李型秩 2 单群的 Sylow p-子群上的饱和融合系统

MARTIN VAN BEEK

摘要。对于任意素数 p，以及与特征 p下某个秩 2 李型单群的 Sylow p-子群同构的 p-群，我们确定了所有以 S 为支撑的饱和融合系统，直至同构。

arXiv:2302.02222v1 [math.GR] 4 Feb 2023

1. 引言

我们完成了对特征 p下李型秩 2 群的 Sylow$p$-子群上所有饱和融合系统的分类，并统一了文献中已有的若干结果。这项工作的缘由，来自先前关于以 $PSL_3(p)$、$G_2(p)$ 和 $Sp_4(p^n)$ 的 Sylow p-子群为支撑的融合系统的研究；这些研究揭示了此前未知的奇异融合系统。下面的主结果表明，李型秩 2 群的 Sylow p-子群能够支撑奇异融合系统的情形仅有这些。

主定理。设 $\mathcal{F}$ 是一个定义在 p-群 S上的饱和融合系统，其中 S 与某个秩 2 李型单群的 *Sylow* p-子群同构。那么 $\mathcal{F}$ 已知。此外，若 $\mathcal{F}$ 是奇异的，则 $O_p(\mathcal{F}) = \{1\}$，且以下条件之一成立：

(i) $S \cong 7_+^{1+2}$以及 $\mathcal{F}$ 的描述见 *[RV04]*；(ii) S 同构于一个 *Sylow* 7-子群，其所在群为 $G_2(7)$，且 $\mathcal{F}$ 的描述见*[PS18]*；或者(iii) S 同构于一个 *Sylow* p-子群，其所在群为 $Sp_4(p^n)$，其中 p 为奇素数，且$n \in \mathbb{N}$。

我们纳入了李型秩为 2 的群的“非单”版本，以及它们的导出子群，即 $PSp_4(2)$、$G_2(2)$、${}^2F_4(2)$ 及其导出子群。我们指出，我们的工作为 Parker 和 Semeraro 提出的猜想提供了支持性证据 [PS21，猜想内容为 关于定义特征下李型群的 Sylow p-子群所支撑的饱和融合系统的刚性。

主定理汇集了数年来发表的多项结果。这些研究工作的源头是 Ruiz 和 Viruel 的一篇论文 [RV04]，，该论文

MSC2020. 20D20；20D05；20E42。关键词。 融合系统；李型群；有限单群。作者受 Heilbronn 数学研究所资助。本研究的部分工作是在艾萨克·牛顿数学科学研究所的 GRA2 项目期间完成的，并得到 EPSRC（EP/K032208/1）的资助。

分类了由阶为p^3 、指数为 p 的特型群（PSL p的一个 Sylow $_3(p)$-子群） 7_+^{1+2}支撑的所有饱和融合系统。如上所述，他们发现了三个由 p支撑的奇异融合系统。Clelland $_3(p^n)$ $n \in \mathbb{N}$ 在其论文中研究了由 PSL [的一个 Sylow 07], -子群支撑的融合系统的一般情形，但未发现更多奇异实例。

接下来是 Parker 和 Semeraro 的论文 [PS18]，研究定义在 G 的 Sylow p-子群上的融合系统$_2(p)$，同样针对 p 奇素数。他们发现了 27 个新的奇异融合系统，它们全部定义在 G 的 Sylow 7-子群上$_2$(7)。接下来是 Henke 和 Shpectorov 对 Sp 的 Sylow$p$-子群上的融合系统进行分类的工作$_4(p^n$。截至目前，这项工作的成果尚未发表。根据 Parker 和 Stroth 的工作 [PS15], ，目前已知这里存在无穷多个奇异融合系统，不过它们或许都能得到适当的组织和理解。

关于 PSU 的 Sylow p-子群的情形$_4(p)$，当 p 素数为奇数时，分别由两篇论文处理：情形 $p = 3$ 由 Baccanelli、Franchi 和 Mainardis 研究 [BFM19], ，而情形 $p \geqslant 5$ 由 Moragues-Moncho 分析 [Mon22]。这里没有发现奇异融合系统。在本文之前的最后一项工作，是作者对 G 的 Sylow p-子群以及 PSU$_2(p^n)$ 和 PSU$_4(p^n)$ 上的饱和融合系统进行分类，适用于任意素数 p 及任意 $n \in \mathbb{N}$，并涵盖了此前介绍的若干情形。这里采用的方法与先前研究略有不同，并且更明确地依赖于某些唯一性结果，这些结果涉及融合系统背景下出现的融合积和弱 BN-对。

我们通过确定剩余情形完成这一研究：定义在 ^{2}F$_4(2^n)$、 ^{3}D$_4(p^n)$ 或 PSU$_5(p^n)$ 的 Sylow p-子群上的饱和融合系统。

定理 *A.* 设 *F* 是定义在 p-群 S 上的饱和融合系统，其中S 同构于 $^2F_4(2^n)$、 $^3D_4(p^n)$ 或 $PSU_5(p^n)$ 的 *Sylow* p-子群，并且 $p = 2$在第一种情形下成立。那么，*F* 可由一个已知的有限群实现。此外，若 $O_p(F) = \{1\}$，则 *F* 同构于一个几乎单群 G 的 p-融合范畴，其中 $F^*(G)$ 分别为 $\cong {}^2F_4(2^n)$、 $^3D_4(p^n)$ 或 $PSU_5(p^n)$。

这由命题 3.1、定理 3.15、定理 5.19 和定理 4.10 得证。

给定一个固定的 p-群，或者给定一个固定的 p-群族，并希望对其所支撑的所有饱和融合系统进行分类，通常采用的办法分为两步：确定 $\mathcal{F}$ 的所有可能的本质子群及其自同构群，然后利用某些唯一性结果证明 $\mathcal{F}$ 是已知的融合系统。本文采用的正是这种方法。对我们的工作而言，唯一性结果主要源于秩 2 弱 BN-对的唯一性（如[DS85], 所示），以及对具有强 p-嵌入子群的某些群及其相关 GF(p)-模的识别。因此，证明定理 A 的主要工作在于确定所有可能的本质子群的完整列表。为此所采用的技术并无特别新颖之处，大多是对标准参考文献中论证的改编。我们还给出了若干关于李型秩 2 单群的 Sylow p-子群的结构性结果，或许也能在其他地方派上用场。

借此机会，我们准确说明本文以及证明主定理所需的所有相关著作中，哪些地方依赖了有限单群分类。首先，截至本文撰写时，尚无已知的通用方法可以在不诉诸分类的情况下判定一个奇异融合系统，因此每当证明某个系统是奇异的，都会用到分类。在确定 $\mathrm{PSU}_4(p^n)$ 的 Sylow p-子群上的融合系统的自同构群时，[vBe23], 使用分类来识别群 $\mathrm{PSL}_2(p^{2n})$，它在本质子群 E 上作为自然 $\Omega_4^-(p^n)$-模作用。在确定 $\mathrm{Sp}_4(p^n)$ 的 Sylow p-子群上可能存在的融合系统时，只要$J(S)$ 是该融合系统的本质子群，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(J(S))$ 就在 $J(S)$ 上不可约作用，而后者是阶为 p^{3n} 的初等阿贝尔群。这里使用分类，根据这些信息确定 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(J(S))$。在当前工作中，我们依赖分类来确定 ${}^3\mathrm{D}_4(p^n)$ 的 Sylow p-子群中某个本质子群的自同构群。归根结底，这需要确定群 $\mathrm{SL}_2(p^{3n})$（嵌入 $\mathrm{Sp}_8(p^n)$ 中）在一个三元性模上的作用，其中 p 是一个奇素数。

2. 预备知识：群与融合系统

在本节中，我们首先为主定理的证明铺陈背景，汇集相关约定，并给出关于融合系统的标准结果。因此，本节内容与其他一些著作（例如 [AKO11] 和 [vBe23]）有大量重叠。

定义 2.1. 设 S 是一个有限 p-群。定义在 S 上的融合系统 $\mathcal{F}$ 是一个范畴，其对象集 $\mathrm{Ob}(\mathcal{F})$ 为：$= \{Q : Q \leq S\}$，其态射集满足以下性质，其中 $P, Q \leq S$:

- $\mathrm{Hom}_S(P, Q) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{F}}(P, Q) \subseteq \mathrm{Inj}(P, Q)$；且
- 每个 $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ 都是一个$\mathcal{F}$-同构后接一个包含映射的复合，

其中 $\mathrm{Inj}(P, Q)$ 表示 P 与 Q 之间的单同态。为便于与群类比，我们记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{F}}(P, Q)$，并记 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P) :=\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, P)$。

例*2.2*。设 G 是一个有限群，且 $S \in Syl_p(G)$。p 在 S 上的融合范畴记作 $F_S(G)$，其对象集为 $Ob(F_S(G)) :=\{Q : Q \leq S\}$，且对 P、$Q \leq S$，$Mor_{\mathcal{F}_S(G)}(P, Q) := Hom_G(P, Q)$，其中 $Hom_G(P, Q)$ 表示由 G 的元素共轭所诱导的映射。也就是说，该范畴中的所有态射都是由 G 的元素共轭所诱导的。

我们经常参阅 [AKO11]，以了解融合系统的标准结果和术语。不过，我们在本节着重阐述若干定义和性质，它们对于阐明本文内容至关重要。以下通常设 $\mathcal{F}$ 是有限 p-群 S 上的一个融合系统。

称$\mathcal{H}$是$\mathcal{F}$的一个子系统，记作$\mathcal{H} \leq \mathcal{F}$，定义在一个 p-群 T上，若 $T \leq S$，且$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$作为范畴，并且$\mathcal{H}$ 本身是一个融合系统。若 S 的两个子群作为$\mathcal{F}$中的对象同构，则称它们 $\mathcal{F}$-共轭。我们用 $Q^{\mathcal{F}}$表示 Q的所有$\mathcal{F}$-共轭子群组成的集合。

若存在一个有限群 G，满足 $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$，如例2.2所示，则称该融合系统是可实现的。否则，称该融合系统为奇异的。

现在介绍一些更侧重于$\mathcal{F}$的对象—— S的子群的约定。

定义2.3。 设$\mathcal{F}$ 是 S 上的一个融合系统，其中 S 是一个 p-群，并设 $Q \leq S$。称 Q 为

- 完全 F-正规化，如果 $|N_S(Q)| \geq |N_S(P)|$ 对所有 $P \in Q^{\mathcal{F}}$；
- 完全F-中心化，如果 $|C_S(Q)| \geq |C_S(P)|$ 对所有 $P \in Q^{\mathcal{F}}$；
- 完全 $\mathcal{F}$-自动化 若 $\mathrm{Aut}_S(Q) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q))$;
- 可接受的于$\mathcal{F}$，如果对于每个 $P \leq S$和每个 $\phi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(P, Q)$，令其为 $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N_\phi, S)$，使得 $N_\phi = \{g \in N_S(P) : {}^{\phi}c_g \in \mathrm{Aut}_S(Q)\}$,

- S-中心，如果 $C_S(Q) = Z(Q)$，并且当对所有 $P \in Q^{\mathcal{F}}$， P是 S-中心时，称其为$\mathcal{F}$-中心；
- S-根，如果 $O_p(\mathrm{Out}(Q)) \cap \mathrm{Out}_S(Q) = \{1\}$；或者
- $\mathcal{F}$-根，如果 $O_p(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q)) = \{1\}$。

定义2.4。 设$\mathcal{F}$ 是 p-群 S上的融合系统。那么，如果满足以下条件，则称$\mathcal{F}$ 是饱和的：

(i) 每个完全$\mathcal{F}$-正规化子群也完全$\mathcal{F}$-中心化且完全$\mathcal{F}$-自同构化。(ii) 每个完全$\mathcal{F}$-中心化子群在$\mathcal{F}$中都是可接受的。

根据 Puig 定理 [Pui76], 有限群 $\mathcal{F}_S(G)$ 的融合范畴是一个饱和融合系统。在本文中，我们将只关注饱和融合系统，尽管我们给出的若干结果也应适用于更一般的情形。

定义 2.5. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在一个 p-群 S 上的融合系统，并且 $Q \leq S$。称Q 在F 中是正规的，若 $Q \trianglelefteq S$，且对所有 $P, R \leq S$ 以及 $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, R)$， ϕ 都可延拓为一个态射 $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(PQ, RQ)$，使得 $\phi(Q) = Q$。

可以验证，正规子群的乘积仍然是正规子群。因此，我们可以谈论$\mathcal{F}$ 的最大正规子群，并将其记为 $O_p(\mathcal{F})$（有时也称为$\mathcal{F}$的 p-核）。此外，由饱和公理立即可知，任何在 S 中正规化的子群都是完全正规化且完全中心化的。

定义 2.6。设 $\mathcal{F}$ 是定义在一个 p-群 S 上的融合系统， Q 是一个子群。 Q的正规化子融合子系统记作 $N_{\mathcal{F}}(Q)$，它是 $\mathcal{F}$的最大子系统，支撑在 $N_S(Q)$上，并且其中 Q 是正规子群。

定理2.7。 设 F 是定义在 p-群 S 上的饱和融合系统。若 $Q \leq S$ 是完全 F-正规化的，则 $N_{\mathcal{F}}(Q)$ 是饱和的。

证明。参见 [AKO11，定理 I.5。5]。 □

定理 2.8 (模型定理)。 设 F 是定义在 p-群S 上的饱和融合系统。固定一个 $Q \leq S$，使其关于 F 是中心化的且在 F 中正规。则以下结论成立：

(i) 存在 F 的模型群。*(ii)* 若 G_1 和 G_2 都是 F 的模型群，则存在一个同构 ϕ : $G_1 \to G_2$，使得 $\phi|_S = Id_S$。*(iii)* 对于任意包含 S 且以其为 *Sylow* p-子群的有限群 G，若 $Q \trianglelefteq G, C_G(Q) \leq Q$ 且 $Aut_G(Q) = Aut_F(Q)$，则存在 $\beta \in Aut(S)$，使得 $\beta|_Q = Id_Q$ 且 $F_S(G) = {}^{\beta}F$。因此，存在一个与 G同构的 F 的模型群。

证明。参见 [AKO11，定理 I.4。9]。 □

引言部分已经结束，现在我们来讨论证明主定理的策略。正如引言中所述，关键在于两个步骤：确定F的本质子群及与之关联的态射，然后根据某些唯一性结果确定$\mathcal{F}$。

定义 2.9。 E称为$\mathcal{F}$-本质的，若 E是 S 的一个$\mathcal{F}$-中心化且完全$\mathcal{F}$-正规化的子群，并且 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$ 含有一个强 p嵌入子群。我们用 $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ 表示融合系统$\mathcal{F}$的本质子群集合。

直接由定义可知， $N_{\mathcal{F}}(E)$ 是一个饱和融合系统，其中 $O_p(N_{\mathcal{F}}(E)) = E$ 是一个 $N_{\mathcal{F}}(E)$-中心化子群。因此，由定理 2.8，存在一个有限群 G，使得 $E = O_p(G)$、 $C_G(E) \leq E$ 且 $N_{\mathcal{F}}(E) = \mathcal{F}_S(G)$。

下述定理为我们证明定理 A 的策略的第一步提供了依据。

定理 2.10 (阿尔佩林–戈德施密特融合定理)。 设 F 是定义在一个 p-群 S上的饱和融合系统。那么

$$\mathcal{F} = \langle \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q) \mid Q \text{ is essential or } Q = S \rangle.$$

证明。 参见 [AKO11，定理 I.3。5]。 □

在本文中，我们研究的是这样一种情形： S 已给定，但$\mathcal{F}$ 未必已知。因此，我们需要一些技术，以判断 S 的子群是否可能成为定义在 S 上的任意饱和融合系统的本质子群。

引理 2.11. 设 S 是一个有限的 p-群。那么 $C_{\mathrm{Aut}(S)}(S/\Phi(S))$ 是 $\mathrm{Aut}(S)$ 的一个正规 p-子群。

证明。 这归功于伯恩赛德，参见 [Gor07，定理 5.1。4]。 □

注意，对于子群 $P < Q \leq N_S(P)$，若 Q 中心化 $P/\Phi(P)$，则 P 不是 S-根子群，因此不是$\mathcal{F}$-根子群，故在任何以 S 为支撑的饱和融合系统中都不是本质子群。实际上，这个结果往往还不够，我们还需要对其作出变体，使其更适用于我们的应用。为此，我们需要考虑 E 的某些$\mathcal{F}$-特征链 。

定义 2.12. 设$\mathcal{F}$是定义在 p-群 S 上的融合系统，且 $P \leq Q \leq S$。若 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q) \leq N_{\mathrm{Aut}(Q)}(P)$，则称 P 在 Q 中是$\mathcal{F}$-特征的 。

引理 2.13. 设 F 是定义在一个 p-群 S, $E \in E(F)$和$A \leq$ 自同构$_{\mathcal{F}}(E)$上的饱和融合系统。令 $\Phi(E) = E_0 \trianglelefteq E_1 \trianglelefteq E_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq E_m = E$，使得对于所有$0 \leq i \leq m$，每个 $\alpha \in A$都有 $E_i\alpha = E_i$ 。若 $Q \leq S$ 满足：对所有$1 \leq i \leq m$ 均有 $[Q, E_i] \leq E_{i-1}$，则 $Q \leq E$。

证明。设 F、 S、 E 和 Q 如引理所述。于是 $N_{QE}(E)$嵌入 Aut(E) 中，作为 Aut$^{QE}(E)$，并且可以安排使得 $N_{QE}(E)$，从而 Aut$^{QE}(E)$ 中心化（ $E_0 \trianglelefteq E_1 \trianglelefteq E_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq E_m$的一个 A-不变细化）。令$A :=$ hAut$^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)}{}^{QE}$ i，根据 Gor07, (I.5.3.3)] ，我们有 A 是一个 p-群。由于 $A \trianglelefteq$Aut$_{\mathcal{F}}(E)$， $A \leq O_p$(Aut$_{\mathcal{F}}(E)$) $=$Inn(E)，因为 E是 F-根。因此，Aut$^{QE}(E)$ $\trianglelefteq$Inn(E)，且由于 E 是 F-中心化的，我们推得 $N_{QE}(E) \leq E$ 且 $N_{QE}(E) = E$。于是 $E \trianglelefteq N_{QE}(N_{QE}(E))$，唯一的可能是 $E \trianglelefteq QE$，因此 $E = QE$和 $Q \leq E$，证毕。□

为了充分应用引理 2.13，我们需要使用一些特征子群。在我们的应用中，这些子群往往是某个候选本质子群的下中心列或上中心列中的成员 E，以及它们在 E中的中心化子。不过，在后续分析中还会出现其他相当自然的特征子群，现记录如下。我们首先从 [GS 12]中定义的一个子群入手。

定义 2.14。 设 S 为有限 p-群，令 $\mathbb{W}(S)$ 表示满足以下性质的初等阿贝尔正规子群 A 的集合：每当 $[A, s, s] = \{1\}$ 时，对于任意 $s \in S$，都有 $[A, s] = \{1\}$。令 $W(S) = \langle \mathbb{W}(S) \rangle$。

引理 2.15。 设 S 为有限 p-群。则

(i) $W(S)$ 是 S的特征子群；(ii) $W(S)$ 是集合 $\mathbb{W}(S)$ 中关于包含关系的唯一最大成员；(iii) $\Omega(Z(S)) \leq W(S)$；以及(iv) 若 $W(S) \leq T \leq S$，则 $W(S) \leq W(T)$。

证明。 设 $A \in \mathbb{W}(S)$，并设 ϕ 是 S的一个自同构。那么 $A\phi$ 是 S的一个初等阿贝尔正规子群。对于任意满足 $[A\phi, s, s] = \{1\}$的 $s \in S$，有$[A\phi, s, s] = [A, s\phi^{-1}, s\phi^{-1}]\phi = \{1\}$。由于 $A \in \mathbb{W}(S)$，我们推得 $[A, s\phi^{-1}] = \{1\}$，由此可知 $[A\phi, s] = \{1\}$，因此 $A\phi \in \mathbb{W}(S)$，且 $W(S)$ 是 S的特征子群，从而证明了 (i)。

对于 $A, B \in \mathbb{W}(S)$，我们有 $[A, B, B] \leq [A \cap B, B] = \{1\}$，因此 $[A, B] = \{1\}$。于是， $\mathbb{W}(S)$ 的每个元素都是阿贝尔的，且与 $\mathbb{W}(S)$ 的其他每个元素都可交换，因此我们推知 $W(S)$ 是阿贝尔的。接着， $W(S)$ 由阶为 p 的元素生成，因此 $W(S)$ 是 S 的一个初等阿贝尔正规子群。现在，对于满足 $[W(S)\ s$ 的 $s \in S$， $s] = \{1\}$，我们有对所有 $A \in \mathbb{W}(S)$ 都成立的 $[A, s, s] = [A, s] = \{1\}$。由于 $W(S) =$ h$\mathbb{W}(S)$i，我们必有 $[W(S)\ s] = \{1\}$ 且 $W(S) \in \mathbb{W}(S)$。因此，(ii) 成立。

由于 Ω(Z(S)) 是 S 的一个初等阿贝尔正规子群，且对所有 $s \in S$ 都有 $[\Omega(Z(S)) s] = \{1\}$，所以 $\Omega(Z(S)) \in \mathbb{W}(S)$，并且 (iii) 成立。设 $T \leq S$ 满足 $W(S) \leq T \leq S$。那么 $W(S)$ 是 T 的一个初等阿贝尔正规子群，并且对于任意 $t \in T$，$t \in S$，因此 $[W(S) t, t] = \{1\}$ 蕴含 $[W(S) t] = \{1\}$ 且 $W(S) \in \mathbb{W}(T)$。由于 $\mathbb{W}(T)$ 有唯一的极大元素，$W(S) \leq W(T)$，故 (iv) 成立。□

全文中，我们使用汤普森子群的“初等”版本。

定义 2.16. 设 S 是一个有限 p-群。令 $\mathcal{A}(S)$ 为 S 的所有秩最大的初等阿贝尔子群组成的集合。则 S 的汤普森子群 定义为 $J(S) := \langle A \mid A \in \mathcal{A}(S) \rangle$。

与汤普森子群相关，对于一个 p-群 S，我们定义 $\mathcal{A}_{\trianglelefteq}(S) := \{A \in \mathcal{A}(S) \mid A \trianglelefteq S\}$ 以及 $J_{\trianglelefteq}(S) := \langle A \mid A \in \mathcal{A}_{\trianglelefteq}(S) \rangle$。当然，我们需要考虑集合 $\mathcal{A}_{\trianglelefteq}(S)$ 是否非空，以及群 $J_{\trianglelefteq}(S)$ 是否定义良好；一般而言，答案是否定的。然而，在我们的应用中，每当我们使用涉及 $J_{\trianglelefteq}(S)$ 的论证时，都已经证明了 $\mathcal{A}_{\trianglelefteq}(S)$ 非空。显然，$J_{\trianglelefteq}(S)$ 是 S 的一个特征子群。

以下引理仅适用于 $p = 2$ 的情形，并依赖于对合的一项优良性质。在本文中，它仅用于分析 ${}^2\mathrm{F}_4(2^n)$ 的 Sylow 2-子群。

引理 2.17. 设 S 是一个 2-群，并假设存在 $A, B \in \mathcal{A}(S)$ 满足 $AB = S$。若对每个 $a \in A \setminus (A \cap B)$，都有 $C_B(a) = A \cap B$，则 $\mathcal{A}(S) = \{A, B\}$，且 S 的每个对合都属于 $A \cup B$。

证明。为导出矛盾，设 $C \in \mathcal{A}(S)$ 满足 $A \neq C \neq B$，并取 S 中的一个对合 c。于是，对某个 $a \in A$ 和 $b \in B$，有 $c = ab$，且 $1 = c^2 = (ab)^2 = [a, b]$。因此，要么 $a \in A \cap B$，从而 $c \in B$；要么 $a \notin B$ 且 $b \in C_B(a) = A \cap B$，从而 $c = ab \in A$。于是，$c \in A \cup B$，现在我们有 $C = (C \cap A)(C \cap B)$。

设 $c \in C \cap A$ 且 $c \notin B$。则 $c \in A \setminus (A \cap B)$，使得 $C_B(c) = A \cap B$。但是 $C \cap B \leq C_B(c)$，使得 $C \cap B \leq A$ 且 $C \leq A$。由于 A，$C \in \mathcal{A}(S)$，$C = A$，这就产生了矛盾。因此，不存在这样的 C，且 $\mathcal{A}(S) = \{A, B\}$。□

Thompson 子群与有限群模的不能分解这一概念密切相关。

定义 2.18。设 G 是一个有限群，V 是一个 GF(p)-模。若存在 $\{1\} \neq A \leq G$，使得

(i) $A/C_A(V)$ 是一个初等阿贝尔 p-群；(ii) $[V, A] \neq \{1\}$；且 (iii) $|V/C_V(A)| \leqslant |A/C_A(V)|$

那么 V 是 G 的不可分解模（简称 FF-模），而 A 是作用在 V 上的冒犯子。

下面选列一些结果，用于确定自同构群以及 E的 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$-主因子的结构，并将其视为 $\mathrm{GF}(p)\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$-模。我们首先介绍一些关于 $\mathrm{SL}_2(p^n)$的模，以及如何根据 $N_S(E)$对 E的作用来识别这些模。本工作的其余部分将经常使用这些结果，而不再明确引用。

定义 2.19。A 自然的 $\mathrm{SL}_2(p^n)$-模 是指任意一个不可约的 2 维 $\mathrm{GF}(p^n)\mathrm{SL}_2(p^n)$-模，通过限制将其视为 $\mathrm{GF}(p)\mathrm{SL}_2(p^n)$ 上的 $2n$ 维模。

引理 2.20。设 $G \cong \mathrm{SL}_2(p^n)$、$S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 V 是自然的 $\mathrm{SL}_2(p^n)$-模。则有以下结论：

(i) $[V,S,S] = \{1\}$；*(ii)* $|V| = p^{2n}$ 和 $|C_V(S)| = p^n$，因此 V 是一个 *FF*-模；*(iii)* 对所有 $v \in V \setminus C_V(S)$ 和$1 \neq s \in S$，$C_V(s) = C_V(S) = [V,S] = [V,s] = [v,S]$；以及 *(iv)* $V/C_V(S)$ 和 $C_V(S)$ 在限制后是不可约的 $\mathrm{GF}(p)N_G(S)$-模。

证明。参见 [PR06，引理 4。6]以及 [PR12，引理 3。13]。 □

定理 *2.21.* 设 E 是饱和融合系统 $\mathcal{F}$ 中的本质子群，该系统定义在 p-群 S 上，并假设存在 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$-不变子群$U \leq V \leq E$，使得 $E = C_S(V/U)$，且 V/U 是 $G := \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$ 的 *FF*-模。那么，记 $L := O^{p'}(G)$ 和 $W := V/U$，可得 $L/C_L(W) \cong \mathrm{SL}_2(p^n)$，$C_L(W)$ 是一个 p'-群，且 $W/C_W(O^p(L))$ 是自然的 $\mathrm{SL}_2(p^n)$-模。

证明。这由 [Hen10，定理 5。6]（参见 [Hen10，定理 1]）。 □

定义 2.22。设 V 是 $G \cong \mathrm{SL}_2(p^{2n})$ 的自然 $\mathrm{SL}_2(p^{2n})$-模。G 的一个自然 $\Omega_4^-(p^n)$-模 是 $(V \otimes_k V^\tau)_{\mathrm{GF}(p^n)G}$ 的任意非平凡不可约子模，其中视为通过限制得到的 $\mathrm{GF}(p)G$-模，且 τ 是 $\mathrm{GF}(p^{2n})$ 的一个对合自同构。

引理 2.23。设 $G \cong \mathrm{SL}_2(p^{2n})$、$S \in \mathrm{Syl}_p(G)$，且 V 是 G 的一个自然 $\Omega_4^-(p^n)$-模。则有以下结论：

(i) $C_G(V) = Z(G)$；(ii) $[V,S,S,S] = \{1\}$；(iii) $|V| = p^{4n}$ 和 $|V/[V,S]| = |C_V(S)| = p^n$；以及(iv) $V/[V,S]$ 和 $C_V(S)$ 在限制下是不可约的 $\mathrm{GF}(p)N_G(S)$-模。

此外，对于 $\{1\} \neq F \leq S$，以下情形之一成立：

(a) $[V,F] = [V,S]$ *and* $C_V(F) = C_V(S)$;
(b) $p = 2$, $[V,F] = C_V(F)$ *has order* 2^{2n}, F *is quadratic on* V *and* $|F| \leqslant 2^n$; *or*
(c) p *is odd,* $|[V,F]| = |C_V(F)| = p^{2n}$, $[V,S] = [V,F]C_V(F)$, $C_V(S) = C_{[V,F]}(F)$ *and* $|F| \leqslant p^n$.

证明。参见 [PR06，引理 4。8] 和 [PR12，引理 3.12、3。15]。 □

定义 2.24。 设 V 是 $G \cong \mathrm{SL}_2(p^{3n})$ 的自然 $\mathrm{SL}_2(p^{3n})$-模。 G 的一个三元性模是 $(V \otimes V^{\tau} \otimes V^{\tau^2})|_{\mathrm{GF}(p^n)G}$ 的任意非平凡不可约子模，其中将其视为 $\mathrm{GF}(p)G$-模时采用限制作用； τ 是 $\mathrm{GF}(p^{3n})$ 的一个 3 阶自同构。

引理 2.25. 设 $G \cong \mathrm{SL}_2(p^{3n})$、 $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 以及 V 是 G 的一个三元性模。那么有以下结论：

(i) $[V,S,S,S,S] = 1$; (ii) $|V| = p^{8n}$, $|V/[V,S]| = |C_V(S)| = |[V,S,S,S]| = p^n$ 和 $|[V,S,S]| = p^{4n}$; (iii) 若 p 为奇数，则 $|V/C_V(s)| = p^{5n}$； 若 $p = 2$，则对所有 $1 \neq s \in S$， $|V/C_V(s)| = p^{4n}$； 以及(iv) $V/[V,S]$ 和 $C_V(S)$ 在限制下是不可约的 $\mathrm{GF}(p)N_G(S)$-模。

证明。 参见 [PR06，引理 4。10] 以及 [PR12，引理 3.12、3.14、3.16]。 □

除了 $\mathrm{SL}_2(p^n)$ 之外，本文稍后将涉及的本质子群的其他自同构群，只有特征为 p的其他李型一阶群。我们不会涉及李群 ${}^2\mathrm{G}_2(3^n)$，因此这里只介绍与 $\mathrm{SU}_3(p^n)$ 和 $\mathrm{Sz}(2^n)$ 相关的一些模。

定义 2.26。 A 自然 $\mathrm{SU}_3(p^n)$-模 是 $\mathrm{SL}_3(p^{2n})$ 的自然模在 $\mathrm{GF}(p)\mathrm{SU}_3(p^n)$-模意义下的限制。

引理 2.27。 设 $G \cong \mathrm{SU}_3(p^n)$、 $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 V 是一个自然模。则有以下结论：

(i) $C_V(S) = [V, Z(S)] = [V,S,S]$ 的阶为 p^{2n}； (ii) $C_V(Z(S)) = [V,S]$ 的阶为 p^{4n}; 并且(iii) $V/[V,S]$、 $[V,S]/C_V(S)$ 和 $C_V(S)$ 在限制后是不可约的 $GF(p)N_G(S)$-模。

证明。 这可以在 $\mathrm{SL}_3(p^{2n})$ 中计算。 □

定义 2.28。 一个 自然 $\mathrm{Sz}(2^n)$-模 是将 $\mathrm{Sp}_4(2^n)$ 的自然模视为 $\mathrm{GF}(2)\mathrm{Sz}(2^n)$-模后得到的限制。

引理 2.29。 设 $G \cong \mathrm{Sz}(2^n)$， $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ 且 V 是自然模。则有以下结论：

(i) $[V,S]$ 的阶为 2^{3n}； *(ii)* $[V,\Omega(S)] = C_V(\Omega(S)) = [V,S,S]$ 的阶为 2^{2n}； *(iii)* $C_V(S) = [V,S,\Omega(S)] = [V,\Omega(S)\ S] = [V,S,S,S]$ 的阶为 2^n； *(iv)* $V/[V,S]$、 $[V,S]/C_V(\Omega(S))$、 $C_V(\Omega(S))/C_V(S)$ 和 $C_V(S)$ 在限制后都是不可约 $GF(p)N_G(S)$-模。

证明。 这可以在 $\mathrm{Sp}_4(2^n)$ 中计算。 □

在介绍了相关的群和模之后，我们现在给出能够识别它们的结果。尽管前文引用的定理 2.21 是本文中最常用的结果，但在若干地方还需要用到其他一些结果。

引理 2.30。 设 G 是$\mathrm{PSL}_2(p^n)$的一个 p'-中心扩张， $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 V 是一个忠实不可约 $\mathrm{GF}(p)$-模。若 $|V| < p^{3n}$ ，则

(i) V 是 $G \cong \mathrm{SL}_2(p^n)$的自然$\mathrm{SL}_2(p^n)$-模；(ii) V 是${}^{-}_{4}\Omega^{-}_{4}(p^{n/2})$-模， n 为偶数， S 在V 上不作二次作用，且 $Z(G)$ 在 V上平凡作用；或(iii) V 是三元性模， n 是3 的倍数，且 S 在 V上不作二次作用。

证明。 参见 [CD91，引理2。6]。 □

通常，为了证明饱和融合系统$\mathcal{F}$ 的某个候选子群 E 不是本质子群，在考察它时，我们可以假设 E 不包含在$\mathcal{F}$的任何其他本质子群中。我们将不包含在其他任何本质子群中的本质子群称为极大本质子群。

定义 2.31。 设$\mathcal{F}$ 是作用于 p-群 S上的饱和融合系统。那么，如果 E 是本质子群，且当 $F \leq S$ 是$\mathcal{F}$中的本质子群并且 $E \leq F$时， $E = F$，则称 $E \leq S$ 在$\mathcal{F}$ 中是极大本质 的。

引理 2.32. 设 E 是一个饱和融合系统 $\mathcal{F}$ 的极大本质子群，该系统作用于一个 p-群 S。若 $m_p(\mathrm{Out}_S(E)) \geqslant 2$ ，则$O_{p'}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))) \leq Z(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$。

证明。令 $T \leq N_S(E)$，其中 $E < T$。现在，由于 E 是可接受的，对于所有满足 E 的 $\alpha \in N_{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)}(\mathrm{Aut}_T(E))$， α可提升为一个态射 $\widehat{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N_\alpha, S)$，且满足 $N_\alpha \geq T > E$。由于 E 是极大本质的，应用 Alperin–Goldschmidt 定理， $\widehat{\alpha}$ 是一个态射 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 在 N_α 上的限制。但随后，经过限制，α 正规化 $\mathrm{Aut}_S(E)$，因此 $N_{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)}(\mathrm{Aut}_T(E)) \leq N_{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)}(\mathrm{Aut}_S(E))$。这导出包含关系 $N_{\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)}(\mathrm{Out}_T(E)) \leq N_{\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)}(\mathrm{Out}_S(E))$。由于这对所有满足 $E < T$ 的 $T \leq N_S(E)$ 都成立，我们推得 $N_{\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)}(\mathrm{Out}_S(E))$ 在 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$ 中是强p-嵌入的。

由于 $m_p(\mathrm{Out}_S(E)) \geqslant 2$，由互素作用，

$$O_{p'}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))) = \langle C_{O_{p'}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))}(a) \mid a \in \mathrm{Out}_S(E)^{\#} \rangle$$

因此， $O_{p'}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$ 包含于 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$ 的强 p-嵌入子群中。因此， $[\mathrm{Out}_S(E)\ O_{p'}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))] = \{1\}$并且由于 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 是 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$ 中 $\mathrm{Out}_S(E)$ 的正规闭包，我们推得 $O_{p'}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$ 位于 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 的中心中，证毕。□

以下结果独立于有限单群分类，并提供了识别具有强 p-嵌入子群的群的一般方法。

命题 2.33. 设 F 是定义在 2-群 S 上的饱和融合系统，且 $E \leq S$ 是极大本质的。若 $m_2(\mathrm{Out}_S(E)) \geqslant 2$ ，则 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{PSL}_2(2^n)$、$(\mathrm{P})\mathrm{SU}_3(2^n)$ 或 $\mathrm{Sz}(2^n)$ ，其中 $n > 1$ 为某个值。

证明。我们应用 Bender [Ben71] 的一个结果，因此，由于 $m_2(\mathrm{Out}_S(E)) > 1$，可得$O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))/O_{2'}(O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$ ≅$\mathrm{PSL}_2(2^n)$、$\mathrm{PSU}_3(2^n)$ 或 $\mathrm{Sz}(2^n)$，其中 n >1。由引理 2.32，$O_{2'}(O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))) \leq Z(O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$。利用 GLS98], 中关于 Schur 乘子的信息（参见 [）， 可得 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ ≅$\mathrm{PSL}_2(2^n)$、(P)$\mathrm{SU}_3(2^n)$ 或 $\mathrm{Sz}(2^n)$，证毕。□

命题 *2.34.* 设 *F* 是定义在 p-群上的饱和融合系统， S为奇数， $E \leq S$ 是极大本质子群，且 $Out_S(E)$ 是 $Out_{\mathcal{F}}(E)$ 的 *TI*-集。若 $m_p(Out_S(E)) \geqslant 2$，并且存在 $x \in Out_S(E)$，使得 $[E, x, x] \leq \Phi(E)$，则对于 $n \geqslant 1$，$O^{p'}(Out_{\mathcal{F}}(E))$ 为 $SL_2(p^{n+1})$ 或 $(P)SU_3(p^n)$。

证明. 我们应用 [Ho79] 的主要结果，由此可推出，对于 $n \in \mathbb{N}$，$O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))/O_{p'}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$ 为 $\mathrm{PSL}_2(p^{n+1})$ 或 $\mathrm{PSU}_3(p^n)$。与命题 2.33 中一样，引理 2.32 表明 $O_{p'}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))) \leq Z(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$；利用 $\mathrm{PSL}_2(p^{n+1})$ 和 $\mathrm{PSU}_3(p^n)$ 的 Schur 乘子相关信息（可见于 [GLS98], ），我们推得，对于 $n \geqslant 1$， $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 为 (P)$\mathrm{SL}_2(p^{n+1})$ 或 (P)$\mathrm{SU}_3(p^n)$。由于 $\mathrm{PSL}_2(p^{n+1})$ 具有阿贝尔或二面体 Sylow 2-子群，[Gor07, (I.3.8.4)] 在此情形下给出矛盾。因此，结论成立。□

若干特征为 p 的低秩李型群的抛物子群的一个特点是会出现半超特殊群。

定义 2.35。若 Q 是一个 p-群，则称其为半超特殊，如果 $\Phi(Q) = [Q, Q] = Z(Q)$，且对于 $Z(Q)$ 的任意极大子群 Z，Q/Z 都是特异群。若 Q是半超特殊的，且 $|Z(Q)|^2 = |Q/Z(Q)|$，则称 Q 为超特殊群。

引理 2.36。设 Q 是一个半超特殊 p-群。则有以下结论：

(i) 对某个 $n \in \mathbb{N}$， $|Q/Z(Q)| = p^{2n}$。*(ii)* 设 $Z(Q)$的一个极大子群为 Z，且 $|Q/Z(Q)| = p^{2n}$。若A/Z 是 Q/Z的阿贝尔子群，则 $|A/Z| \leqslant p^{1+n}$。因此，若$A \leq Q$ 是阿贝尔群，则 $|A| \leqslant |Z(Q)|p^n$。*(iii)* 若 $A \leq Q$ 满足 $Z(Q) \leq A$ 且 $|A| = |Z(Q)|p^n$，则对任意$x \in Q \setminus A$， $[x, A] = Z(S)$。

证明。参见 [PR12，命题 2。66]。 □

这一系列结果足以确定我们这一设定中饱和融合系统 $\mathcal{F}$ 的局部作用，因此现在我们转而关注如何根据这些局部信息确定 $\mathcal{F}$。这是确定 $\mathcal{F}$的策略中的第二步，涉及针对 $\mathcal{F}$的唯一性论证。幸运的是，这些论证所需的艰苦工作已在别处完成（[vBe21，主定理] 使用[DS 85]）。

定理 2.37。 设 *F* 是一个恰有两个本质子群 $E_1, E_2 \trianglelefteq S$ 的饱和融合系统，且 自同构群$_{\mathcal{F}}(E_i)$对于 $i \in \{1, 2\}$ 是一个 *K*-群。若 $O_p(F) = \{1\}$，则 *F* 已有明确描述。

回顾一下，$\mathcal{K}$-群是指一种有限群，其中每个单群截面都被假定为已知的有限单群。在大多数情况下，这一 $\mathcal{K}$-群假设用于缩小搜索范围，以确定给定融合系统本质子群的自同构群：所考察的是具有强 p-嵌入子群的群。对于本研究而言，定理 2.21、命题 2.33 和命题 2.34 通常足以确定自同构群的形式，随后 [DS85] 唯一确定所诱导的融合积（在同构意义下）。根据 [vBe21], 这足以在同构意义下确定该融合系统。

我们仅在确定 p 为奇素数时 p-融合范畴 ${}^3\mathrm{D}_4(p^n)$ 的某个本质子群的自同构群时，才需要这一 $\mathcal{K}$-群假设。具体而言，我们需要确定 $\mathrm{Sp}_8(p^n)$ 的子群，它们作用于一个 8 维 $\mathrm{GF}(p^n)$-模 V；其 Sylow p-子群是阶为 p^{3n} 的初等阿贝尔群，并且在 V 上的作用如同 $\mathrm{SL}_2(p^{3n})$ 的 Sylow p- 子群在三元性模上的作用；此外，该 Sylow p- 子群的正规化子是强 p- 嵌入的。据作者所知，文献中没有结果能在不使用分类的情况下，由这一假设推出 $\mathrm{SL}_2(p^{3n})$。

我们不在定理 2.37 中列出完整的结果清单，而只在以下三个推论中列出本文相关的融合系统。

推论 2.38. 设定理 *2.37* 的假设成立，并假设 S 同构于某个 $n \in \mathbb{N}$ 的 ${}^2\mathrm{F}_4(2^n)$ 的 *Sylow* 2 子群。则 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$，其中 $F^*(G) = O^{2'}(G) \cong {}^2\mathrm{F}_4(2^n)$。

推论 2.39. 设定理 *2.37* 的假设成立，并假设 S 同构于某个 $n \in \mathbb{N}$ 的 ${}^3\mathrm{D}_4(p^n)$ 的 *Sylow* p 子群。则 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$，其中 $F^*(G) = O^{p'}(G) \cong {}^3\mathrm{D}_4(p^n)$。

推论 2.40. 设定理 *2.37* 的假设成立，并假设 S 同构于某个 $n \in \mathbb{N}$ 的 $\mathrm{PSU}_5(p^n)$ 的 *Sylow* p 子群。则 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$，其中 $F^*(G) = O^{p'}(G) \cong \mathrm{PSU}_5(p^n)$。

3. Fusion Systems on a Sylow 2-subgroup of ${}^2\mathrm{F}_4(2^n)$

我们首先处理 S 同构于 ${}^2\mathrm{F}_4(2)$ 或 ${}^2\mathrm{F}_4(2)'$ 的一个 Sylow 2-子群的情形。在 $S \in \mathrm{Syl}_2({}^2\mathrm{F}_4(2))$ 的情形下，令 $Q_1 := C_S(Z_2(S))$，以及 $Q_2 := C_S(Z_3(\Omega(S))/Z(S))$。下面的结果借助 MAGMA [PS21] 中的融合系统软件包得到证明。

命题 3.1。令 $G = {}^2\mathrm{F}_4(2)$ 且令 $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$。若 $\mathcal{F}$ 是支撑于 S 上的饱和融合系统，则以下情况之一成立：

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(S)$；(ii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(N_G(Q_1))$ 其中 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1) \cong$ 对称群 $\mathrm{Sym}(3)$；(iii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(N_G(Q_2))$ 其中 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2) \cong \mathrm{Sz}(2)$；或(iv) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$。

此外，对于上述每个融合系统，记作 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(H)$，则 $\mathcal{F}_T(H \cap O^2(G))$ 是定义在 $T := S \cap O^2(G)$ 上的一个饱和融合系统，并且定义在 T 上的每个饱和融合系统都可由此方式得到。

我们指出，$\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_S(N_G(Q_i))}(Q_i) \cong \mathrm{Out}_{\mathcal{F}_T(N_{O^2(G)}(Q_i\cap T))}(Q_i \cap T)$，且 $Q_i \cap T$在 Q_i 中的指数为 2，其中 $i \in \{1, 2\}$。

现在我们继续假设 S 同构于 ${}^2\mathrm{F}_4(2^n)$ 的一个 Sylow 2-子群，其中 $n > 1$，并记 $q = 2^n$。关于如何用 Chevalley 交换子公式描述 [Par73] ，请参阅 S 。事实上，在下文的研究中，我们本可以用这种方法分析 S的内部结构，但我们选择改为通过描述 S 在包含它的 ${}^2\mathrm{F}_4(q)$ 的两个极大子群中的嵌入来刻画它。

对于 $G := {}^2\mathrm{F}_4(q)$，我们令 $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$，并设 $G_1 := N_G(C_S(Z_2(S)))$，$G_2 := N_G(C_S(Z_3(\Omega(S))/Z(S)))$，以及 $L_i := O^{2'}(G_i)$，其中 $i \in \{1,2\}$，从而 L_1 的型为$q^{2+1+2+4+2} : \mathrm{SL}_2(q)$，而 L_2 的型为 $q^{1+4+1+4} : \mathrm{Sz}(q)$。注意， G_1 和 G_2是包含 $N_G(S)$ 的 G 的唯一极大抛物子群。记作$Q_i := O_2(L_i) = O_2(G_i)$，使得 $Q_1 = C_S(Z_2(S))$ 和 $Q_2 = C_S(Z_3(\Omega(S))/Z(S))$ 是 S 的特征子群。然后设 $V_1 := \Omega(Q_1)$， $U_1 := [V_1, Q_1]$ ，以及 $V_2 := [Q_2, Q_2]$。

我们记录 L_1、 L_2 和 S的以下结构性质。 S、 Q_1 和 Q_2 的子群是否如所述，可利用 [Par73], 中的交换子公式计算得出；而 L_1 和 L_2 的主因子结构可从[ABS90], [Kor21], [DS85第 12]章中提取，也可运用第 2 节中介绍的一些技巧加以论证。

命题 3.2。以下结论成立：

(i) $|S| = q^{12}$; *(ii)* $S' = \Phi(S) = V_1(Q_1 \cap Q_2)$; *(iii)* $m_p(S) = 5n$; *(iv)* $Z(S) = Z(Q_2)$ 的阶为 q; *(v)* $Z_2(S) = Z(Q_1)$ 的阶为 q^2; *(vi)* $\Omega(V_2 = Z_3(S))$ 是阶为 q^5 的初等阿贝尔群; *(vii)* $\Omega(U_1C_{Q_2}(V_2)) = U_1V_2$; 以及 *(viii)* $\Omega(S) = V_1Q_2$ ，且如果 $x \in S$ 满足 $x^2 = 1$，那么 $x \in \Omega(Q_1) \cup Q_2$。

命题 3.3。以下结论成立：

(i) $|Q_1| = q^{11}$; *(ii)* $|V_1| = q^9$ 和 Q_1/V_1 是 $L_1/Q_1 \cong SL_2(q)$的自然模; *(iii)* $|U_1| = q^5$, $U_1 \in A(Q_1) \subset A(S)$且 V_1/U_1 是 L_1/Q_1 的一个阶为q^4 的不可约模，使得 $C_{V_1/U_1}(S) = U_1V_2/U_1$; *(iv)* $|Z(V_1)| = q^3$ 且 $U_1/Z(V_1)$是 L_1/Q_1的自然模; *(v)* $|Z(Q_1)| = q^2$, $Z(V_1)/Z(Q_1)$由 L_1 中心化，且 $Z(Q_1)$是 L_1/Q_1的自然模；以及 *(vi)* $V_1 = [Q_1, Q_1]$, $Z(V_1) = [V_1, V_1] = [U_1, Q_1]$且 $Z(Q_1) = [Z(V_1)\ Q_1] = [U_1, V_1]$。

命题 3.4。 以下结论成立：

(i) $|Q_2| = q^{10}$;
(ii) $\Omega(S/Q_2) = Z(S/Q_2) = \Phi(S/Q_2) = V_1Q_2/Q_2$;

(iii) $|C_{Q_2}(V_2)| = q^6$ 和 $Q_2/C_{Q_2}(V_2)$ 是 $L_2/Q_2 \cong Sz(q)$ 的自然模；*(iv)* $|V_2| = q^5$, $V_2 \in A(Q_2) \subset A(S)$ 和 $C_{Q_2}(V_2)/V_2$ 由 L_2 中心化；*(v)* $|Z(Q_2)| = q$, L_2 中心化 $Z(Q_2)$，且 $V_2/Z(Q_2)$ 是 L_2/Q_2 的自然模；以及 *(vi)* $V_2 = \Omega(C_{Q_2}(V_2)) = [Q_2, C_{Q_2}(V_2)]$ 和 $Z(Q_2) = [Q_2, V_2] = [C_{Q_2}(V_2)\ C_{Q_2}(V_2)]$

.

本节的大部分工作都在于缩小定义在 S 上的任意饱和融合系统的候选本质子群列表，最终在命题 3.14 中证明，唯一可能的本质子群是 Q_1 和 Q_2。这是由下文的一系列引理和命题推导得出的。

命题 3.5. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 S 上的饱和融合系统，且 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$。那么 $Z(V_1) \leq E$。

证明。为导出矛盾，假设 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$，且 $Z(V_1) \not\leq E$。我们有 $\Omega(E) \leq E \cap \Omega(S) = E \cap V_1Q_2$，因此 $[Z(V_1), \Omega(E)] \leq Z(S) \leq Z(Q_1)$。现在，除非 $E \cap Z(Q_1) = Z(S)$，否则我们有 $C_S(E \cap Z(Q_1)) = Q_1$，因此 $Z(E) \leq Q_1$，且 $\Omega(Z(E)) \leq V_1$。在这种情况下，$Z(Q_1)$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(E) \trianglelefteq E$，因此 $Z(Q_1) \leq E$。于是 $Z(V_1) \leq N_S(E)$，而 $Z(V_1)$ 此时正规化链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \trianglelefteq \Omega(E) \trianglelefteq E$，由此我们推得 $Z(V_1) \leq E$。

因此，为了完成论证，我们可以假设 $E \cap Z(Q_1) = Z(S)$。于是，$Z(Q_1)$ 中心化 $E/\Omega(Z(E))$，应用定理 2.21 可得，$S = EQ_1 = \Omega(Z(E))Q_1$ 且 $N_S(E) = EZ(Q_1)$。但根据命题 3.2，$\Omega(Z(E)) \leq V_1Q_2$，且我们有 $Q_2 = (Q_1 \cap Q_2)\Omega(Z(E))$。由于 $Q_2/C_{Q_2}(V_2)$ 具有自然的 $\mathrm{Sz}(q)$-模结构，我们得出 $E \leq Q_2$。

现在，$E \leq Q_2$，使得 $V_2 \leq N_S(E)$。由于 $N_S(E) = EZ(Q_1)$，我们推得 $V_2 \cap E$是阶为 q^4 的初等群。此外，定理 2.21 还表明 $\Phi(E) \cap Z(S) = \{1\}$，因此 $[E \cap V_2, E] = \{1\}$ 且 $E \cap V_2 \leq \Omega(Z(E))$。于是，$E \leq C_{Q_2}(E \cap V_2)$，由此我们推得 $EC_{Q_2}(V_2)/C_{Q_2}(V_2) = \Omega(Z(E))C_{Q_2}(V_2)/C_{Q_2}(V_2)$ 的阶为 q。此外，$\{1\} = \mathcal{O}^1(E) \cap Z(S) \geq \mathcal{O}^1(E \cap C_{Q_2}(V_2))$，由此我们推得 $E \cap C_{Q_2}(V_2) = E \cap V_2 \leq \Omega(Z(E))$。综上，$E$是阶为 q^5的初等阿贝尔群。现在，应用引理 2.17 可知，E和 $V_2 = (E \cap Q_1)Z(Q_1)$ 是 $N_S(E)$ 中仅有的阶为 q^5的初等阿贝尔子群。但此时，$V_2 \leq N_S(E) \leq Q_2$，因此 $Q_2 \leq N_S(N_S(E))$。事实上，Q_2 作用于集合 $\{E, V_2\}$，且由于 Q_2 正规化 V_2，我们也必须有 Q_2 正规化 E，这就导致矛盾。因此，$Z(V_1) \leq E$。□

命题 3.6。设 $\mathcal{F}$ 是定义在 S 和 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$上的饱和融合系统。那么 $E \not\leq V_1$。

证明。为导出矛盾，假设 $E \leq V_1$，使得 $Z(V_1) \leq \Omega(Z(E))$. 由于 $[V_1, V_1] = Z(V_1) \leq E$，我们有 $V_1 \leq N_S(E)$。事实上，$[V_1, E] \leq Z(V_1) \leq \Omega(Z(E))$，并记 $A_E := \langle \mathrm{Aut}_{V_1}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)} \rangle$，$A_E$ 中心化 $E/\Omega(Z(E))$。若$E < V_1$，则 A_E 含有奇数阶元素。

假设 $|V_2 \cap E| > q^4$。那么 $\Omega(Z(E)) \leq \Omega(C_E(V_2 \cap E)) = V_2 \cap E$。于是 V_2中心化链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \leq E$，因此根据引理 2.13，$V_2 \leq E$。故 $\Omega(Z(E)) \leq V_2$。现在，要么 $E \leq Q_2$，要么 $Z(V_1) \leq \Omega(Z(E)) \leq C_{V_2}(E) = Z(V_1)$。

在前一种情形下，由于现在 $|V_1/E| > 2$，应用命题 2.33 可得$O^2(O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))) \leq A_E$ 中心化 $E/\Omega(Z(E))$，因此正规化 V_2。此外， $Q_2 \leq N_S(E)$、 $|Q_2/E| \geqslant q^2$ 和 $[Q_2, V_2] = Z(S)$ 的阶为 q ，因此应用定理 2.21 和命题 2.33，并利用 $O^2(O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$ $\leq \mathrm{hAut}_{Q_2}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)}\mathrm{i}$，可知 $O^2(O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$ 中心化 V_2，这与矛盾，因为这样 $O^2(O^{2'}$ $(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$ 就会中心化 E。在后一种情形下， V_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(V_1) \trianglelefteq E$，由此可推得 $V_1 = E$ ，因此 $E \trianglelefteq S$。事实上，根据[Ben71]， $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))O_{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ $/O_{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SU}_3(q)$。由于 $Z(Q_1)$ 在 $Z(V_1)$ 中的指数为 q，且 $|Q_1/E| = q^2$， $O^{2'}$ $(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)) = O^2(O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))\mathrm{Inn}(E)$ 中心化 $Z(V_1)$，这与矛盾，因为 $[\mathrm{Aut}_S(E)\ Z(V_1)$ $] = [S, Z(V_1)] = Z(Q_1)$。故 $|V_2 \cap E| \leqslant q^4$。

若 $V_2 \cap E = Z(V_1)$，则 $|V_2E/E| = q^2$ ；并且由于 $m_2(E) \leqslant m_2(S) = 5n$，我们有 $Z($ $V_1)$ 在 $\Omega(Z(E))$ 中的指数至多为 q^2 ，且被 V_2 中心化。由定理 2.21，$\Omega(Z(E)) = \Omega(E) \in$ $\mathrm{A}(E) \subseteq \mathrm{A}(S)$， $N_S(E) = EV_2$ ，且 $\Omega(Z(E))/C_{\Omega(Z(E))}(O^2(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$ 是一个自然的 $\mathrm{SL}_2(q^2)$-模。特别地，对于任意 $x \in N_S(E) \setminus E$， $C_{\Omega(Z(E))}(x) = Z(V_1)$。由于 $U_1 \not\leq E$，否则 $E \cap V_2 \geq U_1 \cap V_2 > Z(V_1)$，我们必有 $U_1 \cap E = Z(V_1)$ 且 $N_S(E) = EU_1 = EV_2$。于是

$$\begin{aligned}[V_2, \Omega(Z(E))] &= [N_S(E), \Omega(Z(E))] = [U_1E, \Omega(Z(E))] = [U_1, \Omega(Z(E))] \\ &\leq [U_1, V_1] = Z(Q_1).\end{aligned}$$

由于 $V_2/Z(S)$ 对于 L_2/Q_2具有自然 $\mathrm{Sz}(q)$-模的结构，我们推得 $\Omega(Z(E)) \leq Q_2$ 且 $[\Omega(Z(E))$ $V_2] \leq Z(S)$ 的阶至多为 q，这与 $\Omega(Z(E))$ 的模结构矛盾。

因此， $V_2 \cap E > Z(V_1)$。同样，由于 $V_2/Z(S)$ 具有自然 $\mathrm{Sz}(q)$-模的结构，我们有 $\Omega(Z(E))$ $\leq Q_2$。于是 $[V_2,\Omega(Z(E))] \leq Z(S)$ 的阶至多为 q ，而定理 2.21 给出 $|V_2 \cap E| = q^4$。事实上， $V_1 \leq N_S(E) = V_2E \leq V_1$。于是 $Z(S) = [V_2 \cap E, E \cap Q_2] \leq E'$ ，因此 V_2 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq E' \trianglelefteq E'\Omega(Z(E)) \trianglelefteq E$，这与引理 2.13 矛盾。因此， $E \not\leq V_1$。□

引理 3.7. 设 $\mathcal{F}$ 是一个定义在 S 和 $E \in E(\mathcal{F})$ 上的饱和融合系统。若 $E \leq V_1(Q_1 \cap Q_2)$，则 $V_2 \leq E$。

证明。为导出矛盾，假设 $E \leq V_1(Q_1 \cap Q_2)$ 且 $V_2 \not\leq E$。由命题 3.6 可知 $E \not\leq V_1$。注意，$\Omega(E) \leq E \cap \Omega(Q_1) = E \cap V_1$，$Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E)))$，且 $\Omega(Z(E)) \cap Z(V_1) = Z($ $Q_1)$。令 $B_E := \mathrm{hAut}_{V_2}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)}\mathrm{i}$。注意，若 $|V_2 \cap E| > q^4$，则由于 $V_2 \cap E \leq \Omega(E)$， Z $(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E)) \leq \Omega(C_E(V_2 \cap E)) = V_2$。因此， V_2 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(\Omega(E)))$ $\trianglelefteq E$，矛盾。因此， $|V_2 \cap E| \leqslant q^4$ ，并且由命题 2.33，由于 $q > 2$ ，可知 $O^2(O^{2'}($ $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))) \leq B_E$。

若 $O^2(B_E)$ 中心化 $E/\Omega(Z(E))$，则它正规化 $Z(V_1)\Omega(Z(E))$，因此也正规化 $[Z(V_1)$ $E] = Z(S)$。事实上，若 $\Omega(Z(E)) \leq Q_2$，则由 $[V_2, Q_2] = Z(S)$，可知 $O^2(B_E)$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(S) \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \trianglelefteq E$，这就导致矛盾。于是 $\Omega(Z(E)) \not\leq Q_2$ ，从而 $V_2 \cap E = Z(V_1)$。但现在 V_2 中心化 $(\Omega(Z(E)) \cap Q_2)/Z(S)$，且由于 $|V_2E/E| = q^2$，定理 2.21 表明 $O^2(B_E)$ 中心化 $\Omega(Z(E))/Z(S)$，于是我们又得到了与之前相同的矛盾。因此， $O^2(B_E)$ 在 $E/\Omega(Z(E))$ 上非平凡。

现在，$E\cap Q_2$ 在 E 中的指数至多为 q，且由于 $|V_2E/E| \geqslant q$，$Z(S) \leq \Omega(Z(E))$ 和 $[V_2, Q_2] = Z(S)$，应用定理 2.21 可得 $|V_2E/E| = q$, $N_S(E) = EV_2$和 $V_1Q_2 = EQ_2$。除非 $V_2 \cap E = [V_2, Q_1]$，否则有 $Z(V_1) = Z(Q_1)[V_2 \cap E, E]$，从而 $C_E(E') = C_E(E'Z(Q_1)) \leq C_E(Z(V_1)) = E \cap V_1$。由于 $[U_1, E] \leq [U_1, Q_1] = Z(V_1) \leq C_E(E') \leq V_1$，且 $[U_1, V_1] = Z(Q_1) \leq \Omega(Z(E))$，因此 U_1 中心化链 $\Omega(Z(E)) \trianglelefteq C_E(E') \trianglelefteq E$。由于 $O^2(B_E)$ 在 $E/\Omega(Z(E))$ 上非平凡，且由 $|V_2E/E| = q$ 应用命题 2.33，我们推知 $U_1 \leq E$。但这样一来 $[V_2, Q_1] \leq U_1 \leq E$ 和 $|V_2 \cap E| > q^4$，导致矛盾。

因此，若 $V_2 \not\leq E$，则 $V_2 \cap E = [V_2, Q_1]$，且 $\Omega(Z(\Omega(E))) \leq \Omega(C_S(V_2 \cap E)) = \Omega(U_1C_{Q_2}(V_2)) = U_1V_2$。由于 $Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E))) \cap V_2$，若 $\Omega(Z(\Omega(E))) \leq V_2$，则 V_2 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(\Omega(E))) \trianglelefteq E$，这与$V_2 \not\leq E$矛盾。由引理 2.17 可知，$\Omega(Z(\Omega(E))) \leq U_1$，$U_1$ 中心化一条链，且 $U_1 \leq \Omega(E)$。但是，$[V_2, E] \leq Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E))) \leq U_1$ 且$[V_2, \Omega(Z(\Omega(E)))] \leq [V_2, U_1] = Z(S) \leq \Omega(Z(E))$，最后可得 $O^2(B_E)$ 中心化 $E/\Omega(Z(E))$，这与之矛盾。因此，$V_2 \leq E$。□

命题 3.8. 设 $\mathcal{F}$ 是一个支撑于 S 和 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ 上的饱和融合系统。则 $E \not\leq V_1(Q_1 \cap Q_2)$。

证明。我们始终假设 $E \leq V_1(Q_1 \cap Q_2)$，因此由引理 3.7，$V_2 \leq E$。特别地，$\Omega(Z(E)) \leq \Omega(C_S(V_2)) = V_2$。若 $E \leq Q_2$，则 $Q_2 \leq N_S(E)$ 且 $[Q_2, \Omega(Z(E))] = Z(S)$。应用定理 2.21 和命题 2.33，或者$E = Q_1 \cap Q_2$，或者 $\mathrm{Aut}_S(E) \leq O^2(\mathrm{Aut}_{Q_2}(E)^{\langle \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)\rangle})\mathrm{Inn}(E)$ 中心化 $\Omega(Z(E))$。在后一种情形中，我们得到 $Z(S) = [\mathrm{Aut}_{Q_2}(E)\ Z(Q_1)] \leq [\mathrm{Aut}_{Q_2}(E), \Omega(Z(E))] = \{1\}$，荒谬。因此，若 $E \leq Q_2$，则 $E = Q_1 \cap Q_2 \trianglelefteq S$。于是 S/E 是一个指数严格大于 2 的群，且有 $V_1Q_2/E \leq Z(S/Q_2)$。然而，由命题 2.33，S/E 同构于 $\mathrm{SL}_2(q)$、$\mathrm{Sz}(q)$ 或 $\mathrm{SU}_3(q)$ 的一个 Sylow 2-子群，矛盾。

因此，若 $E \leq V_1(Q_1 \cap Q_2)$，则 $V_2 \leq E$, $E \not\leq Q_2$ 且 $\Omega(Z(E)) \leq C_{V_2}(E) \leq Z(V_1)$。此外，$Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E))) \leq V_2$，并且由于 $[U_1, E] \leq [U_1, Q_1] = Z(V_1)$，$U_1$ 中心化了链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \trianglelefteq \Omega(Z(\Omega(E))) \trianglelefteq E$ 和 $U_1 \leq E$。由于 $[E, V_1] \leq [Q_1, V_1] = U_1 \leq E$，我们有 $V_1 \leq N_S(E)$。于是 $U_1V_2 \leq E$，并且进一步有 $Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E))) \leq [V_2, Q_1]$ 以及 $[V_2, Q_1, V_1] = Z(Q_1) \leq \Omega(Z(E)) \leq Z(V_1)$。因此，$V_1$ 中心化了链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \trianglelefteq \Omega(Z(\Omega(E))) \trianglelefteq \Omega(E) \trianglelefteq E$，从而 $V_1 \leq E$。由于 $E \not\leq V_1$，我们有 $\Omega(Z(E)) = Z(Q_1)$，且 $Z(V_1) = \Omega(Z(\Omega(E)))$。于是 U_1 是 V_1 中 $Z(V_1/Z(Q_1))$ 的原像；又由于 $V_1 = \Omega(E)$ 是 E的特征子群，U_1也具有特征性。但现在 Q_1 中心化了链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq Z(V_1) \trianglelefteq U_1 \trianglelefteq V_1 \trianglelefteq E$，这与 $Q_1 \not\leq E$矛盾。□

命题 3.9. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 S 和 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$上的饱和融合系统。若 $E \leq Q_1$，则 $E = Q_1$。

证明。根据命题 3.8，任何包含于 Q_1 中的 $\mathcal{F}$ 的本质子群 E 都不包含于 $V_1(Q_1 \cap Q_2)$ 中。由于 $Q_2/C_{Q_2}(V_2)$ 具有自然 $\mathrm{Sz}(q)$- 模的结构，我们推得 $\Omega(Z(E)) \leq \Omega(U_1C_{Q_2}(V_2)) = U_1V_2$。因此，$[[V_2, Q_1], \Omega(Z(E))] = \{1\}$。然而现在，$[[V_2, Q_1], E] = Z(V_1) \leq \Omega(E) \leq V_1$，$[[V_2, Q_1], \Omega(E)] \leq [[V_2, Q_1], V_1] = Z(Q_1) \leq \Omega(Z(E))$，而引理 2.13 蕴含$[V_2, Q_1] \leq E$。

假设 $Z(Q_1) \not\leq E'$。由于 $E \not\leq V_1Q_2$，我们有 $Z(Q_1) = [[V_2, Q_1], E, E]Z(S)$，因此必有 $Z(S) \not\leq E'$。于是， $E \cap Q_2$ 中心化 $[V_2, Q_1]$，从而$E \cap Q_2 \leq U_1C_{Q_2}(V_2)$。若 $V_2 \cap E > [V_2, Q_1]$，则 $\Omega(Z(E)) \leq \Omega(Z(\Omega(E))) \leq \Omega(C_S(V_2 \cap E)) = V_2$。由于 $[V_2, \Omega(E)] \leq [V_2, V_1] = Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E)))$， V_2 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(\Omega(E))) \trianglelefteq \Omega(E) \trianglelefteq E$，并且 $V_2 \leq E$。事实上，由于$E \not\leq V_1Q_2$， $Z(Q_1) = \Omega(Z(E))$。由于 $Z(S) \not\leq E'$，我们有 $[E \cap Q_2, V_2] = \{1\}$，因此 $E \cap Q_2 \leq C_{Q_2}(V_2)$。特别地， $U_1 \cap E = [V_2, Q_1]$。但是， U_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \trianglelefteq \Omega(E) \trianglelefteq E$，这就产生了矛盾。

因此，若 $Z(Q_1) \not\leq E'$ 则 $[V_2, Q_1] = V_2 \cap E$。事实上， $V_2 \cap E \leq \Omega(E)$ 且$Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E))) \leq Q_2$。特别地， V_2 中心化链 $\Omega(Z(E)) \trianglelefteq \Omega(Z(\Omega(E))) \trianglelefteq \Omega(E) \trianglelefteq E$，因此由引理 2.13 得 $C_{V_2}(\Omega(Z(E))) = V_2 \cap E$。由于$[\Omega(Z(E)) V_2] \leq Z(S)$ 且 $|V_2/V_2 \cap E| = q$，应用定理 2.21 可推出$[\Omega(Z(E)) V_2] = Z(S)$、 $N_S(E) = V_2E$，并且 $\Omega(Z(E)) \cap V_2$ 在 $\Omega(Z(E))$ 中的指数为 q。由于 $\Omega(Z(E)) \leq \Omega(U_1C_{Q_2}(V_2)) = U_1V_2$，且 $\Omega(Z(E))(V_2 \cap E)$ 是阶为 q^5 的初等阿贝尔群，故 $\Omega(Z(E)) \in \mathrm{A}(U_1V_2)$。由引理 2.17， $U_1 = \Omega(Z(E))(V_2 \cap E) \leq E$。由于 $[E, V_1] \leq [Q_1, V_1] = U_1 \leq E$， $V_1 \leq N_S(E)$。但是 $V_1 \cap Q_2 \leq N_S(E) \cap Q_2 = V_2(E \cap Q_2) \leq U_1C_{Q_2}(V_2) < V_1 \cap Q_2$，这就产生了矛盾。

因此， $Z(Q_1) \leq E'$，并且由于 $[E, U_1] \leq [Q_1, U_1] = Z(V_1)$ 和 $[\Omega(E) U_1] \leq Z(Q_1)$，由引理 2.13 可得 $U_1 \leq E$。特别地， $U_1 \leq \Omega(E)$ 且$Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E))) \leq U_1$。由于 $[\Omega(E) V_2] \leq [V_1, V_2] = Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E)))$，且 $[\Omega(Z(\Omega(E))) V_2] \leq [U_1, V_2] = Z(S) \leq E'$，由引理 2.13 可推出$V_2 \leq E$。与前面一样， $V_2 \leq \Omega(E)$ 且 $\Omega(Z(\Omega(E))) \leq V_2 \cap U_1 = [V_2, Q_1]$。此外，$\Omega(Z(E)) \leq C_{V_2}(E)$，并且由于 $E \not\leq V_1Q_2$，$\Omega(Z(E)) = Z(Q_1)$。但是现在，$[E, V_1] \leq [Q_1, V_1] = U_1 \leq \Omega(E)$， $[\Omega(E) V_1] \leq V_1' = Z(V_1) \leq \Omega(Z(\Omega(E)))$，$[\Omega(Z(\Omega(E))) V_1] \leq [[V_2, Q_1], V_1] = Z(Q_1) = \Omega(Z(E))$，因此由引理 2.13 可知 $V_1 \leq E$。事实上， $V_1 = \Omega(E)$ 且 $Z(V_1) = Z(\Omega(E))$。于是 U_1 是 V_1 中 $Z(V_1/Z(Q_1))$的原像；又由于 V_1 和 $Z(Q_1)$ 是 E中的特征子群， U_1也如此。但于是 Q_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq Z(V_1) \trianglelefteq U_1 \trianglelefteq V_1 \trianglelefteq E$，由引理 2.13 可得 $E = Q_1$，证毕。□

命题 3.10。 假设 $E \in \boldsymbol{E}(F)$ 且 $E \leq Q_2$。那么 $E = Q_2$。

证明。 首先假设 $V_2 \not\leq E$。注意，如果 $E \cap V_2 \not\leq Z(E)$，则 $Z(S) = [E, E \cap V_2] \leq \Phi(E)$，从而 $[V_2, E] \leq \Phi(E)$，这与引理 2.13 矛盾。因此，$Z(V_1) \leq E \cap V_2 \leq Z(E)$，并且我们有 $E \leq V_1$。根据命题 3.6，这构成矛盾。因此， $V_2 \leq E$。事实上，$\Omega(Z(E)) \leq \Omega(C_E(V_2)) = V_2$，并且由于$[Q_2, E] \leq [Q_2, Q_2] = V_2 \leq E$， $Q_2 \leq N_S(E)$。

我们旨在证明 $Z(S)$ 被 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 正规化。首先，若 $|Q_2/E| < q$，则显然 $Z(S) = Z(E)$。因此， $m_2(\mathrm{Out}_S(E)) \geqslant 2$，由命题 2.33 可得 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)) = \langle \mathrm{Aut}_{Q_2}(E), \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E) \rangle$。现在，$[Q_2, \Omega(Z(E))] \leq Z(S)$，由定理 2.21 可知，要么 $|Q_2/E| = q$，要么 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 $\Omega(Z(E))$ 上平凡作用。后一种情形下，显然 $Z(S)$ 被 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 正规化。前一种情形下，必有 $|Q_2/E| = q$ 且 $C_{Q_2}(V_2) \leq E$，否则 $\Omega(Z(E)) = Z(S)$，并且 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 $\Omega(Z(E))$ 上平凡作用。因此， $|\Omega(Z(E))| = q^2$， $E = C_{Q_2}(\Omega(Z(E)))$，由定理 2.21 可得 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ 且 $N_S(E) = Q_2$。注意，若 $E(V_1 \cap Q_2) < Q_2$，则 $\Omega(Z(E)) \leq C_{V_2}(E \cap V_1) \leq Z(V_1)$；又由于 $E = C_{Q_2}(\Omega(Z(E)))$，我们有

$V_1 \cap Q_2 \leq E$。但这样一来， $V_1 \leq N_S(E)$，这就导出了矛盾。因此， $Q_2 = E(V_1 \cap Q_2)$，从而 $V_2 = [Q_2, C_{Q_2}(V_2)] = [E, C_{Q_2}(V_2)][V_1 \cap Q_2, C_{Q_2}(V_2)] = E'Z(V_1)$。由于 $|\Omega(Z(E))| = q^2$，我们推得 $Z(S) = [E, E']$ 是 E 中的特征子群，且被 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 正规化；而 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 $Z(S)$ 上平凡作用。

因此，在所有情况下， $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 $Z(S)$ 上的作用都是平凡的。由于 $Q_2 \leq N_S(E)$ 和 $\Omega(Z(E)) \leq V_2$，我们推得 $\Omega(Z(E)) \leq C_{V_2}(Q_2)$ 且 $\Omega(Z(E)) = Z(S)$。由于 L_2 在 $C_{Q_2}(V_2)/V_2$ 上平凡作用，对于任意满足 $V_2 \leq A \leq C_{Q_2}(V_2)$ 的子群 A ，$C_{Q_2}(A/Z(S)) \trianglelefteq L_2$。由于 $C_{Q_2}(V_2) \leq C_{Q_2}(A/Z(S))$ 且 $V_2 = Z(Q_2/Z(S))$，若$V_2 < A$ ，则有 $C_{Q_2}(A/Z(S)) = C_{Q_2}(V_2)$。因此，要么 V_2 是 E 中 $Z(E/Z(S))$ 的原像，要么 $E \cap C_{Q_2}(V_2) = V_2$。即使在后一种情况下，由于$Q_2$ 中心化 $V_2/Z(S)$，根据定理 2.21，我们必有 $|Q_2/E| \leqslant |E/V_2|$；又由于 $|Q_2/V_2| = q^5$，显然有 $|E/V_2| \geqslant q^2$。可以计算得出，在这种情况下， V_2也是 E 中 $Z(E/Z(S))$ 的原像。因此， V_2 是 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$-不变的，且 Q_2 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(S) \trianglelefteq V_2 \trianglelefteq E$ ，所以 $E = Q_2$，如所需。□

本节余下部分的目标是导出矛盾。令 E为$\mathcal{F}$ 的一个本质子群，且不同于 Q_1 和 Q_2，并在满足此条件的前提下取为极大的。因此， E 不包含于$\mathcal{F}$ 的任何其他本质子群中。于是，应用 Alperin–Goldschmidt 定理，并利用 E 在$\mathcal{F}$中是可接受的这一点，对于任何可提升到一个严格大于 E的 S子群的 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$，$\alpha$ 都可提升到某个 $\widehat{\alpha} \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$。

引理 3.11. $V_2 \leq E.$

证明。为导出矛盾，我们假设 $V_2 \not\leq E$。由于 $E \not\leq Q_1$，我们有 $Z(S) = [Z(Q_1)\ E] \leq E'$。先假设 $E \not\leq V_1Q_2$。那么 $Z(Q_1) = Z(S)[Z(V_1)\ E] \leq E'$ ，因为 $V_2/Z(S)$具有自然 $\mathrm{Sz}(q)$-模的结构。由于 $\Omega(E)E' \leq V_1Q_2$ 且 $[V_2, Q_1, V_1Q_2] = Z(Q_1)$，我们有 $[V_2, Q_1]$ 中心化链 $E' \trianglelefteq \Omega(E)E' \trianglelefteq E$ 和 $[V_2, Q_1] \leq E$。于是 $Z(V_1) = [V_2, Q_1, E] \leq E'$，此时 V_2 中心化链 $E' \leq \Omega(E)E' \trianglelefteq E$，矛盾。因此，若$V_2 \not\leq E$，则 $E \leq V_1Q_2$。

现在， $[V_2, E] \leq Z(V_1) \leq E$ 使得 $V_2 \leq N_S(E)$。由于 $E \not\leq Q_1$，$Z(S) \trianglelefteq E, Z(Q_1)] \leq E'$。于是， $E \cap Q_2$在 E中的指数至多为 q，并且由于 $[V_2, E \cap Q_2] \leq Z(S) \leq E'$，由定理 2.21 可推出 $|V_2 \cap E| \geqslant q^4$。令 $A_E := \langle \mathrm{Aut}_{V_2}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)} \rangle$。

假设 $|V_2 \cap E| = q^4$ ，由定理 2.21 可知 $EQ_2 = V_1Q_2, N_S(E) = EV_2$ 且 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$。进一步假设，$\Omega(Z(E))$ 包含一个 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$-主因子。则 $|\Omega(Z(E))C_{Q_2}(V_2)/C_{Q_2}(V_2)| \geqslant q$ ，且由于 $\Omega(Z(E))(E \cap V_2)$ 是初等阿贝尔群， $|\Omega(Z(E))C_{Q_2}(V_2)/C_{Q_2}(V_2)| = q$ ，并且 $\Omega(Z(E))(E \cap V_2) \in \mathrm{A}(S)$。因此，$\mathrm{A}\trianglelefteq(E) \neq \emptyset$。假设 $A \in \mathrm{A}\trianglelefteq(E)$，其中$A \not\leq Q_1$。则 $(A \cap Q_1)Z(Q_1) \in \mathrm{A}(S)$，且 $A \cap Z(Q_1) = Z(S)$，由此可得 $S = AQ_1$。但这样一来，$C_{V_1/U_1}(A) = U_1V_2/U_1$ ，并且由于 $\Omega(Z(E)) \leq V_1$，可知 $\Omega(Z(E)) \leq U_1V_2$。特别地，$\Omega(Z(E))(V_2 \cap E) \leq U_1V_2$ ，由引理 2.17 可知 $\Omega(Z(E))(V_2 \cap E) = U_1$ 且 $V_2 \cap E = [V_2, Q_1]$。但是$E \not\leq Q_1$，因此 $[V_2, Q_1] = Z(V_1)[E, U_1] = Z(V_1)[E, \Omega(Z(E))(V_2 \cap E)] \leq Z(V_1)$，矛盾，

因此， $J_{\trianglelefteq}(E)$ 是 E 的特征子群，且包含于 $\Omega(Q_1) = V_1$。于是 $[V_2, E] \leq Z(V_1) \leq Z(J_{\trianglelefteq}(E))$。由于 $\Omega(Z(E))(V_2 \cap E) \in \mathcal{A}_{\trianglelefteq}(E)$， $Z(J_{\trianglelefteq}(E))$ 中心化 $V_2 \cap E$，故包含于 Q_2。但这样一来， $[V_2, Z(J_{\trianglelefteq}(E))] \leq Z(S) \leq E'$，因此由引理 2.13 可知矛盾。

因此，若 $|V_2 \cap E| = q^4$，则 $\Omega(Z(E))$ 不包含非中心的 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$-主因子。由于 E 是极大本质，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$ 将 $Z(S)$ 标准化。另一方面，若 $|V_2 \cap E| > q^4$，则 $\Omega(Z(E)) \leq \Omega(C_{Q_2}(V_2 \cap E)) = V_2$，且 A_E 中心化 $\Omega(Z(E))$。因此，在所有情况下， $Z(S)$ 都被 A_E 标准化。令 A 为 E 中 $Z(E/Z(S))$ 的原像，使得 $Z(V_1) \leq A$。特别地， $C_E(A) \leq E \cap V_1$。由于 $|V_2 \cap E| \geqslant q^4$，我们有 $A \leq Q_2$，因此 V_2 中心化 $A/Z(S)$ 和$Z(S)$。于是，存在奇数阶的 A_E 中的元素中心化 A。由三子群引理，这样的自同构也中心化 $E/C_E(A)$。但是现在，$[V_2, C_E(A)] \leq [V_2, V_1] = Z(V_1) \leq A$，因此存在奇数阶元素中心化 $E/C_E(A)$ A、 $C_E(A)A/A$、 $A/Z(S)$ 和 $Z(S)$，这与此矛盾。□

由于 $V_2 \leq E$, $V_2 \in \mathcal{A}(S)$ 和 $V_2 \trianglelefteq S$，我们有 $\emptyset \neq \mathcal{A}_{\trianglelefteq}(E) \subset \mathcal{A}(S)$。特别地，群 $J_{\trianglelefteq}(E)$ 定义良好。

引理 3.12. $E \leq V_1 Q_2$.

证明。我们始终假设 $E \not\leq V_1 Q_2$。由于 $V_2 \leq E$，我们有 $\Omega(Z(E)) \leq \Omega(C_S(V_2)) = V_2$。此外， $V_2/Z(S)$具有自然 $\mathrm{Sz}(q)$-模的结构，因此 $\Omega(Z(E)) \leq Z(Q_1)$。最后， $E \not\leq Q_1$ 因此 $\Omega(Z(E)) = Z(S)$。令 $A \in \mathrm{A}_{\trianglelefteq}(E)$。若 $A \not\leq Q_1$，则 $(A \cap Q_1)Z(Q_1)$ 也是初等阿贝尔群，并且 $A \cap Z(Q_1) = Z(S)$。我们推得 $S = AQ_1$。事实上，我们有 $Q_2 = A(Q_1 \cap Q_2)$。由于存在 $x \in E \setminus V_1 Q_2$，且 $Q_2/C_{Q_2}(V_2)$具有自然 $\mathrm{Sz}(q)$-模的结构，我们推得 $Q_2 = AC_{Q_2}(V_2)$。但此时$[A, C_{Q_2}(V_2)] \leq A \cap C_{Q_2}(V_2) = Z(S)$ 且 $[Q_2, C_{Q_2}(V_2)] = Z(S)$，这与假设矛盾。因此，若 $A \in \mathrm{A}_{\trianglelefteq}(E)$，则 $A \leq \Omega(Q_1) = V_1$。于是 $Z(V_1) \leq \Omega(Z(J_{\trianglelefteq}(E))) \leq \Omega(C_E(V_2)) = V_2$。由于 $E \not\leq V_1 Q_2$，且 $V_2/Z(S)$具有自然 $\mathrm{Sz}(q)$-模的结构，我们有 $Z(Q_1)$ 是 $\Omega(Z(J_{\trianglelefteq}(E)))$ 与 E 中 $Z(E/\Omega(Z(E))$ 的原像的交，因此 $Z(Q_1)$ 是 E 的特征子群。

现在， $C_E(Z(Q_1)) = E \cap Q_1$ 在 E 中是特征的。于是 $[U_1, E] \leq E \cap Q_1$, $[U_1, E \cap Q_1] \leq Z(V_1) \leq \Omega(E \cap Q_1) \leq E \cap V_1$， $[U_1, \Omega(E \cap Q_1)] \leq Z(Q_1)$ 以及 $[U_1, Z(Q_1)] = \{1\}$，从而 $U_1 \leq E$。现在，$U_1 V_2 \leq J_{\trianglelefteq}(E) \leq V_1$，并且我们有 $Z(V_1) \leq Z(J_{\trianglelefteq}(E)) \trianglelefteq [V_2, Q_1]$。于是， V_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq Z(J_{\trianglelefteq}(E)) \trianglelefteq J_{\trianglelefteq}(E) \trianglelefteq E \cap Q_1$。若 $V_1 \not\leq E$，则 $N_{EV_1}(E) > E$，且 $N_{EV_1}(E)$ 规范化链 $\{1\} \trianglelefteq .. \trianglelefteq E \cap Q_1 \trianglelefteq E$，这就产生了矛盾。因此， $V_1 \leq E$。特别地， $V_1 = \Omega(E \cap Q_1)$ 在 E 中是特征的。现在， U_1 是 V_1 中 $Z(V_1/Z(Q_1))$ 的原像，并且由于 V_1 和 $Z(Q_1)$ 在 E 中是特征的，所以 U_1 也是特征的。于是， Q_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq Z(V_1) \trianglelefteq U_1 \trianglelefteq V_1 \trianglelefteq E \cap Q_1$ 以及 $Q_1 \leq E$。因此，对于所有 $x \in S \setminus Q_1$， $V_1 = \Phi(Q_1) \leq \Phi(E) \leq \Phi(S) = [Q_1, x]\Phi(Q_1)$。由于 $E \not\leq Q_1$，我们有 $\Phi(E) = \Phi(S)$，且 S 中心化 $E/\Phi(E)$，这导致了最终的矛盾。□

引理 3.13。 $V_1 \not\leq E$。

证明。为导出矛盾，设 $V_1 \leq E$。由于 $E \neq Q_1$，根据命题 3.9， $E \not\leq Q_1$。设 $A \in \mathcal{A}_{\trianglelefteq}(E)$ 且 $A \not\leq V_1$。于是 $A \not\leq Q_1$，并且由于 A 是

阿贝尔的， $A \cap Z(Q_1) = Z(S)$。因此，$(A \cap Q_1)Z(Q_1) \in \mathrm{A}(Q_1)$，由此可得$S = AQ_1$。此外，由于 $(A \cap Q_1)Z(Q_1) \in \mathrm{A}(V_1)$，我们有 $Z(V_1) \leq AZ(Q_1)$，从而 $|A \cap Z(V_1)| = q^2$。由于 $U_1/Z(V_1)$ 具有 L_1/Q_1 的自然 $\mathrm{SL}_2(q)$-模的结构，我们有 $|A \cap U_1| \geqslant |[A, U_1](A \cap Z(V_1))| \geqslant q^3$。最后，由于 $|[A, V_1]U_1/U_1| > q$ 且 $V_1 \leq E \leq N_S(A)$，我们有 $|A| > q^5$；但这与 $m_2(S) = 5n$矛盾。因此， $J_{\trianglelefteq}(E)$ 是 E 的特征子群，且包含于 V_1 中。于是 $Z(V_1) \leq Z(J_{\trianglelefteq}(E)) \leq [V_2, Q_1]$，因为 $Z(U_1V_2) = [V_2, Q_2]$ 且$U_1V_2 \leq J_{\trianglelefteq}(E)$。

假设 $Z(V_1) < Z(J_{\trianglelefteq}(E))$。那么 $C_S(Z(J_{\trianglelefteq}(E))) = C_E(Z(J_{\trianglelefteq}(E))) = U_1C_{Q_2}(V_2)$ 在 E 中是特征的，因此 $U_1V_2 = \Omega(C_{Q_2}(V_2))$ 在 E 中是特征的。由引理 2.17， U_1 和 V_2 是 U_1V_2 的唯一极大初等阿贝尔子群，并且由于 U_1、$V_2 \trianglelefteq S$，我们推得 U_1 和 V_2 都是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$-不变的。于是 $Z(S) = [U_1, V_2]$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$-不变的，并且 $E \cap Q_2 = C_E(V_2/Z(S))$ 也是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$-不变的。于是 Q_2 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(S) \trianglelefteq V_2 \trianglelefteq E \cap Q_2$，从而 $Q_2 \leq E$ 和 $E = V_1Q_2$。然后 $Z(S) < [Z(J_{\trianglelefteq}(E))\ E] \leq Z(Q_1)$，于是我们得到 $V_1(Q_1 \cap Q_2) = C_E([Z(J_{\trianglelefteq}(E))\ E])$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$-不变的。于是 $[Q_1, E] \leq V_1(Q_1 \cap Q_2)$ 且 $[Q_1, V_1(Q_1 \cap Q_2)] = V_1 \cap Q_2 \leq \Phi(E)$，由引理 2.13 得到矛盾。

现在假设 $Z(V_1) = Z(J_{\trianglelefteq}(E))$，因此 $Z(V_1)$ 是 E 中的特征子群。于是，由于$V_1 < E$， $Z(S) = [Z(V_1)\ E]$ 和 $V_1 = C_E(Z(V_1))$ 也都是 E 的特征子群。假设 $E < V_1Q_2$。那么 V_1Q_2 中心化 $Z(V_1)/Z(S)$，因此 $B_E := \langle \mathrm{Aut}_{V_1Q_2}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)} \rangle$ 中心化 $Z(V_1)/Z(S)$。事实上， B_E 正规化 $Z(Q_1)$，因此也正规化 $E \cap Q_1$。此外， U_1 是 V_1 中 $Z(V_1/Z(Q_1))$ 的原像，因此被 B_E 正规化；又由于根据命题 3.9， $V_1 < E \not\leq Q_1$， $U_1 \cap V_2$ 是 U_1 中 $C_{U_1/Z(V_1)}(E)$ 的原像，也被 B_E 正规化。于是 V_1Q_2 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(S) \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq U_1 \cap V_2 \trianglelefteq U_1$，由此可得 $O^2(B_E)$ 中心化 U_1。根据三子群引理， $O^2(B_E)$ 中心化 $E/C_E(U_1)$；又因为 U_1 在 S 中是自中心化的，所以 $O^2(B_E)$ 在 E 上平凡作用，矛盾。因此，根据引理 3.12， $E = V_1Q_2$。

现在， U_1V_2 是 V_1 中$C_{V_1/U_1}(S) = C_{V_1/U_1}(E)$的原像，因此$C_{V_1/Z(V_1)}(E) = C_{U_1V_2/Z(V_1)}(Q_2) = V_2/Z(V_1)$，从而 V_2 是 E的特征子群。此外， $Q_2 = C_E(V_2/Z(S))$也是 E的特征子群。由于 S/E 是阶为$q > 2$ 的初等阿贝尔群，且 E 是极大本质子群，由命题 2.33 可得， $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$。设 G_E 是 E 的一个模型群，且 $L_E := O^{2'}(G_E)$，使得 $L_E/E \cong \mathrm{SL}_2(q)$。那么$S$ 中心化 E/Q_2，因此 L_E/Q_2 是$L_E/E \cong \mathrm{SL}_2(q)$的一个中心扩张，其核为$E/Q_2$，它是阶为 q的初等阿贝尔群。由于$S/Q_2 \cong T \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Sz}(q))$，这是一个非分裂扩张。然而，当 $q = 2^n > 4$时，$\mathrm{SL}_2(q)$的 Schur 乘子是平凡的，因此我们得到矛盾。因此， $V_1 \not\leq E$。
□

现在我们证明，所提出的 E 不存在，并且任意定义在 S 上的饱和融合系统的本质子群只有 Q_1 和 Q_2这两种可能。根据命题 3.9 和命题 3.10，我们可以假设 that $E \not\leq Q_1$ and$E \not\leq Q_2$，并令 E 在 $\mathcal{F}$ 中为极大本质。由于此点，根据引理 3.11，且 $\Omega(C_S(V_2)) = V_2$，我们有 $\Omega(Z(E)) \leq V_2$。由于 $E \not\leq Q_2$，我们有 $\Omega(Z(E)) \leq Z(V_1)$。

命题 3.14。 设 F 是一个支撑于 S 上的饱和融合系统。则 $E(F) \subseteq \{Q_1, Q_2\}$。

证明。由命题 3.9 和命题 3.10，为导出矛盾，只需令 E 为 F 中极大选取的本质子群，使得 $E \not\leq Q_1$ 和 $E \not\leq Q_2$。由引理 3.13， $V_1 \not\leq E$。令 $A_E := \langle \mathrm{Aut}_{V_1}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)} \rangle$，则 A_E 包含奇数阶元素；由于 $\Omega(Z(E)) \leq Z(V_1)$， A_E 对 $Z(S)$ 平凡作用。因此， A_E 归一化 P_E，即 E 中 $Z(E/Z(S))$ 的原像。此外，由于 $V_2 \leq E \not\leq Q_2$，我们有 $Z(V_1) \leq P_E \leq V_1 \cap Q_2$ 和 $P_E \cap V_2 = Z(V_1)$。对于 $C_E := C_{A_E}(P_E)$，由三子群引理，$[C_E, E] \leq C_E(P_E) \leq V_1$。于是 $[V_1, C_E(P_E)] \leq Z(V_1) \leq P_E$，由此可知 $[C_E, C_E(P_E)] \leq P_E$，因此 $O^2(C_E)$ 中心化 E，且 C_E 是一个 2-群。因此， $A_E/\mathrm{Inn}(E)$ 忠实地作用于 P_E。

首先假设 $E \cap C_{Q_2}(V_2) = V_2$，注意到 $m_2(E) = m_2(S)$。如果 $J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_1$，那么 $J_{\trianglelefteq}(E) \leq V_1$。由于 $V_2 \leq J_{\trianglelefteq}(E)$，我们有 $Z(V_1) \leq \Omega(Z(J_{\trianglelefteq}(E))) \leq V_2$。于是 $C_{Q_2}(V_2)$ 将链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(J_{\trianglelefteq}(E))) \trianglelefteq J_{\trianglelefteq}(E) \trianglelefteq E$ 中心化，矛盾。因此，存在 $A \in \mathcal{A}(E)$ 使得 $A \trianglelefteq E$ and $A \not\leq Q_1$。由于 $(A \cap Q_1)Z(Q_1)$ 也是初等阿贝尔的，且 $A \cap Z(Q_1) = Z(S)$，我们必有 $S = AQ_1$。事实上， $C_{V_1/U_1}(A) = U_1V_2/U_1$。于是 $P_EU_1/U_1 \leq U_1V_2$，从而 $P_E \leq U_1V_2$。根据引理 2.17， $\Omega(P_E) \leq (P_E \cap V_2)(P_E \cap U_1)$。由于 $E \not\leq Q_1$，$P_E \cap U_1 \leq [V_2, Q_1]$，从而 $\Omega(P_E) \leq P_E \cap V_2 = Z(V_1)$。因此， $\Omega(P_E) = Z(V_1)$ 被 A_E 中心化，从而 $C_E(\Omega(P_E)) = V_1 \cap E$ 也被 A_E 规范化。于是$[V_1, E] \leq V_1 \cap E$，$[V_1, V_1 \cap E] \leq V_1' = \Omega(P_E)$，因此 $O^2(A_E)$ 在 E 上平凡，矛盾。

现在假设 $V_2 < E \cap Q_2 \leq C_{Q_2}(V_2)$。由于 $\Omega(E) \leq (E \cap V_1)(E \cap Q_2)$，故 $\Omega(E) \leq V_1$。由于 $V_2 \leq \Omega(E)$ 且 $E \not\leq Q_2$，我们有 $\Omega(Z(\Omega(E))) = Z(V_1)$。但这样一来， U_1 中心化了链 $\{1\} \trianglelefteq Z(V_1) \trianglelefteq \Omega(E) \leq E$，这就产生了矛盾。

因此， $V_2 < C_E(V_2) \trianglelefteq L_2$ 且 $E \cap Q_2 \not\leq C_{Q_2}(V_2)$。于是 $P_E \leq C_{Q_2}(C_E(V_2)/Z(S)) \trianglelefteq L_2$，并且由于 $V_2/Z(S) = Z(Q_2/Z(S))$，我们有 $P_E \leq C_{Q_2}(V_2)$。由于 $E \cap Q_2 \setminus C_E(V_2)$ 中存在元素，我们得出 $P_E \leq V_2$。因此， $P_E = P_E \cap V_2 = Z(V_1)$。事实上， $E \cap V_1 = C_E(P_E)$ 被 A_E 正规化。但 $[V_1, E] \leq V_1 \cap E$，$[V_1, V_1 \cap E] \leq V_1' = P_E$，因此 $O^2(A_E)$ 在 E 上作用平凡，这最终导致矛盾。因此，$E(F) \subseteq \{Q_1, Q_2\}$。□

最后，我们对定义在 S 上的所有饱和融合系统进行分类。借助命题 2.33，我们能够完全确定$\mathcal{F}$中的局部作用，而无需依赖有限单群的分类。我们使用推论 2.38；在此处的用法中，它只依赖于 [DS85], ，同样不依赖于分类。

定理 3.15. 设 F 是定义在${}^2\mathrm{F}_4(2^n)$ 的 *Sylow* 2-子群上的一个饱和融合系统，其中 $n > 1$。那么以下结论之一成立：

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(S : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S))$;(ii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(Q_1 : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 其中 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)) \cong \mathrm{SL}_2(2^n)$;(iii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(Q_2 : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 其中 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{Sz}(2^n)$； 或

(iv) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$ *where* $F^*(G) = O^{2'}(G) = {}^2\mathrm{F}_4(2^n)$.

证明。 根据命题 3.14，$\mathcal{E}(\mathcal{F}) \subseteq \{Q_1, Q_2\}$。如果$\mathcal{F}$没有本质子群，那么 Alperin–Goldschmidt 定理意味着 $S \trianglelefteq \mathcal{F}$，结论 (i) 成立。

假设 $Q_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$。那么，由于 $V_1 = \Phi(Q_1)$ 且 S中心化 $(Q_1 \cap Q_2)\Phi(Q_1)/\Phi(Q_1)$，应用定理 2.21 可得 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$。由于 $\mathrm{Out}_S(E)$ 在 $Z(Q_1)$ 上作用非平凡，而在 $Z(S)$ 上平凡作用，由定理 2.21 可推知，$Z(Q_1)$ 是 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 的自然模。若 Q_2 不是本质子群，则由 Alperin–Goldschmidt 定理可得结论 (ii)。

假设 $Q_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$。那么， S/Q_2 同构于 Sz(q) 的一个 Sylow 2-子群，因此根据命题 2.33 可推得 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{Sz}(q)$。事实上，由于 $|Q_2/C_{Q_2}(V_2)| = |V_2/Z(S)| = q^4$，可知 $Q_2/C_{Q_2}(V_2)$ 和 $V_2/Z(S)$ 是 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 的自然 Sz(q)-模。若 Q_1 不是本质子群，则结论 (iii) 成立。

最后，我们断言，只要 E(F) $=\{Q_1, Q_2\}$，就有 $O_2(\mathrm{F}) = \{1\}$。根据[AKO11，命题 I.4.5],，有 $O_2(\mathrm{F}) \leq Q_1 \cap Q_2$；又由于 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 在 $Q_2/C_{Q_2}(V_2)$ 上不可约，因此 $O_2(\mathrm{F}) \leq C_{Q_2}(V_2)$。于是， $\Phi(O_2(\mathrm{F}))$ 是 F 的正规子群，且包含于 $Z(S)$ 中；又由于 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 在$Z(Q_1)$上不可约，我们推得 $\Phi(O_2(\mathrm{F})) = \{1\}$，并且 $O_2(\mathrm{F})$ 是初等阿贝尔群。因此，$O_2(\mathrm{F}) \leq \Omega(C_{Q_2}(V_2)) = V_2$。由于 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 在 $V_2/Z(S)$ 上不可约，且$O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 在 $Z(Q_1)$ 上不可约，若 $O_2(\mathrm{F}) \neq \{1\}$，则 $O_2(\mathrm{F}) = V_2$。但根据 [AKO11，命题 I.4.5], , $C_{Q_2}(V_2) = C_{Q_1}(V_2)$ 将是 F 的正规子群，这与矛盾。故 $O_2(\mathrm{F}) = \{1\}$。由于 Q_1 和 Q_2 在 S 中是特征子群，若 E(F) $=\{Q_1, Q_2\}$，则 F 满足推论 2.38 的假设，且结论 (iv) 成立。□

4. Fusion Systems on a Sylow p-subgroup of $\mathrm{PSU}_5(p^n)$

本节中，我们对作用于 $\mathrm{PSU}_5(p^n)$ 的 Sylow p-子群上的饱和融合系统进行分类。全文固定一个与 $\mathrm{PSU}_5(p^n)$ 的 Sylow p-子群同构的 S，并记作 $q = p^n$。

对于 $G := \mathrm{PSU}_5(q)$，我们将 $S \in$ 识别为 $\mathrm{Syl}_p(G)$，并令 $G_1 := N_G(C_S(Z_2(S)))$ 以及$G_2 := N_G(Q)$，其中 Q 是 S 中 $J(S/Z(S))$ 的阶为 q^7 的原像。对于 $i \in \{1, 2\}$，令$L_i := O^{p'}(G_i)$，使得 L_1 的形状为 $q^{4+4} : \mathrm{SL}_2(q^2)$，而 L_2 的形状为$q^{1+6} : \mathrm{SU}_3(q)$。注意， G_1 和 G_2 是包含 $N_G(S)$ 的 G 的唯一极大抛物子群。我们记 $Q_i := O_p(L_i) = O_p(G_i)$，使得 $Q_1 = C_S(Z_2(S))$ 和 $Q = Q_2$ 是 S 的特征子群。

我们再次需要了解 S 以及 L_1和 L_2的主列结构。这一次，我们从 [ABS90] 和 [Kor15b], 中获取信息，并结合第 2 节中的结果和技巧，推导出以下众所周知的事实。

命题 4.1. 以下结论成立：

(i) $|S| = q^{10}$; (ii) $S' = \Phi(S) = Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$; (iii) $m_p(S) = 4n$, $5n$ 对于 $p = 2$, odd 分别成立; (iv) $Z(S) = Z(Q_2)$; 以及(v) $Z_2(S) = Z(Q_1) \cap Q_2$。

命题 4.2. 以下结论成立:

(i) $|Q_1| = q^8$; *(ii)* $|Z(Q_1)| = q^4$ 且 $Q_1/Z(Q_1)$ 是 $L_1/Q_1 \cong SL_2(q^2)$ 的自然模; *(iii)* $Z(Q_1) \in A(S)$ 当且仅当 $p = 2$; *(iv)* $Z(Q_1) = \Phi(Q_1) = [Q_1, Q_1]$ 是 $L_1/Q_1 \cong SL_2(q^2)$ 的自然 $\Omega_4^-(q)$-模; *(v)* 若 $A \leq Z(Q_1)$ 且 $|A| > q^2$, 则 $C_S(A) = Q_1$; *(vi)* Q_2 是一个阶为 q^7的半超特殊群; *(vii)* $Q_2/Z(S)$ 是 $L_2/Q_2 \cong SU_3(q)$ 的自然模。

前述命题包含了确定任何以 S 为底的饱和融合系统$\mathcal{F}$的本质子群完整列表所需的全部结构信息。我们通过一系列引理和命题来建立这一列表，并最终得到命题 4.9。

命题 4.3。 设 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ 且 $E \leq Q_1$。则 $E = Q_1$。

证明。 由于 $E \leq Q_1$ 和 E 是$\mathcal{F}$-中心的，因此有 $Z(Q_1) \leq E$。此外，由于 $Z(Q_1) = \Phi(Q_1)$, 我们有 $Q_1 \leq N_S(E)$。若 $E \leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$, 则$[S, E] \leq Z(Q_1) \leq Z(E)$, 从而 $E \trianglelefteq S$。但是此时， $Z(Q_1)$在E 中的指数至多为 q^2, 而 Q_1/E 的阶至少为 q^2; 由定理 2.21 可得 $E = Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$ 和 $Q_1 = N_S(E)$, 这与假设矛盾。因此， $E \not\leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$。

由于 $Z(Q_1) \leq E$, 我们有 $Z(Q_1)Q_2 < EQ_2$; 应用引理 2.27, 可推得 $Z(E) \cap Q_2 = Z(Q_1) \cap Q_2$。若 $Z(E) > Z(Q_1)$, 则再次应用引理 2.27, 得到 $E \cap Q_2 = Z(Q_1) \cap Q_2$, 从而 $|Q_1/E| \geqslant q^2$ 且$|E/Z(Q_1)| \leqslant q^2$。事实上， $|E/Z(E)| < q^2$, 应用定理 2.21, 必有 $E = Z(E)$、 $|Q_1/E| = q^2 = |E/Z(Q_1)|$ 以及 $Q_1 = E(Q_1 \cap Q_2)$。但现在可知 $S = EQ_2$, 这就导致矛盾，因为此时 $\{1\} = [E, E] \not\leq Q_2$。因此, $Z(E) = Z(Q_1)$, 于是 Q_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(E) \trianglelefteq E$, 而引理 2.13 推出 $E = Q_1$。□

引理 4.4. 设 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ 且 $E \neq Q_1$。那么或者

(i) $\Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1) = Z(S)$; *or*
(ii) $|\Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1)| = q^2$.

此外，若 $\Omega(Z(E)) \not\leq Q_1$, 则 E 是初等阿贝尔群，且 $N_S(E) = E(Z(Q_1) \cap Q_2)$。

证明。 由于 $Q_1 < EQ_1 \leq C_S(\Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1))$, 根据引理 2.23, 我们要么有 $Z(C_S(\Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1))) = Z(S)$, 要么有 $|Z(C_S(\Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1)))| = q^2$

并且 $|EQ_1/Q_1| \leqslant q$。由于 $Z(C_S(\Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1)))$ 中心化了 E，而后者是 $\mathcal{F}$-中心的，因此我们有 $Z(C_S(\Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1))) = \Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1)$。

假设 $\Omega(Z(E)) \not\leq Q_1$。那么由引理 2.23，$E \cap Z(Q_1) \leq C_{Z(Q_1)}(Z(E))$ 的阶至多为 q^2。由于 $Z(Q_1) \cap Q_2 \leq N_S(E)$ 且 $[Z(Q_1) \cap Q_2,\ E \cap Q_1] = \{1\}$，由引理 2.23 和定理 2.21 可得 $|E \cap Z(Q_1)| = q^2$，$N_S(E) = E(Z(Q_1) \cap Q_2)$，$|N_S(E)/E| = q$，$EQ_1/Q_1 = \Omega(Z(E))Q_1/Q_1$ 的阶为 q，且 $\Phi(E) \cap Z(S) = \{1\}$。

现在，$E \cap Z(Q_1)$ 由 $\Omega(Z(E))Q_1 \geq E$ 中心化，因此 $E \cap Z(Q_1) = \Omega(Z(E)) \cap Z(Q_1)$。此外，由于 $\Omega(Z(E)) \not\leq Q_1$，我们推得 $E \cap Q_1 \leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$，因此 $E = \Omega(Z(E))(E \cap Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2))$，由此可知 $[E, E] \trianglelefteq [Q_1 \cap Q_2, Q_1 \cap Q_2] \cap \Phi(E) = Z(S) \cap \Phi(E) = \{1\}$，且 E 是阿贝尔的。此外，注意到 $\mho^1(E) = \mho^1(E \cap Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)) \leq Z(S) \cap \Phi(E) = \{1\}$。因此，$\Phi(E) = \{1\}$，且 E 是初等阿贝尔的。□

为最终证明 $\mathcal{E}(\mathcal{F}) \subseteq \{Q_1, Q_2\}$，我们假设只要 $E \neq Q_1$ 且 $E \not\leq Q_2$，E 就是极大本质子群。因此，我们可以在全文中使用引理 2.32 至命题 2.34。

命题 4.5。设 $E \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{F})$ 且 $E \neq Q_1$。则 $\Omega(Z(E)) \leq Q_1$，$Z(Q_1) \cap Q_2 \leq E$ 且 $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \leq N_S(E)$。

证明。为导出矛盾，假设 $\Omega(Z(E)) \not\leq Q_1$，于是由引理 4.4，$E$ 是初等阿贝尔群，且 $N_S(E) = E(Z(Q_1) \cap Q_2)$。若 $E \leq Q_2$，则由于 E 是初等阿贝尔群而 Q_2 是半超特殊群，$|E| \leqslant q^4$，并且由于 $[Q_2, E] \trianglelefteq [Q_2, Q_2] = Z(S) \leq E$，$Q_2 \leq N_S(E)$ 且 $q = |N_S(E)/E| \geqslant q^3$，矛盾。因此，$E$ 是 F 中的极大本质子群。若 $E \leq Z(Q_1)Q_2$，则 $[Q_1 \cap Q_2, E] \trianglelefteq [Q_1 \cap Q_2, Z(Q_1)Q_2] = Z(S) \leq E$，从而 $Q_1 \cap Q_2 \leq N_S(E)$。事实上，由于 $|N_S(E)/E| = q$，我们必有 $|E \cap Q_1| = q^4$。但于是 $(E \cap Q_1)Z(Q_1) = q^6$，且 $(E \cap Q_1)Z(Q_1)$ 是初等阿贝尔群；由于 $m_p(S) \leqslant 5n$，这就产生了矛盾。因此，$E \not\leq Z(Q_1)Q_2$，并且由于 E 是初等阿贝尔群，且当 $p = 2$ 时 $\Omega(S/Q_2) = Z(Q_1)Q_2/Q_2$，我们推得 p 为奇数。在应用定理 2.21 时，并利用 E 是阿贝尔群这一点，可得 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$，且 $E = [E, O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))] \times C_E(O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$，其中 $[E, O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))]$ 是自然的 $\mathrm{SL}_2(q)$-模。

设 $\hat{t}$ 是 $Z(O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$ 中的一个非平凡对合。那么，由于 E 是可接受的，$\hat{t}$ 可提升到 S 的一个严格包含 E 的子群；根据 Alperin–Goldschmidt 定理，并利用 E 是极大本质的这一点，我们推得 t 是某个元素 $t \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 在 E 上的限制。特别地，t 规范化 Q_1 和 Q_2。于是 t 在 $EQ_1/Q_1 \cong E/E \cap Q_1 = E/C_E(\mathrm{Aut}_S(E))$ 上同构地作用。因此 t 反演 EQ_1/Q_1。通过类似论证，t 反演 $Z(S)$，并在 $(Z(Q_1) \cap Q_2)/Z(S)$ 上平凡作用。令 $Z_t = C_{Z(Q_1)}(t)$。那么 $[t, Z_t, E] = \{1\}$，且 $[E, Z_t, t] \leq [Z(Q_1) \cap Q_2, t] = Z(S)$。应用三子群引理可得 $[E, t, Z_t] \leq Z(S)$；又由于 $[E, t] \not\leq Q_1$，我们推得 $Z_t \leq Z(Q_1) \cap Q_2$，且 t 反演 $Z(Q_1)/(Z(Q_1) \cap Q_2)$。

在前面的论证中用 Z_t 替换 C_t，其中 C_t 是 $Q_1 \cap Q_2$ 中 $C_{(Q_1 \cap Q_2)/Z(S)}(t)$ 的原像。由于 t 反演 $Z(Q_1)Q_2/Q_2 = \Phi(S/Q_2)$，$t$ 必定非平凡地作用于 $S/Z(Q_1)Q_2$，因此 t 反演 $(Q_1 \cap Q_2)/Z(Q_1) \cap Q_2$。此外，

t 在 $S/Z(Q_1)Q_2$ 上的作用与其在 $Q_1/Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$上的作用相同。因此， $[Q_1/Z(Q_1)\ t] >(Q_1 \cap Q_2)/Z(Q_1)$。于是，对 $[S/Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)\ t]$在 $S/Z(Q_1)$中的原像 D，t 反演 D，从而 D 是阿贝尔群。由于 t 反演 EQ_1/Q_1， $D \not\leq Q_1/Z(Q_1)$。但是，对任意 $s \in S \setminus Q_1$，$C_{Q_1/Z(Q_1)}(s) = Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)/Z(Q_1)$，因为 $Q_1/Z(Q_1)$ 是 $\mathrm{Out}_{\mathrm{PSU}_5(q)}(Q_1) \cong \mathrm{SL}_2(q^2)$ 的自然 $\mathrm{SL}_2(q^2)$-模；又由于 D 是阿贝尔群，我们推得 $(D \cap Q_1)/Z(Q_1) = Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)/Z(Q_1)$，这就导出了矛盾。

因此，$\Omega(Z(E)) \leq Q_1$。但现在， $[Z(Q_1) \cap Q_2,\ E] \leq [Z(Q_1) \cap Q_2,\ S] \leq Z(S) \leq \Omega(Z(E))$，从而 $Z(Q_1) \cap Q_2$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \trianglelefteq E$，并由引理 2.13， $Z(Q_1) \cap Q_2 \leq E$。特别地， $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \leq N_S(E)$。□

对于下面的命题，我们回顾 $W(S)$ 的定义及其性质，如引理 2.15 所述。

命题 4.6。 设 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$。则 $\Omega(Z(E)) \leq Z(Q_1)$。

证明。为导出矛盾，假设 $\Omega(Z(E)) \not\leq Z(Q_1)$。特别地，$E \neq Q_1$，从而由命题 4.3 得 $E \not\leq Q_1$。由于 $\Omega(Z(E)) \leq Q_1$ 且 $E \not\leq Q_1$，我们必有 $\Omega(Z(E)) \leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$。此外，$\Omega(Z(E))Z(Q_1)$ 是初等阿贝尔群。根据 [GLS98，定理 3.3.3]，，当 $p = 2$ 时，我们有 $m_2(S) = 4n$；而当 p 为奇数时， $m_p(S) = 5n$。因此，当 $p = 2$ 时产生矛盾；而当 p 为奇数时，我们推出 $|\Omega(Z(E))Z(Q_1)| \leqslant q^5$。在证明的其余部分，我们令 p 为奇素数。注意到 $C_S(Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)) = Z(Q_1)$，并且由于 $\Omega(Z(E)) \leq Q_1$，我们必有 $Q_1 \cap Q_2 \not\leq E$。

假设 $Z(Q_1) \cap E > Z(Q_1) \cap Q_2$。那么对于任意满足 $[Z(Q_1) \cap E, x, x] = \{1\}$ 的 $x \in E$，必有 $x \in E \cap Q_1$ and $[Z(Q_1) \cap E, x] = \{1\}$。因此，$Z(Q_1) \cap E \leq W(E)$。由于 $W(E)$ 本身是初等阿贝尔群，它在 $Z(Q_1) \cap E$ 上作二次作用，因此我们得出 $W(E) \leq Q_1$。于是，$Z(Q_1)$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq W(E) \trianglelefteq E$，由引理 2.13， $Z(Q_1) \leq E$。注意， $[W(E)\ E \cap Q_1] \leq Z(Q_1)$，因此 $[W(E)\ E \cap Q_1, E \cap Q_1] = \{1\}$，且 $W(E)$ 中心化 $E \cap Q_1$。如果 $W(E) \leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$，那么由于 $\Omega(Z(E)) \leq W(E)$，我们有 $Z(Q_1) < Z(Q_1)\Omega(Z(E)) \leq W(E) \leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$。此外， $[E, Z(Q_1)] \leq [E, W(E)] \leq Z(Q_1)$。但这样一来，$[E, Q_1 \cap Q_2] \leq Z(Q_1) \cap Q_2 \leq W(E)$， $[W(E)\ Q_1 \cap Q_2] \leq Z(S) \leq [W(E)\ E]$，并且 $Q_1 \cap Q_2$ 中心化 $[W(E)\ E]$，因此 $Q_1 \cap Q_2$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq [W(E)\ E] \trianglelefteq W(E) \trianglelefteq E$，这与引理 2.13 矛盾。因此，由于$W(E) \leq Q_1$， $W(E) \not\leq Z(Q_1)Q_2$，且 $W(E) \cap Q_2 = C_{Q_2}(W(E)) = Z(Q_1) \cap Q_2$。然而，$\Omega(Z(E))Z(Q_1) \leq W(E)$，因此 $Z(Q_1) \cap Q_2 < \Omega(Z(E))Z(Q_1) \cap Q_2 \leq W(E) \cap Q_2 = Z(Q_1) \cap Q_2$，这与此矛盾。

因此，若 $\Omega(Z(E)) \not\leq Z(Q_1)$，则 p 为奇数，且 $Z(Q_1) \cap E = Z(Q_1) \cap Q_2$。由于$E \not\leq Q_1$，我们有 $Z(S) = [Z(Q_1) \cap Q_2, E] \leq \Phi(E)$。若 $E \leq Z(Q_1)Q_2$，则$[Q_1 \cap Q_2, E] \leq Z(S) \leq \Phi(E)$，由引理 2.11 可得 $Q_1 \cap Q_2 \leq E$，矛盾。现在， $E \cap Q_1$ 中心化 $Z(E)Z(Q_1) > Z(Q_1)$，因此也中心化$Z(E)Z(Q_1) \cap Q_2 > Z(Q_1) \cap Q_2$；由引理 2.27，我们有 $E \cap Q_1 \leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$。于是， $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$ 中心化 $(E \cap Q_1)/\Phi(E)$，后者在 $E/\Phi(E)$ 中的指数至多为 q^2；由定理 2.21， $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \cap E$ 在 $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$ 中的指数至多为 q^2。事实上，由于 $Z(Q_1) \cap E = Z(Q_1) \cap Q_2$，我们推得$|E \cap Q_1 \cap Q_2| \geqslant q^4$。但此时，对于任意 $e \in E \setminus Z(Q_1)Q_2$， $|[e, E \cap Q_1 \cap Q_2]Z(S)| \geqslant q^2$

因此 $\Phi(E) \cap Z(Q_1)$ 的阶至少为 q^2。再次应用定理 2.21，这次我们有 $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \cap E$ 在 $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$ 中的指数至多为 q，且 $|N_S(E)/E| \leqslant q$。由于 $Z(Q_1) \cap E = Z(Q_1) \cap Q_2$，$N_S(E) = Z(Q_1)E$，因此$N_S(E)$ 中心化 $\Omega(Z(E))$。但此时，$Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \leq N_S(E)$，由此我们得出 $\Omega(Z(E)) \leq Z(Q_1)$，这就得到了最终的矛盾。□

引理 4.7. 设 $E \in E(F)$且 $E \neq Q_1$。若 $\Omega(Z(E)) \neq Z(S)$，则 p为奇数，且 $Z(Q_1) \cap E = Z(Q_1) \cap Q_2$。

证明。下文始终假设 $|\Omega(Z(E))| = q^2$。先假设 $p = 2$。则$J(Q_1) = Z(Q_1)$，并且由于 $\Omega(C_{Q_1}(J(Q_1))) \leq J(Q_1)$，我们有 $\Omega(Q_1) = Z(Q_1)$。现在，$[Z(Q_1)\ E] = \Omega(Z(E))$，因此由引理 2.13，$Z(Q_1) \leq E$。令 $A \in \mathsf{A}(E)$。则 $A \cap Q_1 \leq \Omega(C_{Q_1}(J(Q_1))) = Z(Q_1)$。然而，$A$ 中心化了 $Z(Q_1)$的一个子群，其阶至少为 q^3，由引理 2.23，我们有 $A \leq Q_1$ 和 $A = Z(Q_1)$。因此，$J(E) = Z(Q_1)$。由于 $Q_1 \cap Q_2$ 中心化了链 $\{1\} \trianglelefteq J(E) \trianglelefteq E$，由引理 2.13，$Q_1 \cap Q_2 \leq E$ 且 $E \trianglelefteq S$。于是 Q_1 中心化了链 $\{1\} \trianglelefteq J(E) \trianglelefteq C_E(J(E)) = E \cap Q_1 \trianglelefteq E$且 $Q_1 \leq E$。此外，Q_1是 E的特征子群，因此 $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) = J(E)[E, Q_1]$ 也是 E的特征子群。接着，S中心化了链 $J(E) \trianglelefteq J(E)[E, Q_1] \trianglelefteq Q_1 \trianglelefteq E$，并且由于 $J(E) = \Phi(Q_1) \leq \Phi(E)$，由引理 2.13 得出矛盾。

因此，若 $|\Omega(Z(E))| = q^2$，则 p 为奇数。为导出矛盾，假设 $Z(Q_1) \cap E > Z(Q_1) \cap Q_2$。若 $[Z(Q_1) \cap E, x, x] = \{1\}$，其中 $x \in E$ 如此，则由引理 2.23 可知 $x \in Q_1$，从而 $[Z(Q_1) \cap E, x] = \{1\}$。因此，$Z(Q_1) \cap E \leq W(E)$，又因为 $W(E)$ 是初等阿贝尔群，我们推得 $W(E) \leq E \cap Q_1$。于是 $Z(Q_1)$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq W(E) \trianglelefteq E$，并且有 $Z(Q_1) \leq W(E)$。若 $W(E) \not\leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$，则由引理 2.27 可推得 $W(E) \cap Q_2 = C_{Q_2}(W(E)) = Z(Q_1) \cap Q_2$；又由于 $E \cap Q_1 \cap Q_2$ 在 $W(E)$ 上二次作用，我们推知 $E \cap Q_1 \cap Q_2 = Z(Q_1) \cap Q_2$。于是 $[E, Q_1 \cap Q_2] \leq W(E)$，且 $Q_1 \cap Q_2$ 中心化 $Z(Q_1)$，后者在 $W(E)$ 中的指数至多为 q，由定理 2.21 得出矛盾。

因此，$Z(Q_1) \leq W(E) \leq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$，从而 $Q_1 \cap Q_2$ 中心化链 $1 \trianglelefteq Z(E) \trianglelefteq W(E) \trianglelefteq E, Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \leq E$ 和 $E \trianglelefteq S$。现在，$Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$ 由阶为 q^5 的初等阿贝尔子群生成，因此 $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \leq J(E)$。注意，对任意 $A \in \mathsf{A}(S)$，$A \not\leq Q_1$ 可推出 $|(A \cap Q_1)Z(Q_1)| = |A \cap Q_1||Z(Q_1)|/|A \cap Z(Q_1)| \geqslant |A||Z(Q_1)|/q^3 > |A|$，因此 $J(S) = Q_1$ 且 $J(E) \leq E \cap Q_1$。由于 $Z(Q_1) = Z(Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2))$，我们有 $Z(Q_1) = Z(J(E))$ 是 E 的特征子群，$E \cap Q_1 = C_E(Q_1)$ 是 E 的特征子群，并且 Q_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq E \cap Q_1 \trianglelefteq E$，因此 Q_1 是 E 的特征子群。于是，$Z(Q_1) \cap Q_2 = Z(E)[Z(Q_1)\ E]$、$Z(S) = [Z(Q_1) \cap Q_2$、$E]$ 和 $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) = [E, Q_1]Z(J(E))$ 都是 E 的特征子群，且 S 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(S) \trianglelefteq Z(Q_1) \cap Q_2 \trianglelefteq Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \trianglelefteq E$，这就导致矛盾。□

命题 4.8. 假设 $E \in E(F)$。那么 $\Omega(Z(E)) = Z(S)$或者 $E = Q$ 1.

证明。下文中，我们假设 $\Omega(Z(E)) \neq Z(S)$ 且 $E \not\leq Q_1$。由引理 4.7，得$|\Omega(Z(E))| = q^2$, p 为奇数，且 $Z(Q_1) \cap E = Z(Q_1) \cap Q_2$。于是 $Z(Q_1)$ 中心化 $E \cap Q_1$ 在 E 中的指数为 q 的子群，因此由定理 2.21，$N_S(E) = Z(Q_1)E$且 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$。若 $Q_1 \cap Q_2 \leq E$，则 $[Q_2, E] \leq Q_1 \cap Q_2 \leq E$且

$Q_2 \le N_S(E)$。但 $Q_2 \le N_S(E) = EZ(Q_1)$ 中心化 $\Omega(Z(E)) > \Omega(Z(S))$，这就产生了矛盾。因此，$Q_1 \cap Q_2 \not\le E$。类似地，若 $E \le Q_2$，则 $Q_2 \le N_S(E)$，由此得到类似的矛盾。因此，我们有 E 是极大本质的；又因 E 是可接受的，应用 Alperin–Goldschmidt 定理，$N_{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)}(\mathrm{Aut}_S(E))$ 中的任意p'-自同构都可提升为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 中的态射。限制到 E 后，所有此类态射都正规化 $\mathrm{Aut}_{Q_1\cap Q_2}(E)$，且由于 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$，$N_S(E) = E(Q_1 \cap Q_2)$。

设 $\widehat{t}$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)$ 中的一个非平凡对合，其在 $Z(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$ 中有像。于是，$\widehat{t}$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 中某个元素在 E 上的限制。由于 $N_S(E) = Z(Q_1)E$ 中心化 $\Omega(Z(E))$，我们推得 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 对 $\Omega(Z(E))$ 平凡作用，因此 t 对 $\Omega(Z(E))$ 平凡作用。于是 $[Z(Q_1)\ E]\Omega(Z(E))/\Omega(Z(E)) = (Z(Q_1)\cap Q_2)\Omega(Z(E))/\Omega(Z(E))$ 的阶为 q，且被 t 取逆。出于类似原因，$E/E\cap Q_1$ 被 t 取逆，而 $(E\cap Q_1)/(Z(Q_1)\cap Q_2)$ 被 t 中心化。此外，t 中心化 $\mathrm{Aut}_S(E) \cong N_S(E)/E \cong Z(Q_1)/Z(Q_1)\cap E$，由此我们推断 t 中心化 $Z(Q_1)(E\cap Q_1)/Z(Q_1)\cap Q_2 = (N_S(E)\cap Q_1)/Z(Q_1)\cap Q_2$。令 C 为 Q_1 中 $C_{Q_1/Z(Q_1)}(t)$ 的原像。则 $[\mathrm{C}\ t,\ \mathrm{C}] = \{1\}$，由三子群引理，$t$ 中心化 $[\mathrm{C},\ \mathrm{C}]$。但是 $Q_1\cap Q_2 \le \mathrm{C}$ 且 $[t, Z(Q_1)\cap Q_2] \ne \{1\}$，因此由引理 2.27，我们推得 $\mathrm{C} \le Z(Q_1)(Q_1\cap Q_2)$，从而 $Q_1/Z(Q_1)(Q_1\cap Q_2)$ 被 t 取逆。然而，此时 $[t, Q_1\cap Q_2, Q_1] = \{1\}$，$[Q_1, Q_1\cap Q_2, t] = [Z(Q_1)\cap Q_2,\ t]$ 的阶为 q，且被 Q_1、$Q_1\cap Q_2$ 和 t 归一化；由三子群引理，$[Q_1, t, Q_1\cap Q_2]$ 的阶为 q。但 $[Q_1, t] \not\le Z(Q_1)(Q_1\cap Q_2)$，由引理 2.27 得到矛盾。□

如前所述，我们现在完成对 $\mathcal{F}$ 的所有可能本质子群的确定。

命题 4.9. 假设 $E \in E(F)$。那么 $E \in \{Q_1, Q_2\}$。

证明。为导出矛盾，我们最终假设 $Q_1 \ne E \ne Q_2$。由命题 4.8，$\Omega(Z(E)) = Z(S)$；若 $E \le Q_2$，则引理 2.13 蕴含 $E = Q_2$，因此在证明余下部分中，我们假设 $Q_1 \not\ge E \not\le Q_2$。令$Z^E$ 为 E 中 $Z(E/\Omega(Z(E)))$ 的原像；这是 E 的一个特征子群。于是$Z(Q_1)\cap Q_2 \le Z^E$ 且 $C_E(Z^E) \le E\cap Q_1$

假设 $Z^E \not\le Z(Q_1)Q_2$，则由引理 2.27 可得 $E\cap Q_2 = Z(Q_1)\cap Q_2$。由于$Q_1\cap Q_2 \le N_S(E)$，且 $Q_1\cap Q_2$ 模 $\Omega(Z(E))$ 中心化 $E\cap Z(Q_1)Q_2$，应用定理 2.21 可得 $S = EZ(Q_1)Q_2$。但这样一来，$\Omega(Z(E)) \ge [E, Z^E] \not\le Q_2$，矛盾。

因此，$Z^E \le Z(Q_1)Q_2$。于是，$[Z^E, Q_1\cap Q_2] \le \Omega(Z(E))$，且 $Q_1\cap Q_2$ 中心化链$\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \trianglelefteq Z^E \trianglelefteq E$，由此我们推出 $Q_1\cap Q_2 \le E$。此外，Q_2 正规化 E。若 $Z^E \not\le Q_2$，则由引理 2.27 得 $E\cap Q_2 = Q_1\cap Q_2$，从而 $|Q_2E/E| = q^2$。当 $p = 2$时，我们应用命题 2.33；当 p为奇数时，我们利用$[E, Q_2, Q_2] \le \Omega(Z(E))$和命题 2.34，从而 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$是拟单群。然而，$Z^E\cap Q_2$ 在 Z^E 中的指数至多为 q，且 Q_2 在模 $\Omega(Z(E))$ 意义下中心化它，因此由定理 2.21，$O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$对$Z^E$平凡作用。于是可得，$Q_2E$ 中心化 $Z^E/\Omega(Z(E))$，而引理 2.27 导致矛盾。

因此， $Z^E \leq Q_2$，又由于 $E \not\leq Q_2$，我们有 $Z^E \leq Q_1 \cap Q_2$，从而 $Z(Q_1) \cap E \leq C_E(Z^E) \leq E \cap Q_1$。于是， $Z(Q_1)$中心化链{1} $\trianglelefteq C_E(Z^E) \trianglelefteq E$，我们由此推出 $Z(Q_1) \leq E$ 且 $E \trianglelefteq S$。现在，若 $E \leq Z(Q_1)Q_2$，则 $Z^E = Q_1 \cap Q_2$，且 $Z(Z^E) = Z(Q_1) \cap Q_2$ 是 E中的特征子群。但此时， Q_1 中心化链{1} $\trianglelefteq Z(Q_1) \cap Q_2 \trianglelefteq Q_1 \cap Q_2 \trianglelefteq E$，因此由引理 2.13 得 $Q_1 \leq E$；这与 $E \leq Z(Q_1)Q_2$矛盾。故 $E \not\leq Z(Q_1)Q_2$，并且我们得出$Z^E = Z(Q_1) \cap Q_2$ 且 $C_E(Z^E) = E \cap Q_1$。由于 $Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2) \leq E \cap Q_1$ 且$Z(Q_1) = Z(Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2))$，我们有 $Z(Q_1) = Z(C_E(Z^E))$是 E中的特征子群，且 Q_1中心化链{1} $\trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq E \cap Q_1 \trianglelefteq E$。因此， $Q_1 = E \cap Q_1$是 E的特征子群。于是 $E \not\leq Q_1$，从而 $Z(Q_1)[E, Q_1] = Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$也是 E中的特征子群。最后， S 中心化这条链

$$\{1\} \trianglelefteq \Omega(Z(E)) \trianglelefteq Z^E \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq Z(Q_1)[E, Q_1] \trianglelefteq Q_1 \trianglelefteq E$$

而引理 2.13 给出了最终的矛盾。 □

在对以 S为支撑的饱和融合系统进行分类时，当 Q_1 和 Q_2 均为本质子群时，我们使用定理 2.37 应用推论 2.40；与之前的情形一样，我们指出，这归结为应用 [DS85]中的主要结果。此外，我们无需依赖有限单群分类，即可计算融合系统中的局部作用。由此得到以下定理，该定理不依赖任何$\mathcal{K}$群假设。

定理 4.10。 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 *Sylow* p-子群上的饱和融合系统$\mathrm{PSU}_5(p^n)$。则以下情形之一成立：

(i) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(S : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S))$; (ii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(Q_1 : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$，其中 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)) \cong \mathrm{SL}_2(p^n)$; (iii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(Q_2 : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$，其中 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{(P)SU}_3(p^n)$; 或 (iv) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$，其中 $F^*(G) = O^{p'}(G) = \mathrm{PSU}_5(p^n)$】【。

证明。若 $\mathrm{E}(\mathcal{F}) = \emptyset$则结论 (i) 成立。若 $Q_1 \in \mathrm{E}(\mathcal{F})$，则 S中心化$Z(Q_1)(Q_1 \cap Q_2)$ 模 $Z(Q_1) = \Phi(Q_1)$，且由定理 2.21 可知， $Q_1/\Phi(Q_1)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)) \cong \mathrm{SL}_2(q^2)$ 的自然模。于是，由于 $\mathrm{Out}_S(Q_1)$ 在 $Z(Q_1)$ 上非平凡作用，我们有 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 非平凡作用；再结合引理 2.30，并利用 $\mathrm{Out}_S(Q_1)$ 在 $Z(Q_1)$ 上不作二次作用，可推得 $Z(Q_1)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)) \cong \mathrm{SL}_2(q^2)$ 的自然 $\Omega_4^-(q)$-模，且 $Z(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)))$ 在其上平凡作用。若 $Q_2 \notin \mathrm{E}(\mathcal{F})$，则结论 (ii) 成立。

因此，我们可以假设 $Q_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$。先设 $p = 2$。我们应用命题 2.33，并利用 S/Q_2 同构于 $\mathrm{PSU}_3(q)$ 的一个 Sylow 2-子群这一事实，推得以下两种情况之一： $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{(P)SU}_3(q)$，或者 $q = 2$ 且 $\mathrm{Out}_S(Q_2) \cong Q_8$。在后一种情况下，我们借助 MAGMA 找出 $\mathrm{GL}_6(2)$ 中的子群列表，其中这些子群的 Sylow 2-子群同构于 Q_8，并且其作用方式与 $\mathrm{Out}_S(Q_2)$ 在一个阶为 2^6 的群上的作用方式相同。此时也有 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{SU}_3(2)$。

现在假设 p 是奇数。则 $Z(Q_1)$ 在 Q_2 上以二次方式作用，因此 $\mathrm{Out}_{Z(Q_1)}(Q_2)$ 在 Q_2 上是二次的。为了应用命题 2.34，我们需要证明

$\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)$ 的 $\mathrm{Syl}_p(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 是一个 TI-集。为此，我们反设存在 $1 \neq s \in T \cap R$，其中 T 和 R 是 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)$ 的两个不同的 Sylow p- 子群。根据引理 2.27，$|C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(s)| \in \{q^2, q^4\}$。

若 $|C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(s)| = q^4$ 则 $s \in Z(T) \cap Z(R)$，由引理 2.27 得出。然后

$$C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(Z(T)) = C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(s) = C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(Z(R))$$

and

$$[Q_2/\Phi(Q_2), Z(T)] = [Q_2/\Phi(Q_2), s] = [Q_2/\Phi(Q_2), Z(R)].$$

因此，由引理 2.27，$\langle T, R\rangle$ 中心化这条链

$$\{1\} \trianglelefteq [Q_2/\Phi(Q_2), s] \trianglelefteq C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(s) \trianglelefteq Q_2/\Phi(Q_2)$$

而引理 2.13 得出，$\langle T, R\rangle$ 是一个 p-群。由于 T 和 R 是不同的 Sylow$p$-子群，这就产生了矛盾。

若 $|C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(s)| = q^2$ 则 $s \in (T \setminus Z(T)) \cap (R \setminus Z(R))$，且

$$[Q_2/\Phi(Q_2), T] = [Q_2/\Phi(Q_2), s] = [Q_2/\Phi(Q_2), R]$$

由引理 2.27 得出。然后

$$[Q_2/\Phi(Q_2), T, T] = C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(s) = [Q_2/\Phi(Q_2), R, R]$$

并且$\langle T, R\rangle$ 中心化该链

$$\{1\} \trianglelefteq C_{Q_2/\Phi(Q_2)}(s) \trianglelefteq [Q_2/\Phi(Q_2), s] \trianglelefteq Q_2/\Phi(Q_2)$$

由引理 2.13 可得$\langle T, R\rangle$ 是一个 p-群。由于 T 和 R 是不同的 Sylow p-子群，因此这再次导出矛盾。因此，$\mathrm{Syl}_p(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 是一个 TI-集，并且由于 $\mathrm{Out}_S(Q_2) \cong S/Q_2$ 是非阿贝尔的，根据命题 2.34，我们得出 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong$(P)SU$_3(q)$。若 $\mathcal{E}(\mathcal{F}) = \{Q_2\}$，则结论 (iii) 成立。

为完成证明，我们只剩下 $E(F) = \{Q_1, Q_2\}$ 这一情形。根据 [AKO11，命题 I.4.5]，$O_p(F) \leq Q_1 \cap Q_2$。由于 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 在$Q_2/Z(S)$上不可约作用，我们有 $O_p(F) \leq Z(S)$。但现在，$O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 在 $Z(Q_1)$上不可约作用，且我们有 $O_p(F) = \{1\}$。于是，F 满足推论 2.40 的假设，(iv) 成立，证明完成。□

5. $^3D_4(p^n)$ 的 Sylow p 子群上的融合系统

在最后这一节中，我们对由 $^3D_4(p^n)$ 的 Sylow p 子群支撑的饱和融合系统进行分类，从而完成定理 A 和主定理的证明。全文中，我们固定一个与 $^3D_4(p^n)$ 的 Sylow p 子群同构的 S，并记作 $q = p^n$。

对于 $G := {}^3D_4(p^n)$，我们将 $S \in$ 识别为 $\mathrm{Syl}_p(G)$，并令 $G_1 := N_G(C_S(Z_2(S)))$ 及 $G_2 := N_G(Q)$，其中 Q 是 S 中 $J(S/Z(S))$ 的阶为 q^9 的原像。令 $L_i := O^{p'}(G_i)$，其中 $i \in \{1,2\}$，使得 L_1 的形状为 $L_1 \cong q^{2+(1+1+1)+(2+2+2)} : \mathrm{SL}_2(q)$，而 L_2 的形状为 $q^{1+8} : \mathrm{SL}_2(q^3)$。注意，$G_1$ 和 G_2 是包含 $N_G(S)$ 的 G 的唯一极大抛物子群。我们记 $Q_i := O_p(L_i) = O_p(G_i)$，使得 $Q_1 = C_S(Z_2(S))$ 和 $Q = Q_2$ 是 S 的特征子群。

我们综合运用第 2 节中的技巧，以及 [Kor15a] 和[ABS90] 关于 L_1 的主列结构，以及 L_2，以及某些

S 的子群。我们重点介绍本研究所需的主要特征，这些特征可以根据这些信息计算得出。

命题 5.1。以下结论成立：

(i) $|S| = q^{12}$；*(ii)* $S' = \Phi(S) = Q_1 \cap Q_2$；*(iii)* $m_p(S) = 5n$；*(iv)* $Z(S) = Z(Q_2)$ 的阶为 q；*(v)* $Z_2(S) = Z(Q_1)$ 是阶为 q^2 的初等阿贝尔群；*(vi)* $\Phi(Q_1) = Z_3(S)$ 是阶为 q^5 的初等阿贝尔群；*(vii)* $C_S(\Phi(Q_1)/Z(S)) = Q_2$；以及 *(viii)* 若 $p = 2$ 且 $x \in S$ 满足 $x^2 = 1$，则 $x \in Q_1 \cup Q_2$。

命题 5.2。以下结论成立：

(i) $|Q_1| = q^{11}$；*(ii)* $|\Phi(Q_1)| = q^5$，$\Phi(Q_1) \in A(S)$ 和 $Q_1/\Phi(Q_1)$ 是 $L_1/Q_1 \cong SL_2(q)$ 的三个自然模的直和；*(iii)* $|Z(Q_1)| = q^2$，$\Phi(Q_1)/Z(Q_1)$ 被 L_1 中心化，且 $Z(Q_1)$ 是 $L_1/Q_1 \cong SL_2(q)$ 的自然模；*(iv)* $\Phi(Q_1) = [Q_1, Q_1]$ 且 $Z(Q_1) = [\Phi(Q_1)\ Q_1]$；*(v)* Q_2 是阶为 q^9的半超特殊群；以及 *(vi)* $Q_2/Z(S)$ 是 $L_2/Q_2 \cong SL_2(q^3)$ 的三元性模。

我们首先确定 S 的某些 p-子群的中心化子的结构，以便于后续论证。

引理 *5.3.* 设 $A \leq Q_1$，并令 $b \in Q_1 \setminus \Phi(Q_1)$。则 $|C_{\Phi(Q_1)}(A)| \in \{q^2, q^3, q^4, q^5\}$，$|C_{\Phi(Q_1)}(b)| = q^4$ 且 $|[b, \Phi(Q_1)]| = q$。此外，若 $|C_{\Phi(Q_1)}(A)| = q^2$，则 $C_{\Phi(Q_1)}(A) = Z(Q_1)$；若 $|C_{\Phi(Q_1)}(A)| = q^5$，则 $A \leq \Phi(Q_1)$。

证明. 令 $b \in Q_1 \backslash \Phi(Q_1)$。则存在 $x \in L_1$ 使得 $b^x \leq Q_1 \cap Q_2$。此外，由于 $Z(Q_1) \leq C_{\Phi(Q_1)}(b) \cap C_{\Phi(Q_1}(b^x)$，且 L_1 在 $\Phi(Q_1)/Z(Q_1)$ 上平凡作用，我们推得 $C_{\Phi(Q_1)}(b) = C_{\Phi(Q_1)}(b^x)$。现在，映射 $\phi_{b^x} : \Phi(Q_1) \to \Phi(Q_1)$，其中 $q\phi_{b^x} = [q, b^x]$，是一个核为 $C_{\Phi(Q_1)}(b^x)$ 的同态。由于 $\Phi(Q_1) \in \mathrm{A}(S)$ 且 $b^x \leq Q_2 \setminus \Phi(Q_1)$，由引理 2.36 可知 $\mathrm{Im}(\phi_{b^x}) = [b^x, \Phi(Q_1)] = Z(S)$ 的阶为 q，因此 $|C_{\Phi(Q_1)}(b^x)| = q^4$。

现在，令 $A \leq Q_1$ 使得 $Z(Q_1) \leq C_{\Phi(Q_1)}(A)$。事实上，若 $|C_{\Phi(Q_1)}(A)| = q^2$，则 $C_{\Phi(Q_1)}(A) = Z(Q_1)$。由于 $\Phi(Q_1)$ 在 Q_1 中是阿贝尔且自中心化的，$C_{\Phi(Q_1)}(A) = \Phi(Q_1)$ 当且仅当 $A \leq \Phi(Q_1)$。因此，为完成证明，我们可以假设存在 $a \in A \setminus (A \cap \Phi(Q_1))$。于是 $C_{\Phi(Q_1)}(A) \leq C_{\Phi(Q_1)}(a)$，且 $C_{\Phi(Q_1)}(a)$ 的阶为 q^4。我们断言，对于 a，$a' \in A$ 要么 $C_{\Phi(Q_1)}(a) = C_{\Phi(Q_1)}(a')$，要么 $|C_{\Phi(Q_1)}(a) \cap C_{\Phi(Q_1)}(a')| = q^3$。令 a'^x 为 $Q_1 \cap Q_2$ 中 a' 的一个 L_1 共轭元，使得 $C_{\Phi(Q_1)}(a') = C_{\Phi(Q_1)}(a'^x)$。根据 Q_2 的性质，若 $[C_{\Phi(Q_1)}(a)\ a'^x] < Z(S)$，则 $[C_{\Phi(Q_1)}(a)\ a'^x] = \{1\}$，且 $C_{\Phi(Q_1)}(a) = C_{\Phi(Q_1)}(a')$。否则，运用交换同态的论证可推出 $|C_{C_{\Phi(Q_1)}(a)}(a'^x)| = q^3$，从而断言成立。因此，若 $|C_{\Phi(Q_1)}(A)| < q^4$，则 $|C_{\Phi(Q_1)}(A)| \leqslant q^3$。再取另一个元素 $\hat{a}$ 和一个 L_1-共轭元 $\hat{a}^x \in Q_1 \cap Q_2$，并应用交换

同态于 $C_{\Phi(Q_1)}(a)\cap C_{\Phi(Q_1)}(a')$，我们可推出 $|C_{\Phi(Q_1)}(a)\cap C_{\Phi(Q_1)}(a')\cap C_{\Phi(Q_1)}(\widehat{a})|\in\{q^2,\ q^3\}$，于是关于 $C_{\Phi(Q_1)}(A)$ 的结论便得证。□

引理 *5.4.* 设 $a\in Q_1\setminus\Phi(Q_1)$，并令 $D:=C_{\Phi(Q_1)}(a)$。那么 $|C_{Q_1}(D)|=q^7$,$C_{Q_1}(D)/\Phi(Q_1)$ 是 $O^{p'}(Out_{L_1}(Q_1))\cong SL_2(q)$ 的自然 $SL_2(q)$-模，$D=Z(C_{Q_1}(D))$；若 $p=2$，则 $\Phi(C_{Q_1}(D))=Z(Q_1)$。

证明. 取上述的 a 和 D。于是 $[a,D]=\{1\}$，并且由于 D 被 L_1 归一化，$[\mathrm{h}a^{L_1}\mathrm{i}\ D]=\{1\}$。由于 $Q_1/\Phi(Q_1)$ 是三个 L_1/Q_1 的自然 $\mathrm{SL}_2(q)$-模的直和，我们有 $\Phi(Q_1)\mathrm{h}a^{L_1}\mathrm{i}$ 的阶为 q^7，且中心化 D。若 $|C_{Q_1}(D)|>q^7$，则对某个属于 $C_{Q_1}(D)\setminus\mathrm{h}a^{L_1}\mathrm{i}\Phi(Q_1)$ 的 b，我们运用相同论证来扩张 $C_{Q_1}(D)$。由此可得 $|C_{Q_1}(D)|\geqslant q^9$。但如引理 5.3 中所论证的，此时有 $|D\cap C_{\Phi(Q_1)}(c)|\geqslant q^3$，其中某个 c 满足 $\mathrm{h}c^{L_1}\mathrm{i}C_{Q_1}(D)=Q_1$，从而 $Z(Q_1)=D\cap C_{\Phi(Q_1)}(c)$，这就产生了矛盾。因此，$|C_{Q_1}(D)|=q^7$ 且 $C_{Q_1}(D)\trianglelefteq L_1$。事实上，由引理 2.30，$C_{Q_1}(D)/\Phi(Q_1)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_L(Q_1))\cong\mathrm{SL}_2(q)$ 的自然 $\mathrm{SL}_2(q)$-模。由于 $\Phi(Q_1)$ 在 Q_1 中是自中心化的，我们推得 $D\leq Z(C_{Q_1}(D))\leq\Phi(Q_1)$，因此 $D=Z(C_{Q_1}(D))$。

根据 Q_2 的性质，如引理 2.36 中所述，$C_{Q_1\cap Q_2}(D)'=Z(S)$，且由于 $\Phi(C_{Q_1}(D))\trianglelefteq L_1$，$Z(Q_1)\leq\Phi(C_{Q_1}(D))$。假设 $p=2$。由于 Q_2 对 L_2/Q_2 不可约，我们有 $\Omega(Q_2)=Q_2$，由此可推得 $C_{Q_1}(D)\setminus\Phi(Q_1)$ 中存在对合。于是，对于 A 中包含 $Z(Q_1)$ 的 $\Phi(Q_1)$ 的任意极大子群，我们有 $C_{Q_1}(D)/A$ 或为特型，或为初等阿贝尔。若所有此类 A 都使 $C_{Q_1}(D)/A$ 为初等阿贝尔，则 $\Phi(C_{Q_1}(D))=Z(Q_1)$，因此我们假设存在 B，使得 $C_{Q_1}(D)/B$ 为特型。由于 L_1 在 $C_{Q_1}(D)/B$ 上有非平凡作用，且 $C_{Q_1}(D)\setminus\Phi(Q_1)$ 中存在阶为 2 的元素，根据 [DS85, (5.13)]，这就产生了矛盾。□

引理 5.5. 设 $x\in S\setminus Q_2$。则以下两种情况之一成立：

> ***(i)*** $p=2$, $|C_{Q_2/Z(S)}(x)|=q^4$, $|C_{\Phi(Q_1)/Z(S)}(x)|=q^3$，并将 D 记为 $\Phi(Q_1)$ 中 $C_{\Phi(Q_1)/Z(S)}(x)$ 的原像，则 $C_{Q_2/Z(S)}(x)\leq C_{Q_1\cap Q_2}(D)/Z(S)$；或 ***(ii)*** p 为奇数，$|C_{Q_2/Z(S)}(x)|=q^3$ 且 $C_{Q_2/Z(S)}(x)\leq\Phi(Q_1)/Z(S)$。

证明。由 [PR12，引理 3.14 (iii)], ，可知当 $p=2$ 时，$|C_{Q_2/Z(S)}(x)|=q^4$；当 p 为奇数时，$|C_{Q_2/Z(S)}(x)|=q^3$。由于 $S=Q_1Q_2$，对于某个满足 $i\in\{1,2\}$ 的 $q_i\in Q_i$，有 $x=q_1q_2$。此外，由于 $[q_2,Q_2]\leq[Q_2,Q_2]=Z(S)$，必有 $C_{Q_2/Z(S)}(x)=C_{Q_2/Z(S)}(q_1)$；根据引理 5.3，$|C_{\Phi(Q_1)/Z(S)}(q_1)|\geqslant q^3$。由于 $C_S(\Phi(Q_1)/Z(S))=Q_2$，可得 $|C_{\Phi(Q_1)/Z(S)}(q_1)|=q^3$。由于 $\Phi(Q_1)\leq Q_2$，当 p 为奇数时，我们推出 $C_{Q_2/Z(S)}(x)=C_{\Phi(Q_1)/Z(S)}(x)\leq\Phi(Q_1)/Z(S)$，此时结论成立。若 $p=2$，则将 D 记为 $\Phi(Q_1)$ 中 $C_{\Phi(Q_1)/Z(S)}(x)$ 的原像，可得 $[x,C_{Q_1}(D)]\leq Z(Q_1)$。特别地，$[x,C_{Q_1\cap Q_2}(D)]\leq Z(Q_1)$；又由于 $|C_{Q_1\cap Q_2}(D)|=q^6$ 且 $|Z(Q_1)|=q^2$，我们推出 $|C_{C_{Q_1\cap Q_2}(D)/Z(S)}(x)|=q^4$。又由于 $|C_{Q_2/Z(S)}(x)|=q^4$，我们推出 $C_{Q_2/Z(S)}(x)\leq C_{Q_1\cap Q_2}(D)/Z(S)$。事实上，$C_{Q_1\cap Q_2}(D)/Z(S)=C_{Q_2/Z(S)}(x)(\Phi(Q_1)/Z(S))$

□

上述信息足以确定 S上的饱和融合系统的所有潜在本质子群，我们将在命题 5.18中完成这一工作。

现在我们将注意力转向这一工作，为假定的$\mathcal{F}$的本质子群提供若干结构特征。

命题 5.6. 设 F 是一个支撑于 S 的饱和融合系统，且 $E \in E(F)$。若 $E \leq Q_2$，则 $E = Q_2$。

证明。设 $E \leq Q_2$。由于 $\Omega(Z(S)) = \Phi(Q_2) \leq E$，我们有 $E \trianglelefteq Q_2$，且 $\Phi(E) \leq \Omega(Z(S))$。首先假设 E 是初等阿贝尔群。由命题 5.1，$|E| \leqslant q^5$ 且 $|N_{Q_2}(E)/E| \geqslant q^4$。由于 $[Q_2, E] \leq [Q_2, Q_2] = \Omega(Z(S))$，将定理 2.21 应用于作为 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$-模的 E，得到矛盾。因此，E 不是初等阿贝尔群。

若 $\Phi(E) < \Omega(Z(S))$，则存在 $\Omega(Z(S))$ 的一个包含 $\Phi(E)$ 的极大子群 A，使得 Q_2/A 是特型群，且 E/A 是初等阿贝尔群。因此，由引理 2.36，$|E/A| \leqslant p^{1+4n}$，从而 $|Q_2/E| \geqslant q^4$。由于 $|[E/\Phi(E)\ Q_2]| \leqslant \Omega(Z(S))/\Phi(E)$ 的阶严格小于 q，将定理 2.21 应用于 $E/\Phi(E)$，得到矛盾。

因此，我们有 $\Phi(E) = \Omega(Z(S))$，且 Q_2 将链 $\{1\} \trianglelefteq \Phi(E) \trianglelefteq E$ 中心化，因此由引理 2.13，$E = Q_2$。□

引理 *5.7.* 假设 F 是一个定义在 S 上的饱和融合系统，且 $E \in E(F)$。若 $Z(E) \not\leq Q_2$ 且 $Z(Q_1) \leq E$，则 $Z(Q_1) \leq \Omega(Z(E)) \leq E \leq Q_1$，$|E \cap \Phi(Q_1)| = q^4$，并且 $\Omega(Z(E))(E \cap \Phi(Q_1)) \in A(E) \subseteq A(S)$。

证明。假设 $Z(E) \not\leq Q_2$，且 $Z(Q_1) \leq E$。显然，我们有 $Q_1 \neq E \neq Q_2$。于是 $[E, \Phi(Q_1)] \leq [S, \Phi(Q_1)] = Z(Q_1) \leq E$，从而 $\Phi(Q_1) \leq N_S(E)$。现在，$Z(E) \cap Z(Q_1) \geq [Z(E)\ \Phi(Q_1)]Z(S) > Z(S)$，由此可得 $E \leq Q_1$，且 $Z(Q_1) \leq Z(E)$。由于 $C_S(\Phi(Q_1)) = \Phi(Q_1)$ 且 $Z(E) \not\leq Q_2$，我们推出 $\Phi(Q_1) \not\leq E$。注意，$E \cap \Phi(Q_1) \leq C_{\Phi(Q_1)}(Z(E))$；又由于 $[E, \Phi(Q_1)] \leq Z(Q_1) \leq Z(E)$，$C_{\Phi(Q_1)}(Z(E))$ 将链 $\{1\} \trianglelefteq Z(E) \trianglelefteq E$ 中心化，因此 $E \cap \Phi(Q_1) = C_{\Phi(Q_1)}(Z(E))$。于是，由引理 5.3，$|E \cap \Phi(Q_1)| \in \{q^2, q^3, q^4\}$。

若 $|E \cap \Phi(Q_1)| \leqslant q^3$，则 $|N_S(E)/E| \geqslant |\Phi(Q_1)E/E| \geqslant q^2$。由于 $|[\Phi(Q_1)\ E]| \trianglelefteq Z(Q_1)| = q^2$，应用定理 2.21 可得 $|E \cap \Phi(Q_1)| = q^3$，$N_S(E) = \Phi(Q_1)E$ 以及 $\Phi(E) \cap Z(Q_1) = \{1\}$。注意到 $[C_E(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))\ \Phi(Q_1)] = \{1\}$，因此 $C_E(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))) \leq C_S(\Phi(Q_1)) = \Phi(Q_1)$。令 $e \in [E, O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))] \setminus (E \cap \Phi(Q_1))$。事实上，我们可以选择 e，使其属于 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)$ 在 E 中唯一的非中心主因子的原像，并满足对任意 $x \in \Phi(Q_1) \setminus (E \cap \Phi(Q_1))$，都有 $[e, x] \neq \{1\}$。但根据引理 5.3，$|C_{\Phi(Q_1)}(e)| = q^4$，这与 $|E \cap \Phi(Q_1)| = q^3$ 矛盾。

因此，我们有 $|E \cap \Phi(Q_1)| = q^4$。注意到 $[\Phi(Q_1)\ E] \leq Z(Q_1) \leq \Omega(Z(E))$，因此 $\Omega(Z(E))$ 包含 E 中 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 的所有非中心主因子。现在，$A := \Omega(Z(E))(E \cap \Phi(Q_1))$ 是初等阿贝尔群，因此其阶至多为 q^5。但是 $\Phi(Q_1)$ 中心化 $\Omega(Z(E)) \cap \Phi(Q_1)$，应用定理 2.21 可得 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$，且 $|\Omega(Z(E))/(\Omega(Z(E)) \cap \Phi(Q_1))| = q$，因此 $|A| = q^5$，$m_p(E) = m_p(S) = 5n$ 且 $A \in \mathrm{A}(E) \cap \mathrm{A}(S)$。□

为了证明 $E \in \{Q_1, Q_2\}$，我们假设 E 是 $\mathcal{F}$ 的一个极大选取的本质子群，使得 $Q_1 \neq E \neq Q_2$。根据命题 5.6，$E \not\leq Q_2$，因此要么 E 是极大本质的，要么 $E \leq Q_1$ 且 $Q_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$。

引理 5.8. 设 F 是支撑在 S 上的饱和融合系统。若$Z(E) \not\leq Q_2$，则 p 为奇数，$E = \Omega(Z(E))$，$E \cap Z(Q_1) = Z(S)$，$S = EQ_1$ 且$N_S(E) = EZ(Q_1)$。

证明。首先，假设 $Z(Q_1) \leq E$，并令 $A = \Omega(Z(E))(E \cap \Phi(Q_1))$，从而由引理 5.7 得到 $A \in \mathrm{A}(S)$。此外，$Z(Q_1) \leq \Omega(Z(E)) \leq E \leq Q_1$且 $|E \cap \Phi(Q_1)| = q^4$。假设 p 为奇数。注意，由引理 5.5，$E \cap Q_2/Z(S) \leq C_{Q_2/Z}(s)(\Omega(Z(E))) \leq \Phi(Q_1)/Z(S)$。由于 $|\Omega(Z(E))\Phi(Q_1)/\Phi(Q_1)| = q$，我们得出 $C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1)) = \Omega(Z(E))C_{Q_1 \cap Q_2}(E \cap \Phi(Q_1))$。

如果 $Q_1 \in \mathrm{E}(\mathrm{F})$，那么 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 的 p'-元必然忠实地作用于 $\Phi(Q_1)$（这可由三子群引理推出）；又由于 $[S, \Phi(Q_1)] \leq Z(Q_1)$，我们推得 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 忠实地作用于 $Z(Q_1)$，而定理 2.21 表明 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$。于是 $E \cap \Phi(Q_1)$ 被 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 正规化，$C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1))/\Phi(Q_1)$ 也同样如此。事实上，根据 $C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1))/\Phi(Q_1)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 的自然模（由定理 2.21），且 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 在此作用下传递于阶为 q 的子群（由引理 2.20），我们推知存在 $\alpha \in O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1))$，使得 $\Omega(Z(E))\alpha \leq Q_2$，但 $\Omega(Z(E)) \not\leq \Phi(Q_1)$。于是$[E\alpha, \Omega(Z(E))\alpha] = [E, \Omega(Z(E))]\alpha = \{1\}$，应用引理 5.5 可得 $E\alpha \leq Q_2$。然而此时 $Q_2 \leq N_S(E\alpha)$；又因为 E 完全正规化，我们有 $N_S(E) = E\Phi(Q_1)$ 在 S 中的指数至多为 q^3，且包含于 Q_1 中。但是 $N_S(E) \cap Q_2 = \Phi(Q_1)(E \cap Q_2) \leq \Phi(Q_1)$，这就产生矛盾。

因此，我们现在继续假设 $Q_1 \notin \mathrm{E}(\mathrm{F})$，从而 E 是极大本质的。对于阶为 $q-1$ 且正规化 $\mathrm{Aut}_S(E)$ 的 $\beta \in O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$，$\beta$ 可提升为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$ 中的 $\widehat{\beta}$。因此，限制后，β 正规化 $Z(S)$。由于 $E \leq Q_1$，我们有 $\Phi(E) \leq \Phi(Q_1)$；又由于 $N_S(E) = E\Phi(Q_1)$，可推出 $O^p(O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$ 中心化 $\Phi(E)$。此外，$[\Phi(Q_1)\ E] \leq Z(Q_1) \leq \Omega(Z(E))$。令 P_E 为 E 中 $[E/\Phi(E)\ O^p(O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))]$ 的原像，并令 C_E 为 E 中 $C_{E/\Phi(E)}(O^p(O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))))$ 的原像，则有 $P_E \leq \Omega(Z(E))\Phi(E)$ 且 $P_E \cap C_E \leq \Phi(E)$。事实上，由于 $[E, \Phi(Q_1)] \leq Z(Q_1)$，并且 β 也正规化 $Z(Q_1) \cap C_E$，我们推知 $[\Phi(Q_1)\ C_E] \leq Z(Q_1) \cap C_E \leq Z(S)$ 且 $C_E \leq Q_2$。于是 $C_E \leq E \cap Q_2 \leq \Phi(Q_1)$，因此 $E = P_E C_E = \Omega(Z(E))(E \cap \Phi(Q_1))$ 是初等阿贝尔的，且 $E = \Omega(Z(E))$。故 $E = P_E \times C_E$、$|P_E| = q^2$ 和 $|C_E| = q^3$。同样，由于 β 正规化 $Z(S)$，计算可得，要么 $Z(S) \trianglelefteq [E, O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))]$，要么 $Z(S) \leq C_E$。由于 $E \not\leq Q_2$、$[E, \Phi(Q_1)] \neq Z(S)$，且我们有 $Z(S) \leq C_E$。现在，$Z(S) \leq C_E \leq \Phi(Q_1)$，因此 $C_E \trianglelefteq Q_2$。此外，$N_S(E) = E\Phi(Q_1)$，$N_S(E)/C_E \cong T \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{PSL}_3(q))$，且 $Z(N_S(E)/C_E) = Z(Q_1)C_E/C_E$。现在，$C_{Q_1 \cap Q_2}(N_S(E)/Z(Q_1)C_E)$ 正规化 E，因此 $C_{Q_1 \cap Q_2}(N_S(E)/Z(Q_1)C_E) \leq \Phi(Q_1)$。于是 $Q_1 \cap Q_2/\Phi(Q_1)$ 的阶为 q^3，并嵌入 $N_S(E)/C_E$ 的自同构群。根据 PR06，命题 5.3], ，我们得到一个矛盾。

现在假设 $p = 2$。由于 $Z(E) \not\leq Q_2$，由引理 5.5 可得 $E \cap Q_2 \leq C_{Q_1 \cap Q_2}(E \cap \Phi(Q_1))$。事实上，$C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1)) = \Omega(Z(E))C_{Q_1 \cap Q_2}(E \cap \Phi(Q_1))$。令$B$为包含于 $Q_1 \cap Q_2$中的 A的一个 L_1-共轭。由于 $A \cap \Phi(Q_1)$ 被

L_1正规化，我们推得 $B \cap \Phi(Q_1) = A \cap \Phi(Q_1)$ 的阶为 q^4。现在，由引理 5.4，$[A, B] \leq Z(Q_1)$，因此 $[A, B, E] = \{1\}$。此外，$[A, E, B] = [E \cap \Phi(Q_1)\ E,\ B] \trianglelefteq Z(Q_1)\ B] = \{1\}$，由三子群引理可得 $[B, E, A] = \{1\}$。由于 $[B, E] \leq \Phi(Q_1)$，我们有 $[B, E] \leq C_{\Phi(Q_1)}(\Omega(Z(E))) = E \cap \Phi(Q_1)$，因此 $B \leq N_S(E)$。但是现在，$B\Phi(Q_1) \leq N_S(E)$，并且由于 $|N_S(E)/E| = q$ 且 $|\Phi(Q_1)/E \cap \Phi(Q_1)| = q$，必有 $|E \cap B\Phi(Q_1)| = q^5$ 且 $E \cap B\Phi(Q_1) \leq Q_2$。但是 $E \cap B\Phi(Q_1)$ 中心化 A，因此 $\Omega(E \cap B\Phi(Q_1)) \leq C_{B\Phi(Q_1)}(A) = E \cap \Phi(Q_1)$。于是 $\{1\} \neq \mho^1(E \cap B\Phi(Q_1)) \leq Z(S) \cap \mho^1(E)$。若 $E \not\leq C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1))$，则 $|\Phi(E) \cap Z(Q_1)| \geqslant |[E, E \cap \Phi(Q_1)]\mho^1(E) \cap Z(Q_1)| > q$，并且由于 $|\Phi(Q_1)E/E| = q$，定理 2.21 导致矛盾。因此，$E \leq C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1))$，从而 $A = \Omega(Z(E))$。由此我们推得 $E = A$。但是 $A \cap B\Phi(Q_1) = E \cap \Phi(Q_1)$ 的阶为 q^4，矛盾。

因此，若 $Z(E) \not\leq Q_2$ 则 $Z(Q_1) \not\leq E$。若存在 $x \in (Z(Q_1) \cap E) \setminus Z(S)$，则 $Z(E) \leq Q_1$，使得 $[Z(E)\ Z(Q_1)] = \{1\}$，且 $Z(Q_1)$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(E) \trianglelefteq E$，这就产生了矛盾。因此，$Z(Q_1) \cap E = Z(S)$，且由于 E 是 S-中心的，我们推得 $E \not\leq Q_1$。此外，$[E, Z(Q_1)] = Z(S) \leq \Omega(Z(E))$，所以必有 $\Omega(Z(E)) \not\leq Q_1$。然而，$|Z(Q_1)E/E| = q$，且 $C_{\Omega(Z(E))}(Z(Q_1)) = \Omega(Z(E)) \cap Q_1$ 在 $\Omega(Z(E))$ 中的指数为 $|\Omega(Z(E))Q_1/Q_1|$。由定理 2.21 可知，$|\Omega(Z(E))Q_1/Q_1| = q$ 且 $S = \Omega(Z(E))Q_1$。于是 $E = \Omega(Z(E))(E \cap Q_1)$。此外，由于 $\Omega(Z(E)) \not\leq Q_1$，$E \cap Q_1 \leq E \cap Q_1 \cap Q_2$，使得 $\Phi(E) = \Phi(\Omega(Z(E))(E \cap Q_1 \cap Q_2)) = \Phi(E \cap Q_1 \cap Q_2) \leq Z(S)$。由于 $[Z(Q_1),\ \Omega(Z(E))] = Z(S)$，由定理 2.21 可知 $\Phi(E) = \{1\}$，且 E 是初等阿贝尔群。同样，由于 $E \not\leq Q_1$，$E \cap Q_1 \leq E \cap Q_1 \cap Q_2$。若 $p = 2$，则 $E \leq (E \cap Q_1)(E \cap Q_2) \leq Q_2$，这与命题 5.6 矛盾。因此，$p$ 是奇数。□

因此，每当 $Z(E) \not\leq Q_2$ 时，我们看到 $Q_1 \not\geq E \not\leq Q_2$ 和 E 在$\mathcal{F}$中是极大本质的。

命题 5.9. 设 $\mathcal{F}$ 是一个支撑在 S上的饱和融合系统。那么 $Z(E) \leq Q_2$。

证明。为导出矛盾，我们假设 $Z(E) \not\leq Q_2$，因此由引理 5.8 可得，$E = \Omega(Z(E)) \not\leq Q_2$，$S = EQ_1$, $N_S(E) = EZ(Q_1)$，且 p 为奇数。由于 $E \not\leq Q_2$，我们有 $EQ_2 \cap Q_1 \not\leq Q_1 \cap Q_2$。然而，$[EQ_2 \cap Q_1, E \cap \Phi(Q_1)] \leq Z(S)$，由此推得 $EQ_2 \leq Q_2 C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1))$。于是 $[Z(C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1)))\ EQ_2] = Z(S) \leq E$，因此 $Z(Q_1)(E \cap \Phi(Q_1)) = Z(C_{Q_1}(E \cap \Phi(Q_1)))$，且 $|(E \cap \Phi(Q_1))Z(Q_1)| \in \{q^2, q^3, q^4\}$。但是现在，$\Phi(Q_1) \leq N_S(N_S(E))$。特别地，$\Phi(Q_1)$ 规范化 $EZ(Q_1)/C_E(O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))) \cong T \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{PSL}_3(q))$。此外，如果 $x \in \Phi(Q_1)$ 有 $[x, EZ(Q_1)] \leq Z(S)C_E(O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$，那么 $x \in N_S(E) \cap \Phi(Q_1) = Z(Q_1)(E \cap \Phi(Q_1))$。应用 [PR06，命题 5.3]，$|\Phi(Q_1)/Z(Q_1)(E \cap \Phi(Q_1)| < q^2$，并且我们推得 $|Z(Q_1)(E \cap \Phi(Q_1))| = q^4$，且 $|N_S(N_S(E))/N_S(E)| < q^2$。

设 t 是 $Z(O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)))$ 中的一个非平凡元素。由于我们选择 E 为极大本质子群，应用 Alperin–Goldschmidt 定理，并利用 E 是可接受的这一事实，t 可提升至 $\hat{t} \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$，并正规化 Q_2。注意，$\hat{t}$ 中心化 $Z(Q_1)(E \cap Q_1)/Z(S)$。令 C_t 为 Q_2 中 $C_{Q_2/Z(S)}(\hat{t})$ 的原像。则 $[C_t, \hat{t}, C_t] = \{1\}$，且由于 $Z(S)$ 被 $\hat{t}$ 取逆，我们推得 C_t 是阿贝尔的。事实上，必有 $|[Q_1 \cap Q_2/\Phi(Q_1)\hat{t}]| \geqslant q^2$。此外，我们有

$\Phi(Q_1)/Z(Q_1)(E\cap\Phi(Q_1))$ 被 $\hat{t}$ 取逆，否则 $[E,t,C_{\Phi(Q_1)}(\hat{t})]\leq Z(S)$，由此可得 $E\leq Q_2$。因此，$E[Q_1\cap Q_2,\hat{t}]/(E\cap\Phi(Q_1))Z(Q_1)$ 被 $\hat{t}$ 取逆，故其也是阿贝尔的。但这样一来，$\Phi(Q_1)[Q_1\cap Q_2,\hat{t}]\leq N_S(N_S(E))$。然而，$|N_S(N_S(E))/N_S(E)|\geqslant q^3$，这就导致矛盾。因此，$Z(E)\leq Q_2$，证毕。□

命题 5.10. 设 F 是一个定义在 S 上的饱和融合系统。那么 $Z(E)\leq\Phi(Q_1)$，$Z(Q_1)\leq E$ 以及 $\Phi(Q_1)\leq N_S(E)$。

证明。由于 $Z(E)\leq Q_2$，由命题 5.9 可知，当 p 为奇数时，结论立即由引理 5.5 得出：$Z(E)\leq\Phi(Q_1)$。当 $p=2$ 时，我们有 $Z(E)\leq Q_1\cap Q_2$。无论哪种情况，由于 $Z(Q_1)$ 中心化链 $\{1\}\trianglelefteq Z(E)\trianglelefteq E$，我们推得 $Z(Q_1)\leq E$。于是 $[\Phi(Q_1)\ E]\leq[\Phi(Q_1)\ S]=Z(Q_1)\leq E$，且 $\Phi(Q_1)\leq N_S(E)$。尚需证明，只要 $p=2$，就有 $Z(E)\leq\Phi(Q_1)$。为导出矛盾，反设结论不成立，并注意到 $Z(E)\leq Q_1\cap Q_2$。我们有 $|E\cap\Phi(Q_1)|\leqslant q^4$，因为 $Z(E)\not\leq\Phi(Q_1)$，且由于 $E\not\leq Q_2$，引理 5.5 得出 $Z(E)\cap\Phi(Q_1)$ 在 $Z(E)$ 中的指数至多为 q。

首先，假设 $Z(E)$ 不包含关于 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 的非中心主因子，因此 $Z(S)$ 被 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 规范化。注意，$E\not\leq Q_1$ 否则 $Z(Q_1)\leq Z(E)$，并且由于 $\Phi(Q_1)$ 中心化 $E/Z(Q_1)$，我们就会得到矛盾。令 Z_E 为 E 中 $Z(E/Z(S))$ 的原像，因此 Z_E 被 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 规范化，且包含 $Z(Q_1)$。现在，由于 L_1/Q_1 在$Q_1/\Phi(Q_1)$上的作用是三个自然 $SL_2(q)$- 模的直和，我们要么有 $E\cap Q_1\leq Q_1\cap Q_2$，从而 $\Omega(E)\leq Q_2$；要么有 $Z_E\leq Q_1\cap Q_2$。无论哪种情况，由于$[\Phi(Q_1)\ E]\leq Z(Q_1)\leq Z_E\cap\Omega(E)$ 且 $[\Phi(Q_1)\ Q_2]\leq Z(S)\leq Z(E)$，$\Phi(Q_1)$ 都中心化一条链，因此我们得到矛盾。

因此，$Z(E)$包含一个关于 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$的非中心主因子，应用定理 2.21可推得 $|E\cap\Phi(Q_1)|=q^4$，$|Z(E)/Z(E)\cap\Phi(Q_1)|=q$ 以及$N_S(E)=E\Phi(Q_1)$。特别地，$A:=Z(E)(E\cap\Phi(Q_1))$是阶为 q^5的初等阿贝尔群。若 $E\not\leq Q_1$，则 $Z(S)=[E,Z(Q_1)]\leq\Phi(E)$。注意，若 $Z(Q_1)\leq\Phi(E)$，则 $\Phi(Q_1)$中心化 $E/\Phi(E)$，因此必须有 $[E,E\cap\Phi(Q_1)]\leq Z(S)$。现在，对于 $e\in\Omega(E)$中的一个对合，我们有 $[e,E\cap\Phi(Q_1)]\leq Z(S)$，因此要么 $e\in E\cap Q_2$，要么 $[e,E\cap\Phi(Q_1)]=\{1\}$。在后一种情况下，$[e,A]=\{1\}$，从而$e\in A\leq Q_2$。因此，$Z(Q_1)\leq\Omega(E)\leq Q_2$，并且由于 $Z(S)\leq\Phi(E)\leq\Phi(E)\Omega(E)\leq Q_2$，$\Phi(Q_1)$中心化链 $\Phi(E)\trianglelefteq\Phi(E)\Omega(E)\trianglelefteq E$，矛盾。

最后，我们推导出 $Z(E)$ 对于 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 和 $E\leq Q_1$ 含有一个非中心主因子。特别地，$Z(Q_1)\leq Z(E)\leq Q_1\cap Q_2$，因此由定理 2.21 得 $Z(S)\cap\Phi(E)=\{1\}$。于是，$[E\cap Q_2,E\cap Q_2]=\{1\}$；又因为 $A\leq E\cap Q_2$ 是极大的阿贝尔群，我们推知 $A=E\cap Q_2$。此外，任何 $e\in E\backslash A$ 都不包含在 Q_2 中，且中心化 $Z(E)$；由引理 5.5 可得 $E\leq C_{Q_1}(E\cap\Phi(Q_1))$。因此，$A=\Omega(E)=Z(E)$。但是 $[Q_2,A]\leq Z(S)\leq A$，并且我们计算得 $E=C_S(A)$，所以 E 被 Q_2 正规化。由于 $N_S(E)=E\Phi(Q_1)$，这就构成矛盾。□

命题 5.11. 设 F 是一个支撑在 S 上的饱和融合系统。那么 $\Phi(Q_1)\leq E$, $Q_1\cap Q_2\leq N_S(E)$ 以及 $m_p(E)=m_p(S)$。

证明。为导出矛盾，以下始终假设 $\Phi(Q_1)\not\leq E$。由于$Z(S)\leq Z(E)$，$[\Phi(Q_1)\ E/Z(E)]\leq Z(Q_1)Z(E)/Z(E)$，且 $[\Phi(Q_1)\ Z(E)]=\{1\}$

由定理 2.21 可知，我们必有 $|E \cap \Phi(Q_1)| \geqslant q^4$ 以及 $Z(E) \cap Z(Q_1) = Z(S)$。再次应用定理 2.21 可得 $\Phi(E) \cap Z(Q_1) = Z(S)$。特别地，$[E, E \cap \Phi(Q_1)] = Z(S)$，并且我们有 $|E \cap \Phi(Q_1)| = q^4$。

现在，由于 $[\Phi(Q_1)\ E/Z(E)] = Z(Q_1)Z(E)/Z(E)$，定理 2.21 蕴含 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$，$N_S(E) = E\Phi(Q_1)$，并且对于 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 E 中存在唯一的非中心主因子。事实上，$O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 对 $Z(S)$ 施加平凡作用，并正规化 D，即 E 中 $Z(E/Z(S))$ 的原像。

假设 $\Omega(D) \not\leq Q_2$。特别地，$[D, \Phi(Q_1)] \not\leq Z(S)$，因此我们必须有 $[\Omega(D)\ \Phi(Q_1)]Z(S) = Z(Q_1)$。因此，$[\Phi(Q_1)\ E] \leq Z(Q_1) \leq \Omega(D)$，且 $\Omega(D)/Z(E)$ 包含 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 E 内的唯一非中心主因子。若 $p = 2$，则根据命题 5.1，$\Omega(D) = (\Omega(D) \cap Q_1)(\Omega(D) \cap Q_2)$，且 $(\Omega(D) \cap Q_1) \not\leq Q_2$。注意，若 $\Omega(D) \cap Q_2 \not\leq Q_1 \cap Q_2$，则 $\Phi(Q_1) \not\geq [\Omega(D) \cap Q_1, \Omega(D) \cap Q_2] \leq Z(S)$，矛盾。因此，$\Omega(D) \cap Q_2 \leq Q_1$ 且 $\Omega(D) \leq Q_1$。但此时 $Z(Q_1) \leq \Omega(Z(\Omega(D)))$，从而 $[\Phi(Q_1)\ E] = Z(Q_1) \leq \Omega(Z(\Omega(D)))$，并且 $\Omega(Z(\Omega(D)))$ 包含 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 E 内的唯一非中心主因子。然而，对于 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 中的一个奇数阶元素 r，$[r, E, D] = \{1\}$ 且 $[E, D, r] = \{1\}$；由三子群引理，$[r, D] \leq Z(E)$，从而 $[D, r] = [D, r, r] \leq [Z(E)\ r] = \{1\}$，这与 D 包含一个非中心主因子相矛盾。

若 p 为奇数，则根据引理 5.5，$C_{(E\cap Q_2)/Z(S)}(D) \leq C_{Q_2/Z(S)}(D) \cap E/Z(S) \leq (E \cap \Phi(Q_1))/Z(S)$。因此，$E \cap Q_2 \leq \Phi(Q_1)$。由于 $[E, Z(Q_1)] \neq \{1\}$，故 $E \not\leq Q_1$；又由于 $[E, E \cap Q_1] \leq \Phi(E) \leq E \cap Q_2 \leq \Phi(Q_1)$，我们可推得 $E \cap Q_1 \leq E \cap Q_1 \cap Q_2 \leq \Phi(Q_1)$。但现在，由于 $|N_S(E)/E| = q$，且 D 包含 E 中唯一的非中心主因子，我们可推得 $S = DQ_1$，并且 $E = D(E \cap \Phi(Q_1))$ 是非阿贝尔的。因此，$[E, E] = Z(S)$。注意到 $C_E(O^p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))) \leq \Phi(Q_1)$，由此可得 $C_E(O^p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))) = Z(E)$ 的阶为 q^3。此外，我们有 $\Phi(Q_1)E/Z(E) \cong T \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{PSL}_3(q))$，且 $Z(\Phi(Q_1)E/Z(E)) = Z(Q_1)Z(E)/Z(E)$。现在，$Q_1 \cap Q_2$ 正规化 $Z(E)$，而 $\Phi(Q_1)E$，因此作用于 $\Phi(Q_1)E/Z(E)$。此外，对于 $x \in Q_1 \cap Q_2$，若 $[x, \Phi(Q_1)E] \leq Z(E)Z(Q_1)$，则 $x \in N_{Q_2}(E) = \Phi(Q_1)$。应用 [PR06 命题 5.3]，可得 $|(Q_1 \cap Q_2)E/\Phi(E)E| < q^2$，这与矛盾。

因此，$\Omega(D) \leq Q_2$ 和 $[\Omega(D)\ \Phi(Q_1)] = Z(S) \leq Z(E)$。于是，由于 $[E, \Phi(Q_1)] \leq Z(Q_1) \leq \Omega(D)$，$\Phi(Q_1)$ 中心化了链 $\{1\} \trianglelefteq Z(E) \trianglelefteq \Omega(D) \trianglelefteq E$，这就产生了矛盾。因此，$\Phi(Q_1) \leq E$。由于 $\Phi(Q_1) \in \mathrm{A}(S)$，我们有 $m_p(S) = m_p(E) = 5n$ 和 $\Phi(Q_1) \in \mathrm{A}(E)$。由于 $[E, Q_1 \cap Q_2] \leq [S, Q_1 \cap Q_2] = \Phi(Q_1) \leq E$，我们有 $Q_1 \cap Q_2 \leq N_S(E)$。□

由于 $\Phi(Q_1) \leq E$ 和 $\Phi(Q_1) \in \mathcal{A}_{\trianglelefteq}(S)$，$\Phi(Q_1) \in \mathcal{A}_{\trianglelefteq}(E) \neq \emptyset$，因此 $J_{\trianglelefteq}(E)$ 有定义。在接下来的引理和命题中，我们将频繁使用这个群及其性质。

命题 5.12。设 F 是支撑在 S 上的饱和融合系统，并令 $E \in \boldsymbol{E}(F)$。则或者为 $J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_1$，或者为 $J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_2$。

证明。为了导出矛盾，我们始终假设存在 $A, C \in \mathcal{A}_{\trianglelefteq}(E)$，满足 $A \not\leq Q_1$ 和 $C \not\leq Q_2$。由于 $\Phi(Q_1)$ 是一个正规初等阿贝尔

E 的子群，且 $m_p(S) = m_p(E) = 5n$，因此我们有 $|A| = |C| = q^5$。此外，由于 $A \not\leq Q_1$，$A \cap Z(Q_1) = C_{Z(Q_1)}(A) = Z(S)$。于是 $B := (A \cap Q_1)Z(Q_1)$ 是阶为 $|A \cap Q_1|q$ 的初等阿贝尔群，我们得出 $|A \cap Q_1| = q^4$ 和$S = AQ_1$。由于 $A \not\leq Q_1$和 A中心化 $A\cap Q_1$，因此 $A\cap Q_1 \leq Q_1\cap Q_2$和 $B \leq Q_1 \cap Q_2$。若 $p = 2$，则根据命题 5.1，我们有 $A \leq Q_2$。若 p 为奇数，则 $[A, B] = [A, Z(Q_1)] = Z(S)$；根据引理 5.5，由于 $|B/Z(S)| = q^4$，我们再次得到 $A \leq Q_2$。特别地， $Q_2 = A(Q_1 \cap Q_2)$。

由于 $Q_2 = C_S(\Phi(E)/Z(S))$，我们有 $Z(Q_1) = [C, \Phi(E)]Z(S) \leq C$，因此$C \leq Q_1$。令 $c \in C \setminus (C \cap Q_2)$。于是根据引理 5.3，对于 $F_c := C_{\Phi(Q_1)}(c)$,$|F_c| = q^4$, $|C_{Q_1}(F_c)| = q^7$ 以及 $|C_{Q_1}(F_c) \cap Q_2| = q^6$。注意到 $[c, A]\Phi(Q_1) = C_{Q_1}(F_c) \cap Q_2$，并且由于 A 正规化了 C，我们推得 $|(C \cap C_{Q_1}(F_c))\Phi(Q_1)| > q^6$。但这样一来，$(C \cap C_{Q_1}(F_c))F_c$ 是一个阶严格大于 q^5 的初等阿贝尔群，产生矛盾。因此， $J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_1$ 或 $J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_2$。□

命题 5.13. 设 $\mathcal{F}$ 是一个支撑在 S 上的饱和融合系统，并令 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$。若 $Q_2 \leq E$，则 $E = Q_2$。

证明. 由于 $Q_2 \leq E$，我们立即得出 $E \trianglelefteq S$, $Z(E) = Z(S)$，且 Q_2 是 E 中 $J(E/Z(E))$ 的原像。因此， Q_2 在 E 中是特征子群。为导出矛盾，我们始终假设 $Q_2 < E$，因而存在 $x \in (E \cap Q_1)\setminus(Q_1 \cap Q_2)$。特别地， $Z(S)[Q_2, x] \leq \Phi(E)$。我们注意到 $\Phi(E) < Q_1 \cap Q_2$，否则 S 会中心化 $E/\Phi(E)$。

首先假设 p 为奇数。由引理 5.5 可知，$|C_{Q_2/Z(S)}(x)| = q^3$，因此我们推出 $|Z(S)[Q_2, x]| = q^6$。事实上，可得 $|Z(S)[Q_1 \cap Q_2, x]| = q^5$；又由于 $x \in Q_1$， $[x, Q_1 \cap Q_2] \leq \Phi(Q_1)$，我们推出 $\Phi(Q_1) = Z(S)[Q_1 \cap Q_2, x] \leq \Phi(E)$。由于 $[S, E] \leq Q_1 \cap Q_2 \leq Q_2$ 且 $[S, Q_1 \cap Q_2] \leq \Phi(Q_1)$，我们推出 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 中心化 E/Q_2。此外，定理 2.21 表明 $|\Phi(E)| = q^7$, $|S/E| = q$，且 $Q_2/\Phi(E)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ 的自然模。现在， $E/\Phi(E)$ 在互素作用下分裂，并且我们可以安排使 x 属于 E 中 $C_{E/\Phi(E)}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$ 的原像。因此， $E_x := \mathbf{h}x\mathbf{i}\Phi(E)$ 被 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 规范化。注意， $Z(E_x/Z(S))$ 的原像等于 $C_{\Phi(Q_1)}(x)$，其阶为 q^4，并被 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 规范化。注意，我们也可以在 E 中 $C_{E/\Phi(E)}(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)))$ 的原像中选取 y，使得 $y \in (E \cap Q_1) \setminus (Q_1 \cap Q_2)$ 且 $C_{\Phi(Q_1)}(x) \neq C_{\Phi(Q_1}(y)$，并可构造由 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 规范化的 E_y。于是 $Z_2(E) = C_{\Phi(Q_1)}(x) \cap C_{\Phi(Q_1)}(y)$，且 $\Phi(Q_1) = C_{\Phi(Q_1)}(x)C_{\Phi(Q_1)}(y)$ 被 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 规范化。但这样一来， $Z(Q_1) = [E, \Phi(Q_1)]$ 被 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 规范化；又由于 Q_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq \Phi(Q_1)$，我们得到 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 中的所有 p'-元素都中心化 $\Phi(Q_1)$。由于 $\Phi(Q_1)$ 在 E 中是自中心化的，三子群引理推出 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 中的所有 p'-元素都中心化 E，矛盾。

因此，我们有 $p = 2$。我们使用 MAGMA 中的融合系统软件包[PS21] 当 $q = 2$ 时，推导出 $E = Q_2$。因此，我们可以假设 $q > 2$。与奇素数情形一样，我们注意到 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 中心化 E/Q_2。令 $x \in (E \cap Q_1) \setminus Q_2$，并令 C_x 表示 Q_2 中 $C_{Q_2/Z(S)}(x)$ 的原像。然后，应用引理 5.5， $C_x = [x, Q_2]Z(S)$ 的阶为 q^5，且不包含于 $\Phi(Q_1)$ 中。事实上，$C_x \cap \Phi(Q_1) = C_{\Phi(Q_1)}(x)$ 的阶为 q^4。我们首先假设 C_x 是.....中的原像

Q_2 中 $C_{Q_2/Z(S)}(E)$ 的原像，使得 $|S/E| \geqslant q^2$。注意，由于 $E_x := \mathbf{h}x\mathbf{i}Q_2$ 被 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 归一化，$C_x = [E_x, Q_2]$ 也如此。事实上，$|Q_2/C_x| = |C_x/Z(S)| = q^4$，且这些商中至少有一个包含关于 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 的非中心主因子。注意，$C_x = [x, Q_2]Z(S) \leq \Phi(E)$，因此 Q_2/C_x 包含一个非中心主因子。事实上，应用命题 2.33 和引理 2.30 可得 $C_x = \Phi(E)$，且 $Q_2/\Phi(E)$ 对于 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q^2)$ 是不可约的。现在假设存在 $x, y \in E \setminus Q_2$，使得 $C_x \cap \Phi(Q_1) \neq C_y \cap \Phi(Q_1)$。事实上，应用引理 5.5 可推出 $|C_x \cap C_y| = q^3$ 和 $|C_xC_y| = q^7$。由于 $C_xC_y \leq \Phi(E)$，我们可推出 $C_xC_y = \Phi(E)$；否则，利用 $Q_1/\Phi(Q_1)$ 作为 L_1/Q_1-模的结构，可得 $\Phi(E) = Q_1 \cap Q_2$，并且 S 将中心化 $E/\Phi(E)$。因此，$|S/E| \geqslant q$，且 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 Q_2/C_xC_y 上非平凡作用。应用命题 2.33 和引理 2.30，可得 Q_2/C_xC_y 是 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ 的自然模。

因此，我们有 $p = 2$、$q > 2$ 和 $O^{2'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q^a)$，其中 $a \in \{1, 2\}$。令 K_E 为一个阶为 $q^a - 1$ 的群，它由将 $\mathrm{Aut}(S)$ 中的一个 Hall $2'$-子群提升至 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)(\mathrm{Aut}_S(E))$ 而得；令 K_2 为 $\mathrm{Aut}_{L_2}(S)$ 的一个 Hall $2'$-子群，并令 $H := \mathbf{h}K_E, K_2\mathbf{i} \leq \mathrm{Aut}(S)$。令 K_E 为由 K_E 在 $\mathrm{Aut}(S/Q_2)$ 中诱导的子群，并类似地定义 K_2 和 H。特别地，$K_E \cong K_E$、$K_2 \cong K_2$ 和 $H := \mathbf{h}K_2, K_E\mathbf{i} \leq H$。由于 K_2 在 S/Q_2 的对合上具有传递性，且 K_E 固定了 S/Q_2 的一个阶为 q^{3-a} 的子群，我们推得 $\widehat{K_2} \cap \widehat{K_E} = \{1\}$。事实上，$|H| \geqslant |\widehat{K_E}||\widehat{K_2}| = (q^3 - 1)(q^a - 1)$。现在，$\widehat{K_2}$ 是 $\mathrm{Aut}(S/Q_2) \cong \mathrm{GL}_{3n}(2)$ 的一个辛格循环，并且 [Kan80] 表明，对于某个整除 $3n$ 的 s，有 $\mathrm{GL}^{3n/s}(2^s) \trianglelefteq H \leq \Gamma L_{3n/s}(2^s)$。若 $s = 3n$，则 H 属于一个辛格循环的正规化子。然而，根据 [Hup13, 7.3 Satz]，$\mathrm{GL}_{3n}(2)$ 中辛格循环的正规化子阶为 $3n(q^3 - 1)$，只有当 $a = 1$ 且 $n = 2$ 时才被 H 整除。在这种情况下，我们直接在 $\mathrm{GL}_6(2)$ 中计算，得到 $K_2 \trianglelefteq H$，并且 H 中没有任何阶为 3 的元素固定 S/Q_2 的一个阶为 2^4, 的子群；这与 $\widehat{K_E} \leq H$ 矛盾。

因此，$s < 3n$ 和 H 不可解。注意，H 在 $Z(S)$ 上平凡作用。由于 $C_H(Z(Q_1)) \trianglelefteq H$ 且 $|Z(Q_1)/Z(S)| = q$，我们推得 $C_H(Z(Q_1))$ 有一个与 $\mathrm{PSL}^{3n/s}(2^s)$ 同构的组成因子。此外，由三子群引理可知，$C_H(Z(Q_1))$ 中心化 S/Q_1，因此 $C_H(Z(Q_1))$ 的奇数阶元素在 $Q_1/Q_1 \cap Q_2$ 上忠实作用。由三子群引理可知，$C_{\mathrm{Aut}(Q_1)}(Z(Q_1)) \cap C_{\mathrm{Aut}(Q_1)}(\Phi(Q_1)/Z(Q_1))$ 中心化 $Q_1/\Phi(Q_1)$，且 L_1/Q_1 忠实嵌入 $C_{\mathrm{Aut}(Q_1)}(\Phi(Q_1)/Z(Q_1))$。特别地，由 L_1 和 $C_H(Z(Q_1))$ 在 $Q_1/\Phi(Q_1)$ 上诱导的作用所生成的子群彼此交换，且在 $\mathrm{Aut}(Q_1/\Phi(Q_1))$ 中交于平凡子群。令 T 为由 $N_{L_1}(S)$ 的一个 Hall $2'$-子群在 $\mathrm{Aut}(Q_1/Q_1 \cap Q_2)$ 中诱导的子群，使得 T 的阶为 $q - 1$；记 C 为由 $C_H(Z(Q_1))$ 在 $\mathrm{Aut}(Q_1/Q_1 \cap Q_2)$ 中诱导的子群。因此，$\mathrm{Aut}(Q_1/Q_1 \cap Q_2) \cong \mathrm{GL}_{3n}(2)$ 中含有一个形如 $C \times T$ 的子群，而 C 有一个与 $\mathrm{SL}^{3n/s}(2^s)$ 同构的正规子群，记为 C^*。事实上，C^* 也被 $\mathrm{Aut}(Q_1/Q_1 \cap Q_2)$ 中由 H 诱导的子群正规化，记该子群为 H。由于 K_2 忠实地限制在 $Q_1/Q_1 \cap Q_2$ 上，我们有 $X := \mathbf{h}H, T\mathbf{i}$ 包含 $\mathrm{Aut}(Q_1/Q_1 \cap Q_2)$ 的一个辛格循环。再次应用 [Kan80]，并利用 $C^* \trianglelefteq X$，必有 $\mathrm{GL}^{3n/s}(2^s) \trianglelefteq X \trianglelefteq \Gamma L_{3n/s}(2^s)$；又因 T 中心化 C^* 且与 C^* 交于平凡子群，故得到矛盾。证明完毕。□

命题 5.14。设 F 是一个以 S 为支撑的饱和融合系统，且 $E \in E(F)$。那么，要么 $E = Q_2$，要么 $\Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_1$。

证明。我们假设 $E \not\leq Q_2$，$J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_2$ 且存在 $A \in \mathrm{A}_{\trianglelefteq}(E)$，使得$A \not\leq Q_1$。事实上，由此可得 $Q_2 = A(Q_1 \cap Q_2)$。注意，若 $Q_1 \cap Q_2 \not\leq E$，则$[E, Q_1 \cap Q_2] \leq \Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E)$。但是现在，$Z(S) = [A, \Phi(E)] \leq [J_{\trianglelefteq}(E)\ \Phi(Q_1)] \leq \Phi(J_{\trianglelefteq}(E)) \leq Z(S)$。因此，$Q_1 \cap Q_2$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq \Phi(J_{\trianglelefteq}(E)) \trianglelefteq J_{\trianglelefteq}(E) \trianglelefteq E$，这就产生了矛盾。因此，$Q_2 = A(Q_1 \cap Q_2) \leq E$，并且根据命题 5.13，$E = Q_2$，矛盾。□

引理 5.15. 若 $\Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E) \not\leq Q_1 \cap Q_2$，则 $E \leq Q_1$ 且 $E \cap Q_2 > \Phi(Q_1)$。

证明. 根据命题 5.14，$Z(Q_1) \leq Z(J_{\trianglelefteq}(E)) \leq \Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E) \leq E \cap Q_1$。为导出矛盾，我们假设存在 $A \in \mathcal{A}_{\trianglelefteq}(E)$，满足 $A \not\leq Q_2$。若 $E \not\leq Q_1$，则对于 $a \in A \setminus (A \cap Q_2)$，我们有：对于 $D_a := C_{\Phi(Q_1)}(a)$，$|D_a| = q^4$且 $L := C_{Q_1 \cap Q_2}(D_a) = [E, a]\Phi(Q_1)$。事实上，我们有 $|(L \cap A)D_a| \geqslant q^5$，因此 $\langle a \rangle (L \cap A)D_a$ 是阶严格大于 q^5 的初等阿贝尔群，矛盾。因此，$E \leq Q_1$。

由于 $\Phi(Q_1) < E < Q_1$，我们有 $Z(Q_1) \leq Z(E) < \Phi(Q_1)$。为导出矛盾，假设 $E \cap Q_2 = \Phi(Q_1)$。于是 $Q_1 \cap Q_2$ 正规化 E，$|E(Q_1 \cap Q_2)/E| = q^3$，且 $\Phi(Q_1)$在 E中的指数至多为 q^3。由于 $Z(E) \leq \Phi(Q_1)$且 $[Q_1 \cap Q_2, \Phi(Q_1)] = Z(S)$，将定理 2.21 应用于 $E/Z(E)$和$Z(E)$，可得 $Z(E) = Z(Q_1) \geq \Phi(E)$，$|E/\Phi(Q_1)| = q^3$，$N_S(E) = Q_1 = E(Q_1 \cap Q_2)$，并且 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(E)) \cong \mathrm{SL}_2(q^3)$。由于 E 是极大选取的，F 中唯一其他可能包含 E 的本质子群是 Q_1。

如果 Q_1在 F 中是本质子群，那么由于 $[S, \Phi(Q_1)] \leq Z(Q_1)$，我们推得 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1)$ 在 $\Phi(Q_1)/Z(Q_1)$ 上平凡作用，因此将引理 5.3 中所述的子空间正规化。特别地，对于阶为 q^4、且 $C_{Q_1}(D)$ 的阶为 q^7 的 $D \leq \Phi(Q_1)$，有 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1)$ 将 $C_{Q_1}(D)$ 正规化。由定理 2.21，$\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)$ 在 $C_{Q_1}(D)/\Phi(Q_1)$ 上诱导一个自然的 $\mathrm{SL}_2(q)$-作用。取 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1)$，使得 $(E \cap C_{Q_1}(D))\alpha = C_{Q_1 \cap Q_2}(D)$。由于 $Q_1 = N_S(E)$，E 是完全 F-正规化的，且 $E \leq Q_1$，因此 $E\alpha$ 在 F 中也为本质子群。此外，$Z(E)\alpha = Z(E\alpha) = Z(Q_1)$，并且由于 E 是完全正规化的，$E\alpha \neq Q_1 \cap Q_2$。然而，对所有 $e \in E\alpha \setminus C_{Q_1 \cap Q_2}(D)$，都有 $[e, E\alpha \cap Q_2] \leq [E\alpha, E\alpha] = [E, E]\alpha = Z(Q_1)$。于是$|C_{E\alpha \cap Q_2/Z(S)}(e)| \geqslant q^4$，由引理 5.5 得出矛盾。因此，$Q_1$ 在 F 中不是本质子群，而 E 是极大本质。

设 r 是 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 中一个阶为 $q-1$ 的元素，它正规化 $\mathrm{Aut}_S(E) = \mathrm{Aut}_{Q_1}(E)$。利用 E 的可接受性和 Alperin–Goldschmidt 定理，r 提升了一个自同构 $\hat{r} \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$，使得 $\hat{r}|_E = r$。由于 r 中心化$Z(Q_1)$，根据三子群引理，我们有 $[\hat{r}, S] \leq C_S(Z(Q_1)) = Q_1$。由于 $\hat{r}|_E = r$ 且 $Q_1 = N_S(E)$，我们有 $[\hat{r}, Q_1] \leq E$。因此，$[\hat{r}, S] \leq E$。由于 Q_2 是 S 的特征子群，$\hat{r}$ 正规化 Q_2，因此 $[\hat{r}, Q_2] \leq [\hat{r}, S] \cap Q_2 = E \cap Q_2 = \Phi(Q_1)$。但此时 $[\hat{r}, Q_2, \Phi(Q_1)] = \{1\}$，$[Q_2, \Phi(Q_1)\ \hat{r}] = \{1\}$，所以根据三子群引理，$[\hat{r}, \Phi(Q_1)\ Q_2] = \{1\}$。然而，$C_{\Phi(Q_1)}(Q_2) = Z(S)$，且$\Phi(Q_1) = [\Phi(Q_1)\ r]Z(Q_1)$，这就产生了矛盾。□

引理 5.16. 若 $\Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E) \not\leq Q_1 \cap Q_2$，则 $p = 2$, $Z(E) = Z(Q_1)$, $Q_1 = N_S(E)$，且 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 在 $Z(Q_1)$上平凡作用。

证明。由引理 5.15 可知 $E \cap Q_2 > \Phi(Q_1)$，因此 $Z(Q_1) = [E, \Phi(Q_1)] \leq \Phi(E) \leq \Phi(Q_1)$。由引理 5.3，我们推得 $|Z(E)| \in \{q^2, q^3, q^4\}$。注意， $C_{Q_1}(E/Z(E))$ 中心化 $E/Z(E)\Phi(E)$ 和 $Z(E)\Phi(E)/\Phi(E)$，因此由引理 2.11 可推得 $C_{Q_1}(E/Z(E)) \leq E$，且 $E/Z(E)$ 含有关于 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 的非中心主因子。应用定理 2.21，由于 $[Q_1, Z(E)\Phi(E)] \leq Z(Q_1) \leq \Phi(E)$, 可知 $|Q_1/E| \leqslant |[E, Q_1]Z(E)/Z(E)|$，并由此推得$|Z(E)| \in \{q^2, q^3\}$。此外，若 $|Z(E)| = q^3$，则定理 2.21 意味着 $E = C_{Q_1}(Z(E))$ 和 $Q_1 = N_S(E)$，这与矛盾相悖，因为在此情形下， $E \trianglelefteq S$。因此， $Z(E) = Z(Q_1)$。

如果 p 为奇数，那么对于 $a \in E \setminus E \cap Q_2$，有 $|[a, Q_2/Z(Q_1)| = q^4$。由此可得$|C_{Q_2/Z}(Q_1)(a)| = q^3$，并且由于 $\Phi(Q_1)/Z(Q_1) \leq C_{Q_2/Z(Q_1)}(a)$，我们有 $\Phi(Q_1)/Z(Q_1) = C_{Q_2/Z(Q_1)}(a)$。因此， $Z(E/Z(Q_1)) = \Phi(Q_1)/Z(Q_1)$，且 Q_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq \Phi(Q_1) \trianglelefteq E$; 由于 $E < Q_1$，这产生矛盾。因此， $p = 2$。显然， $N_S(E) \in \{S, Q_1\}$。假设 $E \trianglelefteq S$。由于 $Z(Q_1) = Z(E)$，且 $Q_1/\Phi(Q_1)$ 是对于 L_1/Q_1 的自然 $\mathrm{SL}_2(q)$-模的直和，我们推得 $C_{\Phi(Q_1)}(Q_1 \cap Q_2 \cap E) = Z(Q_1)$。事实上，类似于奇数情形的计算表明，要么 $Z(E/Z(Q_1)) = \Phi(Q_1)/Z(Q_1)$，从而如前产生矛盾；要么 $E \leq C_{Q_1}(C_{\Phi(Q_1)}(a))(Q_1 \cap Q_2)$，且 $Z(E/Z(Q_1))$ 的原像等于 $C_{Q_1 \cap Q_2}(C_{\Phi(Q_1)}(a))$。但是现在，$[Q_1, E] \leq C_{Q_1 \cap Q_2}(C_{\Phi(Q_1)}(a))$， $[Q_1, \Phi(Q_1)] = Z(Q_1) = Z(E)$， $\Phi(Q_1)$ 在 $C_{Q_1 \cap Q_2}(C_{\Phi(Q_1)}(a))$ 中的指数为 q，且 $|Q_1/E| \geqslant q^2$。因此，定理 2.21 导致矛盾。所以， $p = 2$ 且 $Q_1 = N_S(E)$。事实上，由于 Q_1 中心化 $Z(Q_1)$，我们推得 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 对 $Z(Q_1)$ 平凡作用。□

引理 5.17. 我们有 $\Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_1 \cap Q_2$。

证明. 首先注意到 $(E \cap Q_2)/Z(S)$ 是初等阿贝尔的，且根据引理 5.16 有 $E \leq Q_1$。假设存在 $F \trianglelefteq E$，使得 $F \not\leq Q_2$, $F/Z(S)$ 是初等阿贝尔的，并且 $|F| \geqslant |E \cap Q_2|$。令 $f \in F \setminus Q_2$。那么，根据引理 5.3，$(\Phi(Q_1) \cap F)/Z(S) \leq C_{\Phi(Q_1)/Z(S)}(f) = C_{\Phi(Q_1)}(f)/Z(S)$。此外，由引理 5.5 可推出 $|F/F \cap Q_2| \leqslant q^5/|F \cap \Phi(Q_1)|$。因此，

$$|F| \leqslant q^5|F \cap Q_2|/|\Phi(Q_1) \cap F| = |\Phi(Q_1)||F \cap Q_2|/|\Phi(Q_1) \cap F| = |\Phi(Q_1)(F \cap Q_2)| \leqslant |E \cap Q_2| \leqslant |F|,$$

由此可知每个不等式都是等式。因此， $E \cap Q_2 = (F \cap Q_2)\Phi(Q_1)$。利用 $E \cap Q_2 > \Phi(Q_1)$，对于 $e \in (F \cap Q_2) \setminus \Phi(Q_1)$，有 $F/Z(S) \leq C_{Q_1/Z}(s)(e)$。由引理 5.5，我们有 $C_{Q_1/Z}(s)(e) = C_{Q_1}(C_{\Phi(Q_1)}(e))(Q_1 \cap Q_2)/Z(S)$。但是 $(F \cap Q_2)/Z(S) \leq C_{(Q_1 \cap Q_2)/Z}(s)(f)$，再次应用引理 5.5 可得 $F \cap Q_2 \leq C_{Q_1 \cap Q_2}(C_{\Phi(Q_1)}(e))$, 进而推出 $F \leq C_{Q_1}(C_{\Phi(Q_1)}(e))$。于是， $F \cap \Phi(Q_1) = C_{\Phi(Q_1)}(f) = C_{\Phi(Q_1)}(e) = Z(F(E \cap Q_2))$ 的阶为 q^4。事实上， $F \cap \Phi(Q_1) = Z(E \cap Q_2)$ 与 F 无关。

由于 $Z(S)$ 被 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 正规化， $Z(E \cap Q_2)$ 也如此，因此 $C_E(Z(E \cap Q_2))$ 也如此。现在， $[Q_1 \cap Q_2, E] \leq \Phi(Q_1) \leq C_E(Z(E \cap Q_2))$ 且 $[Q_1 \cap Q_2, Z(E \cap Q_2)] \leq Z(S)$，所以 $\langle \mathrm{Aut}_{Q_1 \cap Q_2}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)} \rangle$ 的每个奇数阶元素都在 $C_E(Z(E \cap Q_2))/Z(E \cap Q_2)$ 上忠实地作用。但 $|(Q_1 \cap Q_2)E/E| \geqslant q^2$and $E \cap Q_2$

在 $C_E(Z(E \cap Q_2))$ 中的指数为 q，且 $Q_1 \cap Q_2$ 在模 $Z(E \cap Q_2)$ 意义下将其中心化。应用定理 2.21 即得矛盾。

因此，$E \cap Q_2/Z(S) = J_{\trianglelefteq}(E/Z(S))$，且由于 $Z(S)$ 在 $O^{2'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E))$ 下不变，$E \cap Q_2$ 也如此。于是，$Q_1 \cap Q_2$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(S) \trianglelefteq E \cap Q_2 \trianglelefteq E$，因此由引理 2.13 可得 $Q_1 \cap Q_2 \leq E$，且 $Z(Q_1) = Z(E)$。注意，对于 $a \in Q_1 \setminus (Q_1 \cap Q_2)$，由于 $|C_{Q_1 \cap Q_2/Z}(s)(a)| \leqslant q^4$，我们推得 $|[a, Q_1 \cap Q_2]Z(S)| \geqslant q^4$，从而 $|\Phi(E)| \geqslant q^4$。令 $b \in Q_1 \setminus (Q_1 \cap Q_2)$ 满足 $C_{Q_2/Z}(s)(a) \neq C_{Q_2/Z}(s)(b)$，则有 $[a, Q_1 \cap Q_2][b, Q_1 \cap Q_2]Z(S) = \Phi(Q_1)$，从而 $\Phi(E) = \Phi(Q_1)$。在这种情况下，Q_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq \Phi(Q_1) \trianglelefteq E$，这就产生了矛盾。令 $A \in \mathrm{A}_{\trianglelefteq}(E)$，其中 $A \not\leq Q_1 \cap Q_2$，则可知，对于 $a \in A \setminus (A \cap Q_2)$，$E \leq C_{Q_1}(C_{\Phi(Q_1)}(a))(Q_1 \cap Q_2)$ 且 $|Q_1/E| \geqslant q^2$。但是现在，$[Q_1, E] = \Phi(Q_1)$，且由于 $|Q_1/E| = q^2 > q = |\Phi(Q_1)/\Phi(E)|$，应用定理 2.21 可得矛盾。因此，我们已证明 $\Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_1 \cap Q_2$。□

如前所述，我们终于证明了$\mathcal{E}(\mathcal{F}) \subseteq \{Q_1, Q_2\}$。

命题 5.18. 设 F 是一个定义在 S 上的饱和融合系统，且 $E \in E(F)$。则 $E \in \{Q_1, Q_2\}$。

证明。为导出矛盾，我们假设 E 是一个本质子群，并且是满足 $Q_1 \neq E \neq Q_2$ 的极大选择。由引理 5.17，$\Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_1 \cap Q_2$。先假设 $\Phi(Q_1) = J_{\trianglelefteq}(E)$ 且 $E \cap Q_2 > \Phi(Q_1)$。由于 $E \not\leq Q_2$，可得 $[E, \Phi(Q_1)] = Z(Q_1)$。若 $Q_1 \not\leq E$，则 $\langle \mathrm{Aut}_{Q_1}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)} \rangle$ 含有阶与 p 互素的元素，因此我们可以选取这样的元素 r。由于 Q_1 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq Z(Q_1) \trianglelefteq \Phi(Q_1)$，我们推得 r 中心化 $\Phi(Q_1)$。但由三子群引理，$[r, E] \leq C_E(\Phi(Q_1)) \leq C_S(\Phi(Q_1)) = \Phi(Q_1)$，因此 r 在 E 上平凡作用，矛盾。故 $Q_1 < E$ 且 $Z(E) = Z(S)$。但这样一来，$\Phi(S) = Q_1 \cap Q_2 = [E, Q_1] \leq \Phi(E)$，且 S 中心化 $E/\Phi(E)$，矛盾。因此，若 $\Phi(Q_1) = J_{\trianglelefteq}(E)$，则 $E \cap Q_2 = \Phi(Q_1)$。然而此时，$[E, Q_1 \cap Q_2] \leq \Phi(Q_1)$ 且 $[Q_1 \cap Q_2, \Phi(Q_1)] = Z(S)$，并且由于 $|Z(S)| = q \lhd (Q_1 \cap Q_2)E/E| = q^3$，应用定理 2.21 即得矛盾。

因此，我们有 $\Phi(Q_1) < J_{\trianglelefteq}(E) \leq Q_1 \cap Q_2$。于是，$\Phi(J_{\trianglelefteq}(E)) = Z(S)$ 是 E 的特征子群。由于 $[E, Q_1 \cap Q_2] \leq \Phi(Q_1) \leq J_{\trianglelefteq}(E)$，且 $[Q_1 \cap Q_2, J_{\trianglelefteq}(E)] \leq \Phi(Q_1 \cap Q_2) = Z(S) = \Phi(J_{\trianglelefteq}(E))$，$Q_1 \cap Q_2$ 中心化链 $\{1\} \trianglelefteq \Phi(J_{\trianglelefteq}(E)) \trianglelefteq J_{\trianglelefteq}(E) \trianglelefteq E$，因此 $Q_1 \cap Q_2 \leq E$ 和 $E \trianglelefteq S$。现在，若 $Q_2 \not\leq E$，则 $\langle \mathrm{Aut}_{Q_2}(E)^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(E)} \rangle$ 含有阶与 p 互素的元素。取这样的一个元素 r。由于 $[Q_2, J_{\trianglelefteq}(E)] \leq \Phi(Q_2) = Z(S) = \Phi(J_{\trianglelefteq}(E))$，可得 $[r, J_{\trianglelefteq}(E)] = \{1\}$。然而，根据三子群引理，$[r, E] \leq C_E(J_{\trianglelefteq}(E)) \leq J_{\trianglelefteq}(E)$，且 r 平凡作用于 E，矛盾。因此，$Q_2 \leq E$，而命题 5.13 导出矛盾。□

最后，我们对支撑在 ${}^3\mathrm{D}_4(p^n)$ 的 Sylow p-子群上的所有饱和融合系统进行分类。正如引言以及定理 2.37 之后所指出的，当 p 是奇素数时，我们需要采用 $\mathcal{K}$ 群假设，以推出 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{SL}_2(q^3)$ 在 $Q_2/Z(S)$ 上作为三元性模作用。

定理 5.19. 设 F 是定义在 p-*Sylow* 子群上的饱和融合系统，并设 ${}^3\mathrm{D}_4(p^n)$ 的 ${}_{\mathcal{F}}\mathrm{Aut}Q_2(p)$ 在 p 为奇数时是一个 K- 群。那么，以下情况之一成立：

(i) F $= \mathrm{F}_S(S : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(S))$; (ii) F $= \mathrm{F}_S(Q_1 : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$，其中 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)) \cong \mathrm{SL}_2(p^n)$; (iii) F $= \mathrm{F}_S(Q_2 : \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$，其中 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{SL}_2(p^{3n})$; (iv) F $= \mathrm{F}_S(G)$，其中 $F^*(G) = O^{p'}(G) = {}^3\mathrm{D}_4(p^n)$。

证明。若$\mathcal{E}(\mathcal{F}) = \emptyset$，则结论 (i) 成立。设 Q_1 是本质子群。由于$\Phi(Q_1)$ 是自中心化的，由三子群引理可知， p'-阶元素在 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1)$ 上忠实作用于 $\Phi(Q_1)$。由于 S 中心化 $\Phi(Q_1)/Z(Q_1)$，我们推得 p'-阶元素在 $O^{p'}(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 上忠实作用于 $Z(Q_1)$；又因为$C_S(Z(Q_1)) = Q_1$，由定理 2.21 可知，$Z(Q_1)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ 的自然模。若 Q_1 是唯一的本质子群，则结论 (ii) 成立。

设 Q_2 是本质子群。由于当 p 为奇数时 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)$ 是一个 K-群，且 $\mathrm{Out}_S(Q_2)$ 是阶为 q^3 的初等阿贝尔群，由引理 2.32、命题 2.33 以及 [PStr09, (2.5), (3.3)]（后者又用到 [GLS98, 定理 7.6.1]），可得 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong (\mathrm{P})SL_2(q^3)$。应用引理 2.32 和引理 2.30，对于 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$，在 $Q_2/Z(S)$ 中存在唯一的非平凡合成因子。令 $U :=$h$Z(Q_1)/Z(S)$ $^{\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_2)}$i。则 $C_U(\mathrm{Out}_S(Q_2)) = Z(Q_1)/Z(S)$ 的阶为 q；与引理 2.30 比较可知，要么 $U = Z(Q_1)/Z(S)$，且 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 在$Z(Q_1)/Z(S)$上平凡作用；要么 $U = Q_2/Z(S)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{SL}_2(q^3)$ 的三元性模。为导出矛盾，我们假设 $U = Z(Q_1)/Z(S)$。于是，对于 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$ 中的 p'-阶元素 r，由互素作用可得 $[r, Z(Q_1)] =$ {1}，再由三子群引理推出 $[r, Q_2] \leq Q_1 \cap Q_2$。由于 $Q_1 \cap Q_2/Z(Q_1)$ 的阶为 q^6，应用引理 2.30 可知，对于 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2))$， $Q_1 \cap Q_2/Z(Q_1)$ 是 $Q_2/Z(S)$ 中唯一的非平凡合成因子。由于 $\mathrm{Out}_S(Q_2)$ 在 $Q_1 \cap Q_2/Z(Q_1)$ 上是二次的，我们推得 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{SL}_2(q^3)$，且$Q_1 \cap Q_2/Z(Q_1)$ 具有自然模的结构。若 $p = 2$，则对所有 $x \in \mathrm{Out}_S(Q_2)$，有$|C_{Q_1 \cap Q_2/Z}(s)(x)| = q^4$；根据自然 $\mathrm{SL}_2(q)$-模的性质，我们得出 $C_{Q_1 \cap Q_2/Z}(s)(x) = \Phi(Q_1)/Z(S)$，这与 $[\Phi(Q_1)$、$\mathrm{Out}_S(Q_2)] = Z(Q_1)$ 矛盾。若 p 为奇数，则 $Q_1 \cap Q_2/Z(S)$ 分解为自然模与 $Z(Q_1)/Z(S) = C_{Q_1 \cap Q_2/Z}(s)(O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)))$ 的直和，因此我们再次推得 $C_{Q_1 \cap Q_2/Z}(s)(\mathrm{Out}_S(Q_2)) = \Phi(Q_1)/Z(S)$，再次矛盾。因此， $Q_2/Z(S)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)) \cong \mathrm{SL}_2(q^3)$ 的三元性模。若Q_1 不是本质子群，则结论 (iii) 成立。

因此，我们只剩下 $\mathrm{E}(\mathrm{F}) =$ {Q_1, Q_2} 这一情形。若 $O_p(\mathrm{F}) \neq$ {1}，则$O_p(\mathrm{F}) \cap Z(S) \neq$ {1}，并且由于 $Z(Q_1)$ 是 $O^{p'}(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_1))$ 的自然 $\mathrm{SL}_2(q)$-模，我们有 $Z(Q_1) \leq O_p(\mathrm{F})$。于是，由于 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q_2)$ 在 $Q_2/Z(S)$ 上不可约，我们推得 $Q_2 \leq O_p(\mathrm{F}) \not\leq Q_1$；根据 [AKO11，命题 I.4.5]，这构成矛盾。因此， $O_p(\mathrm{F}) =$ {1}，且根据推论 2.39，F 满足结论 (iv)。□

参考文献

[ABS90] H. Azad、M. Barry 和 G. Seitz。关于抛物子群的结构。《代数通讯》18.2 (1990)，第 551–562 页。[AKO11] M. Aschbacher、R. Kessar 和 B. Oliver。代数与拓扑中的融合系统。第 391 卷。剑桥大学出版社，2011 年。

[Ben71] H. Bender。在偶数阶传递群中，每个对合恰好固定一个点。代数杂志 17.4 (1971)，第 527–554 页。[BFM19] E. Baccanelli、C. Franchi 和 M. Mainardis。麦克劳克林群的西洛3-子群上的融合系统。群论杂志 22.4 (2019)，第 689–711 页。[CD91] A. Chermak 和 A. L. Delgado。局部 BN-对的 J-模。伦敦数学学会会刊 3.1 (1991)，第 69–112 页。[Cle07] M. R. Clelland。《饱和融合系统与有限群》。博士论文。伯明翰大学，2007 年。[DS85] A. Delgado 和 B. Stellmacher。《秩为 2 的弱(B,N)-对》，《群与图：新成果与方法》。A. Delgado、D. Goldschmidt 和 B. Stellmacher，Birkh ¨user，DMV研讨会。第 6 卷，1985 年。[GLS98] D. Gorenstein、R. Lyons 和 R. Solomon。《有限单群分类》第 3 卷。数学调查与专著。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯 40 (1998)。[Gor07] D. Gorenstein。有限群。第 301 卷。美国数学会，2007 年。[GS12] G. Glauberman 和 R. Solomon。a-稳定群的一个新的特征子群。代数杂志 368 (2012)，第 231–236 页。[Hen10] E. Henke。在融合系统中识别 $SL_2(q)$。群论杂志 13.5 (2010)，第 679–702 页。[Ho79] C.-Y. Ho。对于奇素数，两个不同的西洛 p-子群交集平凡的有限群。日本数学会杂志 31.4 (1979)，第 669–675 页。[Hup13] B. Huppert。《有限群I》。第 134 卷。施普林格出版社，2013 年。[Kan80] W. M. Kantor。含有辛格循环的线性群。代数杂志 62.1 (1980)，第 232–234 页。[Kor15a] V. V Korableva。关于群 ${}^3D_4(q^3)$的抛物型极大子群的主因子。俄罗斯科学院乌拉尔分院数学与力学研究所学报 21.3 (2015)，第 187–191 页。[Kor15b] V. V Korableva。关于扭曲经典群的极大抛物子群的主因子。西伯利亚数学杂志 56.5 (2015)，第 879–887 页。[Kor21] V. V Korableva。关于群 ${}^2F_4(2^{2n+1})$的抛物型极大子群的主因子。斯捷克洛夫数学研究所会刊 313.1 (2021)，S133–S139。[Mon22] R. M. Moncho。$SU_4(p)$的西洛 p-子群上的融合系统。代数杂志 589 (2022)，第 188–214 页。[Par73] D. Parrott。李群 ${}^2F_4(q)$ 的一个刻画。代数杂志 27.2 (1973)，第 341–357 页。[PR06] C. Parker 和 P. Rowley。弱BN-对的局部特征 p 完备化。伦敦数学学会会刊 93.2 (2006)，第 325–394 页。[PR12] C. Parker 和 P. Rowley。辛融合积。施普林格科学与商业媒体，2012 年。[PS15] C. Parker 和 G. Stroth。与群 $Sp_4(p^a)$ 和 $G_2(p^a)$ 相关的一族融合系统。数学档案 104.4 (2015)，第 311–323 页。

[PS18] C. Parker 和 J. Semeraro. 关于 $G_2(p)$ 的 Sylow p-子群上的融合系统。数学杂志 289.1-2（2018），第 629–662 页。[PS21] C. Parker 和 J. Semeraro. 融合系统算法及其在小阶 p-群中的应用。计算数学 （2021）。[PStr09] C. Parker 和 G. Stroth. 强 p嵌入子群。纯粹与应用数学季刊 7.3（2009），第 797–858 页。[Pui76] L. Puig。《有限群中的局部结构》。法国数学学会，1976 年。[RV04] A. Ruiz 和 A. Viruel. 关于阶为 p^3、指数为 p 的特异群上的 p-局部有限群的分类。数学杂志248.1（2004），第 45–65 页。[vBe21] M. van Beek. “局部群论、融合积方法与融合系统”。博士论文。伯明翰大学，2021 年。[vBe23] M. van Beek. 关于 $G_2(p^n)$ 或 $PSU_4(p^n)$ 的 Sylow p-子群上的融合系统。代数杂志 614（2023），第 20–70 页。

艾伦·图灵大楼，曼彻斯特大学，英国，M13 9PL电子邮箱地址：
martin.vanbeek@manchester.ac.uk