿用塞尔伯格的思路，并使用迹公式。随后，Lindenstrauss 和 Venkatesh [LV] 在更一般的情形下证明了球尖点形式的韦尔定律，具体而言，适用于 $\Gamma \subset \mathrm{G}(\mathbb{R})$ 的同余子群，其中 G 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂伴随半单群。他们采用了不同的方法，利用海克算子消除艾森斯坦级数的贡献。对于 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ 的同余子群，E. Lapid 和 W. M¨uller [LM] 证明了尖点谱的韦尔定律，并估计了余项。余项的

阶为 $O(\lambda^{(d-1)/2}(\log\ \lambda)^{\max(n,3)})$，其中 $d=\dim \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$。该方法也像 [Mu3] 一样基于阿瑟迹公式。不过，论证得到了简化和加强，这相当于在推导紧黎曼流形的韦尔定律时使用波动方程。最近，T. Finis 和 E. Lapid[FL2] 估计了局部对称空间 $X=\Gamma\backslash \mathrm{G}(\mathbb{R})/\mathrm{K}_\infty$ 的尖点谱余项，其中 G 是单连通的单切瓦莱群，且 Γ 是 $\mathrm{G}(\mathbb{Z})$ 的一个同余子群。该方法也像 [LV], 一样使用海克算子，但方式略有不同。他们得到的估计为 $O(\lambda^{d-\delta})$，其中 $d=\dim X$，而 $\delta>0$ 是某个未进一步说明的常数。在 [FM], 中，T. Finis 和 J. Matz 纳入了海克算子。他们研究了海克算子在球离散谱上的迹的渐近行为。

对于非球情形，[Mu3] 已证明 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ 的一个主同余子群满足韦尔定律。最近，A. Maiti [Ma] 将 Linden- strauss 和 Venkatesh [LV] 的方法推广，证明了尖点形式及任意 K_∞-类型的韦尔定律。与 [LV], 中一样，该方法适用于 $\mathbb{Q}$ 上的半单分裂伴随线性代数群，但无法得出关于剩余谱的结果。

关于剩余谱，有一般上界 (1.11)，但这并非预期的最优上界。当 $\mathrm{rank}(G)=1$ 时，已知剩余谱是有限的。对于 $\mathrm{GL}(n)$，Mœglin 和 Wald- spurger [MW] 已确定剩余谱。 [Mu3, 命题 3.6] 利用这一结果证明，在此情形下，剩余谱仅呈低阶增长。,

本文的主要目标是证明猜想 (1.1) 对某一类约化群成立，这类群包括定义在数域上的经典群。我们使用阿瑟迹公式，将猜想的证明归结为一个关于出现在艾森斯坦级数常数项中的自守 L-函数的问题。如果约化群 G 满足由 Finis 和 Lapid 在[FL1, Definition 3.4]中引入的性质 (L)，便可解决这一问题。设 G 是定义在 $\mathbb{Q}$上的约化群。按照惯例，令 $G(\mathbb{R})^1$ 表示同态 $|\chi|\colon G(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{>0}$ 的核的交，其中 χ 遍历 G的$\mathbb{Q}$-有理特征。那么我们的主要结果如下。 vvv

定理 1.2. 设 G_0 是定义在数域 F上的连通约化代数群，并且满足性质 (L)。设 $G=\mathrm{Res}^{F/\mathbb{Q}}(G_0/F)$。令 $\mathrm{K}_\infty\subset G(\mathbb{R})^1$ 为一个极大紧子群，并令 $n=\dim G(\mathbb{R})^1/\mathrm{K}_\infty$。设 $\Gamma\subset G(\mathbb{Q})$是一个无挠同余子群。那么对于每个 $\nu\in\Pi(\mathrm{K}_\infty)$，我们都有

$$N_{\Gamma,\mathrm{cus}}(\lambda;\nu)\sim\frac{\dim(\nu)vol(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})^1/\mathbf{K}_\infty)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\lambda^{n/2},\quad \lambda\to\infty. \tag{1.12}$$

and

$$N_{\Gamma,\mathrm{res}}(\lambda;\nu)\ll 1+\lambda^{(n-1)/2},\quad \lambda>0. \tag{1.13}$$

因此，为了对每一种 K_∞-类型确立韦尔定律并估计剩余谱，我们只需验证 G_0 满足性质 (L)。对于 $\mathrm{GL}(n)$

相关的 L-函数是 Rankin-Selberg L-函数，已知它们满足相应的性质。利用 Arthur 关于从经典群到 GL(n) 的函子性工作，T. Finis 和 E. Lapid [FL1, 定理 3.11]证明了数域 F 上的准分裂经典群满足性质 (L)。此外，他们还证明了数域 F 上的 GL(n) 的内形式以及例外群 G_2 满足性质 (L)。事实上，人们预期所有约化群都满足性质 (L)。目前，我们只知道[FL1, 定理 3.11]。结合定理 1.2，得到以下推论。

推论 1.3. 设 F 是一个数域，G_0 是定义在 F 上的以下群之一:

(1) GL(n) 及其内形式。(2) 准分裂经典群。(3) 例外群 G_2。

令 $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G_0/F)$。设 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ 是一个同余子群，且 $\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$。那么 (1.12) 和 (1.13) 成立。

我们证明定理 1.2 的方法，是将热方程方法推广到非紧情形。基本工具是阿瑟迹公式。这要求转到阿代尔情形。我们将在数域 F 上的约化群中开展研究。不过，在引言的其余部分，我们假设 $F = \mathbb{Q}$。因此，设 G 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的连通约化群。设 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的阿代尔环。设 $G(\mathbb{A})^1 := \cap_\chi \ker |\chi|$，其中 χ 遍历 G 的有理特征。记 T_G 为 G 中心的分裂分量，并设 A_G 为 $T_G(\mathbb{R})$ 的单位元连通分量。那么

$$G(\mathbb{A}) = A_G \times G(\mathbb{A})^1.$$

我们将 $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})^1$ 替换为阿代尔商 $A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_f = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1/K_f$，其中$K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个开紧子群。令 $\Pi(G(\mathbb{A}))$（分别为 $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$）表示 $G(\mathbb{A})$（分别为 $G(\mathbb{A})^1$）的不可约酉表示的等价类集合。我们将 $G(\mathbb{A})^1$ 的表示视为 $G(\mathbb{A})$的表示，该表示在 A_G 上平凡。令 L^2 dis$(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ 为 R （ $G(\mathbb{A})$的正则表示）在 $L^2(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$中所有不可约子表示之张成空间的闭包。记 $\Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))$ 为所有 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))$ 构成的子空间，其中这些表示与 $G(\mathbb{A})$ 的正则表示在 $L^2(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ 中的某个子表示等价。注意，这是一个可数集。记 R_{dis} 为 R 在 L^2 dis$(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$上的限制。于是

$$R_{\mathrm{dis}} \cong \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))} m(\pi)\pi, \tag{1.14}$$

其中

$$m(\pi) = \dim \mathrm{Hom}(\pi, L^2(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) \tag{1.15}$$

是 π 在 $L^2(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ 中出现的重数。任意 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))$ 都可以写成 $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$，其中 π_∞ 和 π_f 分别是 $G(\mathbb{R})$ 和 $G(\mathbb{A}_f)$ 的不可约酉表示。令 $\mathcal{H}_{\pi_\infty}$ 和 $\mathcal{H}_{\pi_f}$ 分别表示表示 π_∞ 和 π_f 的希尔伯特空间。设 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个开紧子群。记

$\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_f}$为 $\mathcal{H}_{\pi_f}$ 中 K_f-不变向量构成的子空间。令 $G(\mathbb{R})^1 = G(\mathbb{A})^1 \cap G(\mathbb{R})$。给定$\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))$，用 λ_{π_∞} 表示 π_∞ 在 $G(\mathbb{R})^1$上的限制的卡西米尔特征值。令$\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$。于是我们定义离散谱的阿黛尔计数函数如下:

$$N_{\mathrm{dis}}^{K_f,\nu}(\lambda) := \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A})) \\ -\lambda_{\pi_\infty} \le \lambda}} m(\pi) \dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_f}) \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty} \otimes V_\nu)^{K_\infty}. \tag{1.16}$$

同样地，我们分别定义尖点谱和剩余谱的计数函数 $N^{K_f,\,\nu_{\mathrm{cus}}}(\lambda)$ 和 $N^{K_f,\,\nu_{\mathrm{res}}}(\lambda)$。于是，定理 1.2 的阿代尔版本为

定理 1.4. 设 G_0 是数域 F 上的连通约化代数群。假设 G_0 满足性质 (L)。令 $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G_0)$ 表示由 G_0 通过标量限制得到的群。令 K_∞ 为 $G(\mathbb{R})^1$ 的极大紧子群。令 $d := \dim(G(\mathbb{R})^1/\mathrm{K}_\infty)$。设 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 为一个开紧子群，并令 $\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$。则有

$$N_{\mathrm{cus}}^{K_f,\nu}(\lambda) = \frac{\dim(\nu)\,\mathrm{vol}(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_f)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\lambda^{d/2} + o(\lambda^{d/2}), \quad \lambda \to \infty, \tag{1.17}$$

and

$$N_{\mathrm{res}}^{K_f,\nu}(\lambda) \ll (1+\lambda^{(n-1)/2}), \quad \lambda > 0. \tag{1.18}$$

为从阿代尔版本推出定理 1.2，我们回顾一下，存在有限多个同余子群 $\Gamma_i \subset G(\mathbb{Q})$、$i = 1$、...、$m$，使得

$$A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_f = \bigsqcup_{i=1}^{m} \Gamma_i \backslash G(\mathbb{R})^1. \tag{1.19}$$

（见第 3 节）。记 $N_{\Gamma_i,\text{尖点}}(\lambda,\nu)$ 为尖点谱$L^2(\Gamma_i\backslash G(\mathbb{R})^1) \otimes V_\nu)^{K_\infty}$的计数函数。于是可得

$$N_{\mathrm{cus}}^{K_f,\nu}(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} N_{\Gamma_i,\mathrm{cus}}(\lambda,\nu). \tag{1.20}$$

我们利用这一结果从定理 1.4 推出定理 1.2。

为证明定理 1.4，我们首先估计剩余计数函数，这是建立韦尔定律所必需的。为此，我们采用 Langlands 对剩余谱的描述，即将其表示为艾森斯坦级数 [La1, Ch. 7][MW, V.3.13] 的迭代留数。利用 Maass-Selberg关系，问题最终归结为估计交织算子的正规化因子的实极点个数，这些因子出现在艾森斯坦级数的常数项中。为了得到适当的界，我们需要 G 满足 Finis 和 Lapid 引入的性质 (L) [FL1, Definition 3.4]。由此我们得到 (1.18)。

为证明韦尔定律，我们使用阿瑟迹公式。我们将在数域 F 上研究群。不过，为了说明这一方法，我们只需假设

$F = \mathbb{Q}$。我们按照 [Mu3] 的方法进行。我们选取测试函数 $\phi_t^\nu \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$、 $t > 0$；它们在无穷位处由对称空间 $X = G(\mathbb{R})^1/\mathrm{K}_\infty$ 上的 Bochner-Laplace
~ ~
算子 Δ_ν 的热核 H_t^ν 得到，在有限处则为 K_f 的归一化特征函数（精确定义见（8.11））。接着，我们将 ϕ_t^ν 代入迹公式的谱侧 J_{spec}，并研究当 $t \to 0$ 时 $J_{\mathrm{spec}}(\phi_t^\nu)$ 的渐近行为。谱侧是与 G 的 Levi 子群 M 的共轭类相伴的分布 $J_{\mathrm{spec},\ M}$ 之和。对于 $M = G$，我们有

$$J_{\mathrm{spec},G}(\phi_t^\nu) = \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))} m(\pi) e^{t\lambda_{\pi_\infty}} \dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_f}) \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty} \otimes V_\nu)^{K_\infty}, \tag{1.21}$$

这就是离散谱对谱侧的贡献。对于 $M \neq G$，分布 $J_{\mathrm{spec},\ M}$ 的主要组成部分是交织算子的对数导数。交织算子可以用某些亚纯函数归一化。于是，交织算子的对数导数可表示为正规化因子的对数导数与局部归一化交织算子的对数导数。事实上，我们只需控制对数导数的积分，这使问题得以简化。为处理正规化因子的对数导数的积分，我们采用性质 (TWN+) [FL1，定义 3.3]。根据 [FL1，命题 3.8], ，性质 (TWN+) 是性质 (L) [FL1，定义 3.4], 的推论；我们假设 G满足该性质。对于局部交织算子，我们基本沿用 [FLM2]中使用的方法。最终结果是定理 8.5，它指出，若 G 满足性质 (L)，则

$$J_{\mathrm{spec}}(\phi_t^\nu) = J_{\mathrm{spec},G}(\phi_t^\nu) + O(t^{-(d-1)/2}) \tag{1.22}$$

当 $t \to 0$。

接下来讨论几何侧 $J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu)$。其在 $t \to 0$ 时的渐近行为已由 [MM2 的定理 1.1] 确定。我们将简要回顾证明的主要步骤，并确定首项系数。根据迹公式，我们有 $J_{\mathrm{spec}}(\phi_t^\nu) = J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu)$，结合 (1.21) 和 (1.22) 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))} m(\pi) \dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_f}) \dim\left(\mathcal{H}_{\pi_\infty} \otimes V_\nu\right)^{K_\infty} e^{t\lambda_{\pi_\infty}} \\ &\qquad = \frac{\dim(\nu)\ \mathrm{vol}(X(K_f))}{(4\pi)^{d/2}} t^{-d/2} + O(t^{-(d-1)/2}) \end{aligned} \tag{1.23}$$

当 $t \to 0$。应用卡拉马塔定理，我们得到阿代尔 Weyl 定律 (1.17)。

2. Preliminaries

我们主要采用 [FLM1]中的记号。设 G 是定义在数域 F上的约化代数群。我们固定 G 的一个定义在 F 上的极小抛物子群 P_0 以及一个Levi 分解 $P_0 = M_0 U_0$，二者均定义在 F上。设 T_0 是 M_0的中心的 F-分裂分量。设 $\mathcal{F}$ 是 G 的、包含 M_0 且

定义在 F上的抛物子群的集合。设 $\mathcal{L}$ 是 G 的、包含 M_0 且是 $\mathcal{F}$中各群的Levi 分量的子群集合。对于任意 $P \in \mathcal{F}$，记

$$P = M_P N_P,$$

其中， N_P 是 P 的幺幂根基，且 M_P 属于 $\mathcal{L}$。

令 $M \in \mathcal{L}$。用 T_M表示 M中心的 F-分裂分量。设 $T_P = T_{M_P}$。沿用此前的记号，有 $T_0 = T_{M_0}$。令 $L \in \mathcal{L}$，并假设 L 包含M。那么 L 是定义在 F 上的约化群，而 M 是 L的 Levi 子群。我们用 $\mathcal{L}^L(M)$表示 L中包含 M的 Levi 子群集合。我们还用 $\mathcal{F}^L(M)$表示 L中定义在 F上且包含 M的抛物子群集合，并用 $\mathcal{P}^L(M)$表示 $\mathcal{F}^L(M)$中以 M为 Levi 分量的群的集合。这三个集合均为有限集。若 $L = G$，通常将这些集合记为 $\mathcal{L}(M)$、 $\mathcal{F}(M)$和 $\mathcal{P}(M)$。

令 $W_0 = N_{G(F)}(T_0)/M_0$为(G, T_0)的韦伊尔群，其中$N_{G(F)}(H)$表示 $G(F)$中 H的正规化子。对任意 $s \in W_0$，我们选取一个代表元 $w_s \in G(F)$。注意， W_0通过 $sM = w_s M w_s^{-1}$作用于 $\mathcal{L}$。对于 $M \in \mathcal{L}$，令 $W(M) = N_{G(F)}(M)/M$，它可识别为 W_0的一个子群。

令 $X(M)_F$为 M中定义在 F上的特征标群。设

$$\mathfrak{a}_M := \mathrm{Hom}(X(M)_F, \mathbb{R}). \tag{2.1}$$

这是一个实向量空间，其维数等于 T_M的维数。其对偶空间为

$$\mathfrak{a}_M^* = X(M)_F \otimes \mathbb{R}.$$

我们记作,

$$\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P} \quad \text{and} \quad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}. \tag{2.2}$$

对于任意 $L \in \mathcal{L}(M)$，我们将 $\mathfrak{a}_L^*$视为 $\mathfrak{a}_M^*$的一个子空间。记 $\mathfrak{a}_M^L$为 $\mathfrak{a}_L^*$在 $\mathfrak{a}_M$中的湮灭子。那么 $r = \dim \mathfrak{a}_0^G$是 G的半单秩。我们定义

$$\mathcal{L}_1(M) = \{L \in \mathcal{L}(M) : \dim \mathfrak{a}_M^L = 1\} \tag{2.3}$$

and

$$\mathcal{F}_1(M) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}_1(M)} \mathcal{P}(L). \tag{2.4}$$

令 $\Sigma_P \subset \mathfrak{a}_P^*$ 为 T_P 在 N_P的李代数 $\mathfrak{n}_P$ 上的约化根集。令 Δ_P为 P的单根子集，它是 $(\mathfrak{a}_P^G)^*$的一组基。记 Σ_M为 T_M 在 G的李代数上的约化根集。对于任意 $\alpha \in \Sigma_M$，我们用 $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_M$ 表示相应的余根。令 P_1 和 P_2 为满足 $P_1 \subset P_2$的抛物子群。则 $\mathfrak{a}_{P_2}^*$ 嵌入于 $\mathfrak{a}_{P_1}^*$中，而 $\mathfrak{a}_{P_2}$ 是 $\mathfrak{a}_{P_1}$的一个自然商向量空间。群 $M_{P_2} \cap P_1$是 M_{P_2}的一个抛物子群。令 $\Delta_{P_1}^{P_2}$表示 $(M_{P_2} \cap P_1, T_{P_1})$的单根集。它是 Δ_{P_1}的子集。对于满足 $P_0 \subset P$ 的抛物子群 P，我们记 $\Delta_0^P := \Delta_{P_0}^P$。

$\mathbb{A}$ 是 F的阿代尔环， $\mathbb{A}_f$ 是有限阿代尔环，而 $F_\infty = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$。我们固定 $G(\mathbb{A}) = G(F_\infty) \cdot G(\mathbb{A}_f)$的一个极大紧子群 $\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v = \mathbf{K}_\infty \cdot \mathbf{K}_f$。我们假设

极大紧子群 $\mathbf{K} \subset G(\mathbb{A})$ 关于 M_0 [Ar6, §1]是容许的。令 $H_M\colon M(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_M$ 为由下式给出的同态

$$e^{\langle \chi, H_M(m)\rangle} = |\chi(m)|_{\mathbb{A}} = \prod_v |\chi(m_v)|_v \tag{2.5}$$

对于任意 $\chi \in X(M)_F$，并将 $M(\mathbb{A})^1 \subset M(\mathbb{A})$ 记为 H_M 的核。

令 $G_1 = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G)$ 为通过标量限制 [We] 从 G 得到的定义在 $\mathbb{Q}$ 上的群。对于任意 $M \in \mathcal{L}$，类似地令 $M_1 := \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(M)$。令 T_{M_1} 为 M_1 的中心的 $\mathbb{Q}$-分裂分量。对于 $M \in \mathcal{L}$，令 A_M 表示 $T_{M_1}(\mathbb{R})$ 的单位连通分支，并通过将 $\mathbb{R}$ 对角嵌入到 F_∞ 中，将其视为 $T_M(\mathbb{A}_F)$ 的子群。注意，由标量限制的性质可得 $M_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^1 \cong M(\mathbb{A}_F)^1$。因此我们有

$$M(\mathbb{A}_F) = A_M \times M(\mathbb{A}_F)^1.$$

令 $L^2_{\mathrm{disc}}(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ 为 $L^2(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ 的离散部分，即 $M(\mathbb{A})$ 的正则表示中所有不可约子表示之和的闭包。我们用 $\Pi_{\mathrm{disc}}(M(\mathbb{A}))$ 表示在离散子空间$L^2_{\mathrm{disc}}(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ 分解为不可约表示时出现的 $M(\mathbb{A})$ 的不可约酉表示的等价类组成的可数集。令 $L^2{}_{\text{尖点}}(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ 为尖点形式子空间。用 $\Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A}))$ 表示在尖点形式空间 $L^2{}_{\text{尖点}}(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ 分解为不可约表示时出现的 $M(\mathbb{A})$ 的不可约酉表示的等价类所组成的集合。

分别令 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{k}$ 表示 $G(F_\infty)$ 与 $\mathbf{K}_\infty$ 的李代数。令 θ 为相对于 $\mathbf{K}_\infty$ 的 $G(F_\infty)$ 的嘉当对合。它诱导出嘉当分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$。我们在 $\mathfrak{g}$ 上固定一个不变双线性形式 B，使其在 $\mathfrak{p}$ 上正定、在 $\mathfrak{k}$ 上负定。此选择在 $G(F_\infty)$ 上定义了卡西米尔算子 Ω，我们用 λ_π 表示任意 $\pi \in \Pi(G(F_\infty))$ 的卡西米尔特征值。类似地，我们在 $\mathbf{K}_\infty$ 上得到卡西米尔算子 $\Omega_{\mathbf{K}_\infty}$，并用 λ_τ 表示表示 $\tau \in \Pi(\mathbf{K}_\infty)$ 的卡西米尔特征值（参见 [BG、§2.3]）。形式 B 在 $\mathfrak{g}$ 及其所有子空间上诱导出欧几里得内积 $(X, Y) = -B(X, \theta(Y))$。对于 $\tau \in \Pi(\mathbf{K}_\infty)$，我们按 [CD、§ 2.2] 中的定义取 $\|\tau\|$。注意，将 $\mathfrak{g}$ 上的内积 $(\cdot,\cdot)$ 限制到 $\mathfrak{a}_0$，便赋予 $\mathfrak{a}_0$ 欧几里得空间的结构。特别地，这确定了空间 $\mathfrak{a}_M^L$ 及其对偶空间 $(\mathfrak{a}_M^L)^*$ 上的哈尔测度。我们按照 Arthur 对群 $M(\mathbb{A})$ 上哈尔测度的相应归一化方式（[Ar1, § 1]）。

设 H 是一个拓扑群。我们用 $\Pi(H)$ 表示 H 的不可约酉表示的等价类集合。

接下来我们引入施瓦茨函数空间 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A})^1)$。对于 $G(\mathbb{A}_f)$ 的任意紧开子群 K_f，空间 $G(\mathbb{A})^1/K_f$ 是 $G(F_\infty)^1 = G(F_\infty) \cap G(\mathbb{A})^1$ 的可数个互不相交副本的并，因此它是一个可微流形。$X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}^1_\infty)$ 是李代数 $\mathfrak{g}^1_\infty$（属于 $G(F_\infty)^1$）的包络代数中的任一元素，它定义了 $G(\mathbb{A})^1/K_f$ 上的左不变微分算子 $f \mapsto f * X$。设 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A})^1; K_f)$ 为 $G(\mathbb{A})^1$ 上光滑的右 K_f-不变函数空间，其中的函数及其所有

导数都属于施瓦茨函数空间 $L^1(G(\mathbb{A})^1)$。在半范数的作用下，空间 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A})^1;\, K_f)$ 成为一个 Fr´echet 空间：

$$\|f * X\|_{L^1(G(\mathbb{A})^1)}, \quad X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty^1).$$

将 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A})^1)$ 定义为当 K_f 遍历 $G(\mathbb{A}_f)$ 的紧开子群时，各空间 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A})^1;\, K_f)$ 的并集，并赋予 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A})^1)$ 归纳极限拓扑。

3. Arithmetic manifolds

本节介绍我们将要研究的局部对称空间的阿代尔描述，并解释它与通常设定之间的关系。

设 G 是数域 F 上的约化代数群。固定一个忠实的 F-有理表示 $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$，以及表示空间 V 中的一个 $\mathcal{O}_F$-格 Λ，使得 $\hat{} \; \Lambda := \mathcal{O}_F \otimes \Lambda \subset \mathbb{A}_f \otimes V$ 在 $G(\mathbb{A}_f)$ 中的稳定子群是群 $\mathbf{K}_f$。由于 $\mathbf{GL}(\mathbb{A}_f \otimes V)$ 的极大紧子群恰好是格的稳定子群，因此容易看出这样的格确实存在。对于 $\mathcal{O}_F$ 的任意非零理想 $\mathfrak{n}$，令

$$\mathbf{K}(\mathfrak{n}) = \mathbf{K}_G(\mathfrak{n}) = \{g \in G(\mathbb{A}_f)\colon \rho(g)v \equiv v \pmod{\mathfrak{n}\hat{\Lambda}},\ v \in \hat{\Lambda}\}$$

为层级为 $\mathfrak{n}$ 的主同余子群。注意，$\mathbf{K}(\mathfrak{n})$ 是 $\mathbf{K}_f$ 的可分解正规子群。此外，群 $\mathbf{K}(\mathfrak{n})$ 构成 $G(\mathbb{A}_f)$ 中单位元的邻域基；也就是说，每个紧开子群 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 都包含某个理想 $\mathfrak{n}$ 对应的主同余子群 $K(\mathfrak{n})$。我们记 $N(\mathfrak{n}) := [\mathfrak{o}_F\colon \mathfrak{n}]$ 为 $\mathfrak{n}$ 的理想范数。

子群 $\Gamma \subset G(F)$ 若包含一个形如 $\Gamma(\mathfrak{n}) := G(F) \cap \mathbf{K}(\mathfrak{n})$ 的有限指数子群（其中 $\mathfrak{n}$ 为某个理想），则称为同余子群。同余子群的这一判定与忠实表示的选择无关；换言之，它是 F-群G 的内禀性质。设 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个紧开子群。那么存在 $\mathcal{O}_F$ 的一个理想 $\mathfrak{n}$，使得 $\mathbf{K}(\mathfrak{n}) \subset K_f$。设 $\Gamma_{K_f} := G(F) \cap K_f$。则 $\Gamma(\mathfrak{n}) \subset \Gamma_{K_f}$ 是一个有限指数子群。因此，Γ_{K_f} 是 $G(F)$ 的同余子群。

根据 [Bo1, § 5.6]，双陪集空间 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(F_\infty)K_f$是有限的。设 $x_1 = 1, x_2, \ldots, x_l$ 是双陪集在 $G(\mathbb{A}_f)$ 中的一组代表元。那么这些群

$$\Gamma_i := \left(G(F_\infty) \times x_i K_f x_i^{-1}\right) \cap G(F), \quad 1 \le i \le l, \tag{3.1}$$

是 $G(F_\infty)$ 的算术子群，而 $G(F_\infty)$ 对双陪集空间$A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_f$ 的作用导出如下由 $G(F_\infty)$-轨道构成的分解：

$$A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_f \cong \bigsqcup_{i=1}^{l} \left(\Gamma_i \backslash G(F_\infty)^1\right), \tag{3.2}$$

其中 $G(F_\infty)^1 = G(F_\infty)/A_G$。给定定义在 $G(\mathbb{A})$ 上的函数 f，令 f_i 为定义在 $G(F_\infty)$ 上的函数，其定义为 $g \mapsto f(x_i \cdot g)$，$g \in G(F_\infty)$。则映射 $f \mapsto (f_i)_{i=1}^l$ 给出一个

$G(F_\infty)$-模的同构

$$L^2(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} L^2(\Gamma_i\backslash G(F_\infty)^1) \tag{3.3}$$

[BJ, 4.3]。我们注意到，一般而言， $l > 1$。然而，如果 G 是半单、单连通的，且不含任何 F-单因子 H ，使得 $H(F_\infty)$ 是紧的，那么根据强逼近原理，我们有

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_f \cong \Gamma\backslash G(F_\infty),$$

其中 $\Gamma = (G(F_\infty) \times K_f) \cap G(F)$。特别地，对于 $G = \mathrm{SL}(n)$，情况就是如此。由于 (3.3) 是 $G(F_\infty)$-模的同构，它对离散谱也成立，即我们有一个 $G(F_\infty)$-模的同构

$$L^2_{\mathrm{dis}}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma_i\backslash G(F_\infty)^1). \tag{3.4}$$

设 $P \in \mathcal{L}$ 具有 Levi 分解 $P = M \ltimes N$。令 $f \in L^2(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 如上所述对应于 $(f_i)_{i=1}^{l} \in \oplus_{i=1}^{l} L^2(\Gamma_i\backslash G(F_\infty)^1)$。如 [BJ, 第 4.4] 节所述， f 是尖点函数，当且仅当每个 f_i、 $i = 1$、.....、 l 都是尖点函数。因此，(3.3) 诱导出一个同构

$$L^2_{\mathrm{cus}}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} L^2_{\mathrm{cus}}(\Gamma_i\backslash G(F_\infty)^1) \tag{3.5}$$

$G(F_\infty)$-模。由于 $L^2{}_{\mathrm{res}}(\cdot)$ 是 $L^2(\cdot)$ 中 $L^2{}_{\mathrm{cus}}(\cdot)$ 的正交补，由 (3.4) 和 (3.5) 可知，我们还得到一个 $G(F_\infty)$-模的同构

$$L^2_{\mathrm{res}}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} L^2_{\mathrm{res}}(\Gamma_i\backslash G(F_\infty)^1). \tag{3.6}$$

给定 $\tau \in \Pi(G(F_\infty))$，令 $m(\tau)$ 表示表示 τ 在 $L^2{}_{\mathrm{dis}}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f}$ 中出现的重数。那么

$$m(\tau) = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A})) \\ \tau = \pi_\infty}} m(\pi) \dim(\mathcal{H}^{K_f}_{\pi'_f}), \tag{3.7}$$

其中 $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$。类似地，令 $m_{\Gamma_i}(\tau)$ 表示 τ 在$L^2{}_{\mathrm{dis}}(\Gamma_i\backslash G(F_\infty)^1)$ 中出现的重数。由于 (3.4) 是 $G(F_\infty)^1$-模的一个同构，因此

$$\sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A})) \\ \pi_\infty = \tau}} m(\pi) \dim(\mathcal{H}^{K_f}_{\pi'_f}) = \sum_{j=1}^{l} m_{\Gamma_j}(\tau). \tag{3.8}$$

令 $\mathbf{K}_\infty \subset G(F_\infty)^1$ 为一个极大紧子群。令

$$\widetilde{X} := G(F_\infty)^1/\mathbf{K}_\infty \tag{3.9}$$

为相伴的全局黎曼对称空间。给定一个开紧子群$K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$，我们将算术流形 $X(K_f)$ 定义为

$$X(K_f) := G(F)\backslash(\widetilde{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K_f). \tag{3.10}$$

由 (3.2) 可得

$$X(K_f) = \bigsqcup_{i=1}^{l} \left(\Gamma_i\backslash\widetilde{X}\right), \tag{3.11}$$

~其中每个分量 $\Gamma_i\backslash X$ 都是一个局部对称空间。我们假设 K_f 是整洁的。于是 $X(K_f)$ 是一个有限体积的局部对称流形。

~ ~设 $\nu \in \Pi(\mathbf{K}_\infty)$。令 $E_\nu \to X$ 为与 ν相伴的齐性向量丛。用 $C^\infty(X, E_\nu)$ 表示 E_ν 的光滑截面空间，记~ ~ ~为 $C^\infty(X, E_\nu)$。令

(3.12)

$$C^\infty(G(F_\infty)^1, \nu) := \{f : G(F_\infty)^1 \to V_\nu \colon f \in C^\infty,\ f(gk) = \nu(k^{-1})f(g), \\ \forall g \in G(F_\infty)^1,\ \forall k \in \mathbf{K}_\infty\}.$$

设 $L^2(G(F_\infty)^1, \nu)$ 为相应的 L^2-空间。存在一个典范同构

$$\widetilde{A} \colon C^\infty(\widetilde{X}, \widetilde{E}_\nu) \cong C^\infty(G(F_\infty)^1, \nu), \tag{3.13}$$

~（见 [Mia，第 4] 页）。 A可延拓为相应 L^2-空间之间的一个等距同构。

~在 $X(K_f)$ 的每个连通分支上， E_σ 诱导出一个局部齐性的 Hermitian 向量~丛 $E_{i,\sigma} \to \Gamma_i\backslash X$。设

$$E_\sigma := \bigsqcup_{i=1}^{l} E_{i,\sigma}.$$

于是， E_σ 是 $X(K_f)$ 上的一个局部齐性向量丛。设 $L^2(X(K_f), E_\sigma)$ 为 E_σ的平方可积截面空间。

4. Eisenstein series and intertwining operators

本节回顾艾森斯坦级数和交织算子的一些基本事实，它们是阿瑟迹公式谱侧的主要组成部分。

设 $M \in \mathcal{L}$和 $P \in \mathcal{P}(M)$，其中 $P = M \ltimes N_P$。回顾一下，我们用 $\Sigma_P \subset \mathfrak{a}_P^*$表示 T_M 在 N_P的李代数 $\mathfrak{n}_P$ 上的约化根集合。设 Δ_P 为 P的单根子集，它是 $(\mathfrak{a}_P^G)^*$的一个基。记 $\mathfrak{a}_{P,+}^*$ 为 P的韦伊室的闭包，即

$$\mathfrak{a}_{P,+}^* = \{\lambda \in \mathfrak{a}_M^* : \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \text{ for all } \alpha \in \Sigma_P\} = \{\lambda \in \mathfrak{a}_M^* : \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \text{ for all } \alpha \in \Delta_P\}.$$

记 δ_P 为 $P(\mathbb{A})$的模函数。令 $\bar{\mathcal{A}}^2(P)$为以下空间的希尔伯特空间完备化

$$\{\phi \in C^\infty(M(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})) : \delta_P^{-\frac{1}{2}}\phi(\cdot x) \in L^2_{\text{disc}}(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A})),\ \forall x \in G(\mathbb{A})\}$$

关于内积

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{A_M M(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \phi_1(g)\overline{\phi_2(g)}\, dg.$$

设 $\alpha \in \Sigma_M$。若两个抛物子群 $P, Q \in \mathcal{P}(M)$ 沿着 α 相邻，记作 $P|^\alpha Q$，则 $\Sigma_P \cap -\Sigma_Q = \{\alpha\}$。或者，若由 P 和 Q 生成的群 $\langle P, Q\rangle$ 属于 $\mathcal{F}_1(M)$（其定义见 (2.4)），则称 P 和 Q 相邻。任意 $R \in \mathcal{F}_1(\mathcal{M})$ 都具有形式 $\langle P, Q\rangle$，其中 P, Q 是包含于 R 中的 $\mathcal{P}(M)$ 的元素。我们有 $P|^\alpha Q$，其中 $\alpha^\vee \in \Sigma_P^\vee \cap \mathfrak{a}_M^R$。交换 P 和 Q 会将 α 变为 $-\alpha$。

对于任意 $P \in \mathcal{P}(M)$，令 $H_P\colon G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$ 为 H_M 的延拓，使其成为左 $N_P(\mathbb{A})$-不变且右 K-不变的映射。用 $\mathcal{A}^2(P)$ 表示 $\bar{\mathcal{A}}^2(P)$ 的稠密子空间，该子空间由 K-有限且 $\mathfrak{Z}$-有限的向量构成，其中 $\mathfrak{Z}$ 是 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ 的包络代数的中心。也就是说，$\mathcal{A}^2(P)$ 是自守形式 ϕ 在 $N_P(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上的空间，满足对于所有 $k \in$K，$\delta_P^{-\overline{2}}\phi(\cdot k)$ 是 $A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A})$ 上的平方可积自守形式。令 $\rho(P, \lambda)$,$\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 为 $G(\mathbb{A})$ 在 $\bar{\mathcal{A}}^2(P)$ 上的诱导表示，其定义为

$$(\rho(P, \lambda, y)\phi)(x) = \phi(xy)e^{\langle \lambda, H_P(xy) - H_P(x)\rangle}.$$

它同构于诱导表示

$$\text{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}\left(L^2_{\text{disc}}(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A})) \otimes e^{\langle \lambda, H_M(\cdot)\rangle}\right).$$

对于 $\phi \in \mathcal{A}^2(P)$ 和 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$，相伴的艾森斯坦级数定义为

$$E(g, \phi, \lambda) := \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \phi(\gamma g)e^{(\lambda + \rho_P)(H_P(\gamma g))}. \tag{4.1}$$

该级数在 g 和 λ中绝对且局部一致收敛，只要 Re(λ) 在 $\mathfrak{a}_P^*$([MW, II.1.5] 的正韦伊尔室中足够正则。根据 Langlands [La1]，艾森斯坦级数可解析延拓为 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$ 的亚纯函数。其奇点位于由根方程定义的超曲面上。

令 $M, M_1 \in \mathcal{L}$。令 $W(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_{M_1})$ 为从 $\mathfrak{a}_M$ 到 $\mathfrak{a}_{M_1}$ 的同构集合，它们由将 (G, T_0) 的韦伊尔群 W_0 中的元素限制到 $\mathfrak{a}_M$ 而得到。每个 $s \in W(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_{M_1})$ 在 $G(F)$ 中都有一个代表元 w_s。给定 $s \in W(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_{M_1})$、$P \in \mathcal{P}(M)$ 和 $P_1 \in \mathcal{P}(M_1)$，令

$$M_{P_1|P}(s, \lambda) : \mathcal{A}^2(P) \to \mathcal{A}^2(P_1), \quad \lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*, \tag{4.2}$$

为标准交织算子 [Ar9, § 1]，它是积分关于 λ 的亚纯延拓

$$[M_{P_1|P}(s,\lambda)\phi](x) = \int_{N_{P_1}(\mathbb{A})\cap w_s N_P(\mathbb{A}) w_s^{-1}\backslash N_{P_1}(\mathbb{A})} \phi(w_s^{-1}nx) e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(w_s^{-1}nx))} e^{-(s\lambda+\rho_{P_1})(H_{P_1}(x))}\, dn, \tag{4.3}$$

对于 $\phi \in \mathcal{A}^2(P)$，$x \in G(\mathbb{A})$。设 $M = M_1$。那么对于 $Q, P \in \mathcal{P}(M)$ 和 $1 \in W(\mathfrak{a}_M)$ 单位元，我们记

$$M_{Q|P}(\lambda) := M_{Q|P}(1,\lambda). \tag{4.4}$$

回忆一下，$L^2{}_{\mathrm{dis}}(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ 分解为其 π-等型分量的完备直和，其中 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$。相应地，$\bar{\mathcal{A}}^2(P)$ 也分解为希尔伯特空间的直和 $\hat{\oplus}_{\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))} \bar{\mathcal{A}}^2_\pi(P)$，以及相应的代数直和分解

$$\mathcal{A}^2(P) = \bigoplus_{\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))} \mathcal{A}^2_\pi(P). \tag{4.5}$$

我们进一步根据 K_∞ 的作用，将 $\mathcal{A}^2_\pi(P)$ 分解为等型子空间

$$\mathcal{A}^2_\pi(P) = \bigoplus_{\nu\in\Pi(\mathbf{K}_\infty)} \mathcal{A}^2_\pi(P)^\nu. \tag{4.6}$$

此外，对于开紧子群 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$，设 $\mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f}$ 为 K_f-不变函数在 $\mathcal{A}^2_\pi(P)$ 中构成的子空间；对于 $\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$，设 $\mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\nu}$ 为 $\mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f}$ 的 ν-等型子空间。

给定 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$，令 $(\mathrm{Ind}_{P\ \mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}{}_{()}(\pi)\ \mathcal{H}_P(\pi))$ 为诱导表示。令 $\mathcal{H}^0_P(\pi)$ 为 $\mathcal{H}_P(\pi)$ 的子空间，由所有右侧 K-有限且右$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-有限的 $\phi \in \mathcal{H}_P(\pi)$ 组成。存在一个 $G(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathrm{K}_\infty)$-模的典范同构

$$j_P : \mathrm{Hom}(\pi, L^2(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A}))) \otimes \mathcal{H}^0_P(\pi) \to \mathcal{A}^2_\pi(P). \tag{4.7}$$

若我们在 π 上固定一个酉结构，并在 $\mathrm{Hom}(\pi, L^2(A_M M(F)\backslash M(\mathbb{A})))$ 上赋予内积 $(A,B) = B^*A$（它在 π 空间上是一个标量算子），则同构 j_P 成为一个等距同构。令

$$M_{Q|P}(\pi,\lambda) := M_{Q|P}(\lambda)|_{\mathcal{A}^2_\pi(P)} \tag{4.8}$$

令其为 $M_{Q|P}(\lambda)$ 在子空间 $\mathcal{A}^2_\pi(P)$ 上的限制。假设 $P|^\alpha Q$。算子$M_{Q|P}(\pi,z) := M_{Q|P}(\pi, z\varpi)$，其中 $\varpi \in \mathfrak{a}_M^\star$ 满足 $\langle \varpi, \alpha^\vee\rangle = 1$，可通过整体因子 $n_\alpha(\pi,z)$ 进行归一化，该因子是关于 $z \in \mathbb{C}$ 的亚纯函数。我们可以写作

$$M_{Q|P}(\pi,z) \circ j_P = n_\alpha(\pi,z) \cdot j_Q \circ (\mathrm{Id} \otimes R_{Q|P}(\pi,z)) \tag{4.9}$$

其中 $R_{Q|P}(\pi,z) = \otimes_v R_{Q|P}(\pi_v,z)$ 是局部定义的正规化交织算子的乘积，而 $\pi = \otimes_v \pi_v$ [Ar9, § 6]，（参见 [Mu2, (2.17)]）。在许多情况下，正规化因子可以用自守 L-函数表示 [Sh1], [Sh2]。

对于任意 $P, Q \in \mathcal{P}(M)$，存在一列抛物子群 $P_0, ..., P_k$ 和根 $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Sigma_M$，使得 $P = P_0, Q = P_k$，且对于 $i = 1, ..., k$ 有 $P_{i-1}|^{\alpha_i} P_i$。根据交织算子的乘积法则，我们有

$$M_{Q|P}(\pi, \lambda) = M_{P_k|P_{k-1}}(\pi, \lambda) \circ M_{P_{k-1}|P_{k-2}}(\pi, \lambda) \circ \cdots \circ M_{P_1|P_0}(\pi, \lambda). \tag{4.10}$$

因此，对算子 $M_{Q|P}(\pi, \lambda)$ 的研究归结为这样的情形：$Q, P \in \mathcal{P}(M)$ 沿某个根 $\alpha \in \Sigma_M$ 相邻。令

$$n_{Q|P}(\pi, \lambda) := \prod_{\alpha \in \Sigma_P \cap \Sigma_{\bar{Q}}} n_\alpha(\pi, \lambda(\alpha^\vee)) \tag{4.11}$$

乘积是关于 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ 的亚纯函数。于是，$M_{Q|P}(\pi, \lambda)$ 由 $n_{Q|P}(\pi, \lambda)$ 归一化，即

$$M_{Q|P}(\pi, \lambda) \circ j_P = n_{Q|P}(\pi, \lambda) \cdot j_Q \circ (\mathrm{Id} \otimes R_{Q|P}(\pi, \lambda)). \tag{4.12}$$

回忆一下，$\pi = \otimes_v \pi_v$，其中 $\pi_v \in \Pi(M(F_v))$。若 $\mathcal{H}_P(\pi_v)$ 是诱导表示 $\mathrm{Ind}^{G(F_v)}_{P(F_v)}(\pi_v)$ 的希尔伯特空间，则有

$$\mathcal{H}_P(\pi) \cong \bigotimes_v \mathcal{H}_P(\pi_v)$$

并且，关于此同构，可得 $R_{Q|P}(\pi, \lambda)$ 是相应局部归一化交织算子的乘积

$$R_{Q|P}(\pi, \lambda) = \otimes_v R_{Q|P}(\pi_v, \lambda) \tag{4.13}$$

[Ar4], [Ar9, § 6], [Mu2, § 2].

5. Normalizing factors

本节考察交织算子的全局正规化因子。我们的目标是估计与给定紧集相交的正规化因子的奇异超平面的数量。正规化因子可以用 L-函数表示。首先，我们回顾一些关于 L-函数的基本事实。与上文一样，设 G 是数域 F 上的约化群。回忆一下，$A_G = T_{G_1}(\mathbb{R})^0$,，其中 T_{G_1} 是 $G_1 = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G)$ 的中心的连通分支的 $\mathbb{Q}$-分裂部分，将其视为 $T_{G_1}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 的子群，因而也是 $G(\mathbb{A}_F)$ 的子群。

回忆一下，我们用 $\Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))$ 表示 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示的等价类集合，这些表示出现在 $L^2(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 的离散谱中。对于任意 $\pi = \otimes_v \pi_v \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))$，令 $S(\pi)$ 为 F 的有限个赋值的集合，其中包含所有阿基米德位，并且对每个有限位 $v \in S(\pi)$，以下条件至少有一个成立：

(1) v 是阿基米德的。(2) $F/\mathbb{Q}$ 在 v处分歧。(3) G在 v处分歧，即 G 在 F_v 上不是准分裂的，或者 G 不在 F_v的某个非分歧扩张上分裂。

(4) 对于 $G(F_v)$的每个超特殊极大紧子群 K_v， π_v 都没有被 K_v不变的非零向量。

令 S_∞ 表示 F 的阿基米德位集合，令 $S_f(\pi)$ 表示 $S(\pi)$ 中非阿基米德位的集合。因此 $S(\pi) = S_\infty \cup S_f(\pi)$。对任意 $v \in S_f(\pi)$，令 q_v 表示 F_v 的剩余域的重数。令 $S_{\mathbb{Q},f}(\pi)$ 表示位于 $S_f(\pi)$ 中各素数之下的有理素数集合。另外，令 $S_{\mathbb{Q}}(\pi) := \{\infty\} \cup S_{\mathbb{Q},f}(\pi\}$。

令 W_F 表示 F 的韦伊群，令 ${}^LG$ 表示 G [Bo2] 的 Langlands L-群。令 $r\colon {}^LG \to \mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ 为 ${}^LG$ 的连续且 W_F-半单的 N 维复表示。对于任意 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))$，以及任意满足 $v \notin S(\pi)$ 的 F 中的赋值 v，令 $t_{\pi_v} \in {}^L G$ 表示 π_v 的海克-弗罗贝尼乌斯参数。于是，局部 L-函数 $L_v(s,\pi,r)$ 定义为

$$L_v(s,\pi,r) := \det\left(\mathrm{Id} - r(t_{\pi_v}) q_v^{-s}\right)^{-1}. \tag{5.1}$$

由于 π 是酉的，$|r(t_{\pi_v})|$ 由 q_v^c界定，其中 c 仅取决于 G 和 r， [Bo2],[La2]。因此，对于 $S \supset S(\pi)$，部分 L-函数

$$L^S(s,\pi,r) := \prod_{v \notin S} L_v(s,\pi,r) \tag{5.2}$$

在 $\mathrm{Re}(s) > c+1$的紧子集上一致且绝对收敛。朗兰兹纲领的目标之一，是证明这些 L-函数中的每一个都能亚纯延拓到整个复平面，并满足函数方程。这一点远未得到证明。在 [FL1 的定义 2.1], 中，Finis 和 Lapid 对预期的函数方程提出了一个精确的表述。根据该定义，如果对于任意 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}_F)$，部分 L-函数 $L^{S(\pi)}(s,\pi,r)$ 能亚纯延拓到 $\mathbb{C}$，并满足如下形式的函数方程，则 (G,r) 具有性质 (FE):

$$L^{S(\pi)}(s,\pi,r) = \left(\prod_{p \in S_{\mathbb{Q}}(\pi)} \gamma_p(s,\pi,r)\right) L^{S(\pi)}(1-s,\pi,r^\vee), \tag{5.3}$$

其中对于每个 $p \in S_{\mathbb{Q},\ f}(\pi)$， $\gamma_p(s,\pi,r) = R_p(p^{-s})$，其中某个有理函数为 R_p，并且

$$\gamma_\infty(s,\pi,r) = C_\infty \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s+\alpha_i^\vee)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\alpha_i)} \tag{5.4}$$

对于某些参数 $\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_1^\vee, ..., \alpha_m^\vee \in \mathbb{C}$ 以及常数 C_∞。根据 [FL1，引理 2.2]，参数 $\alpha_1^\vee, ..., \alpha_m^\vee$ 由 $\alpha_1, ..., \alpha_m$确定。此外，整数 m 是唯一确定的。若对于任意 $1 \le i,j \le m$, $\alpha_i + \alpha_j$ 都不是负奇整数，则称参数 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 为约化参数。根据 [FL1，引理 2.2] ，可以选取约化参数$\alpha_1, ..., \alpha_m$。假设这一条件成立，Finis 和 Lapid 在阿基米德位处引入约化的 L-因子，定义如下:

$$L_\infty^{\mathrm{red}}(s,\pi,r) := \prod_{i=1}^m \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\alpha_i). \tag{5.5}$$

现在令 $p \in S_{\mathbb{Q}f}(\pi)$。于是根据 [FL1，(2.7)], $\gamma_p(s,\pi,r)$可以唯一地写成

$$\gamma_p(s,\pi,r) = c_p p^{\left(\frac{1}{2}-s\right)\mathfrak{e}_p(\pi,r)} P_p(p^{-s})/\bar{P}_p(p^{s-1}), \tag{5.6}$$

其中 $c_p \in \mathbb{C}^*$, $\mathfrak{e}_p(\pi,r) \in \mathbb{Z}$，且 P_p 是一个多项式，满足 $P_p(0) = 1$，使得 P_p 的零点 α 和 β 均不满足 $\alpha\bar{\beta} = p^{-1}$。于是 Finis 和 Lapid 在 p 处定义约化 L-因子如下:

$$L_p^{\mathrm{red}}(s,\pi,r) := P_p(p^{-s})^{-1}, \quad p \in S_{\mathbb{Q},f}(\pi), \tag{5.7}$$

并通过下式引入约化完备 L-函数:

$$L^{\mathrm{red}}(s,\pi,r) := \Big(\prod_{p\in S_{\mathbb{Q}}(\pi)} L_p^{\mathrm{red}}(s,\pi,r)\Big) L^{S(\pi)}(s,\pi,r). \tag{5.8}$$

此外，还有相应的约化 ε 因子 $\epsilon^{\mathrm{red}}(s,\pi,r)$，其定义如下:

$$\epsilon^{\mathrm{red}}(s,\pi,r) = c_\infty \prod_{p\in S_{\mathbb{Q},f}(\pi)} c_p p^{\left(\frac{1}{2}-s\right)\mathfrak{e}_p(\pi,r)} = \mathfrak{n}(\pi,r)^{\frac{1}{2}-s} \prod_{p\in S_{\mathbb{Q}}(\pi)} c_p, \tag{5.9}$$

其中

$$\mathfrak{n}(\pi,r) = \prod_{p\in S_{\mathbb{Q},f}(\pi)} p^{\mathfrak{e}_p(\pi,r)}. \tag{5.10}$$

于是函数方程 (5.3) 变为

$$L^{\mathrm{red}}(s,\pi,r) = \epsilon^{\mathrm{red}}(s,\pi,r) L^{\mathrm{red}}(1-s,\pi,r^\vee). \tag{5.11}$$

在 [FL1 的定义 2.4] 中，引入了性质 (FE) 的一个更强版本。若一对 (G,r) 满足 (FE)，且另外还满足关于 γ_∞ 和 P_p 的某些一致性条件，则称其满足性质 (FE+)。精确表述见 [FL1，定义 2.4]。

正规化因子在 [FL1，第 3] 节中有描述。为回顾这一描述，我们需要引入一些记号。设 $M \in \mathcal{L}$ 和 $\alpha \in \Sigma_M$。设 M_α 为 M 中余秩一的 Levi 子群˜ ˜，其定义见 [FL1，第 254], 页；同时设映射 p^{sc}: $M_\alpha^{\mathrm{sc}} \to M_\alpha$，其定义也见 [FL1，第 254] 页。此外，设 U_α 为与 α 对应的G 的幺幂子群。因此， T_M 在 U_α 的李代数上作用的特征值是 α 的正整数倍。 ${}^LM$ 在 Lie(${}^LU_\alpha$) 上的伴随作用可经由复合同态 ${}^LM \to {}^L\tilde{M}_\alpha$ 分解。 ${}^L\tilde{M}_\alpha$ 在 Lie(${}^LU_\alpha$) 上的伴随表示的对偶表示分解为 $\oplus_{j=1}^l r_j$ 个不可约表示 r_j。

根据 T. Finis 和 E. Lapid [FL1，定义 3.4]， G 满足性质 (L)：对于任意标准 Levi 子群 M、任意 $\alpha \in \Sigma_M$，以及如上所述的任意不可约成分 $r = r_j$，数对˜(M_α, r) 满足性质 (FE+) [FL1，定义 2.4] ，并满足导子条件 (CC)[FL1，定义 2.9]。

假设 G 满足性质 (L)。那么可以用 L-函数来描述正规化因子。令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$, 并令 $n_\alpha(\pi,s)$ 为式 (4.9) 中的正规化因子。首先注意到， $n_\alpha(\pi,s)$ 满足函数方程

$$n_\alpha(\pi,s)\overline{n_\alpha(\pi,-\bar{s})} = 1. \tag{5.12}$$

接下来回顾一下，当 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 时， $n_\alpha(\pi, s)$ 可分解为

$$n_\alpha(\pi, s) = \prod_v n_{\alpha,v}(\pi_v, s). \tag{5.13}$$

根据 [FL1，引理 2.13]，存在 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M_\alpha(\mathbb{A}))$以及 $M_\alpha(\mathbb{A})$的一个特征标 χ，它在 $M_\alpha(F)p^{\mathrm{sc}}(M_\alpha^{\mathrm{sc}})$上平凡，使得 $\sigma\chi$是$\pi|_{\tilde{M}_\alpha(\mathbb{A})}$的一个子表示。设

$$m(\sigma, s) := \prod_{j=1}^{l} \frac{\epsilon^{\mathrm{red}}(1, \sigma, r_j) L^{\mathrm{red}}(js, \sigma, r_j)}{L^{\mathrm{red}}(js+1, \sigma, r_j)}. \tag{5.14}$$

接着，在 [FL1 第 259]页命题 3.8 的证明末尾，已证明存在 $C > 0$ 使得

$$n_\alpha(\pi, s) = C \cdot m(\sigma, s) \cdot \prod_{j=1}^{l} \prod_{p \in S_{\mathbb{Q}}(\sigma)} \frac{L_p^{\mathrm{red}}(js+1, \sigma, r_j)}{L_p^{\mathrm{red}}(js, \sigma, r_j)} \prod_{v \in S(\sigma)} n_{\alpha,v}(\pi, s). \tag{5.15}$$

我们用这个公式估计 $n_\alpha(\pi, s)$的极点数。首先考虑两个有限乘积。为此，我们需要估计 $S(\sigma)$和 $S_{\mathbb{Q}}(\sigma)$的基数。回忆一下， σ 的层级定义为 $\mathrm{level}(\sigma) = N(\mathfrak{n})$，其中 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathcal{O}_F$中满足$\sigma^{\mathbf{K}(\mathfrak{n})\cap M_\alpha} \neq 0$的最大理想。显然有

$$|S(\sigma)|, |S_{\mathbb{Q}}(\sigma)| \leq C(1 + \log \mathrm{level}(\sigma))$$

对某个常数 $C > 0$，该常数与 σ无关。此外，回忆一下，根据 [FL1 第 2.3], 节，$\mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}})$ 定义为 $\mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}}) = N(\mathfrak{n})$，其中 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathcal{O}_F$ 中满足 $\pi^{\mathbf{K}(\mathfrak{n})\cap p^{\mathrm{sc}}(M_{\mathrm{sc}\alpha})} \neq 0$ 的最大理想。

根据 [FL1，引理 2.13]，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$，它仅依赖于 p^{sc} 和 G，使得对于每个 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$，相应的表示 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M_\alpha(\mathbb{A}))$ 满足：$\mathrm{level}(\sigma)$ 整除 $N_1 \mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}})$。因此存在 $C > 0$，使得

$$|S_{\mathbb{Q}}(\sigma)|, |S(\sigma)| \leq C \log \mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}}) \tag{5.16}$$

对于所有按上述方式相关的 π 和 σ，

现在考虑 (5.15) 右端的最后一个乘积。令 $v \in S_f(\sigma)$。根据[FL1，第 255 页，(1)], $n_{\alpha,\, v}(\pi, s)$ 是关于 $X = q_v^{-s}$ 的有理函数，其次数仅由 G 控制，并且在 $X = 0$ 处正则且非零。因此，$n_{\alpha,\, v}(\pi, s)$ 的极点构成有限个等差数列的并集，数列的虚数差相同，且数列的个数由仅依赖于 G 的常数所界。

若 $v \in S_\infty(\sigma)$，则根据 [FL1，第 255 页，(2)]，我们有

$$n_{\alpha,v}(\pi, s) = c_v \prod_{i=1}^{N_v} \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(j_i s + \alpha_i)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(j_i s + \alpha_i + 1)}, \tag{5.17}$$

其中 $c_v \neq 0, \alpha_1, ..., \alpha_{N_v} \in \mathbb{C}$ 以及整数 $N_v \geq 1$ 和 $j_i \geq 1, i = 1, ..., N_v$ 仅依赖于 G 且有界。回想一下， $\Gamma(z)$ 没有零点，且其极点都是简单极点，并出现在负整数处。令 $R > 0$。由此可知，在一个固定的

半带状区域 $|\mathrm{Im}(s)| \leq R, \mathrm{Re}(s) \geq -R$ 中，$| \leq R$的极点数有一个与 π无关的上界。因此，由 (5.16) 可知，对每个 $R > 0$，都存在一个与 π无关的 $C_1 > 0$，使得最后一个乘积在半带状区域 $|\mathrm{Im}(s)| \leq R, \mathrm{Re}(s) \geq -R$内的极点数（按重数计）不超过 $C_1 \log \mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}})$。

接下来我们处理关于 $S_{\mathbb{Q}}(\sigma)$ 的乘积。令 $p \in S_{\mathbb{Q},f}(\sigma)$。由 (5.7) 可知，存在一个多项式 $P_p(x; \sigma, r_j)$，使得 $L_p^{\mathrm{red}}(s, \sigma, r_j) = P_p(p^{-s}; \sigma, r_j)^{-1}$。根据定义，$(G, r_j)$ 满足性质 (FE+) [FL1，定义 2.4]。根据该定义的 (2)，$P_p(x; \sigma, r_j)$ 的次数仅由 (G, r_j) 决定的界所约束。因此，$L_p(s, \sigma, r_j)$ 的极点构成有限个等差数列的并，其虚数差为固定值，并且数列的数量由一个仅依赖于 (G, r_j) 的常数所界定。于是，对每个 $R > 0$，存在仅依赖于 (G, r_j) 的 $C > 0$，使得 $L_p(s, \sigma, r_j)$ 在带状区域 $|\mathrm{Im}(s)| \leq R$ 内的极点数被 C 所界定。对于 $p = \infty$，我们使用 (5.5)。根据 [FL1，定义 2.4，(3)],，存在仅依赖于 (G, r_j) 的 $\beta \in \mathbb{R}$，使得约化参数α_i 满足 $\mathrm{Re}(\alpha_i) \geq -\beta$, $i = 1, ..., l$，且 $\gamma_\infty(s, \sigma, r_j)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > \beta$ 中没有零点。因此，如上所述，$L_p^{\mathrm{red}}(js + 1, \sigma, r_j)/L_p^{\mathrm{red}}(js, \sigma, r_j)$ 在半带状区域 $|\mathrm{Im}(s)| \leq R$、$\mathrm{Re}(s) \geq -R$ 内的极点数（按其重数计）由一个与 π 无关的常数所界定。利用 (5.16) 可得，对于每个 $R > 0$，存在 $C_2 > 0$，使得关于 $S_{\mathbb{Q}}(\sigma)$ 的乘积在半带状区域$|\mathrm{Im}(s)| \leq R$、$\mathrm{Re}(s) \geq -R$ 内的极点数（按其重数计）被 $C_2 \log$ 层级$(\pi; p^{\mathrm{sc}})$ 所界定。

因此，只需考虑 $m(\sigma, s)$。令 $r := r_j$，其中 j，并令

$$\Lambda(s, \sigma, r) := \mathfrak{n}(\sigma, r)^{s/2} L^{\mathrm{red}}(s, \sigma, r), \tag{5.18}$$

其中 $\mathfrak{n}(\sigma, r)$ 由 (5.10) 定义。于是，利用函数方程 (5.11) 以及由 (5.9) 给出的 ε 因子的定义，可得 $\Lambda(s, \sigma, r)$ 满足

$$\Lambda(s, \sigma, r) = \epsilon^{\mathrm{red}}(\frac{1}{2}, \sigma, r)\overline{\Lambda(1 - \bar{s}, \sigma, r)}. \tag{5.19}$$

由 (5.9) 和 (5.18) 可得

$$\frac{\Lambda(s, \sigma, r)}{\overline{\Lambda(-\bar{s}, \sigma, r)}} = \frac{\epsilon^{\mathrm{red}}(1, \sigma, r) L^{\mathrm{red}}(s, \sigma, r)}{L^{\mathrm{red}}(s + 1, \sigma, r)}. \tag{5.20}$$

因此，由定义 (5.14) 可得

$$m(\sigma, s) = \prod_{j=1}^{l} \frac{\Lambda(js, \sigma, r_j)}{\overline{\Lambda(-j\bar{s}, \sigma, r_j)}}. \tag{5.21}$$

如 [FL1 命题 2.6] 的证明中所述，$\Lambda(s, \sigma, r)$ 是两个一阶全纯函数的商。因此，$\Lambda(s, \sigma, r)$ 可作阿达马分解

$$\Lambda(s, \sigma, r) = e^{a+bs} s^{n(0)} \prod_{\rho \neq 0} \left[(1 - s/\rho) e^{s/\rho}\right]^{n(\rho)}, \tag{5.22}$$

其中 $a, b \in \mathbb{C}$ 的乘积遍历 $\Lambda(s)$ 的非零零点和极点，而$n(\rho)$ 是函数 $\Lambda(s)$ 在 $s = \rho$ 处的重数。在 [FL1 命题 2.6] 的证明中

已证明，性质 (FE+) 的条件、 [FL1 定义 2.4]，与函数方程 (5.19) 一起蕴含存在一个仅取决于 G 和 r 的 $A \geq 1$，使得 $\Lambda(s,\sigma,r)$ 的所有零点和极点都位于带状区域 $1-A \leq \mathrm{Re}(s) \leq A$ 中。此外，根据 [FL1 (2.12)] ，对于 $T \geq 0$

$$\sum_{\rho:\,|\mathrm{Im}(\rho)-T|<2} |n(\rho)| \ll \log \mathfrak{n}(\sigma,r) + \sum_{p\in S_{\mathbb{Q},f}(\sigma)} \log p + \log \mathfrak{c}_\infty(\sigma,r) + \log(1+|T|) + 1, \tag{5.23}$$

其中， $\mathfrak{c}_\infty(\pi,r)$ 是由 [FL1, (2.6)] 定义的阿基米德导子，而 $\mathfrak{n}(\sigma,r)$ 是有限导子 (5.10)。由于我们假设 G 满足性质 (L)，因此 (M_α, r_j) 满足性质 (CC)。令 $\Lambda(\pi_\infty; p^{\mathrm{sc}})$ 由 [FL1, (2.18)] 定义。于是，根据 [FL1, (2.14), (2.15)] 和 [FL1，引理 2.13]，我们得到

$$\sum_{\rho:\,|\mathrm{Im}(\rho)-T|<2} |n(\rho)| \ll \log(|T|+2) + \log \mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}}) + \log \Lambda(\pi_\infty; p^{\mathrm{sc}}). \tag{5.24}$$

我们将 (5.24) 与上述关于 (5.15) 中其他因子的结果结合起来。注意，根据函数方程 (5.12)， $n_\alpha(\pi,s)$ 的极点包含在某个带状区域 $|\mathrm{Re}(s)| \leq C$ 内，其中 $C>0$ 取某个值。我们可以将结果概括如下。记 $\Sigma_\alpha(\pi)$ 为 $n_\alpha(\pi,s)$ 的极点。给定 $\rho \in \Sigma_\alpha(\pi)$，记 $n(\rho)$ 为其重数。然后结合上述关于 (5.15) 中其他因子的结果，我们得到以下命题。

命题 5.1. 假设 G 满足性质 (L)。令 $M \in \mathcal{L}$, $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$，并令$\alpha \in \Sigma_M$。令 $\Sigma_\alpha(\pi)$为 $n_\alpha(\pi,s)$ 的极点集合，并对任意 $\rho \in \Sigma_\alpha(\pi)$，用 $n(\rho)$ 表示极点 ρ 的重数。那么对每个 $R>0$，都存在 $C>0$，使得

$$\sum_{\rho\in\Sigma_\alpha(\pi),|\mathrm{Im}(\rho)|<R} |n(\rho)| \leq C(1+\log \mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}}) + \log \Lambda(\pi_\infty; p^{\mathrm{sc}})). \tag{5.25}$$

令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$。令 $W_P(\pi_\infty)$ 为 $\mathrm{Ind}_{P\,\mathbb{R}\,()}^{G(\mathbb{R})}(\pi_\infty)$ 的极小 K_∞-类型集合。那么$W_P(\pi_\infty)$ 是 $\Pi(K_\infty)$ 的一个非空有限子集。令 λ_{π_∞} 为 π_∞ 的卡西米尔特征值，并对每个 $\tau \in \Pi(K_\infty)$，令 λ_τ 为 τ 的卡西米尔特征值。设

$$\Lambda_{\pi_\infty} := \min_{\tau\in W_P(\pi_\infty)} \sqrt{\lambda_{\pi_\infty}^2 + \lambda_\tau^2}. \tag{5.26}$$

于是由 [FLM2, (10)]可得

$$\Lambda(\pi_\infty; p^{\mathrm{sc}}) \ll_G 1 + \Lambda_{\pi_\infty}^2. \tag{5.27}$$

令 K_f 为 $G(\mathbb{A}_f)$ 的一个开紧子群。设

$$\Pi(M(\mathbb{A}); K_f) := \{\pi \in \Pi(M(\mathbb{A}) \colon \pi_f^{K_f\cap M(\mathbb{A}_f)} \neq 0\}. \tag{5.28}$$

此外，给定 $\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$，令

$$\Pi(M(\mathbb{A}); K_f, \nu) = \{\pi \in \Pi(M(\mathbb{A}); K_f) \colon [\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}(\pi_\infty)|_{K_\infty} : \nu] > 0\} \tag{5.29}$$

并令

$$\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A});K_f,\nu)=\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))\cap\Pi(M(\mathbb{A});K_f,\nu). \tag{5.30}$$

现在回顾 level$(\pi;p^{\mathrm{sc}})$ [FL1, 第 2.3] 节的定义。由此可知，存在 $C>0$，使得对所有 $\pi\in\Pi(M(\mathbb{A});K_f)$，都有 level$(\pi;p^{\mathrm{sc}})\le C$。此外，由 (5.26) 可知，存在 $C_1>0$，使得对所有 $\pi\in\Pi(M(\mathbb{A});K_f,\nu)$，都有 $\Lambda^2_{\pi_\infty}\le C_1(1+\lambda^2_{\pi_\infty})$；而由 (5.27) 可知，在这种情况下，$\Lambda(\pi_\infty;p^{\mathrm{sc}})\ll_G(1+\lambda^2_{\pi_\infty})$。由此我们得到

推论 5.2. 假设 G 满足性质 (L)。令 K_f 为 $G(\mathbb{A}_f)$ 的一个开紧子群，并令 $\nu\in\Pi(K_\infty)$。令 $M\in\mathcal{L}$ 和 $\alpha\in\Sigma_M$。沿用上述记号。对于每个 $R>0$，都存在 $C>0$，使得

$$\sum_{\rho\in\Sigma_\alpha(\pi),|\,\mathrm{Im}(\rho)|<R}|n(\rho)|\le C(1+\log(1+\lambda^2_{\pi_\infty})) \tag{5.31}$$

对所有 $\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A});\ K_f、\ \nu)$。

6. Logarithmic derivatives of local intertwining operators

在本节中，我们将证明关于局部交织算子的一些辅助结果。首先回顾关于局部交织算子和正规化因子的一些事实。设 $M\in\mathcal{L}$ 和 $P、\ Q\in\mathcal{P}(M)$。令 v 为 F 的一个赋值。若 v 为有限赋值，令 K_v 为 $G(F_v)$ 的一个开紧子群；若 $v\in S_\infty$，令 K_v 为 $G(F_v)$ 的一个极大紧子群。令 $\pi_v\in\Pi(M(F_v))$。给定 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$，令 $(I_P^G(\pi_v,\lambda)\ \mathcal{H}_P(\pi_v))$ 表示该诱导表示。令 $\mathcal{H}^0_P(\pi_v)\subset\mathcal{H}_P(\pi_v)$ 为 K_v-有限函数构成的子空间。令

$$J_{Q|P}(\pi_v,\lambda)\colon\mathcal{H}^0_P(\pi_v)\to\mathcal{H}^0_Q(\pi_v)$$

为诱导表示 $I_P^G(\pi_v,\lambda)$ 与 $I_Q^G(\pi_v,\lambda)$ [Sh1] 之间的局部交织算子。[Ar4], [CLL，第 15] 讲中证明了，存在关于 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 的标量值亚纯函数 $r_{Q|P}(\pi_v,\lambda)$，使得正规化交织算子

$$R_{Q|P}(\pi_v,\lambda)=r_{Q|P}(\pi_v,\lambda)^{-1}J_{Q|P}(\pi_v,\lambda) \tag{6.1}$$

满足 [Ar4] 的定理 2.1 的条件 $(R_1)-(R_8)$。我们回顾一些关于局部正规化因子的事实。首先，假设 v 是 F 的有限赋值，且 $q_v\in\mathbb{N}$ 是 F_v 的剩余域的基数。此外，假设 $\dim(\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G)=1$，且 π_v 平方可积。令 $P\in\mathcal{P}(M)$，并令 α 为 (P,T_M) 的唯一单根。那么 Langlands [CLL, Lecture 15] 已证明，存在一个单变量有理函数 $V_P(\pi_v,z)$，使得

$$r_{\overline{P}|P}(\pi_v,\lambda)=V_P(\pi_v,q_v^{-\lambda(\widetilde{\alpha})}), \tag{6.2}$$

其中，$\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{a}_M$ 由 α 唯一确定。关于 V_P 的构造，另请参见 [Mu2，第3]节。在该参考文献中，只讨论了 $\mathbb{Q}_v$ 的情形。然而，F_v 的情形也可以完全以同样的方式处理。我们需要以下引理。

引理 6.1. 设 $M \in \mathcal{L}$ 满足 $\dim(\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G) = 1$。存在 $C > 0$，使得对于所有 $P \in \mathcal{P}(M)$以及所有 $\pi \in \Pi(M(F_v))$，有理函数 $V_P(\pi, z)$的零点数小于或等于 C。

证明见 [MM2，引理 10.1]。同样，证明是针对 $\mathbb{Q}_v$完成的。它无需任何修改即可推广到 F_v。

本节的主要目标是估计归一化交织算子 $R_{Q|P}(\pi, \lambda)$ 的对数导数。对于 $G = \mathrm{GL}(n)$，此类估计已在 [MS，命题 0.2] 中导出。证明依赖于弱形式的拉马努金猜想，而这一猜想一般并不可用。因此，我们将只建立其积分形式；不过，这对于我们的目的已经足够。对于 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$，用 $\mathcal{H}_P(\pi)$ 表示诱导表示 $I_P^G(\pi, \lambda)$ 的希尔伯特空间。此外，对于开紧子群 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 和 $\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$，用 $\mathcal{H}_P(\pi)^{K_f}$ 表示在 K_f 下不变的向量所构成的子空间，并令 $\mathcal{H}_P(\pi)^{K_f,\,\nu}$表示 ν-等型子空间 $\mathcal{H}_P(\pi)^{K_f}$。设 $P, Q \in \mathcal{P}(M)$ 为相邻抛物子群。那么，$R_{Q|P}(\pi, \lambda)$ 只依赖于单个变量 $s \in \mathbb{C}$，我们将其写作

$$R'_{Q|P}(\pi, s_0) := \frac{d}{ds} R_{Q|P}(\pi, s)\big|_{s=s_0}$$

对任意正则的 $s_0 \in \mathbb{C}$。

命题 6.2。设 $M \in \mathcal{L}$，且设 $P, Q \in \mathcal{P}(M)$ 为相邻抛物子群。设$K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 为开紧子群，并设 $\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$。则存在 $C > 0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| R_{Q|P}(\pi, iu)^{-1} R'_{Q|P}(\pi, iu)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi)^{K_f,\nu}} \right\| e^{-tu^2}\, du \le C t^{-1/2} \tag{6.3}$$

对所有满足 $\mathcal{H}_P(\pi)^{K_f,\,\nu} \neq 0$ 的 $0 < t \le 1$和 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$。

证明。我们可以假设 K_f 是可分解的，即 $K_f = \prod_v K_v$。设 S 为有限赋值的有限集合，使得 K_v 不是超特殊的。由于 P 和 Q 相邻，根据归一化交织算子的一般性质（参见 Ar4，定理 2.1]），我们可以假设 P 是极大抛物子群，而 $Q = \overline{P}$ 是 P 的对置抛物子群。根据 Ar4，定理 2.1，(R8)], $R_{\overline{P}|P}(\pi_v, s)^{K_v}$ 在 v 为有限且 $v \notin S$ 时与 s 无关。因此我们有

$$\begin{aligned} R_{\overline{P}|P}(\pi, s)^{-1} R'_{\overline{P}|P}(\pi, s)\big|_{H_P(\pi)^{K_f,\nu}} &= R_{\overline{P}|P}(\pi_\infty, s)^{-1} R'_{\overline{P}|P}(\pi_\infty, s)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_\infty)^{\nu}} \\ &\quad + \sum_{v \in S} R_{\overline{P}|P}(\pi_v, s)^{-1} R'_{\overline{P}|P}(\pi_v, s)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}} \end{aligned} \tag{6.4}$$

这将我们的问题归结为局部处上的算子。我们区分阿基米德情形和非阿基米德情形。

情形 1： $v<\infty$。定义 A_v： $\mathbb{C}\to \mathrm{End}(\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v})$ ，如下：

$$A_v(q_v^{-s}) := R_{\overline{P}|P}(\pi_v,s)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}}.$$

这是一个取值于有限维向量空间的端同态空间中的亚纯函数。它具有以下性质。由 $R_{\overline{P}|P}(\pi_v,iu)$ 的酉性可知，$u\in\mathbb{R}$，因此 $A_v(z)$ 对 $z\in S^1$ 全纯，并满足 $\|A_v(z)\|\le 1$, $|z|=1$。由 [Ar4 定理 2.1]，可知， $A_v(z)$ 的矩阵系数是有理函数。回忆一下，算子 $R_{\overline{P}|P}(\pi_v,iu)$ 是酉的。如 [FLM2，（14）]，我们得到

(6.5)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Big\|R_{\overline{P}|P}(\pi_v,iu)^{-1}R'_{\overline{P}|P}(\pi_v,iu)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}}\Big\| e^{-tu^2}du &= \int_{\mathbb{R}}\Big\|R'_{\overline{P}|P}(\pi_v,iu)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}}\Big\| e^{-tu^2}du\\ &\le 2\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-t\frac{4\pi^2n^2}{(\log q_v)^2}\right)\int_0^{\frac{2\pi}{\log q_v}}\Big\|R'_{\overline{P}|P}(\pi_v,iu)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}}\Big\|du\\ &\le 2\left(1+\int_0^{\infty}\exp\left(-t\frac{4\pi^2x^2}{(\log q_v)^2}\right)dx\right)\int_0^{\frac{2\pi}{\log q_v}}\Big\|R'_{\overline{P}|P}(\pi_v,iu)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}}\Big\|du\\ &= \left(2+\frac{\log q_v}{\pi}\cdot t^{-1/2}\right)\int_{S^1}\|A'_v(z)\|\,|dz|.\end{aligned}$$

如上所述， A_v 满足 [FLM2 推论 5.18] 的假设。记 $z_1,\dots,z_m\in\mathbb{C}\setminus S^1$ 为 $A_v(z)$ 的极点。则 $(z-z_1)\cdots(z-z_m)A_v(z)$ 是一个次数为 n、系数取自 $\mathrm{End}(\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v})$ 的多项式；由 [FLM2 推论 5.18]，我们得到

$$\|A'_v(z)\|\le \max\left(\max(n-m,0)+\sum_{j:\,|z_j|>1}\frac{|z_j|^2-1}{|z_j-z|^2},\ \sum_{j:\,|z_j|<1}\frac{1-|z_j|^2}{|z_j-z|^2}\right),\quad z\in S^1. \tag{6.6}$$

现在注意到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}|dz|=1.$$

$z_0\in\mathbb{C}$, $|z_0|<1$。这是因为被积函数是泊松核，因此该积分是单位圆盘上唯一一个在边界上取值为 1 的调和函数。它就是常函数 1。因此，由 (6.6) 可得

$$\int_{S^1}\|A'_v(z)\|\,|dz|\le 2\pi\max(m,n). \tag{6.7}$$

接下来我们估计 m 和 n。首先考虑 m。令 $J_{\overline{P}|P}(\pi_v,s)$ 为通常的交织算子，使得

$$R_{\overline{P}|P}(\pi_v,s)=r_{\overline{P}|P}(\pi_v,s)^{-1}J_{\overline{P}|P}(\pi_v,s),$$

其中 $r_{\overline{P}|P}(\pi_v,s)$ 是正规化因子 [Ar4]。根据 [Sh1，定理 2.2，2] 存在一个多项式 $p(z)$，满足 $p(0)=1$，其次数有一个与 π_v 无关的上界，使得$p(q_v^{-s})J_{\overline{P}|P}(\pi_v,s)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。为处理正规化因子，我们使用 (6.2)

再结合引理 6.1，计算 $r_{\overline{P}|P}(\pi_v, s)^{-1}$ 的极点个数。这将得到一个仅依赖于 G 的 m 上界。为估计 n，我们固定 $G(F_v)$ 的一个开紧子群 K_v。现在的目标是估计 $R_{\overline{P}|P}(\pi_v, s)$ 的任意矩阵系数在 $z = q_v^{-s}$ 处的重数，将其视为 $z = q_v^{-s}$ 的函数。将 π_v 写成 Langlands 商 $\pi_v = J_R^M(\delta_v, \mu)$，其中$R$ 是 M 的一个抛物子群，δ_v 是 $M_R(F_v)$ 的一个平方可积表示，且$\mu \in (\mathfrak{a}_R^*/\mathfrak{a}_M^*)_{\mathbb{C}}$ 的 $\mathrm{Re}(\mu)$ 位于与 R 关联的室内。于是根据 [Ar4，第 30] 页，我们有

$$R_{\overline{P}|P}(\pi_v, s) = R_{\overline{P}(R)|P(R)}(\delta_v, s + \mu)$$

相对于 [Ar4，第 30] 页中所述的识别。这里，s 相对于典范嵌入 $\mathfrak{a}_M^* \subset \mathfrak{a}_G^*$被识别为 $(\mathfrak{a}_R^*/\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}}$ 中的一个点。再次利用归一化交织算子的分解，我们将问题归结为平方可积表示 δ_v的情形。此外，δ_v 必须满足 $[I_P^G(\delta_v, s)\big|_{K_v} : \mathbf{1}] \geq 1$。根据 [Si，引理 1]，我们有

$$[I_P^G(\delta_v, s)\big|_{K_v} : \mathbf{1}] \geq 1 \Leftrightarrow [\delta_v\big|_{K_v \cap M(F_v)} : \mathbf{1}] \geq 1 \tag{6.8}$$

令 $\Pi_2(M(F_v))$ 表示 $M(F_v)$的平方可积表示空间。该空间具有流形结构 [HC1], [Si]。根据 [HC1，定理 10]，$M(F_v)$中满足 $[\delta_v\big|_{K_v \cap M(F_v)} : \mathbf{1}] \geq 1$的平方可积表示集合 $\Pi_2(M(F_v)\ K_v)$ 是 $\Pi_2(M(F_v))$ 的紧子集。在 $i\mathfrak{a}_M$的典范作用下，集合 $\Pi_2(M(F_v)\ K_v)$ 分解为有限多个轨道。对于 $\mu \in i\mathfrak{a}_M$和 $\delta_v \in \Pi_2(M(F_v)\ K_v)$，令 $(\delta_v)_\mu \in \Pi_2(M(F_v)\ K_v)$ 表示典范作用的结果。于是可得

$$R_{\overline{P}|P}((\delta_v)_\mu, \lambda) = R_{\overline{P}|P}(\delta_v, \lambda + \mu).$$

这样，我们的问题最终归结为考察有限个表示 π_v 的矩阵系数 $R_{\overline{P}|P}(\pi_v, s)\big|_{K_v}$。这意味着 n 被一个与 π_v 无关的常数所界定。结合 (6.7) 可知，对于 F 的每个有限位 v，以及 $G(F_v)$ 的每个开紧子群 K_v，存在 $C_v > 0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| R_{\overline{P}|P}(\pi_v, iu)^{-1} R'_{\overline{P}|P}(\pi_v, iu)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}} \right\| e^{-tu^2} du \leq C_v t^{-1/2} \tag{6.9}$$

对于所有 $0 < t \leq 1$ 和满足 $I_P^G(\pi_v)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}} \neq 0$ 的 $\pi_v \in \Pi(M(F_v))$，均成立。

情形 2：$v = \infty$。首先，我们需要对 [FLM2 的引理 5.19] 作一处修改。

引理 6.3。设 $z_j \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$，并令 $b(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_m)$。假设 A: $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_m\} \to V$ 满足：对所有 $z \in i\mathbb{R}$，$\|A(z)\| \leq 1$，且 $b(z)A(z)$ 是关于 $z \in \mathbb{C}$ 的多项式（其次数必为 $\leq m$），系数取自 V。那么

$$\int_{\mathbb{R}} \|A'(iu)\| e^{-tu^2} du \leq 2\pi m$$

对所有 $0 \leq t$。

证明。对于任意 $w \in \mathbb{C}$，令 $\phi_w(z) := \frac{z+\bar{w}}{z-w}$，并设

$$\phi_>(z) = \sum_{j:\mathrm{Re}(z_j)>0} \phi_{z_j}(z), \quad \phi_<(z) = \sum_{j:\mathrm{Re}(z_j)<0} \phi_{z_j}(z).$$

应用 [BE 定理 4]，可得

$$\|A'(z)\| \le \max\{|\phi'_>(z)|, |\phi'_<(z)|\} \le |\phi'_>(z)| + |\phi'_<(z)|, \quad z \in i\mathbb{R}. \tag{6.10}$$

现在注意，对于 $w = x + iy \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$，有 $|\phi'_w(z)| = \frac{2|x|}{|z-w|^2} = \frac{2|x|}{x^2+(u-y)^2}$，其中 $z = iu$，$u \in \mathbb{R}$。因此我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\phi'_w(iu)| e^{-tu^2} du &\le \int_{\mathbb{R}} \frac{2|x|}{x^2+(u-y)^2} du = \frac{2}{|x|} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+(\frac{u}{|x|} - \frac{y}{|x|})^2} du \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+(u-\frac{y}{|x|})^2} du = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1+u^2} = 2\pi.\end{aligned}$$

结合 (6.10)，引理得证。 □

如上，令 $M \in \mathcal{L}$，其中 $\dim(\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G) = 1$，且 $P \in \mathcal{P}(M)$。令 $\pi_\infty \in \Pi(M(F_\infty))$，且 $\nu \in \Pi(K_\infty)$。如 [MS，附录]，中所述，存在 $w_1, ..., w_r \in \mathbb{C}$ 以及 $m \in \mathbb{N}$，使得 $R_{\overline{P}|P}(\pi_\infty, s)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_\infty)^\nu}$ 的极点包含于 $\cup_{j=1}^r \{w_j - k\colon k = 1, ..., m\}$。此外，根据 [MS，命题 A.2]，存在仅依赖于 G 的 $c > 0$，使得

$$r \le c, \quad m \le c(1 + \|\nu\|). \tag{6.11}$$

令 $A\colon \mathbb{C} \to \mathcal{H}_P(\pi_\infty)^\nu$ 定义为

$$A(z) := R_{\overline{P}|P}(\pi_\infty, z)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_\infty)^\nu}$$

并令 $b(z) = \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^m (z - w_j + k)$。由 [Ar4 定理 2.1] 的 (R_6) 可知，$b(z)A(z)$ 是一个多项式函数。此外，由于 $R_{\overline{P}|P}(\pi_\infty, it)$ 的酉性，$t \in \mathbb{R}$，我们有 $\|A(it)\| = 1$。因此，$A(z)$ 满足 [FLM2 引理 5.19] 的假设。于是，由引理 6.3 和 (6.11) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left\| R_{\overline{P}|P}(\pi_\infty, iu)^{-1} R'_{\overline{P}|P}(\pi_\infty, iu)\big|_{\mathcal{H}_P(\pi_\infty)^\nu} \right\| e^{-tu^2} du &= \int_{\mathbb{R}} \|A'(iu)\| e^{-tu^2} du \\ &\le 2\pi r \cdot m \le 2\pi c^2 (1 + \|\nu\|).\end{aligned} \tag{6.12}$$

结合 (6.4)、(6.9) 和 (6.12)，命题得证。

注 6.4。对于 $G = \mathrm{GL}_n$，[MS，命题 0.2] 证明了相应的界也适用于局部交织算子本身的导数。这是弱形式的拉马努金猜想的推论，该猜想意味着局部交织算子的极点与虚轴之间的距离有一致的正下界。对于积分导数而言，极点与虚轴之间的距离并不重要。

□

7. The residual spectrum

本节的目标是估计剩余谱计数函数的增长。为此，我们回顾剩余谱的构造。根据 Langlands[La1，第 7], [MW，V.3.13]， $L^2{}_{\text{res}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 由尖点型艾森斯坦级数的迭代留数张成。我们简要回顾这一构造。

设 $P = M \ltimes N$ 是 G 的一个 F-有理抛物子群。若 $\alpha \in \Sigma_P$，则用 $\alpha^\vee$ 表示与 α 相伴的余根。给定 $\alpha \in \Sigma_P$ 和 $c \in \mathbb{R}$，我们定义

$$H(\alpha, c) := \{\Lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \colon \Lambda(\alpha^\vee) = c\}.$$

若仿射子空间 $\mathcal{H} \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 是此类超平面的交集，则称其为容许的。设 $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2$ 是 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 中的两个容许仿射子空间，且 $\mathcal{H}_2$ 在 $\mathcal{H}_1$ 中的余维为一。设 $\Phi(\Lambda)$ 是定义在 $\mathcal{H}_1$ 上的亚纯函数，其奇点位于超平面上，而这些超平面作为 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 的子空间是容许的。取 Λ_0，使其为 $\mathcal{H}_1$ 中垂直于 $\mathcal{H}_2$ 的实单位向量。设 $\delta > 0$ 满足 $\Phi(\Lambda + z\Lambda_0)$ 在穿孔圆盘 $0 < |z| < 2\delta$ 内没有奇点。于是我们可以在 $\mathcal{H}_2$ 上定义亚纯函数 $\operatorname{Res}_{\mathcal{H}_2}\Phi$，如下：

$$\operatorname{Res}_{\mathcal{H}_2}\Phi(\Lambda) := \frac{\delta}{2\pi i}\int_0^1 \Phi(\Lambda + \delta e^{2\pi i\vartheta}\Lambda_0)d(e^{2\pi i\vartheta}),$$

$\operatorname{Res}_{\mathcal{H}_2}\Phi$ 的奇点位于与 $\mathcal{H}_2$ 的交集上，其中 $\mathcal{H}_2$ 是Φ 中不同于 $\mathcal{H}_2$的奇异超平面。现在考虑一个完全旗

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* = \mathcal{H}_p \supset \mathcal{H}_{p-1} \supset \cdots \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_0 = \{\Lambda_0\}$$

由 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 的仿射可容许子空间组成，并令 $\Lambda_i \in \mathcal{H}_i$ 为一个实单位向量，它垂直于 $\mathcal{H}_{i-1}$、$i = 1$、.....、p。我们称 $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_i, \Lambda_i\}$ 为一个容许旗。设 Φ 是定义在 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上的亚纯函数，其奇点位于 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$的容许超平面上。然后我们通过归纳定义$\Phi_i$：

$$\Phi_p = \Phi,\ \Phi_i = \operatorname{Res}_{\mathcal{H}_i}\Phi_{i+1},\quad i = 0, \ldots, p-1.$$

Set

$$\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}\Phi := \Phi_0.$$

这就是 Φ 在 Λ_0处的迭代留数。

现在令 $\mathcal{A}^2\,\text{cus}(P)$ 为函数 $\phi \in \mathcal{A}^2(P)$ 的子空间，使得对于几乎所有 $x \in G(\mathbb{A})$，函数 $\phi_x(m) := \phi(mx)$ 在 $M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1$ 上属于空间 $L^2\text{cus}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1)$。对于$\pi \in \Pi_{\text{cus}}(M(\mathbb{A})^1)$，令 $\mathcal{A}^2\,\text{cus}_\pi(P)$ 为函数 $\phi \in \mathcal{A}^2\,\text{cus}(P)$ 的子空间，使得其中每个函数 ϕ_x 都属于子空间 $L^2\,\text{cus}_\pi(M(F)\backslash M(A)^1)$（等型子空间）。令$\phi \in \mathcal{A}^2\ \text{cus}(P)$。正如 Langlands [La1, §7], 所示，艾森斯坦级数$E(\phi, \lambda)$ 的奇点位于 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 的超平面上，这些超平面由形如 $\Lambda(\alpha^\vee) = w, w \in \mathbb{C}, \alpha \in \Sigma_P$ 的方程定义。令 $H(\alpha_i, c_i)$, $i = 0, \ldots, p-1$为 $E(\phi, \lambda)$ 的一组奇异超平面，其中 $\cap_i H(\alpha_i, c_i) = \{\Lambda_0\}$。置 $\mathcal{H}_i := \cap_{j \geq i} H(\alpha_j, c_j)$, $i = 0, \ldots, p-1$, 并令 $\mathcal{H}_P = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$。选取与 $\mathcal{H}_{i-1}$ 正交的实单位向量 $\Lambda_i \in \mathcal{H}_i$。则 $\mathcal{F} := \{\mathcal{H}_i, \Lambda_i\}$ 是一个容许旗。

此外，令 $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{a})$，并令 $\hat{\varphi}(\Lambda)$ 为其傅里叶变换。它在$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$上是全纯的。置

$$\psi := \mathrm{Res}_{\mathcal{F}}\big[E(\phi,\Lambda)\hat{\varphi}(\Lambda)\big].$$

注意，ψ 仅取决于 $\hat{\varphi}$ 在 Λ_0处的导数。令 $\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*)$ 为由 (P,A) 的单根在$\mathfrak{a}^*$ 中张成的正锥。若 $\Lambda_0 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^*)$，则 ψ 平方可积。令 $\Omega_M \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})$ 为 $M(F_\infty)$ 的卡西米尔元。假设 $\Omega_M\phi = \mu\phi$。于是可得

$$\Omega\psi = (\|\Lambda_0\|^2 - \|\rho_P\|^2 + \mu)\psi. \tag{7.1}$$

[HC2，第 29] 页。此外 $\|\Lambda_0\| \le \|\rho_P\|$。正如 Langlands 在 [La1，定理 7.2]，[MW，V.3.13] 中所示，L^2 剩余谱$(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 由所有此类 ψ 张成，其中 P 遍历 G 的标准抛物子群，π 遍历 $\Pi_{\mathrm{cus}}(M_P(\mathbb{A})^1)$，而 ϕ 遍历 $\mathcal{A}^2{}_{\mathrm{cus}\,\pi}(P)$ 的一组基。关于离散谱和剩余谱描述的所有细节，见 [MW，定理 V.3.13，第 221]，页，以及 [MW，推论，第 224] 页。此外，关于正性的问题见 [MW，推论 VI.1.6 (d)，第 255] 页。

设 K_f 是 $G(\mathbb{A}_f)$ 的开紧子群。令 $L^2\mathrm{res}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f}$ 为 $L^2\mathrm{res}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 中 K_f-不变函数构成的子空间。此外，对于 $\nu \in \Pi(\mathbf{K}_\infty)$，令 $L^2\mathrm{res}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f,\nu}$ 为 $L^2\mathrm{res}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f}$ 的 ν-等型子空间。那么，$L^2\mathrm{res}(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{K_f,\nu}$ 由上述留数张成；对于给定的一对 (P,π)，ϕ 遍历 $\mathcal{A}^2\ \mathrm{cus}_\pi(P)^{K_f,\sigma}$ 的一组基。回顾一下，$\mathcal{A}^2\ \mathrm{cus}_\pi(P)^{K_f,\sigma}$ 是有限维的。因此，剩余谱计数函数的估计可归结为以下问题：

(1) 估计 $\dim\ \mathcal{A}^2{}_{\mathrm{cus}\,\pi}(P)^{K_f,\sigma}$ 关于 π、K_f 和 σ 的大小。(2) 对于给定的尖点型艾森斯坦级数 $E(\phi,\Lambda)$，我们需要估计其奇异超平面的数量（按重数计），其中这些超平面为实超平面且与一个包含原点的给定紧集相交。

我们从 (1) 开始。令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A}))$，$\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$。令 $\mathcal{H}_P(\pi_\infty)$（分别为 $\mathcal{H}_P(\pi_f)$）表示诱导表示 $\mathrm{Ind}^{G(F_\infty)}{}_{P(F_\infty)}(\pi_\infty)$（分别为 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_f)}{}_{P(\mathbb{A}_f)}$）的希尔伯特空间。记 $\mathcal{H}_P(\pi_\infty)_\sigma$为 $\mathcal{H}_P(\pi_\infty)$ 的 σ-等型子空间，记 $\mathcal{H}_P(\pi_f)^{K_f}$为 $\mathcal{H}_P(\pi_f)$ 的 K_f-不变向量子空间。令 $m(\pi)$ 表示 $\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A}))$ 在 $L^2\mathrm{cus}(A_G M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ 中出现的重数。于是由 (4.7) 得到

$$\dim \mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\sigma} = m(\pi)\dim(\mathcal{H}_P(\pi_f)^{K_f})\dim(\mathcal{H}_P(\pi_\infty)_\sigma). \tag{7.2}$$

利用 Frobenius互反律 [Kn，第 208] 页，我们得到

$$[\mathrm{Ind}_{P(F_\infty)}^{G(F_\infty)}(\pi_\infty)|_{\mathbf{K}_\infty} : \sigma] = \sum_{\tau\in\Pi(\mathbf{K}_{M,\infty})} [\pi_\infty|_{\mathbf{K}_{M,\infty}} : \tau]\cdot[\sigma|_{\mathbf{K}_{M,\infty}} : \tau].$$

对于 $\tau \in \Pi(\mathbf{K}_{M,\ \infty})$，令 $\mathcal{H}_{\pi_\infty}(\tau)$ 表示 $\mathcal{H}_{\pi_\infty}$ 的 τ-等型子空间。于是得到

$$\dim(\mathcal{H}_P(\pi_\infty)_\sigma) \le \dim(\sigma) \sum_{\tau\in\Pi(\mathbf{K}_{M,\infty})} \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}(\tau))\cdot[\sigma|_{\mathbf{K}_{M,\infty}} : \tau]. \tag{7.3}$$

接下来我们考虑 $\pi_f = \otimes_{v<\infty}\pi_v$。如有必要，将 K_f 替换为一个有限指数子群后，我们可以假设 $K_f = \prod_{v<\infty} K_v$。对于任意 $v<\infty$，记诱导表示 $\mathrm{Ind}_{P(F_v)}^{G(F_v)}(\pi_v)$ 的希尔伯特空间为 $\mathcal{H}_P(\pi_v)$。令 $\mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}$ 表示 K_v-不变向量构成的子空间。那么对于几乎所有 v，$\dim \mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v} = 1$，并且

$$\mathcal{H}_P(\pi_f)^{K_f} \cong \bigotimes_{v<\infty} \mathcal{H}_P(\pi_v)^{K_v}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{P(F_v)}^{G(F_v)}(\pi_v)^{K_v} &= \left(\mathrm{Ind}_{P(\mathcal{O}_v)}^{G(\mathcal{O}_v)}(\pi_v)\right)^{K_v} \\ &\hookrightarrow \bigoplus_{G(\mathcal{O}_v)/K_v} \mathrm{Ind}_{K_v\cap P}^{K_v}(\pi_v)^{K_v} \\ &\cong \bigoplus_{G(\mathcal{O}_v)/K_v} \pi_v^{K_v\cap P}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

令 $K_{M,\,f} = K_f \cap M(\mathbb{A}_f)$。对于 $\sigma \in \Pi(K_\infty)$，令

$$\mathcal{F}_M(\sigma) := \{\tau \in \Pi(K_{M,\infty})\colon [\sigma|_{K_{M,\infty}} : \tau] > 0\}.$$

结合 (7.2) - (7.4)，可知存在 $C>0$，其取决于 σ，使得

$$\dim \mathcal{A}_\pi^2(P)^{K_f,\sigma} \le C m(\pi) \dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_{M,f}}) \sum_{\tau\in\mathcal{F}(\sigma)} \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}(\tau)). \tag{7.5}$$

为了处理 (2)，我们使用 Langlands [La3，第 9], [节和 Ar2，引理 4.2] 中证明的截断尖点型艾森斯坦级数的内积公式。我们回顾该公式。设 $T \in \mathfrak{a}_0^+$ 充分正则。对于 $\phi \in \mathcal{A}^2{}_{\text{尖点型}}(P)$，令 $\Lambda^T E(g,\phi,\lambda)$ 为截断艾森斯坦级数 [Ar2，第 1] 节。设 $\phi \in \mathcal{A}^2{}_{\text{尖点型}}(P)$ 和 $\phi' \in \mathcal{A}^2{}_{\text{尖点型}}(P')$。则有如下内积公式

$$\begin{aligned} &\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \Lambda^T E(g,\phi,\lambda)\overline{\Lambda^T E(g,\phi',\lambda')}dg \\ &= \sum_Q \sum_s \sum_{s'} \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_Q^G/\mathbb{Z}(\Delta_Q^\vee)) \frac{e^{(s\lambda+s'\lambda')(T)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_Q}(s\lambda+s'\bar{\lambda}')(\alpha^\vee)} (M_{Q|P}(s,\lambda)\phi, M_{Q|P'}(s',\lambda')\phi'), \end{aligned} \tag{7.6}$$

其中，Q 遍历所有标准抛物子群，$s \in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a}_Q)$ 和 $s' \in W(\mathfrak{a}_{P'},\mathfrak{a}_Q)$ 是关于 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 和 $\lambda' \in \mathfrak{a}_{P',\mathbb{C}}^*$ [的亚纯函数（Ar5，命题 15；3], [Ar2，引理 4.2]）。由内积公式可知，为了证明（2），只需估计交织算子 $M_{Q|P}(s,\lambda)|_{\mathcal{A}^2\text{cus}_\pi(P)}$ 在 $\pi \in \Pi_{\text{cus}}(M(\mathbb{A}))$ 中相应奇异超平面的个数。为处理这个问题，我们将其归约到 $M_{Q|P}(\lambda)|_{\mathcal{A}^2\text{cus}_\pi(P)}$、$Q,P \in \mathcal{P}(M)$、$\pi \in \Pi_{\text{cus}}(M(\mathbb{A}))$ 的情形。令 $M,M_1 \in \mathcal{L}$，并令 $P \in \mathcal{P}(M)$,$P_1 \in \mathcal{P}(M_1)$。设 P 和 P_1 相伴，并令 $t \in W(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_{M_1})$。令 $w_t \in G(F)$ 为 t 的一个代表元。那么 $M_1 := w_t M w_t^{-1}$，且 $tP = w_t P w_t^{-1}$ 是属于 $\mathcal{P}(M_1)$ 的一个抛物子群。t 在 $\mathfrak{a}_M \subset \mathfrak{a}_0$ 上的限制定义了 $W(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_{tM})$ 中的一个元素。令

$$t\colon \mathcal{A}^2(P) \to \mathcal{A}^2(tP)$$

为由 $(t\phi)(x) = \phi(w_t^{-1}x)$，$x \in G(\mathbb{A})$ 定义的线性算子。根据 [Ar3，引理 1.1]，存在 $T_0 \in \mathfrak{a}_0$ 使得

$$H_{P_0}(w_t^{-1}) = T_0 - t^{-1}T_0.$$

于是由 [Ar9，(1.5)]可得

$$M_{P_1|P}(s,\lambda)t^{-1} = M_{P_1|tP}(st^{-1},t\lambda)e^{(\lambda+\rho_P)(T_0-t^{-1}T_0)} \tag{7.7}$$

对于 $s \in W(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_{M_1})$。因此，就 $M_{P_1|P}(s,\lambda)$ 的奇异超平面而言，我们可以假设 P_1 和 P 具有相同的 Levi 分量 M，即 $P,P_1 \in \mathcal{P}(M)$。令 $t \in W(\mathfrak{a}_M)$。由函数方程 [Ar9，(1.2)] 可得

$$M_{P_1|P}(t,\lambda) = M_{P_1|tP}(1,t\lambda)M_{tP|P}(t,\lambda). \tag{7.8}$$

将 $s = t$ 代入 (7.7)，得到

$$M_{tP|P}(t,\lambda) = M_{tP|tP}(1,t\lambda)te^{(\lambda+\rho_P)(T_0-t^{-1}T_0)}.$$

由于 $M_{tP|tP}(1,\lambda) = \mathrm{Id}$，因此

$$M_{P_1|P}(t,\lambda) = M_{P_1|tP}(1,t\lambda)te^{(\lambda+\rho_P)(T_0-t^{-1}T_0)}. \tag{7.9}$$

因此，我们只需考察交织算子 $M_{Q|P}(\lambda) = M_{Q|P}(1,\lambda)$ 的奇异超平面。给定 $\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(M_P(\mathbb{A}))$、一个开紧子群$K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 以及 $\sigma \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$，我们需要估计 $M_{Q|P}(\pi,\lambda)^{K_f,\sigma}$ 的奇异超平面（按重数计数）中为实数且与某个固定紧集相交的部分。由 (4.12)，问题归结为考察正规化因子 $n_{Q|P}(\pi,\lambda)$ 以及限制在 $\mathcal{A}^2{}_{\mathrm{cus}\,\pi}(P)^{K_f,\sigma}$ 上的归一化交织算子 $R_{Q|P}(\pi,\lambda)$。

首先，我们考虑归一化交织算子 (4.13)。令 v 为 F 的一个赋值。对于 $\pi_v \in \Pi(G(F_v))$，令

$$J_{Q|P}(\pi_v,\lambda)\colon \mathcal{H}_P^0(\pi_v) \to \mathcal{H}_Q^0(\pi_v), \quad \lambda \in \mathfrak{a}_{Q,\mathbb{C}}^*,$$

其为局部交织算子，并令

$$R_{Q|P}(\pi_v,\lambda) := n_{Q|P}(\pi_v,\lambda)^{-1}J_{Q|P}(\pi_v,\lambda). \tag{7.10}$$

其为局部归一化交织算子。算子 $R_{Q|P}(\pi_v,\lambda)$ 满足 [Ar4 定理 2.1] 中的性质 (R_1) ...、(R_8)。令 $\pi = \otimes_v\pi_v \in \Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))$。存在一个有限个赋值的集合 $S(\pi)$，它是 F 的子集并包含阿基米德位，使得对于所有 $v \notin S$、G/F_v 和 π_v，它们都是非分歧的。对于 $v \notin S(\pi)$，令 K_v 为超特殊的，并假设 $\phi_v \in \mathcal{H}_P(\pi_v)^{\mathbf{K}_v}$。于是由 (R_8) 可得

$$R_{Q|P}(\pi_v,\lambda)\phi_v = \phi_v, \quad s \notin S(\pi).$$

因此，乘积 (4.13) 仅遍历 $v \in S(\pi)$，故对所有 $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\,\mathbb{C}}^*$ 都有定义。因此，只需考虑局部交织算子 $R_{Q|P}(\pi_v,\lambda)$。令$P_0,...,P_k \in \mathcal{P}(M)$ 和 $\alpha_1,...,\alpha_k \in \Sigma_M$ 满足 $P = P_0$，$Q = P_k$，且对$i = 1,...,k$ 有 $P_{i-1}\big|^{\alpha_i}P_i$。由 [Ar4，$(R_2)$]，可得

$$R_{Q|P}(\pi_v,\lambda) = R_{P_k|P_{k-1}}(\pi_v,\lambda)\circ R_{R_{k-1}|P_{k-2}}(\pi_v,\lambda)\circ\cdots\circ R_{P_1|P_0}(\pi_v,\lambda). \tag{7.11}$$

因此，我们可以假设 $Q, P \in \mathcal{P}(M)$ 沿某个根 $\alpha \in \Sigma_M$ 相邻。于是，$R_{Q|P}(\pi_v, \lambda)$ 仅取决于 $\lambda(\alpha^\vee)$。先考虑情形 $v < \infty$。令 q_v 为 F_v 的剩余域的阶。由 (R_6)，$R_{Q|P}(\pi_v, \lambda)$ 是 $q_v^{-\lambda(\alpha^\vee)}$ 的有理函数。此外，由 [Sh1 定理 2.2.2]，存在一个多项式 $Q_v(\pi_v, s)$，满足 $Q_v(\pi_v, 0) = 1$，使得

$$Q_v(\pi_v, q_v^{-\lambda(\alpha^\vee)}) J_{Q|P}(\pi_v, \lambda)$$

是一个关于 $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 的全纯非零函数。此外，多项式Q_v 的次数与 $\pi_v \in \Pi(M(F_v))$ 无关。由 (7.10) 可得

$$n_{Q|P}(\pi_v, \lambda) Q_v(\pi_v, q_v^{-\lambda(\alpha^\vee)}) R_{Q|P}(\pi_v, \lambda)$$

在 $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 上全纯。正规化因子 $n_{Q|P}(\pi_v, \lambda)$ 满足与局部交织算子[Ar4, 定理 2.1] 所满足的相应性质 (R_1) ..., (R_8) 类似的性质。特别地，存在一个有理函数 $n_\alpha(\pi_v, s)$，使得

$$n_{Q|P}(\pi_v, \lambda) = n_\alpha(\pi_v, q_v^{-\lambda(\alpha^\vee)}).$$

现在注意，对每个 $R > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$，方程 $q_v^{-s} = z$ 在圆盘 $|s| \leq R$ 内的解的个数不超过 $1 + (2\pi)^{-1} \log(q_v) R$。因此，只需分别估计 $n_\alpha(\pi_v, s)$ 和 $Q_v(\pi_v, s)$ 的零点个数。如上所述，$Q_v(\pi, s)$ 的次数有界，且该界与 $\pi \in \Pi(M(F_v))$ 无关。有理函数 $n_\alpha(\pi_v, s)$ 已在 [Mu2, (3.6)] 中作了描述。由 [Mu2, 引理 3.1] 和 [Mu2, (3.6)] 可知，存在 $C > 0$，使得对所有 $M \in \mathcal{L}(M_0)$ 以及所有平方可积的 $\pi \in \Pi(M(F_v))$，$n_\alpha(\pi, s)$ 的极点和零点个数均小于 C。现在设 π 为温和的。众所周知，π 是诱导表示 $\mathrm{Ind}_R^M(\sigma)$ 的一个不可约成分，其中 M_R 是 M 的一个容许的 Levi 子群，且 $\sigma \in \Pi(M_R(F_v))$ 模 A_R 平方可积。于是由 [Ar4, (2.2)]，我们可将问题归结为平方可积情形。一般而言，π 是诱导表示 $\mathrm{Ind}_R^M(\sigma, \mu)$ 的一个朗兰兹商，其中 M_R 是 M 的一个容许的 Levi 子群，$\sigma \in \Pi_{\mathrm{temp}}(M_R(F_v))$，且 μ 是 $\mathfrak{a}_R^*/\mathfrak{a}_M^*$ 的室中的一点。现在利用 [Ar4, (2.3)] 将问题归结为温和情形，从而证明存在 $C > 0$，使得对所有 $\pi \in \Pi(M(F_v))$，$n_\alpha(\pi, s)$ 的极点和零点个数均小于 C。

$v \in S_\infty$ 的情形已在第 6 节处理。参见 (6.11) 以及 (6.11) 上方的文字。

现在我们可以总结所得结果。利用 (4.11)，得到以下命题。

命题 7.1. 设 $M \in \mathcal{L}(M_0)$。设 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个开紧子群，且$\sigma \in \Pi(\mathbf{K}_\infty)$。对每个 $R > 0$，存在 $C > 0$，使得对于所有 Q、$P \in \mathcal{P}(M)$ 和$\pi \in \Pi(M(\mathbb{A}))$，$R_{Q|P}(\pi, \lambda)|_{\mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f, \sigma}}$ 中与半径为 R 的球相交的奇异超平面数量有界于 C。

接下来我们考虑全局正规化因子。由 (4.11)，$n_{Q|P}(\pi, \lambda)$ 是正规化因子 $n_\alpha(\pi, \lambda(\alpha^\vee))$、$\alpha \in \Sigma_P \cap \Sigma_{\bar{Q}}$ 的乘积。因此，我们的问题归结为估计亚纯

函数 $n_\alpha(\pi, s)$ 的实极点个数（按重数计）。令 $\Sigma_\alpha^{\mathbb{R}}(\pi)$ 为 $n_\alpha(\pi, s)$ 的实极点集合。令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}); K_f, \sigma)$。于是由推论 5.2 可知，存在 $C > 0$

$$\sum_{\rho \in \Sigma_\alpha^{\mathbb{R}}(\pi)} n(\rho) \leq C(1 + \log(1 + \lambda_{\pi_\infty}^2)). \tag{7.12}$$

现在，我们可以将结果概括如下。对于任意的 $Q, P \in \mathcal{P}(M)$，全局正规化因子 $n_{Q|P}(\pi, \lambda)$ 是函数 $n_\alpha(\pi, \lambda(\alpha^\vee))$、 $\alpha \in \Sigma_P \cap \Sigma_{\bar{Q}}$(4.11) 的乘积。注意，$\#\Sigma_P \leq \dim \mathfrak{n}_P$。令 $d_P := \dim \mathfrak{n}_P$。由 (7.12) 和命题（7.1）可知，存在 $C > 0$，使得对于每个 $\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A}); K_f, \sigma)$ 以及每个 $\phi \in \mathcal{A}^2{}_{\mathrm{cus}\,\pi}(P)$，艾森斯坦级数 $E(\phi, \lambda)$ 的奇异超平面中，实数且与球 $\{\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^* \colon \|\lambda\| \leq \|\rho_P\|\}$ 相交的超平面的数量（按重数计）有界，且上界为

$$C(1 + \log(1 + \lambda_{\pi_\infty}^2))^{d_P}, \tag{7.13}$$

现在回想一下本节开头所述，剩余谱由艾森斯坦级数 $E(\phi, \lambda)$ 关于 $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 的仿射可容许子空间完全旗所取的迭代留数张成。对于 $\lambda \geq 0$，令

$$\Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A}); \lambda) := \{\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A})) \colon -\lambda_{\pi_\infty} \leq \lambda\}.$$

注意，存在 $C \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}（M（\mathbb{A}））$，都有 $C \leq -\lambda_{\pi_\infty}$。利用 (7.1) 和 (7.5)，可得存在 C_0、 $C_1 > 0$，使得

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{res}}^{K_f,\sigma}(\lambda) \leq C_1 &\sum_{P \supset P_0} (1 + \log(1 + \lambda^2))^{d_P} \\ &\cdot \sum_{\tau \in \mathcal{F}_{M_P}(\sigma)} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(M_P(\mathbb{A}); \lambda + C_0)} m(\pi) \dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_{M_P,f}}) \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}(\tau)). \end{aligned} \tag{7.14}$$

给定 P，令 $M = M_P$。与 (3.2) 中一样，存在有限多个格 $\Gamma_{M,i} \subset M（F_\infty）$、$i = 1$、...、$k$，使得

$$A_M M(F) \backslash M(\mathbb{A}) / K_{M,f} \cong \bigsqcup_{i=1}^{k} (\Gamma_{M,i} \backslash M(F_\infty)^1). \tag{7.15}$$

因此，我们得到一个 $M（F_\infty）$-模的同构

$$L_{\mathrm{cus}}^2(A_M M(F) \backslash M(\mathbb{A}))^{K_{M,f}} \cong \bigoplus_{i=1}^{k} L_{\mathrm{cus}}^2(\Gamma_{M,i} \backslash M(F_\infty)^1). \tag{7.16}$$

因此，对于 $\tau \in \Pi（K_{M,\infty}）$，我们得到

$$L_{\mathrm{cus}}^2(A_M M(F) \backslash M(\mathbb{A}))^{K_{M,f},\tau} \cong \bigoplus_{i=1}^{k} L_{\mathrm{cus}}^2(\Gamma_{M,i} \backslash (M(F_\infty)^1 \otimes V_\tau)^{K_{M,\infty}}. \tag{7.17}$$

~ ~令 $X_M = A_M \backslash M(F_\infty)/K_{M,\,\infty}$。令 $E_{\tau,\,i} \to \Gamma_{M,\,i} \backslash X_M$为与 τ 相伴的局部齐性向量丛。令 $N^{\Gamma_{M,\,i}}{}_{\mathrm{cus}}(\lambda;\, \tau)$ 为卡西米尔算子的特征值计数函数

~该算子作用于 $L^2{}_{\mathrm{cus}}(\Gamma_{M,\ i}\backslash X_M, E_{\tau,\ i})$ 中。由 (7.17) 可知

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A});\lambda)} m(\pi)\dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_{M,f}})\dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}(\tau)) = \sum_{i=1}^{k} N_{\mathrm{cus}}^{\Gamma_{M,i}}(\lambda;\tau). \tag{7.18}$$

~设 m_M:= 维 X_M。由 [Do 定理 9.1]，可得

$$N_{\mathrm{cus}}^{\Gamma_{M,i}}(\lambda;\tau) \ll 1+\lambda^{m_M/2}. \tag{7.19}$$

因此，由 (7.18) 可知，存在 $C>0$ 使得

$$\sum_{\tau\in\mathcal{F}_M(\sigma)}\ \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A});\lambda+C_0)} m(\pi)\dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_{M,f}})\dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}(\tau)) \le C(1+\lambda^{m_M/2}). \tag{7.20}$$

~设 n:= 维 X，且 $m_0(G)$:=max$\{m_{M_P}\colon\ P\neq G\}$。注意，对所有 P，均有 $d_P\le r$。于是由 (7.14) 和 (7.20) 可得

$$N_{\mathrm{res}}^{K_f,\sigma}(\lambda) \le C(1+\log(1+\lambda^2))^n(1+\lambda^{m_0(G)/2}). \tag{7.21}$$

~ ~现在注意到 $X\cong X_M\times A_M\times N_P(F_\infty)$ [Bo3，第 4.2 节，(3)]。因此 $m_M\le n-2$，从而 $m_0(G)\le n-2$。于是可得

$$N_{\mathrm{res}}^{K_f,\sigma}(\lambda) \le C(1+\lambda^{(n-1)/2}),\quad \lambda\ge 0, \tag{7.22}$$

其中 $C>0$ 取决于 K_f 和 σ。这就完成了定理 1.4 第二个结论的证明。

接下来，我们希望将这一结果推广到任意 Levi 子群 $L\in\mathcal{L}(M)$。回顾一下，对于任意一对元素 $Q\in\mathcal{P}(L)$ 和 $R\in\mathcal{P}^L(M)$，存在唯一的 $P\in\mathcal{P}(M)$，使得$P\subset Q$ 且 $P\cap L=R$。记 P为 $Q(R)$。设 $R,R'\in\mathcal{P}^L(M)$，$\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$，以及 $Q\in\mathcal{P}(L)$。那么，对于任意 $k\in\mathbf{K}$ 和 $\phi\in\mathcal{A}_\pi^2(Q(R))$，定义在 $M(\mathbb{A})$ 上的函数 ϕ_k，其定义为 $\phi_k(m):=\phi(mk)$，$m\in M(\mathbb{A})$，属于 $\mathcal{A}_\pi^2(R)$，且有

$$(M_{Q(R')|Q(R)}(\pi,\lambda)\phi)_k = M_{R'|R}(\pi,\lambda)\phi_k) \tag{7.23}$$

[Ar9, (1.3)]。此外，正规化因子满足

$$n_{Q(R')|Q(R)}(\pi,\lambda) = n_{R'|R}(\pi,\lambda) \tag{7.24}$$

[Ar4，第 2] 节。因此，上述讨论对 G 的每个标准 Levi 子群 L 仍然成立。对于 $M\in\mathcal{L}(M_0)$ 和 $\sigma\in\Pi(\mathbf{K}_\infty)$，令 $\sigma_M:=\sigma|_{\mathbf{K}_\infty\cap M(F_\infty)}$。用 $N^{K_{M,\ f}\sigma_M}_{M}$，剩余谱$(\lambda)$ 表示关于 $(K_{M,\ f},\sigma_M)$ 的 M 的剩余谱计数函数。令 $m_0(M)$:=max$\{m_{M_R}\colon\ R\in\mathcal{P}^M,\ R\neq M\}$。综上所述，我们得到

$$N_{M,\mathrm{res}}^{K_{M,f},\sigma_M}(\lambda) \le C(1+\log(1+\lambda^2))^{r_M}\lambda^{m_0(M)/2} \tag{7.25}$$

~对于 $\lambda\ge 0$，如上所述可得 $m_0(M)\le$维数 X_M-2，从而得到以下命题。

命题 7.2. 假设 G 满足条件 (L)。设 K_f 是 $G(\mathbb{A}_f)$ 和 $\sigma \in \Pi(K_\infty)$ 的开紧˜子群。设 $M \in \mathcal{L}$且 m_M:=维数 X_M。则存在$C > 0$ 使得

$$N_{M,\mathrm{res}}^{K_{M,f},\sigma_M}(\lambda) \leq C(1+\lambda^{(m_M-1)/2}) \tag{7.26}$$

关于 $\lambda \geq 0$。

8. The spectral side of the trace formula

本节将 Arthur[Ar1], [Ar2], 的（非不变）迹公式的谱侧应用于热核。我们的目标是证明，当 $t \to 0$ 时，渐近展开的首项由限制在点谱上的热算子的迹给出。

首先，我们简要回顾谱侧的结构。设 $L \supset M$ 是 $\mathcal{L}$, $P \in \mathcal{P}(M)$ 中的 Levi 子群，并设 $m = \dim \mathfrak{a}_L^G$ 是 L 在 G 中的余秩。用 $\mathfrak{B}_{P,\ L}$ 表示由 $\Sigma_P^\vee$ 中的元素构成的 m 元组 $\underline{\beta} = (\beta_1^\vee, \dots, \beta_m^\vee)$ 的集合，这些元素在 $\mathfrak{a}_L$ 上的投影构成 $\mathfrak{a}_L^G$ 的一组基。对于任意 $\underline{\beta} = (\beta_1^\vee, \dots, \beta_m^\vee) \in \mathfrak{B}_{P,\ L}$，令 vol($\underline{\beta}$) 表示由 $\underline{\beta}$ 张成的格在 $\mathfrak{a}_L^G$ 中的余体积，并令

$$\begin{aligned}\Xi_L(\underline{\beta}) &= \{(Q_1, \dots, Q_m) \in \mathcal{F}_1(M)^m : \ \ \beta_i^\vee \in \mathfrak{a}_M^{Q_i},\, i = 1, \dots, m\} \\ &= \{\langle P_1, P_1'\rangle, \dots, \langle P_m, P_m'\rangle) : \ \ P_i|^{\beta_i} P_i',\, i = 1, \dots, m\}.\end{aligned}$$

给定 $Q, P \in \mathcal{P}(M)$，令 $M_{Q|P}(\lambda) : \mathcal{A}^2(P) \to \mathcal{A}^2(Q)$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 为由 (4.4) 定义的交织算子。

对于 $\mathfrak{a}_M^*$ 上的任意光滑函数 f，记 f 沿 $\mu \in \mathfrak{a}_M^*$ 的方向导数为 $D_\mu f$。对于 $\mathcal{P}(M)$ 中的一对相邻抛物子群 $P_1|^\alpha P_2$，记

$$\delta_{P_1|P_2}(\lambda) = M_{P_2|P_1}(\lambda) D_\varpi M_{P_1|P_2}(\lambda) : \mathcal{A}^2(P_1) \to \mathcal{A}^2(P_2), \tag{8.1}$$

其中 $\varpi \in \mathfrak{a}_M^*$ 满足 $\langle \varpi, \alpha^\vee \rangle = 1$。 [1] 等价地，若将 $M_{P_1|P_2}(\lambda) = \Phi(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle)$ 记作单个复变量的亚纯函数 Φ，则有

$$\delta_{P_1|P_2}(\lambda) = \Phi(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle)^{-1} \Phi'(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle).$$

回顾一下，对于 $P, Q \in \mathcal{P}(M)$, $\langle P, Q \rangle$ 表示由 P和 Q生成的群。对于任意m元组 $\mathcal{X} = (Q_1, \dots, Q_m) \in \Xi_L(\underline{\beta})$，其中 $Q_i = \langle P_i, P_i' \rangle$, $P_i|^{\beta_i} P_i'$，用 $\Delta_{\mathcal{X}}(P, \lambda)$ 表示表达式

$$\frac{\mathrm{vol}(\underline{\beta})}{m!} M_{P_1'|P}(\lambda)^{-1} \delta_{P_1|P_1'}(\lambda) M_{P_1'|P_2'}(\lambda) \cdots \delta_{P_{m-1}|P_{m-1}'}(\lambda) M_{P_{m-1}'|P_m'}(\lambda) \delta_{P_m|P_m'}(\lambda) M_{P_m'|P}(\lambda). \tag{8.2}$$

[1]注意，这一定义与 [FLM1] 中 $\delta_{P_1|P_2}$ 的定义略有不同。

回顾映射（纯组合的） $\mathcal{X}_L : \mathfrak{B}_{P,L} \to \mathcal{F}_1(M)^m$ ，它具有如下性质：对所有 $\underline{\beta} \in \mathfrak{B}_{P,L}$ ，均有 $\mathcal{X}_L(\underline{\beta}) \in \Xi_L(\underline{\beta})$，定义见 [FLM1，第 179–180] 页。[2]

对于任意 $s \in W(M)$，令 L_s为 $\mathcal{L}(M)$ 中包含 w_s 的最小 Levi 子群。我们回顾 $\mathfrak{a}_{L_s} = \{H \in \mathfrak{a}_M \mid sH = H\}$。置

$$\iota_s = |\det(s-1)_{\mathfrak{a}_M^{L_s}}|^{-1}.$$

对于 $P \in \mathcal{F}(M_0)$ 和 $s \in W(M_P)$，令 $M(P,s) : \mathcal{A}^2(P) \to \mathcal{A}^2(P)$ 如 [Ar3，第 1309] 页所述。$M(P,s)$ 是一个酉的算子，它与算子 $\rho(P,\lambda,h)$ 对 $\lambda \in \mathfrak{ia}_{L_s}^*$ 均交换。最后，我们可以陈述精细的谱展开式。

定理 8.1（[FLM1]）。对于任意 $h \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$，Arthur 迹公式的谱侧为

$$J_{spec}(h) = \sum_{[M]} J_{spec,M}(h), \tag{8.3}$$

M 遍历 G 的 Levi 子群的共轭类（由 $\mathcal{L}$ 中的成员表示），其中

$$J_{spec,M}(h) = \frac{1}{|W(M)|} \sum_{s \in W(M)} \iota_s \sum_{\underline{\beta} \in \mathfrak{B}_{P,L_s}} \int_{\mathfrak{i}(\mathfrak{a}_{L_s}^G)^*} \mathrm{tr}(\Delta_{\mathcal{X}_{L_s}(\underline{\beta})}(P,\lambda) M(P,s) \rho(P,\lambda,h))\, d\lambda \tag{8.4}$$

其中 $P \in \mathcal{P}(M)$ 任意。算子属于迹类，并且积分关于迹范数绝对收敛，并在 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A})^1)$ 上定义分布。

现在我们将迹公式应用于热核。回顾其定义。详情请参见 [MM1, § 3]。回顾一下，底层的对称空间为

$$\widetilde{X} = G(F_\infty)^1 / \mathbf{K}_\infty,$$

其中 $G(F_\infty)^1 = G(\mathbb{A})^1 \cap G(F_\infty)$。注意， $G(F_\infty)^1$ 是半单的，并且

$$G(F_\infty) = G(F_\infty)^1 \cdot A_G. \tag{8.5}$$

给定 $\nu \in \Pi(\mathbf{K}_\infty)$，令 $E_\nu \to X$ 为相伴的齐性向量丛。令 $\Delta_\nu = (\nabla'')^* \nabla^\nu$ 为作用于 $C^\infty(X, E_\nu)$空间中的 Bochner-Laplace 算子，其中该空间由 E_ν的光滑截面构成。这是一个 $G(F_\infty)^1$-不变的二阶椭圆微分算子。由于 X 完备，Δ_ν视为定义在 $L^2(X, E_\nu)$上的算子，其定义域为光滑紧支撑截面，故本质自伴 [LaM, p. 155]。其自伴延拓也记为 Δ_ν。令 $\Omega \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 和 $\Omega_{\mathbf{K}_\infty} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{k})$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 和$\mathfrak{k}$的卡西米尔算子，其中后者是相对于 $\mathfrak{g}$ 的标准化 Killing 形式在 $\mathfrak{k}$上的限制定义的。于是，关于同构 (3.13)，我们有

$$\widetilde{\Delta}_\nu = -R(\Omega) + \nu(\Omega_{\mathbf{K}_\infty}), \tag{8.6}$$

[2]映射 $\mathcal{X}_L$ 实际上取决于另一个选择：一个不属于某个显式有限超平面集的向量 $\underline{\mu} \in (\mathfrak{a}_M^*)^m$ 。就我们的目的而言， $\mathcal{X}_L$ 的精确定义并不重要。

其中 R 表示 $G(F_\infty)$ 在 $C^\infty(G(F_\infty)\ \nu)$ 中的右正则表示（参见 [Mia，命题 1.1]）。

设 $e^{-t\widetilde{\Delta}_\nu}$, $t>0$ 为由 $\widetilde{\Delta}_\nu$ 生成的热半群。它与 $G(F_\infty)^1$ 的作用˜相交换。借助同构 (3.13)，我们可将 $e^{-t\Delta_\nu}$ 视为 $L^2(G(F_\infty)^1,\nu)$ 中的有界算子，并且它与 $G(F_\infty)^1$ 的作用相交换。因此，它是一个卷积算子，也就是说，存在一个光滑映射

$$H_t^\nu\colon G(F_\infty)^1\to \mathrm{End}(V_\nu) \tag{8.7}$$

使得

$$(e^{-t\widetilde{\Delta}_\nu}\phi)(g)=\int_{G(F_\infty)^1} H_t^\nu(g^{-1}g')(\phi(g'))\,dg',\quad \phi\in L^2(G(F_\infty)^1,\nu).$$

核 H_t^ν 满足

$$H_t^\nu(k^{-1}gk')=\nu(k)^{-1}\circ H_t^\nu(g)\circ\nu(k'),\ \forall k,k'\in\mathbf{K}_\infty,\forall g\in G(F_\infty)^1. \tag{8.8}$$

此外，仿照 [BM 命题 2.4] 的证明可知，对于所有 $q>0$， H_t^ν 属于 $(\mathscr{C}^q(G(F_\infty)^1)\otimes\mathrm{End}(V_\nu))^{K_\infty\times K_\infty}$，其中 $\mathscr{C}^q(G(F_\infty)^1)$ 是定义在 $G(F_\infty)^1$ 上、 L^q-可积且快速递减的函数所构成的 Harish-Chandra 的 Schwartz 空间。令

$$h_t^\nu(g):=\mathrm{tr}\,H_t^\nu(g),\quad g\in G(F_\infty)^1. \tag{8.9}$$

Then 对所有 $q>0$, $h_t^\nu\in\mathscr{C}^q(G(F_\infty)^1)$。我们将 h_t^ν 扩展为定义在 $G(F_\infty)$ 上的函数，方法如下

$$h_t^\nu(ag)=h_t^\nu(g),\quad g\in G(F_\infty)^1,\ a\in A_G.$$

设 $\mathbf{1}_{K_f}\colon G(\mathbb{A}_f)\to\mathbb{C}$ 为 K_f 的特征函数。令

$$\chi_{K_f}:=\frac{\mathbf{1}_{K_f}}{\mathrm{vol}(K_f)} \tag{8.10}$$

and

$$\phi_t^\nu(g):=h_t^\nu(g_\infty)\chi_{K_f}(g_f) \tag{8.11}$$

对 $g=g_\infty\cdot g_f\in G(\mathbb{A})=G(F_\infty)\cdot G(\mathbb{A}_f)$。现在注意到， ϕ_t^ν的所有导数都属于$L^1(G(\mathbb{A})^1)$。因此， ϕ_t^ν属于 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A});K_f)$（其定义见第 2 节）。由定理 8.1， J_{spec} 是定义在 $\mathcal{C}(G(\mathbb{A});K_f)$ 上的分布。因此，我们可以将 ϕ_t^ν代入迹公式，由定理 8.1 得到

$$J_{\mathrm{spec}}(\phi_t^\nu)=\sum_{[M]}J_{\mathrm{spec},M}(\phi_t^\nu), \tag{8.12}$$

其中求和遍及 G 和 J_{spec} 的 Levi 子群的共轭类； $_M(\phi^\tau,\ _t{}^p)$ 由 (8.4) 给出。为分析这些项，我们按照 [MM1 第 13] 节中的方法进行。回忆一下，公式 (8.4) 中出现的算子 $\Delta_{\mathcal{X}}(P,\lambda)$ 由 (8.2) 定义。其定义涉及交织算子 $M_{Q|P}(\lambda)$。若将 $M_{Q|P}(\lambda)$ 替换为其限制

$M_{Q|P}(\pi,\lambda)$ 到 $\mathcal{A}^2_\pi(P)$，我们便得到 $\Delta_{\mathcal{X}}(P,\lambda)$ 到 $\mathcal{A}^2_\pi(P)$ 的限制 $\Delta_{\mathcal{X}}(P,\pi,\lambda)$。类似地，令 $\rho_\pi(P,\lambda)$ 为 $\bar{\mathcal{A}}^2_\pi(P)$ 中的诱导表示。固定 $s\in W(M)$ 和 $\beta\in\mathfrak{B}_{P,\ L_s\circ}$ 于是，对于 (8.4) 右侧的积分，其中 $h=\phi_t^\nu$，我们得到

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))}\int_{i(\mathfrak{a}_{L_s}^G)^*}\mathrm{Tr}\left(\Delta_{\mathcal{X}_{L_s}(\underline{\beta})}(P,\pi,\lambda)M(P,\pi,s)\rho_\pi(P,\lambda,\phi_t^\nu)\right)\,d\lambda. \tag{8.13}$$

为了处理被积函数，我们需要以下结果。设 π 是 $G(F_\infty)$的酉可容许表示。设 $A\colon\ \mathcal{H}_\pi\to\mathcal{H}_\pi$ 是一个有界算子，且是 $\pi|_{\mathbf{K}_\infty}$的交织算子。那么 $A\circ\pi(h_t^\nu)$是有限秩算子。定义 $\mathcal{H}_\pi\otimes V_\nu$ 上的一个 $\tilde{}$ 算子 $\tilde{A}$，使得 $\tilde{A}:=A\otimes\mathrm{Id}$。于是由 [MM1，(9.13)] 可得

$$\mathrm{Tr}(A\circ\pi(h_t^\nu))=e^{t(\pi(\Omega)-\nu(\Omega_{\mathbf{K}_\infty}))}\,\mathrm{Tr}\left(\tilde{A}|_{(\mathcal{H}_\pi\otimes V_\nu)^{\mathbf{K}_\infty}}\right). \tag{8.14}$$

我们将把这一结果用于诱导表示 $\rho_\pi(P,\lambda)$。令 $m(\pi)$表示 π在 $L^2_{\text{离散}}(A_MM(F)\backslash M(\mathbb{A}))$中出现于 $M(\mathbb{A})$的正则表示时的重数。那么

$$\rho_\pi(P,\lambda)\cong\oplus_{i=1}^{m(\pi)}\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\pi,\lambda). \tag{8.15}$$

固定 $\mathfrak{a}_P$ 的正限制根，并令 $\rho_{\mathfrak{a}_P}$ 表示这些根相应的半和。对于 $\xi\in\Pi(M(F_\infty))$和 $\lambda\in\mathfrak{a}_P^*$，令

$$\pi_{\xi,\lambda}:=\mathrm{Ind}_{P(F_\infty)}^{G(F_\infty)}(\xi\otimes e^{i\lambda})$$

为酉诱导表示。令 $\xi(\Omega_M)$为 ξ的卡西米尔特征值。定义常数 $c(\xi)$如下

$$c(\xi):=-\langle\rho_{\mathfrak{a}_P},\rho_{\mathfrak{a}_P}\rangle+\xi(\Omega_M). \tag{8.16}$$

那么，对 $\lambda\in\mathfrak{a}_P^*$，有

$$\pi_{\xi,\lambda}(\Omega)=-\|\lambda\|^2+c(\xi) \tag{8.17}$$

$\tilde{}$ $\widetilde{\ }$（见 [Kn 定理 8.22]）。分别将 $\Delta_{\mathcal{X}_{L_s}(\underline{\beta})}(P,\pi,\nu,\lambda)$ 和 $M(P,\pi,\nu,s)$ 延拓为作用在 $\mathcal{A}^2_\pi(P)\otimes V_\nu$ 上的算子，记为 $\widetilde{\ }$，其中如上所述。根据 ϕ_t^ν 的定义、(8.15) 和 (8.14)，可得 (8.13) 等于

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))}e^{tc(\pi_\infty)}\cdot\int_{i(\mathfrak{a}_{L_s}^G)^*}e^{-t\|\lambda\|^2}\,\mathrm{Tr}\left(\left(\widetilde{\Delta}_{\mathcal{X}_{L_s}(\underline{\beta})}(P,\pi,\nu,\lambda)\widetilde{M}(P,\pi,\nu,s)\right)\big|_{(\mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f}\otimes V_\nu)^{\mathbf{K}_\infty}}\right)\,d\lambda. \tag{8.18}$$

由于 $M(P,\pi,s)$ 是酉的，(8.18) 可估计为

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))}\dim\left(\mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\nu}\right)\cdot e^{tc(\pi_\infty)}\int_{i(\mathfrak{a}_{L_s}^G)^*}e^{-t\|\lambda\|^2}\|\widetilde{\Delta}_{\mathcal{X}_{L_s}(\underline{\beta})}(P,\pi,\nu,\lambda)\|_{1,\mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\nu}}\,d\lambda. \tag{8.19}$$

对于 $\pi \in \Pi(M(\mathbb{A}))$，记 λ_{π_∞} 为 π_∞ 在 $M(F_\infty)^1$ 上的限制的卡西米尔特征值。给定 $\lambda > 0$，令

$$\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A});\lambda) := \{\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A})) \colon |\lambda_{\pi_\infty}| \leq \lambda\}.$$

为了估计 (8.19)，我们需要以下辅助结果。

引理 8.2. 设 $d_M = \dim M(F_\infty)^1/\mathrm{K}_\infty^M$。对于每个开紧子群 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 以及每个 $\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$，存在 $C > 0$ 使得

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A});\lambda)} \dim \mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\nu} \leq C(1+\lambda^{d_M/2}) \tag{8.20}$$

对所有 $\lambda \geq 0$ 均成立。

证明。由 (7.5) 可知，只需固定 $\tau \in \Pi(K_{M,\infty})$ 并估计以下求和

$$\sum_{\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}),\lambda)} m(\pi) \dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_{M,f}}) \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}(\tau)).$$

为了估计关于 $\Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A})\ \lambda)$ 的求和，我们使用 [Mu3，引理 3.2],，该结果对一般约化群成立。因此得到

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(M(\mathbb{A});\lambda)} \dim \mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\nu} \leq C(1+\lambda^{d_M/2}). \tag{8.21}$$

接下来注意，对于任意的 $\tau \in \Pi(K_{M,\ \infty})$，根据计数函数的定义，我们有

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{res}}(M(\mathbb{A});\lambda)} m(\pi) \dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_{M,f}}) \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}(\tau)) = N_{M,\mathrm{res}}^{K_{M,f},\tau}(\lambda).$$

根据命题 7.2，右侧可由常数 $C > 0$ 乘以 $1+\lambda^{(d_M-1)/2}$ 控制。由 (7.5) 可得

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{res}}(M(\mathbb{A});\lambda)} \mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\nu} \leq C(1+\lambda^{(d_M-1)/2}).$$

结合 (8.21)，引理得证。 □

接下来我们估计 (8.19) 中的积分。使用上文引入的记号。令 $\underline{\beta} = (\beta_1^\vee, \dots, \beta_m^\vee)$ 和 $\mathcal{X}_{L_s}(\underline{\beta}) = (Q_1, \dots, Q_m) \in \Xi_{L_s}(\underline{\beta})$，其中 $Q_i = \langle P_i, P_i' \rangle$，$P_i|^{\beta_i} P_i'$，$i = 1, \dots, m$。根据 $\Delta_{\mathcal{X}_{L_s}(\underline{\beta})}(P, \pi, \nu, \lambda)$ 的定义 (8.2)，可知我们可以用一个常数倍将该积分控制在以下表达式之内

$$\dim(\nu) \int_{i(\mathfrak{a}_{L_s}^G)^*} e^{-t\|\lambda\|^2} \prod_{j=1}^m \left\| \delta_{P_j|P_j'}(\lambda)\Big|_{\mathcal{A}^2_\pi(P_j')^{K_f,\nu}} \right\| \, d\lambda, \tag{8.22}$$

其中 $\delta_{P_j|P_j'}(\lambda)$ 由 (8.1) 定义。我们在 $(\mathfrak{a}_{L_s}^G,\ \mathbb{C})^*$ 上引入新坐标 $s_j := \langle \lambda, \beta_j^\vee \rangle$，$j = 1, \dots, m$。利用 (4.9) 和 (8.1)，可写为

$$\delta_{P_i|P_i'}(\lambda) = \frac{n'_{\beta_i}(\pi, s_i)}{n_{\beta_i}(\pi, s_i)} + j_{P_i'} \circ (\mathrm{Id} \otimes R_{P_i|P_i'}(\pi, s_i)^{-1} R'_{P_i|P_i'}(\pi, s_i)) \circ j_{P_i'}^{-1}. \tag{8.23}$$

现在假设 G 满足性质 (L)。根据 [FL1，命题 3.8]， G 满足性质 (TWN+)（温和绕数，强版本）。这意味着，对于在 $\mathbb{Q}$ 上定义的 G 的任意真 Levi 子群 M、任意根 $\alpha \in \Sigma_M$，以及 $T \in \mathbb{R}$，以下估计成立

$$\int_T^{T+1} |n'_\alpha(\pi, it)|dt \ll \log(|T| + \Lambda(\pi_\infty; p^{\mathrm{sc}}) + \mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}})) \tag{8.24}$$

对所有 $\Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}))$。在推论 5.2 的证明中已证明，存在 $C > 0$，使得对于所有 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}); K_f, \sigma)$，都有

$$\mathrm{level}(\pi; p^{\mathrm{sc}}) \leq C, \quad \mathrm{and} \quad \Lambda(\pi_\infty; p^{\mathrm{sc}}) \leq C(1 + \lambda^2_{\pi_\infty}). \tag{8.25}$$

因此我们得到

$$\int_T^{T+1} |n'_\alpha(\pi, it)|dt \ll \log(|T| + 1 + \lambda^2_{\pi_\infty}) \tag{8.26}$$

对于所有 $T \in \mathbb{R}$ 和 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}); K_f, \sigma)$。

引理 8.3。存在 $C > 0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{n'_\alpha(\pi, i\lambda)}{n_\alpha(\pi, i\lambda)} \right| e^{-t\lambda^2} d\lambda \leq C(1 + \log(1 + \lambda^2_{\pi_\infty})) \frac{1 + |\log t|}{\sqrt{t}} \tag{8.27}$$

对于所有 $0 < t \leq 1$ 和 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}); K_f, \sigma)$。

证明。由 (5.1　2）由此可得 $|n_\alpha(\pi, i\lambda)| = 1$ 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$。此外，由 (8.26) 我们有　　e

$$\int_0^\lambda |n'_\alpha(\pi, iu)|du \leq C|\lambda| \log(|\lambda| + 1 + \lambda^2_{\pi_\infty}) \tag{8.28}$$

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$和 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}); K_f, \sigma)$。因此，利用分部积分，所述不等式左边的积分等于

$$2t \int_{\mathbb{R}} \int_0^\lambda |n'_\alpha(\pi, iu)|du \lambda e^{-t\lambda^2} d\lambda.$$

由 (8.28) 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |n'_\alpha(\pi, i\lambda)| e^{-t\lambda^2} d\lambda &\leq Ct \int_{\mathbb{R}} \log(|\lambda| + 1 + \lambda^2_{\pi_\infty}) \lambda^2 e^{-t\lambda^2} d\lambda \\ &\leq C_1(1 + \log(1 + \lambda^2_{\pi_\infty})) \frac{1 + |\log t|}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

对于所有 $0 < t \leq 1$和 $\pi \in \Pi_{\mathrm{dis}}(M(\mathbb{A}); K_f, \sigma)$。 □

令 $l_s = \dim(A_{L_s}/A_G)$。结合 (8.23)、引理 8.3 和命题 6.2，可知存在 $C > 0$

$$\int_{i(\mathfrak{a}^G_{L_s})^*} e^{-t\|\lambda\|^2} \prod_{i=1}^m \left\| \delta_{P_i|P'_i}(\lambda) \Big|_{\mathcal{A}^2_\pi(P'_i)^{K_f,\nu}} \right\| d\lambda \leq C(1 + |\log t|)^{l_s} t^{-l_s/2} \left(1 + \log(1 + \lambda^2_{\pi_\infty})\right)^{l_s} \tag{8.29}$$

对所有满足 $\mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\nu}$ 的 $0 < t \leq 1$ 和 $\pi \in \Pi_{\rm dis}(M(\mathbb{A}))$。现在我们可以估计 (8.19)。注意 $c(\pi_\infty) = \lambda_{\pi_\infty} - \|\rho_{\mathfrak{a}_P}\|^2$。由 (8.29) 可知，(8.13) 可以用一个常数乘以下式来估计

$$(1+|\log t|)^{l_s} t^{-l_s/2} \sum_{\pi \in \Pi_{\rm dis}(M(\mathbb{A}))} \dim \mathcal{A}^2_\pi(P)^{K_f,\nu} \left(1+\log(1+\lambda^2_{\pi_\infty})\right)^{l_s} e^{t\lambda_{\pi_\infty}}. \tag{8.30}$$

令 $X_M = M(F_\infty)^1/K_{M,\infty}$ 且 $m =$维数为 X_M。由引理 8.2 可知，对于每个$\varepsilon > 0$，都存在 $C > 0$，使得该级数被 $Ct^{-m/2-\varepsilon}$ 所界定，其中 $0 < t \leq 1$。结合 (8.30)，得到以下命题。

命题 8.4。令 $M \in \mathcal{L}$。令 $m =$维数为 X_M，且 $l =$最大值$_{s\in W(M)}$维数(A_{L_s}/A_G)。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $C > 0$，使得

$$|J_{spec,M}(\phi^\nu_t)| \leq Ct^{-(m+l)/2-\varepsilon}$$

对所有 $0 < t \leq 1$均成立。

现在我们区分两种情形。首先假设 $M = G$。则 $A_M = A_G$。令 $R^1_{\text{离散}}$为正则表示 R^1 of $G(\mathbb{A})^1$ 在 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 上对离散子空间的限制。则 $J_{\text{spec},\,G}(\phi^\nu_t) = Tr(R^1_{\text{离散}}(\phi^{\nu,\,1}_t))$。令 $R_{\rm dis}$为 $G(\mathbb{A})$ 在 $L^2(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 中的正则表示。则算子 $R_{\rm dis}(\phi^\nu_t)$ 与 $R^1(\phi^{\nu,\,1}_t)$ 同构。因此

$$J_{\rm spec,G}(\phi^{\nu,1}_t) = \mathrm{Tr}(R_{\rm dis}(\phi^\nu_t)). \tag{8.31}$$

给定 $\pi \in \Pi_{\rm dis}(G(\mathbb{A}))$，令 $m(\pi)$ 表示 π 在 $L^2(A_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 中 $G(\mathbb{A})$ 的正则表示里出现的重数。于是，利用 [BM], 中的推论 2.2，我们得到

$$J_{\rm spec,G}(\phi^{\nu,1}_t) = \sum_{\pi \in \Pi_{\rm dis}(G(\mathbb{A}),\xi_0)} m(\pi) \dim(\mathcal{H}^{K_f}_{\pi_f}) \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty} \otimes V_\nu)^{K_\infty} e^{t\lambda_{\pi_\infty}}. \tag{8.32}$$

˜现在假设 M 是真 Levi 子群。令 $P = M \ltimes N$。令 $X = G(F_\infty)^1/\mathrm{K}_\infty$。那么

$$\widetilde{X} \cong X_M \times A_M/A_G \times N(F_\infty).$$

˜由于 $l =$max$_{s\in W(M)}$dim$(A_{L_s}/A_G) \leq$dim(A_M/A_G)，因此可得 $m + l \leq$dim $X - 1$。于是，结合命题 8.4，得到

˜定理 8.5. 假设 G 满足性质 (L)。令 $n =$ dim X。对于 $G(\mathbb{A}_f)$ 的每个开紧子群 K_f 以及每个 $\nu \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$，在 $\phi^{\nu,\,1}_t$ 处取值的迹公式谱侧满足

$$\begin{aligned} J_{spec}(\phi^{\nu,1}_t) = &\sum_{\pi \in \Pi_{\rm dis}(G(\mathbb{A}))} m(\pi) \dim(\mathcal{H}^{K_f}_{\pi_f}) \dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty} \otimes V_\nu)^{K_\infty} e^{t\lambda_{\pi_\infty}} \\ &+ O(t^{-(n-1)/2}) \end{aligned} \tag{8.33}$$

当 $t \to 0^+$ 时。

9. Geometric side of the trace formula

与前面一样， G 是数域 F 上的一个约化群。本节考察在 ϕ_t^ν 处取值的阿瑟迹公式 J_{geom} 的几何侧，并确定当 $t \to 0$ 时 $J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu)$ 的渐近行为。迹公式的几何侧 J_{geom} 首次见于 [Ar1]。另见 [Ar5]。对于 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$，Arthur 将 $J_{\mathrm{geom}}(f)$ 定义为多项式 $J^T(f)$ 在点 $T_0 \in \mathfrak{a}_0$ 处的取值，该点在 [Ar3, 引理 1.1], 中给出。根据 [FL3, 定理 7.1]，对于所有 $f \in \mathcal{C}(G(\mathbb{A}); K_f)$， $J_{\mathrm{geom}}(f)$ 绝对收敛。设 $\phi_t^\nu \in \mathcal{C}(G(\mathbb{A}); K_f)$ 为由 (8.11) 定义的函数。那么 $J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu)$ 定义良好。在 [MM2, (1.5)], 中，热算子 $e^{-t\Delta_\nu}$ 的正则化迹定义为

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{reg}}\left(e^{-t\Delta_\nu}\right) := J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu).$$

于是，在 [MM2 中，定理 1.1] 建立了 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{reg}}\left(e^{-t\Delta_\nu}\right)$ 关于 $t \to 0$ 的渐近展开。就我们的目的而言，需要知道重数为 $t^{-n/2}$ 的项的精确形式，其中 $n = \dim X$。为此，我们简要回顾渐近展开的推导。~第一步是用一个适当的紧支撑函数 ϕ_t^ν 替换 ϕ_t^ν，该函数的支撑集中在单位元附近。此函数构造如下。

~ ~ ~设 $d(\cdot,\cdot): X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ 是 X 上的测地距离，并令 $r(g_\infty) = d(g_\infty x_0, x_0)$~，其中 $x_0 = \mathrm{K}_\infty \in X$ 是基点。设 $0 < a < b$ 为充分小的实数，并设 $\beta: \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ 是一个光滑函数，其支撑包含于 $[-b,b]$，满足 $\beta(y) = 1$，当 $0 \le |y| \le a$ 时成立，并且 $0 \le \beta(y) \le 1$，当 $|y| > a$ 时成立。定义

$$\psi_t^\nu(g_\infty) = \beta(r(g_\infty)) h_t^\nu(g_\infty). \tag{9.1}$$

and

$$\tilde{\phi}_t^\nu(g) = \psi_t^\nu(g_\infty)\chi_{K_f}(g_f) \tag{9.2}$$

对于 $g = g_\infty \cdot g_f \in G(\mathbb{A}) = G(F_\infty) \cdot G(\mathbb{A}_f)$。于是 $\tilde{\phi}_t^\nu \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ 且 $\psi_t^\nu \in C_c^\infty(G(F_\infty)^1)$。根据 [MM1，命题 12.1]，存在某个 $c > 0$，使得对每个 $0 < t \le 1$，我们都有

$$\left| J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu) - J_{\mathrm{geom}}(\tilde{\phi}_t^\nu) \right| \ll e^{-c/t}. \tag{9.3}$$

注意，在 [MM1 第 12] 节中，我们假设 $G = \mathrm{GL}(n)$ 或 $G = \mathrm{SL}(n)$。然而，该命题的证明不需要对 G施加任何限制。下一个结果将讨论简化为几何侧的幺幂贡献。在陈述该结果之前，我们回顾 Arthur 迹公式的粗几何展开 [Ar5，第 10] 节：若两个元素 γ_1、$\gamma_2 \in G(F)$ 的半单部分（在 Jordan分解中）在 $G(F)$ 中共轭，则称它们粗等价。于是，对于任意 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$，我们有

$$J_{\mathrm{geom}}(f) = \sum_{\mathfrak{o}} J_{\mathfrak{o}}(f),$$

其中， $\mathfrak{o}$ 遍历 $G(F)$中的粗等价类，且分布 $J_{\mathfrak{o}}$ 的支集包含于所有 $g \in G(\mathbb{A})^1$ 构成的集合中，这些元素的半单部分在 $G(\mathbb{A})$中共轭于 $\mathfrak{o}$中的某个半单元素。若 $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}'$，则 $J_{\mathfrak{o}}$ 与 $J_{\mathfrak{o}'}$ 的支集不相交。注意， $G(F)$中的幺幂元构成单个等价类 $\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}$，我们记为

$J_{\mathrm{unip}} = J_{\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}}$。假设 K_f 是整洁的。若 β 的支集足够小，则根据[MM2，命题 3.1]，有

$$J_{\mathrm{geom}}(\tilde{\phi}_t^\nu) = J_{\mathrm{unip}}(\tilde{\phi}_t^\nu). \tag{9.4}$$

由 (9.3) 和 (9.4)，问题归结为研究当 $t \searrow 0$ 时 $\sim J_{\mathrm{unip}}(\phi_t^\nu)$ 的渐近行为。为此，我们采用 Arthur 对 J_{unip} 的精细几何展开。为陈述该展开，我们需要引入一些记号。

令 S 为有理数域 F 的有限个赋值的集合，其中包含阿基米德位，并满足对 $v \notin S$ 有 $K_v = \mathbf{K}_v$。令 $G(F_S)^1 = G(F_S) \cap G(\mathbb{A})^1$。令 $M \in \mathcal{L}$。依照 Arthur 的做法，我们在 $M(F)$ 中的幺幂元集合上引入一种依赖于集合 S 的等价关系：幺幂元 $u, v \in M(F)$ 称为 (M,S)-等价，当且仅当 u 和 v 在 $M(F_S)$ 中共轭。我们用 $[u]_S \subseteq M(F)$ 表示 u 的等价类，并令 $\mathcal{U}_S^M$ 表示所有此类等价类组成的集合。

注意，两个等价的幺幂元在$M(F_S)$中定义同一个幺幂共轭类，因此我们也可以将 $\mathcal{U}_S^M$ 视为 $M(F_S)$中至少含有一个 F-有理代表元的幺幂共轭类集合，并将相应的共轭类也记作 $[u]_S$。

注9.1. (i) 若 $T \subseteq S$，则可得到一个定义良好的映射 $\mathcal{U}_S^M \ni [u]_S \mapsto [u]_T \in \mathcal{U}_T^M$。(ii) 若 $G = \mathrm{GL}(n)$，则该等价关系与 S 无关，且等同于 $M(F)$中的共轭。

对于 $[u]_S \in \mathcal{U}_S^M$和$f_S \in C_c^\infty(G(F_S)^1)$，Arthur 关联一个带权轨道积分$J_M^G([u]_S, f_S)$ [Ar6]，它是一个支撑在由 $[u]_S \subseteq M(F_S)$诱导的 $G(F_S)$-共轭类上的分布。设 $\mathbf{1}_{\mathbf{K}^S} \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}^S))$为$\mathbf{K}^S$的示性函数，其中$f_S \in C_c^\infty(G(F_S)^1)$。令 $f = f_S \mathbf{1}_{\mathbf{K}^S} \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$。根据 [Ar7，推论 8.3]，存在唯一的常数 $a^M([u]_S, S) \in \mathbb{C}$和共轭类 $[u]_S \in \mathcal{U}_S^M$，使得对所有 $f_S \in C_c^\infty(G(F_S)^1)$，有

$$J_{\mathrm{unip}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \sum_{[u]_S \in \mathcal{U}_S^M} a^M([u]_S, S) J_M^G([u]_S, f_S). \tag{9.5}$$

事实上，[Ar7] 中的推论 8.3 仅针对有理数域 $\mathbb{Q}$上的约化群作出陈述。然而，在文章末尾，Arthur 解释说，文中的所有结果同样适用于数域 F上的约化群。

一般而言，我们对系数 $a^M([u]_S, S)$知之甚少。不过，就我们的目的而言，只需了解 $a^G(1, S)$即可；根据 [Ar7，推论 8.5]，它等于

$$a^G(1, S) = \mathrm{vol}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1). \tag{9.6}$$

写出 $S = S_\infty \sqcup S_0$。然后 $K_f = K_{S_0} \mathbf{K}^S$。回忆由 (9.2) 可知

$$\tilde{\phi}_t^\nu = \frac{1}{\mathrm{vol}(K_f)} \psi_t^\nu \cdot \mathbf{1}_{K_{S_0}} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{K}^S}.$$

然后由 (9.5) 可得

$$J_{\mathrm{unip}}(\tilde{\phi}_t^\nu)=\sum_{M\in\mathcal{L}}\sum_{[u]_S\in\mathcal{U}_S^M}\frac{a^M([u]_S,S)}{\mathrm{vol}(K_f)}J_M^G([u]_S,\psi_t^\nu\cdot\mathbf{1}_{K_{S_0}}). \tag{9.7}$$

利用（9.6），对应于（$G,1$）的项等于

$$\frac{\mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)}{\mathrm{vol}(K_f)}h_t^\nu(1). \tag{9.8}$$

为了一般性地处理加权轨道积分，我们使用 Arthur 分裂公式[Ar5, (18.7)]，，下面回顾该公式。设 S 是 F 的任意有限个赋值的集合，其中不一定包含阿基米德位。设 $L\in\mathcal{L}(M)$ 和 $Q\in\mathcal{P}(L)$。给定$f_S\in G(F_S)$，令

$$f_{S,Q}(m)=\delta_Q(m)^{1/2}\int_{\mathbf{K}_S}\int_{N_Q(F_S)}f_S(k^{-1}mnk)\,dn\,dk,\quad m\in L.$$

设 $S=S_1\cup S_2$，其中 S_1、S_2非空且不相交，并且 f_S是乘积 $f_{S_1}f_{S_2}$到 $G(F_S)^1$的限制，其中 $f_{S_j}\in C^\infty(G(F_{S_j}))$、$j=1,2$。那么分裂公式表明

$$J_M^G([u]_S,f_S)=\sum_{L_1,L_2\in\mathcal{L}(M)}d_M^G(L_1,L_2)J_M^{L_1}([u]_{S_1},f_{S_1,Q_1})J_M^{L_2}([u]_{S_2},f_{S_2,Q_2}), \tag{9.9}$$

其中记号如下：$d_M^G(L_1,L_2)\in\mathbb{R}$是某些常数，仅取决于 M、L_1、L_2、G，而与 S无关。事实上，仅当自然映射 $\mathfrak{a}_M^{L_1}\oplus\mathfrak{a}_M^{L_2}\longrightarrow\mathfrak{a}_M^G$是同构时，$d_M^G(L_1,L_2)$才非零。$Q_j$是 $\mathcal{P}(L_j)$中的任意元素，而$[u]_{S_j}\in\mathcal{U}_{S_j}^M$是 $[u]_S$在典范映射 $\mathcal{U}_S^M\to\mathcal{U}_{S_j}^M$下的像。最后，$J_M^{L_j}([u]_{S_j},\cdot)$表示 S_j-进分布，它支撑在由 $[u]_{S_j}\subseteq M(F_{S_j})$诱导的 $L_j(F_{S_j})$-共轭类上，并按 [Ar6] 中的定义给出。

我们将分裂公式应用于 (9.7) 右侧的带权轨道积分，其中$S_1=S_\infty$ 和 $S_2=S_0$。得到

$$J_M^G([u]_S,\psi_t^\nu\cdot\mathbf{1}_{K_{S_0}})=\sum_{L_1,L_2\in\mathcal{L}(M)}d_M^G(L_1,L_2)J_M^{L_1}([u]_\infty,\psi_{t,Q_1}^\nu)J_M^{L_2}([u]_{S_0},\mathbf{1}_{K_{S_0},Q_2}). \tag{9.10}$$

这是一个有限和，其中 $d_M^G(L_1,L_2)$ 和 $J_M^{L_2}([u]_{S_0},\mathbf{1}_{K_{S_0},\,Q_2})$ 独立于 t。形如 $J_M^{L_1}([u]_\infty,\psi_{t,\,Q_1}^\nu)$ 的带权轨道积分关于 t 的渐近展开已在 [MM2，命题 7.2] 中确定。该推论已对 $\mathbb{Q}$ 上的群证明。然而，通过重复相关论证或使用标量限制，可以很容易地将证明扩展到 F 上的约化群，

我们回顾一下这个命题。设 $M\in\mathcal{L}$, $P_1=M_1N_1\in\mathcal{F}(M)$ 和 $\mathcal{O}\subset M(F_\infty)$ 是 $M(F_\infty)$中的一个幺幂共轭类。设 $d_{\mathcal{O}}=\dim\mathcal{O}^{G(F_\infty)^1}$ 为幺幂轨道的维数

在 $G(F_\infty)^1$ 中由 $M(F_\infty)$ 诱导而来，并设 $r_M^{M_1} = \dim \mathfrak{a}_M^{M_1}$。那么存在常数$b_{ij} = b_ij(M, \mathcal{O}) \in \mathbb{C}$, $j \geq 0$, $0 \leq i \leq r_M^{M_1}$，使得对于 $0 < t \leq 1$

$$J_M^{M_1}(\mathcal{O}, (\psi_t^\nu)_{P_1}) \sim t^{-n/2+d_\mathcal{O}^G/4} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{r_M^{M_1}} b_{ij} t^{j/2} (\log t)^i. \tag{9.11}$$

若 K_f 是整洁的，则 $d_\mathcal{O}^G > 0$ 对于 $\mathcal{O} \neq 1$。结合 (9.3)–(9.11)，可知对于每个$\nu \in \Pi(K_\infty)$，都存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu) = \mathrm{vol}(X(K_f)) h_t^\nu(1) + O(t^{-n/2+\varepsilon}) \tag{9.12}$$

对所有 $0 < t \leq 1$。由 [Mu3，引理 2.3]，我们有

$$h_t^\nu(1) = \frac{\dim(\nu)}{(4\pi)^{n/2}} t^{-n/2} + O(t^{-(n-1)/2}) \tag{9.13}$$

当 $t \searrow 0$时。结合 (9.12)，我们得到以下命题。

命题 9.2. 设 G 是数域 F上的约化群。设 K_f 是 $G(\mathbb{A})$的一个开紧子群。假设 K_f 是整洁的。那么对于每个 $\nu \in \Pi(K_\infty)$，都存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu) = \frac{\dim(\nu)\,\mathrm{vol}(X(K_f))}{(4\pi)^{n/2}} t^{-n/2} + O(t^{-n/2+\varepsilon})$$

对所有 $0 < t \leq 1$。

10. Proof of the main theorem

首先，我们证明韦尔定律的阿黛尔版本，即定理 1.4。设 G_0 是数域 F 上的约化代数群，并令 $G = \mathrm{Res}^{F/\mathbb{Q}}(G_0)$ 为通过标量限制从 G_0 得到的、定义在 $\mathbb{Q}$ 上的约化群。我们将使用 F 上约化群的（非不变）阿瑟迹公式，推导出关于 G_0 的韦尔定律。然后，我们利用标量限制的性质证明，这等价于关于 G 的韦尔定律。

首先，我们回顾一下，F 上的粗阿瑟迹公式为以下恒等式

$$J_{\mathrm{spec}}(f) = J_{\mathrm{geom}}(f), \quad f \in \mathcal{C}(G(\mathbb{A}_F)^1).$$

应用于 ϕ_t^ν，我们得到等式

$$J_{\mathrm{spec}}(\phi_t^\nu) = J_{\mathrm{geom}}(\phi_t^\nu), \quad t > 0.$$

假设 G_0 满足性质 (L)。令 $K_{0,f}$ 为 $G_0(\mathbb{A}_{F,f})$ 的开紧子群。我们假设 $K_{0,f}$ 是整洁的。结合定理 8.5 和命题 9.2，我们得到

(10.1)

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(G_0(\mathbb{A}_F))} m(\pi)\dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_{0,f}})\dim\left(\mathcal{H}_{\pi_\infty}\otimes V_\nu\right)^{K_\infty} e^{t\lambda_{\pi_\infty}} = \frac{\dim(\nu)\ \mathrm{vol}(X(K_{0,f}))}{(4\pi)^{n/2}}t^{-n/2} + O(t^{-(n-1)/2})$$

如 $t\searrow 0$，其中 $X(K_{0,\ f})$ 由 (3.10) 定义。令 $N^{K_{0,\ f},\ \nu_{\mathrm{dis}}}(\lambda)$ 为由 (1.16) 定义的阿代尔计数函数。应用卡拉马塔定理 [Fe，第 446]，页，我们得到

$$N_{\mathrm{dis}}^{K_{0,f},\nu}(\lambda) = \frac{\dim(\nu)\,\mathrm{vol}(X(K_{0,f}))}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}\lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2}) \tag{10.2}$$

如 $\lambda\to\infty$。由命题 7.2 可得

$$N_{\mathrm{cus}}^{K_{0,f},\nu}(\lambda) = \frac{\dim(\nu)\,\mathrm{vol}(X(K_{0,f}))}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}\lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2}). \tag{10.3}$$

这是关于 G_0 的韦尔定律的第一部分。第二部分是对剩余谱计数函数的估计，该估计由关于 $M=G$ 的命题 7.2 得出。

接下来我们证明定理 1.4 与标量限制相容。首先回顾一些关于韦伊标量限制 [We], [Bo2] 的事实。根据 [We，定理 1.3.2]，我们有

$$G(\mathbb{Q}_v) = \prod_{w|v} G_0(F_w). \tag{10.4}$$

对 $\mathbb{Q}$ 的所有赋值 v 都成立。特别地，我们得到

$$G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = G_0(\mathbb{A}_F),\quad G(\mathbb{R}) = G_0(F_\infty) = \prod_{w\in S_\infty} G_0(F_w),\quad G(\mathbb{Q}) = G_0(F). \tag{10.5}$$

因此，我们得到 G_0 的自守表示与 G 的自守表示之间的一个双射。此外，$G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 在 $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ 上的正则表示，等价于 $G_0(\mathbb{A}_F)$ 在 $L^2(G_0(F)\backslash G_0(\mathbb{A}_F))$ 上的正则表示。此外，根据 [Bo2, 5.2],，映射 $P_0\mapsto \mathrm{Res}^{F/\mathbb{Q}}(P_0)$ 在 G_0 上定义于 F 的抛物子群与在 G 上定义于 $\mathbb{Q}$ 的抛物子群之间诱导出一个双射，并且 (10.4) 和 (10.5) 对 G_0 的 F-抛物子群仍然成立。令 $P_0 = M_{P_0}N_{P_0}$ 为 G_0 的一个 F-抛物子群，并令 $P = \mathrm{Res}^{F/\mathbb{Q}}(P_0)$。设 $f\in L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_Q)^1)$ 与 $f\in L^2(G_0(F)\backslash G_0(\mathbb{A}_F)^1)$ 相互对应。那么

$$\int_{N_P(\mathbb{Q})\backslash N_P(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} f(nx)dn = \int_{N_{P_0}(F)\backslash N_{P_0}(\mathbb{A}_F)} \tilde{f}(n_0x)dn_0. \tag{10.6}$$

因此我们得到

$$L^2_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^1) \cong L^2_{\mathrm{cus}}(G_0(F)\backslash G_0(\mathbb{A}_F)^1).$$

对于剩余谱，结论同样成立。由此可知， G 和G_0 的计数函数相同。因此，(10.2) 和 (10.3) 对 $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G_0)$ 的计数函数成立。这就证明了定理 1.4。

接下来，我们从定理 1.4 推导出定理 1.2。为此，我们用另一种方式表达计数函数。设 $\sigma \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$。令 $L^2(A_G\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))\ \sigma)$ 按照 (1.3) 中的定义。给定 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{R}))$，令 $m_\Gamma(\pi)$ 表示 π 在 $L^2(A_G\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 中的正则表示 R_Γ 里出现的重数。令 L^2 不可约子表示$(A_G\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 表示所有不可约子表示张成的空间。那么

$$(L^2_{\mathrm{dis}}(A_G\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))\otimes V_\sigma)^{\mathbf{K}_\infty} = \bigoplus_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{R}))} m_\Gamma(\pi)(\mathcal{H}_\pi\otimes V_\sigma)^{\mathbf{K}_\infty}. \tag{10.7}$$

对于 $\tau \in \Pi(G(\mathbb{R}))$，令 λ_τ 为 τ 的卡西米尔特征值，即 $R_\Gamma(\Omega^{G(\mathbb{R})})$ 在 $\mathcal{H}_\tau$ 上的特征值。那么可知，$(\mathcal{H}_\tau\otimes V_\sigma)^{K_\infty}$ 是 $\Delta_\sigma = -R_\Gamma(\Omega^{G(\mathbb{R})})$ 的特征空间，其特征值为 $-\lambda_\tau$。因此

$$N_{\Gamma,\mathrm{dis}}(\lambda;\sigma) := \sum_{\substack{\pi\in\Pi_(G(\mathbb{R}))\\ -\lambda_\pi\le\lambda}} m_\Gamma(\pi)\dim(\mathcal{H}_\pi\otimes V_\sigma)^{\mathbf{K}_\infty}. \tag{10.8}$$

$N_{\Gamma,\mathrm{cus}}(\lambda,\sigma)$ 和 $N_{\Gamma,\mathrm{res}}(\lambda,\sigma)$ 也有类似的公式

现在我们建立阿黛尔计数函数与实计数函数之间的关系。设 $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ 为一个开紧子群。设 $\Gamma_i \subset G(\mathbb{Q})$，$i = 1,...,l$ 由 (3.2) 确定。经典计数函数与阿代尔计数函数之间的关系由下述引理描述。

引理 10.1. 设 $\sigma \in \Pi(\mathrm{K}_\infty)$。则

$$N^{K_f,\sigma}_{\mathrm{dis}}(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} N_{\Gamma_i,\mathrm{dis}}(\lambda,\sigma)$$

对于 $\lambda \ge 0$。对尖点谱和剩余谱的计数函数，同一等式也成立。

证明。给定 $\tau \in \Pi(G(\mathbb{R}))$，令 $m(\tau)$ 表示 τ 在正则表示中的重数。根据关于 $F = \mathbb{Q}$ 的 (3.7)，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\tau\in\Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{R}))\\ -\lambda_\tau\le\lambda}} m(\tau)(\mathcal{H}_\tau\otimes V_\nu)^{\mathbf{K}_\infty} &= \sum_{\substack{\tau\in\Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{R}))\\ -\lambda_\tau\le\lambda}}\ \sum_{\substack{\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))\\ \pi_\infty=\tau}} m(\pi)\dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_f})\dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}\otimes V_\nu)^{\mathbf{K}_\infty}\\ &= \sum_{\substack{\pi\in\Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{A}))\\ -\lambda_{\pi_\infty}\le\lambda}} m(\pi)\dim(\mathcal{H}_{\pi_f}^{K_f})\dim(\mathcal{H}_{\pi_\infty}\otimes V_\nu)^{\mathbf{K}_\infty}\\ &= N^{K_f,\sigma}_{\mathrm{dis}}(\lambda).\end{aligned}$$

结合 (3.8) 可得

$$N_{\mathrm{dis}}^{K_f,\sigma}(\lambda)=\sum_{\substack{\tau\in\Pi_{\mathrm{dis}}(G(\mathbb{R}))\\ -\lambda_\tau\le\lambda}} m(\tau)(\mathcal{H}_\tau\otimes V_\nu)^{K_\infty}=\sum_{i=1}^{l}\sum_{\substack{\tau\in\Pi(G(\mathbb{R}))\\ -\lambda_\tau\le\lambda}} m_{\Gamma_i}(\tau)(\mathcal{H}_\tau\otimes V_\nu)^{K_\infty} \tag{10.9}$$
$$=\sum_{i=1}^{l} N_{\Gamma_i,\mathrm{dis}}(\lambda,\nu).$$

□

设 K_f以及 Γ_i、 $i=1$、.....、 l如上。由引理 10.1 可得

$$N_{\mathrm{cus}}^{K_f,\nu}(\lambda)=\sum_{i=1}^{l} N_{\Gamma_i,\mathrm{cus}}(\lambda;\nu). \tag{10.10}$$

此外，由 (3.2) 可得

$$\mathrm{vol}(X(K_f))=\mathrm{vol}(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K_f)=\sum_{i=1}^{l}\mathrm{vol}(\Gamma_i\backslash\widetilde{X}), \tag{10.11}$$

~其中 $X=A_G\backslash G(\mathbb{R})/K_\infty$。因此由 (10.2) 可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\frac{N_{\Gamma_i,\mathrm{cus}}(\lambda;\nu)}{\lambda^{n/2}}=\sum_{i=1}^{l}\frac{\dim(\nu)\,\mathrm{vol}(\Gamma_i\backslash\widetilde{X})}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}. \tag{10.12}$$

现在我们按照 [LV，第 6 节。3] (1.10) 中的方法进行论证。由 (1.10) 可得

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\frac{N_{\Gamma_i,\mathrm{cus}}(\lambda;\nu)}{\lambda^{n/2}}\le\frac{\dim(\nu)\,\mathrm{vol}(\Gamma_i\backslash\widetilde{X})}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}$$

对于 $i=1$、.....、 l。结合 (10.12) 可知

$$N_{\Gamma_i,\mathrm{cus}}(\lambda;\nu)=\frac{\dim(\nu)\,\mathrm{vol}(\Gamma_i\backslash\widetilde{X})}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\lambda^{n/2}+o(\lambda^{n/2}) \tag{10.13}$$

对于 $i=1$、.....、 l。

现在设 $\Gamma\subset G(\mathbb{Q})$ 是一个同余子群。根据同余子群的定义（见第 3 节），存在一个紧开子群 $K_f\subset G(\mathbb{Q})$，使得 $\Gamma=K_f\cap G(\mathbb{Q})$。令 Γ_i, $i=1$, ..., l 由 (3.1) 定义。于是 $\Gamma=\Gamma_1$，定理 1.2 的第一部分由 (10.13) 得证。

为证明 t　　在定理 1.2 的第二部分中，我们注意到，根据引理 10.1，有

$$N_{\mathrm{res}}^{K_f,\nu}(\lambda)=\sum_{i=1}^{l} N_{\Gamma_i,\mathrm{res}}(\lambda,\nu) \tag{10.14}$$

对于 $\lambda \geq 0$。Si 由于右侧的每一项都是 ≥ 0 和 $\Gamma = \Gamma_1$, （7.22）得出 s

$$N_{\Gamma,\mathrm{res}}(\lambda, \nu) \leq C(1 + \lambda^{(n-1)/2}), \quad \lambda \geq 0. \tag{10.15}$$

定理 1.2 的证明至此完成。

References

[Ar1] J. Arthur，约化群的迹公式。I. 与 $G(\mathbb{Q})$中的类相联系的项。《杜克数学杂志》45 (1978)，第4期，911 – 952。10, 34, 41[Ar2] J. Arthur，约化群的迹公式。II. 截断算子的应用。《组合数学》40 (1980)，第1期，87 –121。29, 34[Ar3] J. Arthur，不变形式下的迹公式，《数学年刊》(2) 114 (1981)，第1期，1–74。30, 35, 41[Ar4] J. Arthur，交织算子与留数 I. 加权特征，《泛函分析杂志》84 (1989)，19 – 84。16, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 33[Ar5] J. Arthur，迹公式导论，《克莱数学会议录》，第4卷，2005。29, 41, 43[Ar6] J. Arthur，带权轨道积分的局部行为，《杜克数学杂志》56 (1988)，第2期，223–293。10, 42, 43[Ar7] J. Arthur，幂零簇上的一个测度，《加拿大数学杂志》，第XXXVII卷，(1985)，第6期，1237–1274。42[Ar8] J. Arthur. 从艾森斯坦级数得到的一族分布。I. Paley-Wiener 定理的应用。《美国数学杂志》，(1982) 104(6):1243–1288。[Ar9] J. Arthur. 从艾森斯坦级数得到的一族分布。II. 显式公式。《美国数学杂志》，(1982) 104(6):1289–1336。15, 16, 30, 33.[Av] V. G. Avakumovi´c，闭黎曼流形上的特征函数。Math. Z. 65 (1956), 327–344。3[BM] D. Barbasch, H. Moscovici， L^2-指标与迹公式，《泛函分析杂志》53 (1983), 151–201。36, 40[Bo1] A. Borel，数域上阿代尔群的若干有限性性质，Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 16 (1963), 5 – 30。11[Bo2] A. Borel，自守 L-函数，载于：自守形式、表示与L函数，第2部分，第27–61页，《纯粹数学专题讨论会论文集》，第XXXIII卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1979。17, 45[Bo3] A. Borel，算术群的稳定实上同调，Annales scient. de l’ ´ENS 7, no 2, (1974), 235–272。33[BJ] A. Borel and H. Jacquet，自守形式与自守表示，《纯粹数学专题讨论会论文集》33，第I部分，美国数学会 (1979), 184–202。12[BE] P. Borwein and T. Erd´elyi，将伯恩斯坦不等式锐化推广至有理函数空间，Mathematika 43(2) (1997), 413–423。26[BG] A. Borel and H. Garland，算术群的拉普拉斯算子与离散谱，《美国数学杂志》105 (1983)，第2期，309–335。10[CD] L. Clozel, P. Delorme，约化李群的不变 Paley-Wiener 定理，Invent. Math. 77 (1984)，第3期，427–453。10[CLL] L. Clozel, J.-P. Labesse, andR. Langlands，关于迹公式的晨间研讨会，油印讲义，高等研究院，普林斯顿，1984。22[CV] Y. Colin de Verdi`ere，伪拉普拉斯算子，II. Ann. Inst. Fourier 33 (1983)，第2期，87—113。4[Do] H. Donnelly，有限体积对称空间的尖点谱，《微分几何杂志》17 (1982), 239–253。4, 33

[GL] S. Gelbart, E. Lapid，临界带边缘处L函数的下界，《美国数学杂志》128 (2006)，第3期，619 – 638。[He] D.A. Hejhal，PSL(2, ℝ)的塞尔伯格迹公式，第2卷，《数学讲义》1001，施普林格出版社，柏林，1983。[Fe] W. Feller，《概率论及其应用导论》，第2版，第II卷，约翰·威立父子出版公司，纽约，1971。45[FLM1] T. Finis, E. Lapid and W. M¨uller，Arthur 迹公式的谱侧——绝对收敛，《数学年刊》第174卷 (2011)，第1期，173–195。8, 34, 35[FLM2] T. Finis, E. Lapid, W. M¨uller，GL(n)和SL(n)主同余子群的极限重数，《朱西厄数学研究所杂志》14 (2015)，第3期，589–638。2, 8, 21, 24, 25, 26[FL1] T. Finis, E. Lapid，交织算子的解析性质 I：全局正规化因子，《伊朗数学会通报》43 (2017)，第4期，235–277。5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 39[FL2] T. Finis, E. Lapid，切瓦莱群同余子群韦尔定律的余项，《杜克数学杂志》170 (2021)，第4期，653–695。5[FL3] T. Finis, E. Lapid，迹公式几何侧的连续性。《越南数学学报》41 (2016)，第3期，425–455。41[FM] T. Finis, J. Matz，约化群海克算子的渐近性质，《数学年刊》380 (2021)，第3–4期，1037–1104。5[HC1] Harish-Chandra，约化 p 进群的普朗歇尔公式，载于：《论文集》，IV，第353-367页，施普林格出版社，纽约-柏林-海德堡，1984。25[HC2] Harish-Chandra，半单李群上的自守形式，《数学讲义》第62卷，施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约，1968。28[Kn] A.W. Knapp，半单群的表示论，普林斯顿大学出版社，普林斯顿和牛津，2001。28, 37[La1] R.P. Langlands，艾森斯坦级数满足的函数方程，《数学讲义》第544卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1976。2, 7, 14, 27, 28[La2] R. P. Langlands，自守形式理论中的问题，现代分析及其应用讲义，III，施普林格出版社，柏林，1970，第18–61页。《数学讲义》第170卷。17[La3] R.P. Langlands，艾森斯坦级数。载于：《纯粹数学专题讨论会论文集》第9卷，第235–252页，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1966。29[LM] E. Lapid, W. M¨uller，SL($n, \mathbb{R}$)/ SO(n)算术商空间的谱渐近，《杜克数学杂志》149 (2009)，第1期，117–155。4[LaM] H.B. Lawson and M.-L. Michelsohn，自旋几何，普林斯顿数学丛书，38。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1989。35[LV] E. Lindenstrauss, A. Venkatesh，球尖点形式的存在性与韦尔定律，GAFA 17 (2007), 220 – 251。4, 5, 47[Ma] A. Maiti，任意阿基米德型的韦尔定律，arXiv:2210.05986v1。5[MM1] J. Matz and W. M¨uller，SL$_n(\mathbb{R})$/SO(n)对称空间算术商空间的解析挠率，《几何与泛函分析》27 no. 6 (2017), 1378–1449。35, 36, 37, 41[MM2] J. Matz and W. M¨uller，算术局部对称流形的解析挠率及 L^2-挠率的逼近，《泛函分析杂志》284 (2023)，第1期，论文编号109727。8, 23, 41, 42, 43[Mia] R.J. Miatello，负曲率紧局部对称空间上向量值热核的米纳克希松达拉姆–普莱耶尔系数。《美国数学会汇刊》260 (1980), 1–33。13, 36[Mil] S.D. Miller，SL$_3(\mathbb{Z})$尖点形式的存在性与温和性。《纯粹与应用数学杂志》533 (2001), 127–169。4[MW] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger，谱分解与艾森斯坦级数，剑桥数学专题丛书，113。剑桥大学出版社，剑桥，1995。5, 7, 14, 27, 28

[Mu1] W. M¨uller, 《自守形式理论中的迹类猜想》, 《数学年刊》130, 第3期（1989）, 473–529。4[Mu2] W. M¨uller, 《阿瑟迹公式的谱侧》, GAFA 12（2002）, 669–722。15, 16, 22, 31[Mu3] W. M¨uller, SL_n的尖点谱的Weyl定律, 《数学年刊》165（2007）, 273–333。4, 5, 8, 38, 44[MS] W. M¨uller, B. Speh, 《GL(n)阿瑟迹公式谱侧的绝对收敛》。附录由 E.M. Lapid 撰写。《几何与泛函分析》14（2004）, 第1期, 58–93。23, 26[Sa1] P. Sarnak, 《论尖点形式》, 载于: 《Selberg迹公式及相关主题》, Contemp. Math. 53, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 1986, 第393–407页。4[Sa2] P. Sarnak, 《双曲曲面的谱》, 《美国数学会通报》（新系列）40（2003）, 第4期, 441–478。4[Se1] A. Selberg, 《调和分析》, 载于《论文集》第I卷, 施普林格出版社, 柏林-海德堡-纽约（1989）, 626–674。4[Sh1] F. Shahidi, 《关于某些 L函数》, 《美国数学杂志》103（1981）, 297–356。15, 22, 24, 31[Sh2] F. Shahidi, 《艾森斯坦级数与自守L函数》, 美国数学会丛书, 第58卷。美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2010。15[Si] A.J. Silberger, 《 p进群的Harish-Chandra Plancherel定理》, 《美国数学会汇刊》348（1996）, 第11期, 4673–4686。25[We] A. Weil, 《阿代尔与代数群》, Birkh¨auser, 波士顿、巴塞尔、斯图加特, 1982。10, 45

Universität Bonn, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60, D – 53115 Bonn, Ger-many

电子邮箱地址：mueller@math.uni-bonn.de