arXiv:2302.02229v1 [math-ph] 4 Feb 2023

费米子高斯态的纠缠容量

Youyi Huang 和 Lu Wei德克萨斯理工大学计算机科学系，德克萨斯州79409，美国

电子邮箱： {youhuang,luwei}@ttu.edu

2023年2月

摘要。我们研究纠缠容量，将其作为纠缠熵的替代指标，用于估计费米子高斯态下量子双部系统的纠缠程度。具体而言，我们推导了两种不同情形下平均容量的精确公式和渐近公式：有粒子数约束和无粒子数约束。对于后一种情形，所得公式推广了文献中关于平均容量的一些部分结果。推导这些结果的关键，是一套近期在研究费米子高斯态的纠缠熵时开发的、用于简化有限求和的新工具。

关键词：量子纠缠、纠缠容量、费米子高斯态、随机矩阵理论、正交多项式、特殊函数

1. 引言

纠缠是量子力学的基本特征，也是推动量子信息处理这一新兴技术发展的资源。要成功利用量子革命带来的进步，理解纠缠至关重要。过去几十年间，人们在估算不同通用态模型中的纠缠程度方面取得了显著进展，其中研究最广泛的领域之一，是基于熵的估算方法，例如将冯·诺依曼熵 [1–11]，、量子纯度 [7, 12–16]，和 Tsallis 熵 [17, 18] 用作纠缠指标。这些研究主要关注通用态模型中纠缠熵的统计行为，例如著名的希尔伯特-施密特系综 [1–6, 8, 11, 12, 15, 17, 18]，、Bures-Hall 系综 [7, 9, 10, 13, 14, 16, 19], 以及费米子高斯系综 [20–23]。除熵之外，人们也日益关注将纠缠容量作为另一种纠缠度量。与作为热熵类比的纠缠熵类似，文献 [24] 中引入的纠缠容量可类比于热容。它也被视为区分可积系统与混沌系统的临界值 [25]。文献中已通过数值方法研究了纠缠容量的不同性质 [25, 26]。此外，近期已获得希尔伯特-施密特系综 [27–29] 和 Bures-Hall 系综 [29]的平均容量精确公式。对于不受粒子数约束的费米子高斯系综，已有研究推导出子系统维数相等时的平均容量 [21, 30]，，而维数不等的一般情形下相应的精确公式仍未解决。

本文计算了在有粒子数约束和无粒子数约束两种情况下，适用于任意子系统维数的费米子高斯态的精确平均纠缠容量。近期在研究费米子高斯系综的冯·诺依曼熵时发展出的一套简化有限求和的工具，是获得这些结果的关键。 [23] 我们的精确结果还给出了子系统维数趋于无穷大且维数差固定时平均容量的极限值。我们通过模拟对所得结果进行了数值验证。

本文其余部分安排如下。第2节首先概述问题表述，随后分别在命题1和命题2中给出固定粒子数和任意粒子数情况下平均容量的精确结果。相应的渐近容量公式见推论1。第3节给出这些结果的证明。附录 A 列出证明中涉及的积分的求和表示。附录 B 列出化简过程中用到的求和恒等式。附录C 给出推导中若干中间结果的系数。

2. 问题表述与主要结果

2.1. 问题表述

我们首先介绍问题表述，由此得到有粒子数约束和无粒子数约束时费米子高斯态的纠缠容量，以及相应的统计系综。

一个具有 N 个费米子自由度的系统，可以用一组费米子产生与湮灭算符 $\hat{a}_i$ 和 $\hat{a}_i^\dagger$, $i = 1, \ldots, N$ 来表述，它们满足正则反对易关系，

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}\mathbb{I}, \qquad \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0 = \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\}, \tag{1}$$

其中 $\{A, B\} = AB + BA$ 表示反对易关系，$\mathbb{I}$ 表示恒等算符。这些费米子模式也可以用马约拉纳算符 γ_l, $l = 1, \ldots, 2N$ 等价地描述，并且

$$\hat{\gamma}_{2i-1} = \frac{\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{\gamma}_{2i} = \imath\frac{\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

其中 $\imath = \sqrt{-1}$ 表示虚数单位。马约拉纳算符也满足反对易关系

$$\{\hat{\gamma}_l, \hat{\gamma}_k\} = \delta_{lk}\mathbb{I}. \tag{3}$$

将马约拉纳算符收集成一个 $2N$ 维算符值列向量 $\gamma = (\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_{2N})^\dagger$ 后，费米子高斯态系统便可由如下形式的密度算符刻画：[22, 31]

$$\rho(\gamma) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma^\dagger Q\gamma}}{\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-\gamma^\dagger Q\gamma})}, \tag{4}$$

其中，系数矩阵 Q 是一个 $2N \times 2N$ 虚反对称矩阵，这是反对易关系 (3) 的结果。

– 无粒子数约束下费米子高斯态的纠缠容量

总存在一个正交矩阵 M，通过将 γ 变换为另一个马约拉纳基 $\mu = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_{2N})^\dagger = M\gamma$ 来对系数矩阵 Q 进行对角化。任意粒子数的费米子高斯态由反对称协方差矩阵 [22] 确定。

$$J = -\imath\tanh(Q) = M^T J_0 M, \tag{5}$$

其中，tanh(x) 表示双曲正切函数 [32], 矩阵 J_0 采用分块对角形式

$$J_0 = \begin{pmatrix} \tanh(\lambda_1)\mathbb{A} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \tanh(\lambda_N)\mathbb{A} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

and

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

在量子双部模型 [33], 中， N 个费米子自由度组成的系统可分解为两个子系统 A 和 B ，其维度分别为 m 和n，其中 $m+n=N$。不失一般性，我们假设 $m \leq n$。将矩阵 J 限制为子系统 A中的元素后，受限协方差矩阵 J_A 就是 J的 $2m \times 2m$ 左上块。纠缠容量可通过 $\imath J_A$的实正特征值 x_i、 $i=1$、.....、 m 表示为 [25, 26, 30]

$$C = \sum_{i=1}^{m} u(x_i) \tag{8}$$

with

$$u(x) = \frac{1-x^2}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x}. \tag{9}$$

由此得到的特征值 x_i、 $i=1$、.....、 m 的联合概率密度正比于 [20]

$$\prod_{1 \leq i < j \leq m} \left(x_i^2 - x_j^2\right)^2 \prod_{i=1}^{m} \left(1-x_i^2\right)^{n-m}, \qquad x_i \in [0,1], \tag{10}$$

wh该结果通过递归应用命题 A.2] [34, 得到。

– 满足粒子数约束的费米子高斯态的纠缠容量

对于具有固定粒子数 p 的费米子高斯态 $|F\rangle$ ，使用费米子产生与湮灭算符来表述更为方便，相应的协方差矩阵可表示为 [22, 35, 36]

$$H_{ij} = -\imath \langle F| \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger |F\rangle . \tag{11}$$

使用 t 根据反对易关系 (1)，矩阵 H 的元素随后变为 e

$$H_{ij} = -2\imath G_{ij} + \imath \delta_{ij}, \tag{12}$$

其中， $G_{ij} = \langle F| \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j |F\rangle$表示一个 $N \times N$矩阵 G 的元素。总存在一个酉变换 U ，可将 G对角化。所得对角形式中，前p 个元素等于 1，其余元素均为 0。因此，可以写成

$$G = U_{N\times p} U_{N\times p}^\dagger. \tag{13}$$

设 y_i, $i = 1, \ldots, m$ 为限制矩阵$G_A = U_{m\times p} U_{m\times p}^\dagger$的特征值，则纠缠容量可表示为 y_i 的函数 [26]

$$C = -\sum_{i=1}^{m} u(2y_i - 1), \qquad y_i \in [0,1]. \tag{14}$$

随机矩阵$U_{m\times p}U_{m\times p}^{\dagger}$ 的特征值分布是众所周知的 Jacobi酉系综 [37, 38]。在这里，使用矩阵 $\imath H$的特征值更为方便。设 x_i, $i=1,\ldots,m$为矩阵 $\imath H$的 $m\times m$ 左上角块的特征值，对式 (14) 进行变量代换 $x_i=2y_i-1$，即可得到固定粒子数情况下的纠缠容量 (8)。由此得到的特征值 $x_i, i=1,\ldots,m$的联合概率密度正比于 [39]

$$\prod_{1\le i<j\le m}(x_i-x_j)^2\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)^{p-m}(1-x_i)^{n-p},\qquad x_i\in[-1,1]. \tag{15}$$

在 [23] 中已介绍，联合概率密度 (10) 和 (15) 可以简洁地表示为一个联合密度:

$$f_{\mathrm{FG}}(x)\propto\prod_{1\le i<j\le m}\left(x_i^{\gamma}-x_j^{\gamma}\right)^2\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)^a(1+x_i)^b. \tag{16}$$

现在可以利用上述密度 (16) 方便地区分所考虑的两种费米子高斯态情形，其中

$$\gamma=1,\quad a=n-p\ge 0,\quad b=p-m\ge 0,\quad x\in[-1,1] \tag{17}$$

对于具有任意粒子数的费米子高斯态，

$$\gamma=2,\quad a=b=n-m\ge 0,\quad x\in[0,1] \tag{18}$$

对于具有固定粒子数的费米子高斯态。请注意，下面将分别计算这两种情形的平均容量，因为对于 (16) 中任意 γ 的计算似乎很困难。我们省略了 (16) 中的归一化常数，因为计算中不会用到它们。

2.2. 主要结果

现在，我们给出固定粒子数和任意粒子数情况下费米子高斯态的精确平均容量和渐近平均容量的主要结果。

命题1 将求和 $\Phi_{c,d}$ 记为

$$\Phi_{c,d}=\frac{c!}{(c+d)!}\sum_{k=1}^{c}\frac{(c+d-k)!}{(c-k)!}\frac{1}{k^2},\qquad c,d\in\mathbb{Z}^+, \tag{19}$$

并将函数 $F(a,b)$ 记为

$$F(a,b)=\alpha_0\Big(2\Phi_{a+m,b}+2\Phi_{m,a}+\psi_1(a+b+m+1)+\psi_1(a+m+1)+(\psi_0(a+m+1)-\psi_0(a+b+m+1))^2-\psi_1(1)\Big)+\alpha_1\psi_0(a+m+1)+\alpha_2\psi_0(a+1)+\alpha_3, \tag{20}$$

其中系数 α_i 为

$$\alpha_0=\frac{m(a+m)(b+m)(a+b+m)}{(a+b+2m-1)_3} \tag{21}$$

$$\alpha_1=\frac{(a+b)(a+m-1)(a+m)}{(a+b+2m-1)_2} \tag{22}$$

$$\alpha_2 = -\frac{a\left(a^2+ab+2am-a+2bm-b+2m^2-2m\right)}{(a+b+2m-1)_2} \tag{23}$$

$$\alpha_3 = \frac{m(a+m-1)}{(a+b+2m-1)_2} - \frac{m}{2}. \tag{24}$$

那么，对于任意子系统维数 $m \le n$，具有固定粒子数（17）的费米子高斯态的纠缠容量（8）的平均值为

$$\mathbb{E}[C] = F(p-m, n-p) + F(n-p, p-m). \tag{25}$$

在命题1中，

$$\psi_0(x) = \frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(x)}{\mathrm{d}x} \tag{26}$$

and

$$\psi_1(x) = \frac{\mathrm{d}^2\ln\Gamma(x)}{\mathrm{d}^2x} \tag{27}$$

分别表示双伽马函数和三伽马函数，并且

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{28}$$

表示 Pochhammer 符号。命题1的证明见第3.1节。注意，对于任意的 c 和 d，式（19）中的求和 $\Phi_{c,\,d}$ 一般无法写成闭式表示。另一方面，正如下文的注中所述，在某些特殊情况下，求和 $\Phi_{c,\,d}$ 可以进一步化简。

注1 将 $i \to k$、$m \to c$、$n \to c+d$ 代入恒等式（B.12）后，式（19）中的求和$\Phi_{c,\,d}$可写成另一种形式

$$\sum_{k=1}^{c} \frac{\psi_0(k+d)}{k} + \mathrm{CF}, \tag{29}$$

其中，CF 表示 (B.12) 括号中的闭式项。式 (29) 中的求和可能无法求得闭式表达式，因此称为不可化简基 *[6,8,10,11,21,23,29]*。然而，在给定整数 d的特殊情况下，利用恒等式 (B.3) 可以得到闭式表示。这对应于固定差值 $a = n-p$, $b = p-m$ 的情况，此时平均容量 (25) 可得到更明确的表达式。下面分别以 $a = b = 0$、1、2 为例说明

$$\mathbb{E}[C] = -\frac{2m^3}{(2m-1)(2m+1)}\left(\psi_1(m+1) - \frac{\pi^2}{4}\right) - \frac{2m^2-2m+1}{2m-1} \tag{30}$$

$$\mathbb{E}[C] = -\frac{2m(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)}\left(\psi_1(m+1) - \frac{\pi^2}{4}\right) - \frac{m(2m(m+3)+5)}{(m+1)(2m+3)} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C] = &-\frac{2m(m+2)(m+4)}{(2m+3)(2m+5)}\left(\psi_1(m+1) - \frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{4}{(m+1)(m+3)} \\ &\times\left(\psi_0(m+1) - \psi_0(1)\right) - \frac{m\left(m^2+4m+5\right)\left(4m^3+30m^2+72m+57\right)}{(2m+3)(2m+5)(m+1)_3}.\end{aligned} \tag{32}$$

命题2 对于任意子系统维数 $m \leq n$，粒子数任意的费米子高斯态 (18) 的纠缠容量 (8) 的平均值为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C] &= \beta\left(\Phi_{2m-1,n-m}+\Phi_{m+n-1,n-m}\right)+\frac{1}{4}\left(\Phi_{m-1,n}+\Phi_{m-1,n-m}\right)+\left(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{8}\right)\\ &\times\psi_1(m+n)+\frac{1}{8}\psi_1(n)+\frac{\beta}{2}\left(\left(\psi_0(2n)-\psi_0(m+n)\right)^2+\psi_1(2n)-\psi_1(1)\right)\\ &+\frac{1}{8}\left(\psi_0(n)-\psi_0(m+n)\right)^2+\frac{n-m}{2}\left(\psi_0(m+n)-\psi_0(n-m)\right)-m, \qquad (33)\end{aligned}$$

其中 $\Phi_{a,\ b}$ 在式 (19) 中定义，系数 β 由下式给出

$$\beta=\frac{(2m-1)(2n-1)}{4m+4n-2}. \qquad (34)$$

命题2在第 3.2 节中证明。值得指出的是，在推导结果 (25) 和 (33) 时，我们用到了附录 A 中的引理 1–4 [23] ，相关内容也将在第 3.1.2 节中讨论。这四个引理是近期在研究冯·诺依曼熵的精确方差时提出的一种新简化框架的实例 [23]。这一新框架包含一组新颖的工具，可用于简化相关求和，包括附录 A 中的 (A.3)、(A.4) 和 (A.7)。使用现有的简化工具计算希尔伯特-施密特系综 $[6,8,11]$ 或 Bures-Hall 系综 $[9,10,16]$时，这些求和无法进一步简化。对于命题2，我们还有以下说明。

注 2 出于与注1相同的原因，当子系统维数之差 $a=n-m$固定时，结果 (33) 在特殊情况下可表示为闭式形式。例如，在 (33) 中令 $a=0$,1,2,3 固定，我们便可得到近期推导出的平均容量值 *[21,* 方程 (27)–(30)*]*。

基于这两个命题，现在可以得到平均容量的极限行为。结果总结于下文的推论1中，相应的证明见第3.3节。

C推论1 对于渐近区域中的任意子系统维数 $m \leq n$ e

$$m\to\infty,\quad n\to\infty,\quad with\ a\ fixed\ n-m, \qquad (35)$$

具有固定粒子数的费米子高斯态的平均纠缠容量 (25) 与具有任意粒子数的费米子高斯态的平均纠缠容量 (33) 趋于相同的极限

$$\frac{\mathbb{E}[C]}{m}\longrightarrow\frac{\pi^2}{8}-1. \qquad (36)$$

在推论1中，我们指出，对于固定粒子数的情况，在极限（35）中，粒子数 p 也以与 m 和 n 相同的速率趋于无穷大。对于任意粒子数的情况，极限值（36）也称为体积律主导系数；对于子系统维数相等的情形，该结果最早由 [30] 获得。在这里，我们从显式的

结果（33）出发，将其严格推广到了更一般的情形（35）。我们还注意到一个有趣的事实：尽管两个底层模型存在根本差异，情形（17）和（18）的极限值（36）却相同。

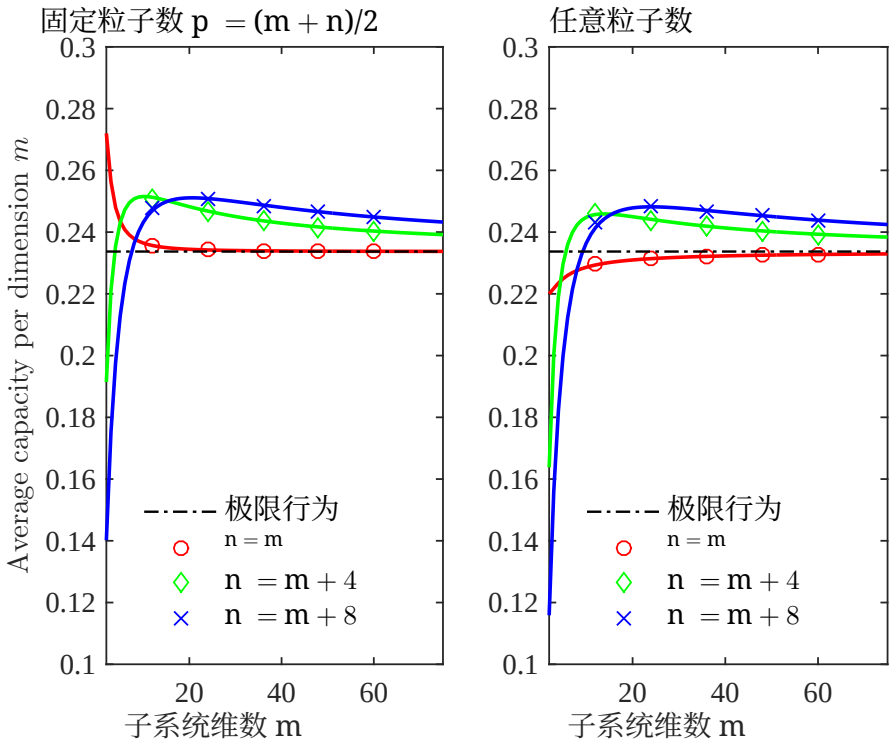

图1：有粒子数约束和无粒子数约束的费米子高斯态的纠缠容量（每维）平均值：解析结果与模拟的对比。实线由精确容量公式（25）和（33）绘制，点划水平线表示平均容量的极限行为（36）。圆形、菱形和星号标记对应的散点来自数值模拟。

为说明所得结果，我们在图1中绘制了精确公式 (25) 和 (33) 除以维数后的结果 m，对应固定的子系统维数差 $n-m=0$、4、8，并同时绘出渐近值 (36)。左图对应粒子数固定为 $p=(m+n)/2$ 的情况，右图则对应任意粒子数的情况。可以观察到，随着维数差 $n-m$ 增大，平均容量 (25) 和 (33) 趋近极限值 (36) 的速度更慢。这表明，当维数差 $n-m$ 较大时，有限尺寸容量公式更有用，参见 [29],；否则，渐近值 (36) 可作为相当准确的近似。我们还在图1中绘制了模拟得到的平均容量，其与解析结果吻合良好。

3. 平均容量的计算

本节证明上一节给出的结果。命题1中固定粒子数的费米子高斯态纠缠容量平均值公式将在第3.1节中推导。命题2中任意粒子数情形的计算在第3.2节中进行。推论1中的平均容量极限值在第3.3节中证明。

3.1. 平均　　粒子数约束下费米子高斯态的容量

在此，我们计算粒子数约束（17）下费米子高斯态的纠缠容量（8）的平均值。计算主要分为两部分。第一部分是得到平均容量的求和表示，如第3.1.1节所示。随后，在第 3.1.2 节中，我们对这些求和进行化简，从而得到命题1中的所需结果（25）。

3.1.1. 关联函数与积分计算 回顾纠缠容量（8）的定义

$$C = \sum_{i=1}^{m} u(x_i) \tag{37}$$

with

$$u(x) = \frac{1-x^2}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x}, \tag{38}$$

计算其平均值需要费米子高斯系综中任意一个特征值的概率密度函数。将 $g_l(x_1, \ldots, x_l)$ 记作 l 个任意特征值的联合密度，则平均容量可写为

$$\mathbb{E}[C] = m \int_{-1}^{1} u(x) g_1(x) \, \mathrm{d}x. \tag{39}$$

当 $\gamma = 1$ 时，系综 (16) 就是著名的 Jacobi酉系综。此时，联合密度 $g_l(x_1, \ldots, x_l)$ 可写成一个 $l \times l$ 阶行列式的形式，即 [37,38]

$$g_l(x_1, \ldots, x_l) = \frac{(m-l)!}{m!} \det \left(K(x_i, x_j) \right)_{i,j=1}^{l}. \tag{40}$$

(40) 中的行列式称为 l 点关联函数 [38], ，其中

$$K(x, y) = \sqrt{w(x) w(y)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{J_k^{(a,b)}(x) J_k^{(a,b)}(y)}{h_k} \tag{41}$$

是关联核，其权函数为

$$w(x) = \left(\frac{1-x}{2} \right)^a \left(\frac{1+x}{2} \right)^b. \tag{42}$$

在（41）中，多项式 $J_k^{(a,b)}(x)$ 是定义在 $x \in [-1, 1]$ 上的雅可比多项式，并且

$$h_k = \frac{2\Gamma(k+a+1)\Gamma(k+b+1)}{(2k+a+b+1)\Gamma(k+1)\Gamma(k+a+b+1)} \tag{43}$$

是归一化常数，它由雅可比多项式的正交关系 [38] 得到

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{b}J_{k}^{(a,b)}(x)J_{l}^{(a,b)}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2\Gamma(k+a+1)\Gamma(k+b+1)}{(2k+a+b+1)\Gamma(k+1)\Gamma(k+a+b+1)}\delta_{kl},\quad \Re(a,b)>-1. \tag{44}$$

将式 (9) 中的函数 $u(x)$ 改写为

$$u(x)=\frac{1+x}{2}\ln^{2}\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}\ln^{2}\frac{1-x}{2}$$
$$-\left(\frac{1+x}{2}\ln\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}\ln\frac{1-x}{2}\right)^{2}, \tag{45}$$

平均容量 (39) 可归结为计算涉及单点关联函数的两个积分，参见 [21], :

$$\mathbb{E}[C]=\mathrm{I}_{\mathcal{C}}-\mathrm{I}_{\mathcal{A}}, \tag{46}$$

其中

$$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{2}\ln^{2}\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}\ln^{2}\frac{1-x}{2}\right)K(x,x)\,\mathrm{d}x \tag{47}$$
$$\mathrm{I}_{\mathcal{A}}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{2}\ln\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}\ln\frac{1-x}{2}\right)^{2}K(x,x)\,\mathrm{d}x. \tag{48}$$

根据关联核 (41) 的定义，式 (47) 中的积分 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ 可进一步写为

$$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{h_k}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{2}\ln^{2}\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}\ln^{2}\frac{1-x}{2}\right)$$
$$\times\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{b}J_{k}^{(a,b)}(x)^{2}\,\mathrm{d}x. \tag{49}$$

类似地，式 (48) 中的积分 $\mathrm{I}_{\mathcal{A}}$ 现在由两部分组成

$$\mathrm{I}_{\mathcal{A}}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2, \tag{50}$$

其中

$$\mathcal{A}_1=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{h_k}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2}\ln^{2}\frac{1+x}{2}+\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2}\ln^{2}\frac{1-x}{2}\right)$$
$$\times\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{b}J_{k}^{(a,b)}(x)^{2}\,\mathrm{d}x \tag{51}$$
$$\mathcal{A}_2=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2}{h_k}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a+1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+1}\ln\frac{1-x}{2}\ln\frac{1+x}{2}J_{k}^{(a,b)}(x)^{2}\,\mathrm{d}x. \tag{52}$$

这里，我们回顾一下式（17）中的 $a=n-p\geq 0$ 和 $b=p-m\geq 0$。由于雅可比多项式的奇偶性， [40]

$$J_{k}^{(a,b)}(-x)=(-1)^{k}J_{k}^{(b,a)}(x), \tag{53}$$

积分 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ 和 $\mathcal{A}_1$ 具有以下对称结构

$$\mathrm{I}_{\mathcal{C}} = \mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)} + \mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(b,a)} \tag{54}$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^{(a,b)} + \mathcal{A}_1^{(b,a)}, \tag{55}$$

其中

$$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+1} \ln^2 \frac{1+x}{2} J_k^{(a,b)}(x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{56}$$

$$\mathcal{A}_1^{(a,b)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+2} \ln^2 \frac{1+x}{2} J_k^{(a,b)}(x)^2 \,\mathrm{d}x. \tag{57}$$

式（52）、（56）和（57）中的求和可以使用克里斯托费尔-达布公式的合流形式求得 [38]

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{J_k^{(a,b)}(x)^2}{h_k} = \alpha_1 J_{m-1}^{(a+1,b+1)}(x) J_{m-1}^{(a,b)}(x) - \alpha_2 J_{m-2}^{(a+1,b+1)}(x) J_m^{(a,b)}(x), \tag{58}$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{m(a+b+m)(a+b+m+1)}{h_{m-1}(a+b+2m-1)_2} \tag{59}$$

$$\alpha_2 = \frac{m(a+b+m)^2}{h_{m-1}(a+b+2m-1)_2}. \tag{60}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)} = {} & \alpha_1 \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+1} \ln^2 \frac{1+x}{2} J_{m-1}^{(a+1,b+1)}(x) J_{m-1}^{(a,b)}(x) \,\mathrm{d}x \\ & - \alpha_2 \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+1} \ln^2 \frac{1+x}{2} J_{m-2}^{(a+1,b+1)}(x) J_m^{(a,b)}(x) \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1^{(a,b)} = {} & \alpha_1 \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+2} \ln^2 \frac{1+x}{2} J_{m-1}^{(a+1,b+1)}(x) J_{m-1}^{(a,b)}(x) \,\mathrm{d}x \\ & - \alpha_2 \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+2} \ln^2 \frac{1+x}{2} J_{m-2}^{(a+1,b+1)}(x) J_m^{(a,b)}(x) \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{62}$$

and

$$\mathcal{A}_2 = 2\alpha_1 \mathcal{A}_2(m-1, m-1) - 2\alpha_2 \mathcal{A}_2(m-2, m), \tag{63}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(m-1, m-1) = {} & \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{a+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+1} \\ & \times \ln \frac{1-x}{2} \ln \frac{1+x}{2} J_{m-1}^{(a+1,b+1)}(x) J_{m-1}^{(a,b)}(x) \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(m-2, m) = {} & \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{a+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{b+1} \\ & \times \ln \frac{1-x}{2} \ln \frac{1+x}{2} J_{m-2}^{(a+1,b+1)}(x) J_m^{(a,b)}(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{65}$$

计算式（61）–（62）中的上述积分 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)}$ 和 $\mathcal{A}_1^{(a,b)}$ 需要用到以下积分恒等式

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a_1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{c}J_{k_1}^{(a_1,b_1)}(x)J_{k_2}^{(a_2,b_2)}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2\left(k_1+1\right)_{a_1}}{\left(b_2+k_2+1\right)_{a_2}}\sum_{i=0}^{k_2}\frac{(-1)^{i+k_2}(i+1)_c\left(i+b_2+1\right)_{a_2+k_2}}{\Gamma\left(k_2-i+1\right)\Gamma\left(a_1+c+i+k_1+2\right)}\\&\quad\times\left(c+i-b_1-k_1+1\right)_{k_1},\quad\Re(a_1,a_2,b_1,b_2,c)>-1.\end{aligned}\tag{66}$$

为证明这一恒等式，我们首先注意到，$J_k^{(a,b)}(x)$中所用的雅可比多项式$x\in[-1,1]$有不同的表示形式 [38, 40]

$$J_k^{(a,b)}(x)=\frac{(-1)^k(b+1)_k}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-k)_i(k+a+b+1)_i}{(b+1)_i\Gamma(i+1)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^i\tag{67}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i\Gamma(a+k+1)(k+b-i+1)_i}{\Gamma(i+1)\Gamma(a+i+1)\Gamma(k-i+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^i\left(\frac{1+x}{2}\right)^{k-i}.\tag{68}$$

随后，先利用定义 (67) 得到多项式 $J^{(a_2,b_2)}{}_{k_2}$，再应用众所周知的积分恒等式 [38, 40]，即可得到恒等式 (66)

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{c}J_k^{(a,b)}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2\Gamma(c+1)(k+1)_a(c-b-k+1)_k}{\Gamma(a+c+k+2)},\quad\Re(a,b,c)>-1.\end{aligned}\tag{69}$$

在 (66) 中，通过取特定值

$$a_1=a,\quad a_2=a+1,\quad b_1=b,\quad b_2=b+1,\quad k_1=k_2=m-1\tag{70}$$

使得

$$J_{k_1}^{(a_1,b_1)}(x)\to J_{m-1}^{(a,b)}(x),\qquad J_{k_2}^{(a_2,b_2)}(x)\to J_{m-1}^{(a+1,b+1)}(x),\tag{71}$$

现在，可以先对参数 c 求二阶导数，再令 $c=b+1$，从而利用特化后的恒等式 (66) 计算 (61) 中的第一个积分。(61)–(62) 中的其他积分也以同样的方式计算。

要计算（63）中的积分 $\mathcal{A}_2$，还需要另一个积分恒等式

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{d}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{c}J_{k_1}^{(a_1,b_1)}J_{k_2}^{(a_2,b_2)}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2\Gamma\left(a_2+k_2+1\right)\Gamma\left(b_2+k_2+1\right)}{\Gamma\left(c+d+k_1+k_2+2\right)}\sum_{i=0}^{k_2}\frac{(-1)^i\Gamma\left(d-a_1+i+1\right)}{\Gamma(i+1)\Gamma\left(a_2+i+1\right)}\\&\quad\times\frac{\Gamma\left(c-b_1-i+k_2+1\right)}{\Gamma\left(k_2-i+1\right)\Gamma\left(b_2-i+k_2+1\right)}\sum_{j=0}^{k_1}\frac{(-1)^j\left(k_1-j+1\right)_{d+i}}{\Gamma(j+1)}\\&\quad\times\frac{\left(c-i+j-b_1-k_1+k_2+1\right)_{b_1+k_1}}{\Gamma\left(d-a_1+i-j+1\right)},\quad\Re(a_1,a_2,b_1,b_2,c,d)>-1,\end{aligned}\tag{72}$$

该恒等式是通过使用多项式 $J^{(a_2,b_2)}{}_{k_2}$ 的定义（68）得到的，然后再应用恒等式 [21, 方程（62）]

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{d}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{c}J_{k}^{(a,b)}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2\Gamma(c-b+1)\Gamma(d-a+1)}{\Gamma(c+d+k+2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{i}\Gamma(c+i+1)\Gamma(d-i+k+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(k-i+1)}\\&\quad\times\frac{1}{\Gamma(d-a-i+1)\Gamma(c-b+i-k+1)},\quad\Re(a,b,c,d)>-1.\end{aligned}\tag{73}$$

$\mathcal{A}_2$ 中的两个积分 (64) 和 (65)，通过对恒等式 (72) 关于 c 和 d 求导，并分别代入特化条件 (70) 和

$$a_1=a,\quad b_1=b,\quad a_2=a+1,\quad b_2=b+1,\quad k_1=m,\quad k_2=m-2,\tag{74}$$

，然后令 $c=b+1$、$d=a+1$，即可计算得到。

写出 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)}$、$\mathcal{A}_1^{(a,b)}$ 和 $\mathcal{A}_2^{(a,b)}$ 的求和形式时，还需利用以下负自变量伽马函数和多伽马函数的渐近展开来消除不定性：当 $\epsilon\to 0$ 时，[32]

$$\Gamma(-l+\epsilon)\;=\frac{(-1)^{l}}{l!\epsilon}\left(1+\psi_0(l+1)\epsilon+o\left(\epsilon^{2}\right)\right)\tag{75}$$

$$\psi_0(-l+\epsilon)=-\frac{1}{\epsilon}+\psi_0(l+1)+\left(2\psi_1(1)-\psi_1(l+1)\right)\epsilon+o\left(\epsilon^{2}\right)\tag{76}$$

$$\psi_1(-l+\epsilon)=\frac{1}{\epsilon^{2}}-\psi_1(l+1)+\psi_1(1)+\zeta(2)+o\left(\epsilon\right).\tag{77}$$

$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)}$、$\mathcal{A}_1^{(a,b)}$ 和 $\mathcal{A}_2$ 的求和形式总结于附录 A.1 中的 (A.1)–(A.4)。

3.1.2. 求和化简 计算平均容量的剩余任务

$$\mathbb{E}[C]=\mathrm{I}_{\mathcal{C}}-\mathrm{I}_{\mathcal{A}},\tag{78}$$

旨在简化（A.1）–（A.4）中的求和。在接下来的计算中，我们首先通过简化求和（A.1）得到 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$，而 $\mathrm{I}_{\mathcal{A}}$ 则通过简化求和（A.2）–（A.4）得到。

我们首先化简式 (A.1) 中的求和。注意，式 (A.1) 中的前两个求和是由多伽马函数和有理函数构成的单重和，而最后一个求和可以直接化为闭式表达式。利用恒等式 (B.1)–(B.8)，并考虑到对称结构，可以化简这两个单重求和

(54)

$$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}=\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{(\mathrm{a,b})}+\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{(\mathrm{b,a})},\tag{79}$$

as

$$\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{(\mathrm{a,b})}=a_0\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{b+k}-a_1\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{k}+a_1\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(b+k)}{k}+a_2$$

$$\times\Big(\psi_0^2(a+b+2m)-\psi_0(a+b+m)\psi_0(a+b+2m)-\psi_0(a+b+2m)$$
$$\times\psi_0(b+m)\Big)+a_0\psi_0(b)\psi_0(a+b+m)+\frac{a_1}{2}\Big(\psi_1(b)-\psi_1(a+b+m)$$
$$+\psi_0(a+b+m)\left(\psi_0(a+b+m)+2\psi_0(m)-2\psi_0(1)\right)+2\psi_0(b)(\psi_0(b+m)$$
$$-\psi_0(m)+\psi_0(1))-\psi_0^2(b)\Big)+a_3\psi_0(a+b+2m)+a_4\psi_0(a+b+m)$$
$$+a_5\psi_0(b+m)+a_6\psi_0(b)+a_7, \tag{80}$$

其中，系数 a_i 总结于附录C.1的式 (C.1)–(C.8) 中。

现在，我们通过恒等式 (B.1)–(B.8) 化简求和式 (A.2)–(A.4)，以求得 $\mathrm{I}_{\mathcal{A}}$。利用恒等式 (B.1)–(B.8)，可将求和式 (A.2) 化简为与结果 (80) 类似的形式。根据 (55)，将 (A.2) 的结果与其对称形式相加，即可得到积分 $\mathcal{A}_1$。继续化简求和式 (A.3) 和 (A.4) 需要以下四个引理。

引理 1 对于任意复数 a、b、$c\notin\mathbb{Z}^-$，有

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(i)\Gamma(a+i)\Gamma(m+1-i)\Gamma(m+b+1-i)(c+i)}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(b+m)\Gamma(c+m+1)\Gamma(a+b+m)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(c-i+m+1)\Gamma(a+b-i+2m)}{\Gamma(m-i+1)\Gamma(a-i+m+1)}. \tag{81}$$

引理 2 对于任意复数 a、$b\notin\mathbb{Z}^-$ 以及任意 $c\in\mathbb{Z}^+$，有

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(c+i)\Gamma(a+i)\Gamma(m+1-i)\Gamma(m+b+1-i)}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(m+b)\Gamma(m+a+b)\Gamma(c)\Gamma(m+c)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(m+a+b+i-1)\Gamma(m+c-i)}{\Gamma(a+i)\Gamma(m-i+1)}. \tag{82}$$

引理 3 对于任意复数 a、$b\notin\mathbb{Z}^-$ 以及任意 $c\in\mathbb{Z}^+$，有

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(c+i)\Gamma(a+i)\Gamma(m-i+1)\Gamma(b-i+m+1)i}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a+m)\Gamma(1+b+m)\Gamma(b+c+m)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(a-i+m)\Gamma(b+c+i+m)}{\Gamma(c+i)\Gamma(m-i+1)i}$$
$$+\frac{\psi_0(a)-\psi_0(a+m)}{\Gamma(a)\Gamma(c)\Gamma(m+1)\Gamma(b+m+1)}. \tag{83}$$

Lemma 4 对于任意复数 a、$b\notin\mathbb{Z}^-$，以及任意 c、$d\in\mathbb{Z}^+$，有

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(c+i)\Gamma(a+i)\Gamma(d+m-i+1)\Gamma(b+m-i+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(d)\Gamma(a+m)\Gamma(a+b+m)\Gamma(c+d+m)} \sum_{i=1}^{m} \frac{\Gamma(c+d+i-1)\Gamma(a+b-i+2m)}{\Gamma(c+i)\Gamma(b-i+m+1)}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(c)\Gamma(b+m)\Gamma(a+b+m)\Gamma(c+d+m)} \sum_{i=1}^{m} \frac{\Gamma(c+d+i-1)\Gamma(a+b-i+2m)}{\Gamma(d+i)\Gamma(a-i+m+1)}. \tag{84}$$

上述四个引理的证明基于 [23, 第 2.2 节2]提出的一种新简化框架。借助这些工具，现在可以简化求和式 (A.3) 和 (A.4)。下文将首先展示 (A.4) 的简化过程，而 (A.3) 也以相同方式简化。

注意，(A.4)由一个单重求和和两个双重求和组成。为了处理单重求和,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(i)\Gamma(a+i+1)\Gamma(m-i)\Gamma(b-i+m+1)} \Big((\psi_0(a+b+2m+2) - \psi_0(a+m+1)$$
$$- \psi_0(i+1) + \psi_0(1))(\psi_0(m-i+1) - \psi_0(a+b+2m+2) + \psi_0(b+m+1) - \psi_0(1))$$
$$+ \psi_1(a+b+2m+2) \Big), \tag{85}$$

我们首先将其改写为

$$\begin{aligned}
&(s_0 - s_1 s_2) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(i)\Gamma(a+i+1)\Gamma(m-i)\Gamma(b-i+m+1)} \\
&+ \left(s_1 - \frac{1}{m} \right) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(i)\Gamma(a+i+1)\Gamma(m-i+1)\Gamma(b-i+m+1)} \\
&+ \left(s_2 - \frac{1}{m} \right) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(i+1)\Gamma(a+i+1)\Gamma(m-i)\Gamma(b-i+m+1)} \\
&+ s_1 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\psi_0(i)}{\Gamma(i)\Gamma(b+i+1)\Gamma(m-i)\Gamma(a-i+m+1)} \\
&- \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\psi_0(i)}{\Gamma(i)\Gamma(b+i+1)\Gamma(m-i+1)\Gamma(a-i+m+1)} \\
&- \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\psi_0(i)}{\Gamma(i)\Gamma(a+i+1)\Gamma(m-i+1)\Gamma(b-i+m+1)} \\
&+ s_2 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\psi_0(i)}{\Gamma(i)\Gamma(a+i+1)\Gamma(m-i)\Gamma(b-i+m+1)} \\
&- \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\psi_0(i)\psi_0(m-i)}{\Gamma(i)\Gamma(a+i+1)\Gamma(m-i)\Gamma(b-i+m+1)},
\end{aligned} \tag{86}$$

其中

$$s_0 = \psi_1(a+b+2m+2) \tag{87}$$
$$s_1 = \psi_0(a+b+2m+2) - \psi_0(a+m+1) + \psi_0(1) \tag{88}$$

$$s_2 = \psi_0(a+b+2m+2) - \psi_0(b+m+1) + \psi_0(1). \tag{89}$$

因此，式（86）中的求和可简化为以下形式的单重和

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(a+b-j+2m-1)}{\Gamma(a-j+m)j} \tag{90}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(a+b-j+2m-1)}{\Gamma(a-j+m)j^2} \tag{91}$$

通过使用引理 2、引理 4 和闭式恒等式 [41]

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(i)\Gamma(a+i)\Gamma(m-i+1)\Gamma(m+b+1-i)} \\ &= \frac{\Gamma(a+b+2m-1)}{\Gamma(m)\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)\Gamma(a+b+m)}.\end{aligned} \tag{92}$$

更具体地说，利用恒等式 (92)，将 (86) 中的前三个求和化简为闭式表达式；接着，在设定 $c = 0$ 之前，对引理 2 中恒等式 (82) 求 c 的导数，从而化简接下来的四个求和。最后，在设定 $c = d = 0$ 之前，对引理 4 中恒等式 (84) 求 c 和 d 的导数，从而化简 (86) 中最后一个求和。

现在我们继续讨论 (A.4) 中的双重求和，它们为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m-1} \frac{i(m-i)}{\Gamma(b+i+1)\Gamma(a-i+m+1)} \sum_{j=1}^{m-i} \frac{\Gamma(a+j+m+1)\Gamma(b-j+m+1)}{j\Gamma(i+j+1)\Gamma(m-i-j+1)} \\ &\times (\psi_0(a+j+m+1) - \psi_0(a+b+2m+2) + \psi_0(m-i+1) - \psi_0(j+1))\end{aligned} \tag{93}$$

and

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m-1} \frac{i(m-i)}{\Gamma(a+i+1)\Gamma(b-i+m+1)} \sum_{j=1}^{m-i} \frac{\Gamma(a-j+m+1)\Gamma(b+j+m+1)}{j\Gamma(i+j+1)\Gamma(m-i-j+1)} \\ &\times (\psi_0(b+j+m+1) - \psi_0(a+b+2m+2) + \psi_0(m-i+1) - \psi_0(j+1)).\end{aligned} \tag{94}$$

求和式 (93) 和 (94) 与 (54)–(55) 具有类似的对称结构。因此，简化求和式 (93) 后，只需交换 a 和 b 即可直接得到求和式 (94)。我们先将求和式 (93) 拆分为两部分：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m-1} \frac{i(m-i)}{\Gamma(b+i+1)\Gamma(a-i+m+1)} \sum_{j=1}^{m-i} \frac{\Gamma(a+j+m+1)\Gamma(b-j+m+1)}{j\Gamma(i+j+1)\Gamma(m-i-j+1)} \\ &\times (-\psi_0(a+b+2m+2) - \psi_0(j+1))\end{aligned} \tag{95}$$

and

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m-1} \frac{i(m-i)}{\Gamma(b+i+1)\Gamma(a-i+m+1)} \sum_{j=1}^{m-i} \frac{\Gamma(a+j+m+1)\Gamma(b-j+m+1)}{j\Gamma(i+j+1)\Gamma(m-i-j+1)} \\ &\times (\psi_0(m-i+1) + \psi_0(a+j+m+1)).\end{aligned} \tag{96}$$

在 (95) 中，将求和顺序改为:

$$\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\Gamma(a+j+m+1)\Gamma(b-j+m+1)}{j}\left(-\psi_0(a+b+2m+2)-\psi_0(j+1)\right)$$
$$\times\sum_{i=1}^{m-j}\frac{i(m-i)}{\Gamma(b+i+1)\Gamma(i+j+1)\Gamma(a-i+m+1)\Gamma(m-i-j+1)}, \tag{97}$$

我们利用引理 2 对 i 求和。双重求和变为

$$\frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(a+m)}\Bigg((1-a-m)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(a+j+m)(b-j+m)}{j}(\psi_0(a+b+2m+2)$$
$$+\psi_0(j+1))\times\sum_{i=1}^{m-j}\frac{\Gamma(b+i-1)\Gamma(a-i+2m)}{\Gamma(i)\Gamma(m-i+2)}+\frac{a(a+m)}{a+b+m}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{b-j+m}{j}(\psi_0(j+1)$$
$$+\psi_0(a+b+2m+2))\sum_{i=1}^{m-j}\frac{\Gamma(b+i-1)\Gamma(a-i+2m+1)}{\Gamma(i)\Gamma(m-i+2)}+\frac{(a+m-1)(b+m)}{a+b+m}$$
$$\times\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(a+j+m)}{j}(\psi_0(a+b+2m+2)+\psi_0(j+1))\sum_{i=1}^{m-j}\frac{\Gamma(b+i)\Gamma(a-i+2m)}{\Gamma(i)\Gamma(m-i+2)}\Bigg), \tag{98}$$

其中，对 j 的求和可利用恒等式 (B.3) 进一步化为闭式表达式。因此，剩余的求和只涉及与式 (86) 中类似的单重求和，并可用类似的方法化简。

通过先使用引理 3 及其关于 b 的导数来计算关于 j 的内层求和，可以化简求和式 (96)。因此，计算关于 i 的求和后，剩余的求和均化为单重求和，除了求和式

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b-j+m+2)}$$
$$\times\sum_{i=1}^{m-j+1}\left(\frac{\psi_0(a+i+j)}{i}+\frac{\psi_0(i+j)}{i}\right). \tag{99}$$

为继续推导式 (99)，我们首先利用恒等式 (B.9) 计算内层求和

$$\sum_{i=1}^{m-j+1}\frac{\psi_0(a+i+j)}{i} \tag{100}$$

into

$$\sum_{i=1}^{m-j+1}\frac{\psi_0(i+j)}{i}-\sum_{l=1}^{a}\frac{\psi_0(l+m+1)}{j+l-1}+\frac{1}{2}\Big((\psi_0(a+j)-\psi_0(j))$$
$$\times(\psi_0(a+j)+2\psi_0(m-j+2)+\psi_0(j)-2\psi_0(1))-\psi_1(a+j)+\psi_1(j)\Big). \tag{101}$$

将结果 (101) 代入 (99) 后，(99) 中的双重求和便归结为化简以下三个求和

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b-j+m+2)}\Big(\psi_1(j)+(\psi_0(a+j)-\psi_0(j))$$

$$(\psi_0(a+j)+2\psi_0(m-j+2)+\psi_0(j)-2\psi_0(1))-\psi_1(a+j)\Big), \tag{102}$$

$$\sum_{l=1}^{a}\psi_0(l+m+1)\sum_{j=1}^{m}\frac{-1}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b-j+m+2)(j+l-1)}, \tag{103}$$

and

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b-j+m+2)}\sum_{i=1}^{m-j+1}\frac{\psi_0(i+j)}{i}. \tag{104}$$

单重求和 (102) 的化简方式与 (86) 相同。对于 (103) 中的双重求和，利用引理 1 计算完关于 j 的内层求和后，我们得到

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\Gamma(b+m)\Gamma(a+b+m+1)}\sum_{l=1}^{a}\frac{\psi_0(l+m+1)}{\Gamma(l+m)}\\&\times\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\Gamma(m-j+l)\Gamma(a+b-j+2m)}{\Gamma(m-j)\Gamma(a-j+m+1)}.\end{aligned} \tag{105}$$

现在可以利用恒等式 (B.13)–(B.14) 对 l 求和，将上述求和式 (105) 化简为单重求和，其中剩余的单重和为

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(a+b-j+2m-1)}{\Gamma(a-j+m)j}\psi_0(a+b-j+2m-1), \tag{106}$$

and

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+j+m)}{j}. \tag{107}$$

到目前为止，式 (93) 中唯一仍需化简的部分是双重求和 (104)。我们首先指出，求和式 (104) 必须与式 (94) 中的对称部分结合处理，即

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{\Gamma(j-1)\Gamma(b+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(a-j+m+2)}\sum_{i=1}^{m-j+1}\frac{\psi_0(i+j)}{i}. \tag{108}$$

求和式 (104) 和 (108) 无法分别进一步化简。然而，我们注意到，将两个求和式相加后会出现抵消，其中的关键是恒等式 (B.9)。具体而言，我们计算内层求和

$$\sum_{i=1}^{m-j+1}\frac{\psi_0(i+j)}{i} \tag{109}$$

在 (104) 中利用恒等式 (B.9) 并作如下特化

$$a\to j,\qquad b\to 0,\qquad m\to m-j+1. \tag{110}$$

求和式 (104) 变为

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b+m-j+2)}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\psi_0(m-j+i+2)}{i}\\
&+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b+m-j+2)}\Big((\psi_0(m-j+2)+\psi_0(j))\\
&\times(\psi_0(m-j+2)+\psi_0(j)-2\psi_0(1))-\psi_1(m-j+2)-\psi_1(j)+2\psi_1(1)\Big). \qquad (111)
\end{aligned}
$$

将式 (111) 中双重求和的指标 $j\to m+2-j$ 平移为

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b+m-j+2)}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\psi_0(m-j+i+2)}{i}\\
&=-\sum_{j=2}^{m+1}\frac{2}{\Gamma(j-1)\Gamma(b+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(a-j+m+2)}\sum_{i=1}^{m-j+1}\frac{\psi_0(i+j)}{i}, \qquad (112)
\end{aligned}
$$

此时其形式与式 (108) 相同。将结果 (112) 代入式 (104)，再加上式 (108)，得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b-j+m+2)}\sum_{i=1}^{m-j+1}\frac{\psi_0(i+j)}{i}\\
&+\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{\Gamma(j-1)\Gamma(b+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(a-j+m+2)}\sum_{i=1}^{m-j+1}\frac{\psi_0(i+j)}{i}\\
&=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(j-1)\Gamma(a+j)\Gamma(m-j+1)\Gamma(b-j+m+2)}\Big((\psi_0(m-j+2)+\psi_0(j))\\
&\quad\times(\psi_0(m-j+2)+\psi_0(j)-2\psi_0(1))-\psi_1(m-j+2)-\psi_1(j)+2\psi_1(1)\Big), \qquad (113)
\end{aligned}
$$

利用式 (90)、(91)、(106) 及下式形式的单重和，可将其化简为

$$
\sum_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(a+b-j+2m-1)}{\Gamma(a-j+m)j}\psi_0(j), \qquad (114)
$$

利用引理 2、引理 4，以及它们关于 c 的导数。将式 (85)、(93) 和 (94) 的化简结果代入 (A.4) 后，我们发现单重和 (90)、(91)、(106) 和 (114) 完全抵消。和式 $\mathcal{A}_2(m-2,m)$ 可化简为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_2(m-2,m)=&\frac{4\Gamma(a+m+1)\Gamma(b+m+1)}{\Gamma(m-1)\Gamma(a+b+m+1)(a+b+2m-1)_3}\\
&\times\sum_{j=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+j+m)}{j}+\mathrm{CF}, \qquad (115)
\end{aligned}
$$

其中，简写符号 CF 在每次出现时含义各异，表示因篇幅所限而省略的一些闭式项。采用相同的方法，可以将 (A.3) 化简为类似的形式，从而完成对 $\mathcal{A}_2$ 的化简，如 (63) 所示。

现在插 将 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 的结果形式代入 (50)，最终得到 $\mathrm{I}_{\mathcal{A}}$ a s

$$\mathrm{I}_{\mathcal{A}} = f_{\mathcal{A}}(a,b) + f_{\mathcal{A}}(b,a), \tag{116}$$

其中

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{A}}(a,b) = {} & b_0 \sum_{k=1}^{m} \frac{\psi_0(a+b+k+m)}{a+k} - m \sum_{k=1}^{m} \frac{\psi_0(a+b+k+m)}{k} + b_1 \sum_{k=1}^{m} \frac{\psi_0(a+k)}{k} \\ & + \frac{m}{2}\left(\psi_0^2(a+b+m) - \psi_1(a+b+m)\right) + b_2\left(\psi_0(a+b+2m) - \psi_0(a+b+m)\right) \\ & \times \psi_0(a+b+2m) + b_3\psi_0(a+m)\psi_0(a+b+2m) + b_4\psi_0(a+b+2m) \\ & + b_0\psi_0(a)\psi_0(a+b+m) + m\left(\psi_0(m) - \psi_0(1)\right)\psi_0(a+b+m) + b_5\psi_0(a+m) \\ & \times \left(2\psi_0(a+b+m) + \psi_0(b+m)\right) + b_6\psi_0(a+b+m) + \frac{b_1}{2}(2\psi_0(a)\psi_0(a+m) \\ & - 2\psi_0(a)\psi_0(m) - \psi_0^2(a) + 2\psi_0(1)\psi_0(a) + \psi_1(a)) + b_7\psi_0(a+m) + b_8\psi_0(a) \\ & + b_9. \end{aligned} \tag{117}$$

Th式 (117) 中的系数 b_i 汇总于附录 C.2 的式 (C.9)–(C.18) 中 .

将式 (80) 和 (117) 代入式 (46)，得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C] = {} & \frac{2m(a+m)(b+m)(a+b+m)}{(a+b+2m-1)_3}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+k)}{k} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(b+k)}{k}\right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{a+k} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{b+k}\right) + \mathrm{CF}. \end{aligned} \tag{118}$$

推导式 (25) 的剩余任务是表示这些单重求和

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+k)}{k} \tag{119}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(b+k)}{k} \tag{120}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{a+k} \tag{121}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{b+k} \tag{122}$$

将（118）代入（19），结果如下

$$\Phi_{c,d} = \frac{c!}{(c+d)!}\sum_{k=1}^{c}\frac{(c+d-k)!}{(c-k)!}\frac{1}{k^2}, \qquad c,d \in \mathbb{Z}^+. \tag{123}$$

利用恒等式 (B.12)，将 (119) 和 (120) 中的求和分别计算为求和 $\Phi_{m,\ a}$ 和 $\Phi_{m,\ b}$，即

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+k)}{k} = \Phi_{m,a} + \mathrm{CF} \tag{124}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(b+k)}{k} = \Phi_{m,b} + \mathrm{CF}. \tag{125}$$

接下来　　对于求和 (121) 和 (122)，我们需要考虑它们的组合 n

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{a+k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{b+k}. \tag{126}$$

我们首先将 (121) 改写为

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{a+k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(b+k)}{a+k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a+k}\sum_{l=0}^{a+m-1}\frac{1}{b+k+l}, \tag{127}$$

其中，我们使用了双伽马函数 [42] 的有限求和形式

$$\psi_0(l)=-\gamma+\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k} \tag{128}$$

来替换

$$\psi_0(a+b+k+m) \tag{129}$$

by

$$\psi_0(b+k)+\sum_{l=0}^{a+m-1}\frac{1}{b+k+l}. \tag{130}$$

然后，我们改变 (127) 中双重求和的求和顺序，先计算关于 k 的求和，其余的求和再利用恒等式 (B.3) 进一步计算，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{b+k}=&\sum_{k=1}^{a+m-1}\frac{\psi_0(b+k+1)}{k}-\sum_{k=1}^{a+m-1}\frac{\psi_0(b+k+m+1)}{k}\\&+\frac{1}{2}\Big((2\psi_0(1)-2\psi_0(a+m)-\psi_0(b+m+1)-\psi_0(b+1))\\&\times(\psi_0(b+1)-\psi_0(b+m+1))-\psi_1(b+m+1)+\psi_1(b+1)\Big).\end{aligned} \tag{131}$$

同样，将式（122）变形可得

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{a+k}=\sum_{k=1}^{b+m-1}\frac{\psi_0(b+k+1)}{k}-\sum_{k=1}^{b+m-1}\frac{\psi_0(a+k+m+1)}{k}+\mathrm{CF}. \tag{132}$$

这里，我们还需要这个结果

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{a+m-1}\frac{\psi_0(b+k+m+1)}{k}+\sum_{k=1}^{b+m-1}\frac{\psi_0(a+k+m+1)}{k}\\&=-\frac{1}{2}(\psi_1(a+m+1)+\psi_1(b+m+1))-\frac{(a+b+2m)\psi_0(a+b+2m)+1}{(a+m)(b+m)}\\&\quad-\frac{1}{2}\left(2\psi_0(1)-\psi_0(a+m+1)-\psi_0(b+m+1)\right)\left(\psi_0(a+m+1)+\psi_0(b+m+1)\right)\\&\quad+\psi_1(1),\end{aligned} \tag{133}$$

它是通过计算求和得到的

$$\sum_{k=1}^{a+m-1}\frac{\psi_0(b+k+m+1)}{k}=\sum_{k=1}^{a+m-1}\frac{\psi_0(k)}{k}+\sum_{k=1}^{a+m-1}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{b+m}\frac{1}{(k+l)} \tag{134}$$

按照处理（127）的相同方式。最后，将（131）相加，并在使用（133）之前，(132)
我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{a+k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+b+k+m)}{b+k}\\&=\sum_{k=1}^{b+m}\frac{\psi_0(a+k)}{k}+\sum_{k=1}^{a+m}\frac{\psi_0(b+k)}{k}+\mathrm{CF}. &(135)\\&=\Phi_{b+m,a}+\Phi_{a+m,b}+\mathrm{CF}, &(136)\end{aligned}$$

其中，最后一个等式（136）是利用恒等式（B.12）得到的。将结果（124）、（125）和（136）代入（118），我们完成了命题1的证明。

3.2. 无粒子数约束下费米子高斯态的平均容量

在本节中，我们将在证明命题2的过程中，计算无粒子数约束（18）的费米子高斯态上的纠缠容量（8）的平均值。与前一节相同，我们首先在第 3.2.1 节讨论导出求和表示式的计算。第 3.2.2 节将对求和进行简化。

3.2.1. 关联函数与积分计算

对于任意粒子数的费米子高斯态，根据定义，平均容量由以下积分给出

$$\mathbb{E}[C]=m\int_0^1 u(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x, \tag{137}$$

其中，$g_1(x_1,\ldots,x_l)$ 表示 l 个任意特征值的联合概率密度。与前一种情况类似，密度 $g_1(x_1,\ldots,x_l)$ 可写成 l 点关联函数的形式：

$$g_l(x_1,\ldots,x_l)=\frac{(m-l)!}{m!}\det\left(K\left(x_i,x_j\right)\right)_{i,j=1}^{l}, \tag{138}$$

其中

$$K\left(x,y\right)=\sqrt{w(x)w(y)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{J_{2k}^{(a,a)}(x)J_{2k}^{(a,a)}(y)}{h_k} \tag{139}$$

其中权函数为

$$w(x)=\left(\frac{1-x}{2}\right)^a\left(\frac{1+x}{2}\right)^a. \tag{140}$$

将正交关系 (44) 改写为

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^a J_{2k}^{(a,a)}(x) J_{2l}^{(a,a)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(2k+a+1)\Gamma(2k+a+1)}{(4k+2a+1)\Gamma(2k+1)\Gamma(2k+2a+1)}\delta_{kl}, \quad \Re(a) > -1, \tag{141}$$

我们得到多项式 $J_{2k}^{(a,a)}(x)$ 的归一化常数 h_k

$$h_k = \frac{\Gamma(2k+a+1)\Gamma(2k+a+1)}{(4k+2a+1)\Gamma(2k+1)\Gamma(2k+2a+1)}. \tag{142}$$

利用 (45) 和 (139)，平均容量 (137) 的计算归结为计算两个积分

$$\mathbb{E}[C] = \mathrm{I_C} - \mathrm{I_A}, \tag{143}$$

其中

$$\mathrm{I_C} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^{a+2} \ln^2 \frac{1+x}{2} J_{2k}^{(a,a)}(x)^2\,\mathrm{d}x \tag{144}$$

$$\mathrm{I_A} = \mathrm{A_1} + \mathrm{A_2} \tag{145}$$

with

$$\mathrm{A_1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x}{2}\right)^{a+2} \ln^2 \frac{1+x}{2} J_{2k}^{(a,a)}(x)^2\,\mathrm{d}x \tag{146}$$

$$\mathrm{A_2} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{a+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{a+1} \ln \frac{1-x}{2} \ln \frac{1+x}{2} J_{2k}^{(a,a)}(x)^2\,\mathrm{d}x. \tag{147}$$

$\mathrm{I_C}$ 中的积分通过应用恒等式 (66) 计算，其中需要令

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a, \qquad k_1 = k_2 = 2k, \tag{148}$$

并对 c 求两次导数，然后令 $c = a + 1$。在相同的特化条件 (148) 下，$\mathrm{A_1}$ 中的积分通过对恒等式 (66) 的 c 求两次导数，然后令 $c = a + 1$ 来计算；而 $\mathrm{A_2}$ 中的积分则通过对恒等式 (72) 的 c 和 d 求导，然后令 $c = d = a + 1$ 来计算。利用 (75)– (77) 消除伽马函数和多伽马函数的不定性后，便得到上述积分的求和表示 (A.5)–(A.7)，详见附录 A.2。

3.2.2. 求和化简 计算平均值 (143) 的剩余任务是化简积分 $\mathrm{I_C}$ 和 $\mathrm{I_A}$ 的求和表示 (A.5)–(A.7)。

我们首先通过化简 (A.5) 中的求和来计算 $\mathrm{I_C}$ 。注意，(A.5) 包含两个双重求和。第一个双重求和通过计算关于 j 的内层求和，可直接化为单重求和。所得单重求和还可进一步

利用恒等式 (B.1)–(B.8) 化简，方法与化简 (A.1) 类似。这里还需要结果

$$\psi_0(mk) = \ln m + \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\psi_0\left(k+\frac{i}{m}\right), \qquad m \in \mathbb{Z}^+ \tag{149}$$

$$\psi_1(mk) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=0}^{m-1}\psi_1\left(\frac{i}{m}+k\right), \qquad m \in \mathbb{Z}^+ \tag{150}$$

以计算涉及偶数自变量多伽马函数的求和。在（A.5）中，第二个双重求和为

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m-1} 2(2a+4k+1)\sum_{j=0}^{2k-2}\frac{2(j+1)(a+j+1)}{(2k-j-1)_2(2a+j+2k+1)_2}\\&\times\left(\psi_0(a+j+2)-\psi_0(2a+j+2k+3)-\psi_0(2k-j-1)+\psi_0(j+2)\right).\end{aligned} \tag{151}$$

通过部分分式分解

$$\begin{aligned}&\frac{2(j+1)(a+j+1)}{(2k-j-1)_2(2a+j+2k+1)_2}\\&=\frac{1}{2a+4k+1}\left(\frac{-2a-2k-1}{2a+j+2k+2}+\frac{2(a+k)}{2a+j+2k+1}-\frac{2k}{j-2k+1}+\frac{2k+1}{j-2k}\right),\end{aligned} \tag{152}$$

我们重写 （151），将其表示为以下五个双重求和（153）–（157）之和 ，

$$2\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{2k-2}\left(\frac{2a+2k+1}{2a+j+2k+2}-\frac{2(a+k)}{2a+j+2k+1}\right)\psi_0(2a+j+2k+3) \tag{153}$$

$$2\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{2k-2}\left(\frac{2k}{j-2k+1}-\frac{2k+1}{j-2k}\right)\psi_0(2k-j-1) \tag{154}$$

$$2\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{2k-2}\left(\frac{2k}{2k-j-1}-\frac{2k+1}{2k-j}\right)\psi_0(2a+j+2k+3) \tag{155}$$

$$2\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{2k-2}\left(\frac{2a+2k+1}{2a+j+2k+2}-\frac{2(a+k)}{2a+j+2k+1}\right)\psi_0(2k-j-1) \tag{156}$$

$$\begin{aligned}&2\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{2k-2}\left(\frac{-2a-2k-1}{2a+j+2k+2}+\frac{2(a+k)}{2a+j+2k+1}-\frac{2k}{j-2k+1}+\frac{2k+1}{j-2k}\right)\\&\times(\psi_0(a+j+2)+\psi_0(j+2)).\end{aligned} \tag{157}$$

现在，我们将求和式 (153)–(157) 分别化简为单重求和。具体而言，利用恒等式 (B.3) 计算关于 j 的和，即可化简求和式 (153)。对求和式 (154)，在将指标 $j \to 2k-2-j$ 平移后，也可用类似方法化简。利用恒等式 (B.1) 计算关于 k 的和，并将指标 $j \to 2k-2-j$ 平移、改变求和顺序后，即可化简求和式 (155)：

$$2\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m-1}\left(\frac{2k}{2j+1}-\frac{2k+1}{2j+2}\right)\psi_0(2a-2j+4k+1)$$

$$+2\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m-1}\left(\frac{2k}{2j+2}-\frac{2k+1}{2j+3}\right)\psi_0(2a-2j+4k), \tag{158}$$

其中，将关于 j 的求和拆分为偶数项和奇数项。其余两个求和式 (156)–(157) 也可采用与 (155) 类似的方法化简。对于 (156)，需要先将指标 $j\to 2k-2-j$ 平移，再改变求和顺序以计算关于 k 的和。对于 (157)，则直接通过改变求和顺序计算关于 k 的和。

综合（153）–（157）的结果，求和式（A.5）现在仅包含单重和（参见（A.1）），并可利用恒等式（B.1）–（B.8）进一步简化。由此得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{I_C}=\sum_{k=1}^{m-1}&\left(\left(-\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k+2}\right)\psi_0(a+k)+\left(\frac{4m-3}{4k+2}+\frac{4m+1}{4k}\right)\psi_0(a+2k)\right.\\
&+\left(\frac{4a+4m-1}{2a+4k+2}+\frac{4a+4m-1}{2a+4k}-\frac{2a}{2k+1}+\frac{1-2a}{2k}+\frac{1}{2(a+k)}\right)\psi_0(2a+2k)\\
&+\left(\frac{2a-1}{2k}+\frac{2a+1}{2k+1}+\frac{-2a-1}{2a+2k}+\frac{1-2a}{2a+2k+1}\right)\psi_0(2a+4k)+\left(\frac{1}{4k+2}\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{4k}\right)\psi_0(a+k+m)+\left(\frac{-2a-2m+1}{2k}-\frac{2a+2m}{2k+1}\right)\psi_0(2a+2k+2m)\right)\\
&+c_0\psi_1(2a+2m)-\frac{1}{4}\psi_1(a+m)+c_1\left(\psi_1(2a)-\psi_0^2(2a)\right)+c_2\psi_1(a)\\
&+c_3\psi_0(2a+4m)\left(\psi_0(a+2m)+\psi_0(2a+2m)-\psi_0(2a+4m)\right)-2c_0\psi_0(2a+2m)\\
&\times\left(\psi_0(a)+\psi_0(2m)-\psi_0(1)\right)-c_0\psi_0^2(2a+2m)+c_4\psi_0^2(a+2m)+c_5\psi_0(a)\\
&\times\psi_0(a+2m)+\frac{1}{2}\left(\psi_0(a)+\psi_0(2m)-\psi_0(1)\right)\psi_0(a+m)-\frac{1}{2}\psi_0(a)\psi_0(m)\\
&+c_6\psi_0(a)\psi_0(2m)+c_7\psi_0^2(a)+c_8\psi_0(2a+4m)+c_9\psi_0(2a+2m)+c_{10}\psi_0(a+2m)\\
&+c_{11}\psi_0(a+m)+c_{12}\psi_0(2a)+c_{13}\psi_0(1)\psi_0(a)+c_{14}\psi_0(a)+c_{15}\left(\psi_0\left(\frac{a}{2}+m+\frac{1}{4}\right)\right.\\
&\left.-\psi_0\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)\right)+c_{16}\psi_0\left(\frac{a}{2}+m\right)+c_{17}\left(\psi_0(m)-2\psi_0(2m)+\psi_0(1)\right)+c_{18}\psi_0\left(\frac{a}{2}\right)\\
&-2m,
\end{aligned} \tag{159}$$

其中，系数 c_i 列于附录 C.3 的（C.19）–（C.37）中。

计算 $\mathrm{I_A}$ 时，（A.6）和（A.7）的简化过程分别与（A.5）和（A.4）的简化过程类似，此处省略了大部分细节。不过，值得注意的是，首先对（A.7）中关于 i和 j 的内层求和进行计算后，所得的和可直接化为

$$-r(k)\frac{2\left(2a^2+4ak+a+4k^2+2k-1\right)}{(2a+4k-1)(2a+4k+3)}\sum_{j=1}^{2k}\frac{\psi_0(2a+j+2k)}{j}+\mathrm{CF}, \tag{160}$$

其中该项

$$r(k)=\frac{\Gamma(2a+4k+4)}{(2a+4k+1)\Gamma(2k+1)\Gamma(2a+2k+1)} \tag{161}$$

与（A.7）中的对应项完全抵消。剩余的求和现在仅由有理函数和多伽马函数组成，很容易化简。将（A.6）和（A.7）的所得形式代入（145），我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I_A} = \sum_{k=1}^{m-1} \Bigg(& \left(-\frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{4k} \right) \psi_0(a+k) + \Bigg(\frac{2am - 2a + 6m^2 - 6m + 1}{(2k+1)(2a+4m-1)} \\
& + \frac{1}{4(a+k)} + \frac{4am + 2a + 12m^2 - 1}{4k(2a+4m-1)} \Bigg) \psi_0(a+2k) + \Bigg(\frac{1-2a}{2k} + \frac{1}{2(a+k)} - \frac{2a}{2k+1} \\
& + \frac{2\left(2a^2 + 5am - a + 3m^2 - m\right)}{2a+4m-1} \left(\frac{1}{a+2k+1} + \frac{1}{a+2k} \right) \Bigg) \psi_0(2a+2k) \\
& + \left(\frac{2a-1}{2k} + \frac{-2a-1}{2(a+k)} + \frac{2a+1}{2k+1} + \frac{1-2a}{2a+2k+1} \right) \psi_0(2a+4k) + \Bigg(\frac{1}{2(2k+1)} \\
& - \frac{1}{4k} \Bigg) \psi_0(a+k+m) + \left(\frac{-2a-2m+1}{2k} - \frac{2a+2m}{2k+1} \right) \psi_0(2a+2k+2m) \Bigg) \\
& + d_0 \psi_1(2a+2m) + d_1 \left(\psi_1(2a) - \psi_0^2(2a) \right) + d_2 \psi_1(a) - \frac{1}{4} \psi_1(a+m) \\
& + d_3 \left(\psi_0(a+2m) + \psi_0(2a+2m) - \psi_0(2a+4m) \right) \psi_0(2a+4m) + d_0 \psi_0(2a+2m) \\
& \times \left(-\psi_0(2a+2m) - 2\psi_0(2m) + 2\psi_0(1) \right) + d_4 \psi_0(a+2m) \psi_0(2a+2m) \\
& + d_5 \psi_0^2(a+2m) + d_6 \psi_0(a) \psi_0(2a+2m) + a \psi_0(a) \left(\psi_0(a) - 2\psi_0(a+2m) \right) \\
& + \frac{1}{4} \left(\psi_0(a) + 2\psi_0(2m) - 2\psi_0(1) \right) \psi_0(a+m) + d_7 \psi_0(a) \psi_0(2m) - \frac{1}{4} \psi_0(a) \psi_0(m) \\
& + d_8 \psi_0(2a+4m) + d_9 \psi_0(2a+2m) + d_{10} \psi_0(a+2m) + d_{11} \psi_0(a+m) \\
& + d_{12} \left(\psi_0(m) - 2\psi_0(2m) + \psi_0(1) \right) + d_{13} \psi_0(2a) + d_{14} \psi_0(1) \psi_0(a) + d_{15} \psi_0(a) + d_{16} \\
& \times \left(\psi_0 \left(\frac{a}{2} + m + \frac{1}{4} \right) - \psi_0 \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) + d_{17} \left(\psi_0 \left(\frac{a}{2} \right) - \psi_0 \left(\frac{a}{2} + m \right) \right) - m, \quad (162)
\end{aligned}
$$

其中系数 d_i 列于附录 C.4 中的 (C.38)–(C.55)。

Ins将结果 (159) 和 (162) 代入 (143)，平均容量变为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[C] = & \frac{m(a+m)}{2a+4m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi_0(a+2k)}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi_0(a+2k)}{a+k} + \frac{(2m-1)(2a+2m-1)}{2(2a+4m-1)} \\
& \times \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\psi_0(a+2k+1)}{2k+1} + \frac{\psi_0(2a+2k)}{a+2k} + \frac{\psi_0(2a+2k+1)}{a+2k+1} \right) + \mathrm{CF}, \quad (163)
\end{aligned}
$$

这里我们回顾一下，简写符号 CF 表示省略的闭式项。在上述结果（163）中，我们将单重求和改写为

$$
\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi_0(a+2k+1)}{2k+1} \quad (164)
$$

and

$$
\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi_0(2a+2k+1)}{a+2k+1} \quad (165)
$$

as

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_0(a+2k+1)}{2k+1}=\sum_{k=2}^{2m}\frac{\psi_0(a+k)}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(a+2k)}{k} \tag{166}$$

and

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_0(a+2k+1)}{2k+1}=\sum_{k=2}^{2m}\frac{\psi_0(2a+k)}{a+k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(2a+2k)}{a+2k} \tag{167}$$

$$=\sum_{k=1}^{a+2m}\frac{\psi_0(a+k)}{k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\psi_0(2a+2k)}{a+2k}+\mathrm{CF}, \tag{168}$$

分别。这里，等式（168）是通过如下方式平移求和指标得到的:

$$\sum_{k=2}^{2m}\frac{\psi_0(2a+k}{a+k}=\sum_{k=2+a}^{2m+a)}\frac{\psi_0(a+k}{k}=\sum_{k=1}^{2m+a)}\frac{\psi_0(a+k}{k}-\sum_{k=1}^{a+1)}\frac{\psi_0(a+k)}{k}, \tag{169}$$

在 e 之前利用恒等式（B.5）计算最后一个求和。此外，对于求和 n

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_0(a+2k)}{k}, \tag{170}$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_0(a+2k)}{k}=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\psi_0(a+k+m)}{k}+\frac{\psi_0(a+k)}{k}+\frac{\psi_0(a+2k)}{a+k}\right)+\mathrm{CF}, \tag{171}$$

这是由以下事实得到的

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_0(a+2k)}{a+k}=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{(a+k)(a+k+l)}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_0(a+k)}{a+k} \tag{172}$$

与恒等式（127）类似。将求和（164）、（165）和（170）分别替换为其等价形式（166）、（168）和（171），代入（163）后，得到

$$\mathbb{E}[C]=\frac{(2m-1)(2a+2m-1)}{4a+8m-2}\left(\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{\psi_0(a+k)}{k}+\sum_{k=1}^{2m+a-1}\frac{\psi_0(a+k)}{k}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_0(a+k+m)}{k}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_0(a+k)}{k}\right)+\mathrm{CF}. \tag{173}$$

最后，将（173）中的单重和替换为（19）中定义的简写符号$\Phi_{c,\ d}$即可得到所需结果（33）。命题2的证明至此完成。

3.3. 渐近容量

在本节中，我们计算推论1中的极限平均容量。从平均容量的精确公式出发，这项任务相当直接。具体而言，式 (36) 中的极限值是通过计算精确容量 (25)

和 (33) 在条件 (35) 下的极限得到的。为此，需要以下渐近结果。首先是多伽马函数的极限行为

$$\psi_0(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l}}{2lx^{2l}}, \qquad x \to \infty, \tag{174}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1+2x}{2x^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l}}{x^{2l+1}}, \qquad x \to \infty, \tag{175}$$

其中，B_k 为第 k 个伯努利数 [32]。第二点是在渐近区域中

$$c \to \infty, \qquad \text{with a fixed } d, \tag{176}$$

有

$$\Phi_{c,d} \longrightarrow \psi_1(1) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{177}$$

对于固定粒子数 (17) 的费米子高斯态的精确容量公式 (25)，在极限 (35) 下，我们现在有，

$$\frac{\alpha_0}{m} = \frac{1}{8} + o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{178}$$

$$\frac{\alpha_1}{m} = o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{179}$$

$$\frac{\alpha_2}{m} = o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{180}$$

$$\frac{\alpha_3}{m} = -\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{m}\right), \tag{181}$$

and

$$\psi_1(a+b+m+1) + \psi_1(a+m+1) = o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{182}$$

$$\psi_0(a+m+1) - \psi_0(a+b+m+1) = o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{183}$$

$$\psi_0(a+m+1) = o(\ln m), \tag{184}$$

其中，我们回顾 $a = n - p$ 和 $b = p - m$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C] \; &= 2\left(\frac{1}{8} + o\left(\frac{1}{m}\right)\right)\left(\frac{\pi^2}{2} + o\left(\frac{1}{m}\right)\right) \\ &\quad + 2o\left(\frac{1}{m}\right) o(\ln m) - 1 + o\left(\frac{1}{m}\right),\end{aligned} \tag{185}$$

其中，利用以下事实：

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln m}{m} = 0, \tag{186}$$

由此得到所声称的渐近结果

$$\mathbb{E}[C] \xrightarrow{(35)} \frac{\pi^2}{8} - 1. \tag{187}$$

对于任意粒子数（18）的费米子高斯态的精确容量（33），类似地，我们在极限（35）下有，

$$\psi_1(m+n) = o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{188}$$

$$\psi_1(n) = o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{189}$$

$$\psi_0(2n) - \psi_0(m+n) = o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{190}$$

$$\psi_0(m+n) - \psi_0(n) = \ln 2 + o\left(\frac{1}{m}\right) \tag{191}$$

$$\psi_0(m+n) - \psi_0(n-m) = -\psi_0(n-m) + \ln 2 + o(\ln m). \tag{192}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C] \; = & \frac{1}{3}\pi^2\left(o\left(\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{2}\right)+\left(o\left(\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{4}\right)\left(o\left(\frac{1}{m}\right)-\frac{\pi^2}{6}\right) \\ & + o\left(\frac{1}{m}\right) o(\ln m) + o\left(\frac{1}{m}\right) - 1,\end{aligned} \tag{193}$$

由此得到所声称的结果

$$\mathbb{E}[C] \xrightarrow{(35)} \frac{\pi^2}{8} - 1. \tag{194}$$

至此，推论1得证。

4. 结论

在这项工作中，我们推导出了有粒子数约束和无粒子数约束的费米子高斯态的精确平均容量公式和渐近平均容量公式。推导结果依赖于随机矩阵理论中的工具，更重要的是，也依赖于近期在简化涉及特殊函数的有限求和方面取得的进展。所得的解析公式揭示了以纠缠容量度量的纠缠统计行为。未来的工作包括计算纠缠容量的更高阶统计量，例如方差。

致谢

Lu Wei 的研究工作部分由美国国家科学基金会（#2150486）资助。

附录 A. 积分的求和表示

在本附录中，我们列出在第3节计算平均纠缠容量时，积分 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)}$, $\mathcal{A}_1^{(a,b)}$,$\mathcal{A}_2$ 在式 (61)–(63) 中，以及 I_{C}、A_1, A_2 在式 (144)、(146)、(147) 中的求和表示。

附录 A.1. 积分 $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)}$, $\mathcal{A}_1^{(a,b)}$, $\mathcal{A}_2(m-1,m-1)$ 和 $\mathcal{A}_2(m-2,m)$ 的求和表示

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_{\mathcal{C}}{}^{(a,b)} = & \frac{2m(b+m)}{a+b+2m}\sum_{i=1}^{m-2}\frac{i}{(m-i-1)_2}\left(\psi_0(b+i+1)-\psi_0(m-i-1)+\psi_0(i+1)\right.\\
& \left.-\psi_0(a+b+i+m+1)\right)-\frac{(a+m)(a+b+m)}{a+b+2m}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{2i}{(a+b+i+m)_2}\\
& \times\left(\psi_0(b+i+1)-\psi_0(m-i)+\psi_0(i+1)-\psi_0(a+b+i+m+2)\right)\\
& +\frac{m(b+m)}{a+b+2m}\sum_{i=m}^{m+1}\frac{(i-1)(-1)^{i+m-1}}{\Gamma(i-m+1)\Gamma(m-i+2)}\Big(\psi_1(b+i)-\psi_1(i-m+1)\\
& +\psi_1(i)-\psi_1(a+b+i+m)+\left(\psi_0(b+i)-\psi_0(i-m+1)+\psi_0(i)\right.\\
& \left.-\psi_0(a+b+i+m)\right)^2\Big)
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_1^{(a,b)} = & -\frac{2m(b+m)}{a+b+2m}\sum_{i=1}^{m-3}\frac{(b+i+1)(i)_2}{(m-i-2)_3(a+b+i+m+1)}\left(\psi_0(b+i+2)+\psi_0(i+2)\right.\\
& \left.-\psi_0(a+b+i+m+2)-\psi_0(m-i-2)\right)+\frac{2(a+m)(a+b+m)}{a+b+2m}\\
& \times\sum_{i=1}^{m-2}\frac{(b+i+1)(i)_2}{(m-i-1)(a+b+i+m)_3}\left(\psi_0(b+i+2)-\psi_0(a+b+i+m+3)\right.\\
& \left.-\psi_0(m-i-1)+\psi_0(i+2)\right)-\frac{m(b+m)}{a+b+2m}\sum_{i=m-3}^{m-1}\frac{(b+i+2)(-1)^{i+m}(i+1)_2}{\Gamma(m-i)\Gamma(i-m+4)}\\
& \times\frac{1}{a+b+i+m+2}\left(\psi_1(b+i+3)-\psi_1(i-m+4)-\psi_1(a+b+i+m+3)\right.\\
& \left.+\left(\psi_0(i+3)-\psi_0(a+b+i+m+3)-\psi_0(i-m+4)+\psi_0(b+i+3)\right)^2\right)\\
& +\psi_1(i+3)-\frac{(a+m)(a+b+m)(b+m)(m-1)_2}{(a+b+2m)(a+b+2m-1)_3}\Big(-\psi_1(a+b+2m+2)\\
& +\psi_1(b+m+1)+\psi_1(m+1)-\psi_1(1)+\psi_0^2(1)+\left(\psi_0(b+m+1)+\psi_0(m+1)\right.\\
& \left.-\psi_0(a+b+2m+2)\right)\left(\psi_0(b+m+1)+\psi_0(m+1)-\psi_0(a+b+2m+2)\right.\\
& \left.-2\psi_0(1)\right)\Big)
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}_2(m-1,m-1)\\
= & \frac{2\Gamma(a+m+1)\Gamma(b+m+1)}{\Gamma(a+b+2m+2)}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{i(m-i+1)(-1)^i}{\Gamma(a+i+1)\Gamma(b-i+m+2)}\sum_{j=i-2}^{i}(-1)^j\\
& \times\frac{\Gamma(a+i-j+m)\Gamma(b-i+j+m+2)}{\Gamma(j+1)\Gamma(i-j+1)\Gamma(j-i+3)\Gamma(m-j)}\Big(\psi_1(a+b+2m+2)\\
& +\left(\psi_0(a+i-j+m)-\psi_0(i-j+1)+\psi_0(i+1)-\psi_0(a+b+2m+2)\right)
\end{aligned}
$$

$$\times(\psi_0(a+b+2m+2)-\psi_0(b-i+j+m+2)+\psi_0(j-i+3)$$
$$-\psi_0(m-i+2))\Big)+\sum_{i=1}^{m-2}\frac{i(m-i+1)}{\Gamma(b+i+1)\Gamma(a-i+m+2)}\sum_{j=1}^{m-i-1}\frac{\Gamma(b-j+m)}{\Gamma(m-i-j)}$$
$$\times\frac{\Gamma(a+j+m+2)}{(j)_3\Gamma(i+j+1)}(\psi_0(a+j+m+2)+\psi_0(m-i+2)-\psi_0(j+3)$$
$$-\psi_0(a+b+2m+2))+\sum_{i=1}^{m-2}\frac{i(m-i+1)}{\Gamma(a+i+1)\Gamma(b-i+m+2)}$$
$$\times\sum_{j=1}^{m-i-1}\frac{\Gamma(a-j+m)\Gamma(b+j+m+2)}{(j)_3\Gamma(i+j+1)\Gamma(m-i-j)}(\psi_0(b+j+m+2)+\psi_0(m-i+2)$$
$$-\psi_0(j+3)-\psi_0(a+b+2m+2))\Big) \tag{A.3}$$

$$\mathcal{A}_2(m-2,m)$$
$$=\frac{2\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}{\Gamma(a+b+2m+2)}\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\Gamma(a+m+1)\Gamma(b+m+1)}{\Gamma(i)\Gamma(a+i+1)\Gamma(m-i)\Gamma(b-i+m+1)}$$
$$\times\Big((\psi_0(a+b+2m+2)-\psi_0(a+m+1)-\psi_0(i+1)+\psi_0(1))(\psi_0(m-i+1)$$
$$-\psi_0(a+b+2m+2)+\psi_0(b+m+1)-\psi_0(1))+\psi_1(a+b+2m+2)\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{i(m-i)}{\Gamma(b+i+1)\Gamma(a-i+m+1)}\sum_{j=1}^{m-i}\frac{\Gamma(a+j+m+1)\Gamma(b-j+m+1)}{j\Gamma(i+j+1)\Gamma(m-i-j+1)}$$
$$\times(\psi_0(a+j+m+1)-\psi_0(a+b+2m+2)+\psi_0(m-i+1)-\psi_0(j+1))$$
$$+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{i(m-i)}{\Gamma(a+i+1)\Gamma(b-i+m+1)}\sum_{j=1}^{m-i}\frac{\Gamma(a-j+m+1)\Gamma(b+j+m+1)}{j\Gamma(i+j+1)\Gamma(m-i-j+1)}$$
$$\times(\psi_0(b+j+m+1)-\psi_0(a+b+2m+2)+\psi_0(m-i+1)-\psi_0(j+1))\Big) \tag{A.4}$$

附录 A.2. 积分 $\mathrm{I_C}$、A_1，和 A_2 的求和表示

$$\mathrm{I_C}=(\psi_0(a+2)-\psi_0(2a+3))^2+\psi_1(a+2)-\psi_1(2a+3)+\sum_{k=1}^{m-1}2(2a+4k+1)$$
$$\times\Bigg(\sum_{j=2k-1}^{2k}\frac{(-1)^j(j+1)(a+j+1)}{(2a+j+2k+1)_2}\Big((\psi_0(j+2)-\psi_0(2a+j+2k+3)$$
$$+\psi_0(a+j+2)-\psi_0(j-2k+2))^2+\psi_1(a+j+2)-\psi_1(2a+j+2k+3)$$
$$+\psi_1(j+2)-\psi_1(j-2k+2)\Big)+\sum_{j=0}^{2k-2}\frac{2(j+1)(a+j+1)}{(2k-j-1)_2(2a+j+2k+1)_2}$$

$$\times(\psi_0(a+j+2)-\psi_0(2a+j+2k+3)-\psi_0(2k-j-1)+\psi_0(j+2))\Bigg) \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 = \sum_{k=0}^{m-1} 2(2a+4k+1)\Bigg(&\sum_{j=2k-2}^{2k}\frac{(-1)^j(j+1)_2(a+j+1)_2}{\Gamma(2k-j+1)\Gamma(j-2k+3)(2a+j+2k+1)_3}\\
&\times\Big((\psi_0(a+j+3)-\psi_0(2a+j+2k+4)-\psi_0(j-2k+3)+\psi_0(j+3))^2\\
&-\psi_1(2a+j+2k+4)+\psi_1(a+j+3)-\psi_1(j-2k+3)+\psi_1(j+3)\Big)\\
&+\sum_{j=0}^{2k-3}\frac{2(j+1)_2(a+j+1)_2}{(2k-j-2)_3(2a+j+2k+1)_3}(\psi_0(2a+j+2k+4)-\psi_0(a+j+3)\\
&+\psi_0(2k-j-2)-\psi_0(j+3))\Bigg)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_2 = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2a+4k+1)\Gamma(2k+1)\Gamma(2a+2k+1)}{\Gamma(2a+4k+4)}\Bigg(&\sum_{i=0}^{2k}\frac{2(i+1)(2k-i+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(a+i+1)}\\
&\times\frac{\Gamma^2(a+2k+2)}{\Gamma(2k-i+1)\Gamma(a+2k-i+1)}((\psi_0(a+2k+2)-\psi_0(2a+4k+4)-\psi_0(2)\\
&+\psi_0(2k-i+2))(\psi_0(a+2k+2)-\psi_0(2a+4k+4)+\psi_0(i+2)-\psi_0(2))\\
&-\psi_1(2a+4k+4))-\sum_{j=0}^{2k}\frac{(j+1)\Gamma(a+2k+1)\Gamma(a+2k+3)}{\Gamma(j)\Gamma(a+j+1)\Gamma(2k-j+1)\Gamma(a-j+2k+1)}\\
&\times((\psi_0(a+2k+1)-\psi_0(2a+4k+4)+\psi_0(2k-j+2)-\psi_0(1))(\psi_0(a+2k+3)\\
&-\psi_0(2a+4k+4)+\psi_0(j+2)-\psi_0(3))-\psi_1(2a+4k+4))-\sum_{j=0}^{2k}\frac{(2k-j+1)}{\Gamma(j+1)}\\
&\times\frac{\Gamma(a+2k+1)\Gamma(a+2k+3)}{\Gamma(a+j+1)\Gamma(2k-j)\Gamma(2k-j+a+1)}((\psi_0(a+2k+3)-\psi_0(2a+4k+4)\\
&+\psi_0(2k-j+2)-\psi_0(3))(\psi_0(a+2k+1)-\psi_0(2a+4k+4)+\psi_0(j+2)\\
&-\psi_0(1))-\psi_1(2a+4k+4))+4\sum_{j=0}^{2k}\frac{\Gamma(a-j+2k)\Gamma(a+j+2k+4)}{(j+1)_3}\\
&\times\sum_{i=0}^{2k-j-2}\frac{(2k-i-j-1)(i+j+3)}{\Gamma(i+1)\Gamma(2k-i+1)\Gamma(a+i+j+3)\Gamma(a-i-j+2k-1)}\\
&\times(\psi_0(a+j+2k+4)-\psi_0(2a+4k+4)+\psi_0(i+j+4)-\psi_0(j+4))\Bigg).
\end{aligned} \tag{A.7}$$

附录 B. 求和恒等式列表

在本附录中，我们列出了有助于简化附录 A 中求和的有限和恒等式。这些恒等式的证明可参见例如 [6,8,10,11,21,23,43]。

这里，只需假设 a、$b \geq 0$、$a \neq b$ 满足恒等式 (B.1)–(B.3)、(B.6)–(B.7)，$a > m$ 满足 (B.8)，以及 a、$b \geq 0$、$n > m$ 满足 (B.9)–(B.14)。

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_0(i+a) = (m+a)\psi_0(m+a+1) - a\psi_0(a+1) - m \tag{B.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_1(i+a) = (m+a)\psi_1(m+a+1) - a\psi_1(a+1) + \psi_0(m+a+1) - \psi_0(a+1) \tag{B.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(i+a)}{i+a} = \frac{1}{2}\left(\psi_1(m+a+1) - \psi_1(a+1) + \psi_0^2(m+a+1) - \psi_0^2(a+1)\right) \tag{B.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(m+1-i)}{i} = \psi_0^2(m+1) - \psi_0(1)\psi_0(m+1) + \psi_1(m+1) - \psi_1(1) \tag{B.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(m+1+i)}{i} = \psi_0^2(m+1) - \psi_0(1)\psi_0(m+1) - \frac{1}{2}\psi_1(m+1) + \frac{\psi_1(1)}{2} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \psi_0(i+a)\psi_0(i+b) = (b-a)\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\psi_0(a+i)}{b+i} + (m+a)\psi_0(m+a)\psi_0(m+b) - a \times \\ \psi_0(a+1)\psi_0(b+1) - (m+a-1)\psi_0(m+a) + a\psi_0(a+1) - \\ (m+b)\psi_0(m+b) + (b+1)\psi_0(b+1) + 2m - 2\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(i+b)}{i+a} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(i+a)}{i+b} + \psi_0(m+a+1)\psi_0(m+b+1) - \psi_0(a+1) \times \\ \psi_0(b+1) + \frac{1}{a-b}(\psi_0(m+a+1) - \psi_0(m+b+1) - \psi_0(a+1) + \\ \psi_0(b+1))\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(a+1-i)}{i} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(i+a-m)}{i} + (\psi_0(a-m) + \psi_0(a+1))(\psi_0(m+1) - \\ \psi_0(1)) + \frac{1}{2}\left((\psi_0(a-m) - \psi_0(a+1))^2 + \psi_1(a+1) - \psi_1(a-m)\right)\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(a+b+i)}{i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_0(b+i)}{i} - \sum_{i=1}^{a} \frac{\psi_0(b+i+m)}{b+i-1} + \frac{1}{2}\Big(\psi_1(b) + (\psi_0(a+b) - \psi_0(b)) \\ \times (\psi_0(a+b) + \psi_0(b) + 2(\psi_0(m+1) - \psi_0(1))) - \psi_1(a+b)\Big)\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(n-i)!}{(m-i)!} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)} \tag{B.10}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(n-i)!}{(m-i)!i}=\frac{n!}{m!}(\psi_0(n+1)-\psi_0(n-m+1)) \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\frac{(n-i)!}{(m-i)!i^2}=\frac{n!}{m!}\Bigg(&\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_0(i+n-m)}{i}+\frac{1}{2}(\psi_1(n-m+1)-\psi_1(n+1)-\psi_0^2(n+1)\\&+\psi_0^2(n-m+1))+\psi_0(n-m)(\psi_0(n+1)-\psi_0(n-m+1)\\&-\psi_0(m+1)+\psi_0(1))\Bigg)\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(n-i)!}{(m+a-i)!}=\frac{1}{n-m-a+1}\left(\frac{n!}{(a+m-1)!}-\frac{(n-m)!}{(a-1)!}\right) \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\frac{(n-i)!}{(m+a-i)!}\psi_0(m+a-i+1)\\&=\frac{1}{1-a-m+n}\left(\frac{n!}{(a+m-1)!}\left(\psi_0(a+m)-\frac{1}{1-a-m+n}\right)-\frac{(n-m)!}{(a-1)!}\right.\\&\quad\left.\times\left(\psi_0(a)-\frac{1}{1-a-m+n}\right)\right)\end{aligned} \tag{B.14}$$

附录C. 第3节结果的系数

在本附录中，我们列出结果 (80)、(117)、(159) 和 (162) 中的系数。

附录C.1. 式（80）中的系数

$$a_0=\frac{2(a+m)(a+b+m)}{a+b+2m} \tag{C.1}$$

$$a_1=\frac{2m(b+m)}{a+b+2m} \tag{C.2}$$

$$a_2=\frac{2\left(a^2+b(a+2m)+2am+2m^2\right)}{a+b+2m} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}a_3=&-\frac{2}{(b+m)(a+b+2m)^2}\Big(b^2\left(a^2+8am+a+10m^2\right)+2a^2m(m+2)+a^3+b^4\\&+b^3(2a+5m)+b\left(a^2(3m+2)+6am(2m+1)+2m^2(5m+1)\right)+6am^2(m+1)\\&+2m^3(2m+1)\Big)\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}a_4=&\frac{2}{b(a+b+2m)^2}\Big(b^2\left(a^2+a(5m+2)+m(5m+3)\right)+b(m+2)\left(a^2+3am+2m^2\right)\\&+b^3(2a+4m+1)+(a+m)^2(a+2m)+b^4\Big)\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$a_5 = \frac{2(b+m)\left(a^2+b(2a+3m)+3am+b^2+m(2m-1)\right)}{(a+b+2m)^2} \tag{C.6}$$

$$a_6 = -\frac{2b(a+b+2m+1)}{a+b+2m} \tag{C.7}$$

$$a_7 = -\frac{2m(a+m)\left(a^2+2ab+4am+a+b^2+4bm+b+4m^2+2m+1\right)}{(a+b+2m)^3} \tag{C.8}$$

附录 C.2. 式（117）中的系数

$$b_0 = \frac{2(b+m)}{(a+b+2m-1)_3}\left(a^2(3b+4m)+a^3+a\left(3b^2+9bm+6m^2-1\right)+5b^2m+b^3 + 7bm^2-b+3m^3-m\right) \tag{C.9}$$

$$b_1 = \frac{2m(a+m)\left(a^2+a(b+3m)+2bm+3m^2-1\right)}{(a+b+2m-1)_3} \tag{C.10}$$

$$b_2 = 2(a+m) \tag{C.11}$$

$$b_3 = -\frac{2\left(a(b+2m)+b^2+2bm+2m^2\right)}{a+b+2m} \tag{C.12}$$

$$b_4 = \frac{m-m^2}{2(a+b+2m-1)}+\frac{m^2+m}{2(a+b+2m+1)}-\frac{2b}{a+m}-\frac{2m}{a+b+2m}-2a-2m \tag{C.13}$$

$$b_5 = \frac{m(a+m)(b+m)(a+b+m)}{(a+b+2m-1)_3} \tag{C.14}$$

$$b_6 = \frac{1}{8a}\left(\frac{-2a^2b^2+a^4+4a^2+b^4+4b^2}{a+b+2m}-\frac{1}{2}(a-b-1)(a-b+1)(a+b-1)(a+b+1) \times\left(\frac{1}{a+b+2m+1}+\frac{1}{a+b+2m-1}\right)+16ab+8am+7a+11b+6m\right) \tag{C.15}$$

$$b_7 = \frac{b}{a+b+2m}+\frac{(a-b)(a+b)}{2(a+b+2m)^2}+\left(\frac{1}{4}a+b-1\right)+m+\left(\left(a\frac{1}{8}-b-1\right)(a-b+1) \times(a+b+1)\right)\left(\frac{1}{a+b+2m+1}-\frac{1}{a+b+2m-1}\right) \tag{C.16}$$

$$b_8 = -\frac{a\left(a^2+3a(b+2m+1)+2b^2+b(6m+3)+6m^2+6m+2\right)}{(a+b+2m)(a+b+2m+1)} \tag{C.17}$$

$$b_9 = -\frac{m}{(a+b+2m)^2}-\frac{m}{2(a+b+2m+1)}-\frac{m}{2} \tag{C.18}$$

附录 C.3. 式 (159) 中的系数

$$c_0 = -\frac{1}{2}(2a+2m-1) \tag{C.19}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(2a-1) \tag{C.20}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(4m+1) \tag{C.21}$$

$$c_3 = -2a-4m+1 \tag{C.22}$$

$$c_4 = \frac{1}{4}(4a + 4m - 1) \tag{C.23}$$
$$c_5 = -2a \tag{C.24}$$
$$c_6 = 1 - 2m \tag{C.25}$$
$$c_7 = \frac{1}{4}(4a - 1) \tag{C.26}$$
$$c_8 = -2(a + 2m) \tag{C.27}$$
$$c_9 = -\frac{-12a^3 - 6a^2 + 4a + 1}{4a^3 + 6a^2 + 2a} \tag{C.28}$$
$$c_{10} = \frac{a^2(4m - 1) + 4a^3 + a - 1}{2(a - 1)a} \tag{C.29}$$
$$c_{11} = \frac{a^4(12 - 8m) + a^3(3 - 8m) + a^2(2m - 13) - 12a^5 + 2am + 1}{2\,(4a^5 - 5a^3 + a)} \tag{C.30}$$
$$c_{12} = \frac{a(8(a + 1)m + 2a + 3) + 2m}{a(a + 1)(2a + 1)} \tag{C.31}$$
$$c_{13} = \frac{1}{2}(4m - 1) \tag{C.32}$$
$$c_{14} = \frac{-4m - 3}{4(a - 1)} - 2a - \frac{3}{4(a + 1)} - \frac{1}{2a - 1} - \frac{1}{2a + 1} - \frac{1}{a} + (4m - 3) \tag{C.33}$$
$$c_{15} = -\frac{4a^2 + 1}{4a^2 - 1} \tag{C.34}$$
$$c_{16} = -\frac{a^2(4m + 1) + 4a^3 + a(4m - 1) - 1}{2a(a^2 - 1)} \tag{C.35}$$
$$c_{17} = \frac{m}{1 - a} \tag{C.36}$$
$$c_{18} = \frac{8m + 3}{4(a - 1)} + \frac{1}{2a} - \frac{3}{4(a + 1)} + 2 \tag{C.37}$$

附录 C.4. 式 (162) 中的系数

$$d_0 = -\frac{1}{2}(2a + 2m - 1) \tag{C.38}$$
$$d_1 = a - \frac{1}{2} \tag{C.39}$$
$$d_2 = \frac{4a^2 - 1}{16(2a + 4m - 1)} - \frac{a}{8} + \frac{3m}{4} + \frac{3}{16} \tag{C.40}$$
$$d_3 = -(2a + 4m - 1) \tag{C.41}$$
$$d_4 = \frac{(2m - 1)(2a + 2m - 1)}{4a + 8m - 2} \tag{C.42}$$
$$d_5 = \frac{1}{4}(4a + 4m - 1) \tag{C.43}$$
$$d_6 = \frac{(2a + 2m - 1)(4a + 6m - 1)}{2(2a + 4m - 1)} \tag{C.44}$$

$$d_7 = \frac{1-4a^2}{8(2a+4m-1)} + \frac{a}{4} + \frac{1}{8}(5-12m) \tag{C.45}$$

$$d_8 = -2(a+2m) \tag{C.46}$$

$$d_9 = -\frac{-12a^3-6a^2+4a+1}{4a^3+6a^2+2a} \tag{C.47}$$

$$d_{10} = \frac{4a^2\left(4m^2-2m+1\right)+a^3(20m-3)+6a^4-4a(m-1)^2-4m+1}{2(a-1)a(2a+4m-1)} \tag{C.48}$$

$$d_{11} = \frac{88a^5-76a^4-10a^3+83a^2-3a-4}{16(1-a)a(a+1)(2a-1)(2a+1)} - \frac{(2a-1)(2a+1)}{16(a-1)(2a+4m-1)} - \frac{3m}{4(a-1)} \tag{C.49}$$

$$d_{12} = -\frac{a(4m+2)+12m^2-1}{4(a-1)(2a+4m-1)} \tag{C.50}$$

$$d_{13} = \frac{8a^3+4a^2-2a-1}{8a(a+1)(2a+4m-1)} + \frac{3(4m-1)}{8(a+1)} + \frac{3(4m+1)}{8a} + \frac{4}{2a+1} - \frac{1}{2} \tag{C.51}$$

$$d_{14} = \frac{1-4a^2}{-16a-32m+8} - \frac{a}{4} + \frac{1}{8}(12m-3) \tag{C.52}$$

$$d_{15} = \frac{8a^3-12a^2-2a+3}{16(a-1)(2a+4m-1)} - \frac{36a^3+24a^2-5a-2}{4a(a+1)(2a-1)(2a+1)} - \frac{12m+13}{16(a-1)} - \frac{7a}{4} + \frac{1}{4}(6m-4) \tag{C.53}$$

$$d_{16} = \frac{1+4a^2}{1-4a^2} \tag{C.54}$$

$$d_{17} = \frac{4a^2-1}{8(a-1)(2a+4m-1)} + \frac{12m+7}{8(a-1)} + \frac{1}{4a} - \frac{3}{4(a+1)} + \frac{7}{4}. \tag{C.55}$$

参考文献

[1] Page D N 1993 子系统的平均熵 Phys. Rev. Lett. 71 1291-4[2] Foong S K and Kanno S 1994 关于子系统平均熵的 Page 猜想的证明 Phys. Rev. Lett. 72 1148-51[3] S´anchez-Ruiz J 1995 关于子系统平均熵的 Page 猜想的简单证明 Phys. Rev. E 52 5653-5[4] Hayden P, Leung D and Winter 2006 A 一般纠缠的若干方面。Commun. Math. Phys. 265 95-117.[5] Vivo P, Pato M P and Oshanin G 2016 随机纯态：超越线性统计量定量刻画双体纠缠 Phys. Rev. E 93 052106[6] Wei L 2017 关于冯·诺依曼熵涨落的 Vivo-Pato-Oshanin 猜想的证明 Phys. Rev. E 96 022106[7] Sarkar A and Kumar S 2019 Bures-Hall 系综：谱密度与平均熵 J. Phys. A: Math. Theor. 52 295203[8] Wei L 2020 冯·诺依曼纠缠熵的偏度 J. Phys. A: Math. Theor. 53 075302[9] Wei L 2020 关于 Bures-Hall 系综上平均纠缠熵的 Sarkar-Kumar 猜想的证明 J. Phys. A: Math. Theor. 53 235203[10] Wei L 2020 Bures-Hall 测度下冯·诺依曼纠缠熵的精确方差 Phys. Rev. E 102 062128[11] Huang Y, Wei L and Collaku B 2021 冯·诺依曼纠缠熵的峰度 J. Phys. A: Math. Theor. 54 504003

[12] Lubkin E 1978 一个 n 系统与一个 k 储库的关联所决定的熵 J. Math. Phys. 19 1028[13] Sommers H-J and Zyczkowski K 2004 随机密度矩阵的统计性质 J. Phys. A: Math. Gen. 37 35[14] Osipov V, Sommers H-J and Zyczkowski K 2010 随机 Bures 混态及其纯度分布 J. Phys. A: Math. Theor. 43 055302[15] Giraud O 2007 随机纯态的双体纠缠分布 J. Phys. A: Math. Theor. 40 2793[16] Li S-H and Wei L 2021 量子纯度的矩与双正交多项式递推 J. Phys. A: Math. Theor. 54 445204[17] Malacarne L C, Mendes R S and Lenzi E K 2002 根据子系统的平均 Tsallis 熵求其平均熵 Phys. Rev. E 65 046131[18] Wei L 2019 关于随机纯态中 Tsallis 纠缠熵的精确方差 Entropy 21 539[19] Borot G and Nadal C 2012 广义随机 Bures 混态的纯度分布 J. Phys. A: Math. Theor. 45 075209[20] Bianchi E, Hackl L and Kieburg M 2021 费米子高斯态的 Page 曲线 Phys. Rev. B 103 L241118[21] Huang Y and Wei L 2022 费米子高斯态的二阶统计 J. Phys. A: Math. Theor. 55 105201[22] Bianchi E, Hackl L, Kieburg M, Rigol M and Vidmar L 2022 典型量子纯态的体积律纠缠熵 PRX Quantum 3 030201[23]Huang Y and Wei L 2022 费米子高斯态的熵涨落公式 (arXiv:2211.16709)[24] Yao H and Qi X-L 2010 Kitaev 模型的纠缠熵与纠缠谱 Phys. Rev. Lett. 105 080501[25] Nandy P 2021 局域算符中的纠缠容量 J. High Energy Phys. 19[26] Arias R, Di Giulio G, Keski-Vakkuri E and Tonni E 2023 通过纠缠容量探测重整化群流、对称性分辨与淬火动力学 (arXiv:2301.02117)[27] de Boer J, J¨arvel¨a J and Keski-Vakkuri E 2019 纠缠容量的若干方面 Phys. Rev. D 99 066012[28] Okuyama K 2021 随机纯态的纠缠容量 Phys. Lett. B 820 136600[29] Wei L 2023 量子纠缠的平均容量 J. Phys. A: Math. Theor. 56 015302[30] Bhattacharjee B, Nandy P and Pathak T 2021 费米子高斯态的本征态容量与 Page 曲线 Phys. Rev. B 104 214306[31]Surace J and Tagliacozzo L 2021 费米子高斯态：数值方法简介 (arXiv:2111.08343)[32] Abramowitz M and Stegun I A 1972 数学函数手册：公式、图表与数学表格 (New York: Dover)[33] Bengtsson I and Zyczkowski K 2017 量子态几何：量子纠缠导论，第 2 版 (Cambridge: Cambridge University Press)[34] Kieburg M, Forrester P and Ipsen J R 2019 实非对称矩阵与实反对称矩阵的乘法卷积 Adv. Pure Appl. Math. 10 467[35] ˙Lyd˙zba P, Rigol M and Vidmar L 2020 随机二次哈密顿量中的本征态纠缠熵 Phys. Rev. Lett. 125 180604[36] ˙Lyd˙zba P, Rigol M and Vidmar L 2021 量子混沌二次哈密顿量多体本征态中的纠缠。Phys. Rev. B 103 104206[37] Mehta M L 2004 随机矩阵，第 3 版 (Amsterdam: Elsevier)[38] Forrester P 2010 对数气体与随机矩阵 (Princeton: Princeton University Press)[39] Bernard D and Piroli L 2021 量子对称简单排斥过程中的纠缠分布 Phys

[40] Szeg˝o G 1975 正交多项式（普罗维登斯：美国数学学会）[41] Luke Y L 1969 特殊函数及其逼近第 1 卷（纽约：学术出版社）[42] Brychkov Y A 2008 特殊函数手册：导数、积分、级数及其他公式（博卡拉顿：CRC出版社）[43] Milgram M 2017 关于一些多伽马函数与多伽马函数之和（arXiv:0406338v3）