arXiv:2302.02238v1 [math.OC] 4 Feb 2023

一类非局部抛物型方程的Stackelberg精确能控性

Landry Djomegne * Cyrille Kenne †

2023年2月7日

摘要

本文研究一类非局部抛物型方程的多目标控制问题，其中非局部性通过积分核表达。我们提出了结合轨迹能控性与最优控制概念的Stackelberg策略。该策略涉及两个控制：主控制（领导者）和次控制（跟随者）。领导者求解轨迹能控性问题，使系统状态在终端时刻到达预设目标；跟随者则求解最优控制问题，以最小化给定的代价泛函。本文考虑两种情形：第一种情形中，领导者和跟随者均在区域内部进行控制；第二种情形中，领导者在区域内部进行控制，而跟随者则在边界的一小部分上进行控制。这些结果适用于线性和非线性非局部抛物型系统。

2010年数学主题分类：35K05；49J20；93B05；93B07；93C20。关键词：抛物型方程；非局部项；Carleman 估计；零可控性；Stackelberg 策略。

1 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$，$N \geq 1$ 是一个具有正则边界 $\partial\Omega$ 的有界开集。设 ω 和 $\mathcal{O}$ 是 Ω 中任意两个非空开集，使得 $\omega \cap \mathcal{O} = \emptyset$，并设 Γ 是 $\partial\Omega$ 的一个非空开子集。对于实数 $T > 0$，记 $Q = (0,T)\times\Omega$ 和 $\Sigma = (0,T)\times\partial\Omega$。设 $K(t,x,\theta) \in L^\infty(Q\times\Omega)$ 表示一个积分核。

下文中，我们将用 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 $L^\infty(Q\times\Omega)$ 中的范数，并用符号 C 表示一个正常数，其值甚至可以逐行变化。我们还用 $\nu = \nu(x)$ 表示点 $x \in \partial\Omega$ 处的外法向单位向量。我们考虑如下线性非局部抛物型系统：

$$\left\{\begin{array}{rcll} y_t - \Delta y + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)y(t,\theta)\,d\theta &=& f\chi_\omega + v\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} \quad Q, \\ y &=& 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ y(0,\cdot) &=& y^0 & \text{in} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{1.1}$$

* *University of Dschang, BP 67 Dschang, Cameroon, West region, email :* landry.djomegne@yahoo.fr

†*Laboratoire LAMIA, Université des Antilles, Campus Fouillole, 97159 Pointe-à-Pitre Guadeloupe (FWI)-Laboratoire L3MA, UFR STE et IUT, Université des Antilles, Schoelcher, Martinique, email :* kenne853@gmail.com

and

$$\begin{cases} q_t - \Delta q + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) q(t,\theta)\, d\theta &= g\chi_\omega \quad \text{in} \quad Q, \\ q &= u\mathbf{1}_\Gamma \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ q(0,\cdot) &= q^0 \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， $y = y(t,x)$ 和 $q = q(t,x)$ 表示状态，函数 f、 g、 u 和 v 是定义在适当空间中的控制， y^0 和 q^0 是给定的初始数据。这里， $\chi_{\mathcal{A}}$ 表示集合 $\mathcal{A}$ 的示性函数，而 $\mathbf{1}_\Gamma \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$ 是一个满足 supp $\mathbf{1}_\Gamma = \overline{\Gamma}$ 的光滑非负函数。我们用 y_t 表示 y 关于 t 的偏导数。

本文针对非局部热方程构建 Stackelberg策略 [23] 。我们假设可以通过一组层级控制作用于系统。更确切地说，我们将最优控制策略与系统轨迹的精确可控性相结合，研究系统（1.1）和（1.2）。

文献 1934 [31] 中引入的斯塔克尔伯格竞争是一种博弈论方法：一名参与者（领导者）先做出策略决策，随后第二名参与者（跟随者）根据领导者的决策作出响应。

在偏微分方程的框架下，J-L. Lions 在 1994 [23, 22]中引入了层级控制，以分别研究波动方程和热方程的双目标控制问题。在这些工作中，作者通过两个控制作用于不同的系统。领导者求解近似可控性问题，而跟随者求解最优控制问题。过去几年中，许多其他研究者也按照 Lions 的含义使用了层级控制（例如参见 [11, 10, 20, 25,26, 27, 30, 13]）。最近，文献 [9, 15] 中的作者将可控性与鲁棒性的概念相结合，运用了层级控制。

此前的所有研究都讨论了采用分布式控制的层级策略。首篇采用边界控制的论文是 [3]。在该论文中，作者研究了抛物型方程的 Stackelberg-Nash 精确可控性，并允许领导者和跟随者位于边界上。在 [16]，中，作者扩展并探讨了采用边界控制的热方程鲁棒层级策略相关结果。最近， [5] 的作者研究了 Kuramoto-Sivashinsky 方程的一个多目标控制问题，其中一个分布式控制被称为领导者，两个边界控制被称为跟随者。

在上述所有研究中，层级策略均应用于局部系统。本文将层级策略相关结果扩展到非局部抛物型方程。这一扩展带来了额外的困难，尤其是在为与方程（1.1）和（1.2）相关的伴随系统建立新的 Carleman 可观测性不等式时。据我们所知，此前尚无相关研究。

在本文中，我们将 Lions 的 Stackelberg控制推广到带有积分核的非局部系统（1.1）和（1.2）。为便于说明，我们先解释系统（1.1）的策略控制。具体而言，我们引入一个非空开集 $\mathcal{O}_d \subset\Omega$，表示跟随者的观测区域，并定义代价泛函

$$J(f;v) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_d} |y - y_d|^2 \, dxdt + \frac{\mu}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} |v|^2 \, dxdt, \tag{1.3}$$

其中 μ 是正常数，且 $y_d \in L^2((0,T) \times \mathcal{O}_d)$ 已给定。我们将采用的控制过程结构描述如下：

1. 一旦领导者 f 确定下来，我们就寻找一个依赖于 f 的控制 $\hat{v}$，使其满足以下问题

$$J(f;\hat{v}) = \inf_v J(f;v). \tag{1.4}$$

函数 $\hat{v}$ 满足（1.4）的控制称为 J的最优控制。由于泛函 J 是凸的（因为系统（1.1）是线性的），那么 $\hat{v}$ 是 J 的最优控制，当且仅当

$$\frac{\partial J}{\partial w}(f;\hat{v})\cdot w=0,\quad \forall w\in L^2((0,T)\times\mathcal{O}). \tag{1.5}$$

2. 考虑（1.1）的一个无控制轨迹，即函数 $\bar{y}=\bar{y}(t,x)$是以下方程的解:

$$\begin{cases} \bar{y}_t-\Delta\bar{y}+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\bar{y}(t,\theta)\,d\theta &= 0 \quad \text{in} \quad Q,\\ \bar{y} &= 0 \quad \text{on} \quad \Sigma,\\ \bar{y}(0,\cdot) &= \bar{y}^0 \quad \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

一旦 $\hat{}$ 已为每个 f确定并固定了最优控制，我们便寻求一个控制 f，使其 t 满足

$$y(T,x)=\bar{y}(T,x)=0 \text{ in } \Omega. \tag{1.7}$$

现在，我们也有兴趣研究系统（1.2）。这里可以采用上述相同的方法。代价泛函（1.3）应替换为

$$\widetilde{J}(g;u)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}_d}|q-q_d|^2\,dxdt+\frac{\mu}{2}\int_0^T\int_\Gamma|u|^2\,d\sigma dt, \tag{1.8}$$

其中，μ仍为正常数，$q_d\in L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)$是一个给定的泛函。控制过程可描述如下。

1. 对于每个领导者 g，我们求出一个控制 $\hat{u}$，使其满足以下问题

$$\widetilde{J}(g;\hat{u})=\inf_u\widetilde{J}(g;u). \tag{1.9}$$

~函数 $\hat{u}$ 满足 (1.9) 的称为 J 由 (1.8) 给出时的最优控制。由于泛函 ~ ~J 是凸的，因此 $\hat{u}$ 是 J 的最优控制，当且仅当

$$\frac{\partial\widetilde{J}}{\partial w}(g;\hat{u})\cdot w=0,\quad \forall w\in L^2((0,T)\times\Gamma). \tag{1.10}$$

2. 固定系统 (1.2) 的一条无控制轨迹，即函数 $\bar{q}=\bar{q}(t,x)$ 是满足下式的解

$$\begin{cases} \bar{q}_t-\Delta\bar{q}+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\bar{q}(t,\theta)\,d\theta &= 0 \quad \text{in} \quad Q,\\ \bar{y} &= 0 \quad \text{on} \quad \Sigma,\\ \bar{q}(0,\cdot) &= \bar{q}^0 \quad \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

我们寻求一个满足以下条件的控制 $\hat{g}$

$$q(T,x)=\bar{q}(T,x)=0 \text{ in } \Omega. \tag{1.12}$$

如[12], 所述，系统（1.1）和（1.2）可控性的研究受到物理学、趋化性、生物学和生态学中许多相关应用的启发；我们可以看到 [19] 例如，其中引入了许多模型。诸如（1.1）和（1.2）这样的系统，例如可出现在

种群动力学中，状态 $y(t,x)$表示时刻 t 、位置x处物种的密度，而非局部项$\int_\Omega K(t,x,\theta)y(t,\theta)\ d\theta$ 被视为繁殖率。该积分项用于表达这样一种情况：某个空间点处物种的演化取决于物种的总量[1]。

关于抛物型非局部系统可控性的研究已有一些成果。关于这一主题的首项研究见 [6], ，作者证明了含非局部项的薛定谔¨方程的精确可控性。在 [12], 中，作者针对系统（1.1）证明了内部零可控性结果，其中核与时间无关且具有解析性。他们运用了一些紧致性-唯一性论证，以获得唯一延拓性质。波动方程也得到了类似结果。文献 [12] 中的结果已在 [24] 中推广至一般的耦合抛物型系统。此外，文献 [28] 通过谱分析技术，对一个具有分离变量形式的时间无关核的一维方程也得到了类似结果。随后，文献 [4] 的作者放宽了对核的假设，从而推广了上述结果。他们运用 Carleman 方法，研究了线性情形和半线性情形。近期，文献 [1], 的作者运用角谷不动点定理，证明了两个退化非局部系统的零可控性。文献 [17] 的作者证明了具有 Dirichlet 边界条件且受半线性非局部项扰动的热方程的内部零可控性。

1.1 主要结果

本文采用 Carleman 方法解决非局部系统（1.1）和（1.2）的零可控性。与 [4], 的作者采用相同的方法，我们假设积分核$K \in L^\infty(Q \times\Omega)$ 满足以下假设：

$$\mathcal{K} =: \sup_{(t,x)\in\overline{Q}} \exp\left(\frac{\sigma^-}{l^4(t)}\right)\int_\Omega |K(t,x,\theta)|\ d\theta < +\infty, \tag{1.13}$$

其中，函数 σ^- 和 $l(t)$ 分别由（2.20b）和（2.17）定义。假设（1.13）意味着，核 $K = K(t,x,\theta)$ 有界，并且当 t 趋于 0^+ 以及 T^- [4]时呈指数衰减。

我们首先讨论系统（1.1）的 Stackelberg控制，其中所有控制都局部化在区域内部。我们有以下结果。

定理 1.1 假设 $\mathcal{O}_d \cap \omega \neq \emptyset$ 且核 K 满足(1.13)。设 $\bar{y}$ 是与初始状态 $\bar{y}^0$对应的（(1.6) ）的唯一解。设 $y^0 \in L^2(\Omega)$ 且 μ 足够大。那么，存在一个正实值权函数 $\varpi_1 = \varpi_1(t)$ 在 $t = T$ 处趋于无穷，使得对任意 $y_d \in L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)$ 满足

$$\int_0^T\int_{\mathcal{O}_d} \varpi_1^2|\bar{y}-y_d|^2\ dxdt < +\infty, \tag{1.14}$$

存在一个控制$\hat{}$ $f \in L^2((0,T)\times\omega)$ 以及唯一最优控制$\hat{}v \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$ 使得方程(1.1)的相应解满足(1.7)。

现在，我们关注系统（1.2），其中领导者控制作用于区域内部，而跟随者则局限于边界。接下来，我们需要以下希尔伯特空间

$$H^{r,s}(Q) = L^2((0,T);H^r(\Omega))\cap H^s((0,T);L^2(\Omega)), \tag{1.15}$$

配备范数的 r、 $s \in \mathbb{R}_+$

$$\|z\|_{H^{r,s}(Q)} = \left(\|z\|^2_{L^2((0,T);H^r(\Omega))} + \|z\|^2_{H^s((0,T);L^2(\Omega))}\right)^{1/2}. \tag{1.16}$$

注 1 我们可以在 (1.16) 中分别用 Q 和 Ω 替换 Σ和 $\partial\Omega$。由此可得到定义在边界上的函数的类似空间。

我们有如下结果。

定理 1.2 假设 $\mathcal{O}_d \cap \omega \neq \emptyset$ 且核 K 满足 (1.13)。假设 $q^0 \in L^2(\Omega)$和 μ 充分大。令 $\bar{q}$ 为与初始状态 (1.11) 相关联的唯一解，初始状态为 $\bar{q}^0$。则存在一个正实权函数 $\varpi_2 = \varpi_2(t)$，它在 $t = T$ 处发散，使得对于任意$q_d \in L^2((0,T) \times \mathcal{O}_d)$ 满足

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}_d} \varpi_2^2 |\bar{q} - q_d|^2 \, dxdt < +\infty, \tag{1.17}$$

我们可以找到一个领导者控制 $\hat{} g \in L^2((0,T) \times \omega)$ 和唯一最优控制 $\hat{} v \in H^{1/2,1/4}((0,T) \times \Gamma)$，使得相应的解满足 (1.2) 和 (1.12)。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们分析分布式领导者与跟随者情形下的 Stackelberg策略，即系统（1.1）的情形。在这一部分，我们首先证明最优控制的存在性与最优控制刻画，然后证明一些适当的 Carleman 不等式，并推导出精确可控性结果。最后，我们将这些结果推广到半线性情形。第 3 节讨论分布式领导者与边界跟随者对系统（1.2）的控制。在本节中，我们采用与第2节类似的论证。

2 分布式领导者与跟随者下的精确可控性

本部分的第一步是将轨迹的精确可控性问题转化为零可控性问题。因此，考虑 $z := y - \bar{y}$，其中 y 和 $\bar{y}$ 分别是方程（1.1）和（1.6）的解。（1.7）所表示的零可控性对于 z等价于以下零可控性：

$$z(T,x) = 0 \text{ in } \Omega, \tag{2.1}$$

其中， z 是该系统的解

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) z(t,\theta) \, d\theta &= f\chi_\omega + v\chi_{\mathcal{O}} \quad \text{in} \quad Q, \\ z &= 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) &= z^0 \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $z^0 := y^0 - \bar{y}^0$。从现在起，我们将研究系统（2.2），而非（1.1）。

由（ J 1.3）给出的泛函可改写如下

$$J(f;v) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_d} |z - z_d|^2 \, dxdt + \frac{\mu}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} |v|^2 \, dxdt, \tag{2.3}$$

其中 $z_d := y_d - \bar{y}$。

我们引入希尔伯特空间

$$W(Q)=\left\{z\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega));z_t\in L^2\left((0,T);H^{-1}(\Omega)\right)\right\},\tag{2.4}$$

赋予由下式给出的范数

$$\|z\|^2_{W(Q)}=\|z\|^2_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))}+\|z_t\|^2_{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))}.\tag{2.5}$$

众所周知（例如参见[21, 第 37] 页），对于任意 $y^0\in L^2(\Omega)$、$f\in L^2((0,T)\times\omega)$ 以及$v\in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$, 系统 (2.2) 存在唯一的弱解 $z\in W(Q)$。此外，存在常数 $C=C(\|K\|_\infty,T)>0$ 使得下列估计成立:

$$\|z(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z\|^2_{W(Q)}\le C\left(\|f\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}+\|v\|^2_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}+\|z^0\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\tag{2.6}$$

2.1 最优控制的存在性、唯一性及刻画

本节关注经典最优控制问题 (1.4)。为此，我们首先证明极小化解的存在性和唯一性，然后通过一个恰当的最优性系统对其进行刻画。

由于泛函 J 由 (2.3) 给出，且系统 (2.2) 是线性的，因此不难证明 J 是连续且严格凸的。此外，我们有

$$J(f;v)\ge\frac{\mu}{2}\|v\|^2_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}.$$

上述不等式使我们可以断定 J 是强制的。这三个性质保证了最优控制问题（1.4)-（2.3）存在唯一解 $\hat{}v\in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$。

为了刻画最优控制 $\hat{}v$，我们使用欧拉-拉格朗日最优性条件（1.5），即

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{J(f;\hat{v}+\lambda w)-J(f;\hat{v})}{\lambda}=0,\quad\text{for all}\quad w\in L^2((0,T)\times\mathcal{O}).\tag{2.7}$$

经过一些计算，（2.7）给出

$$\int_0^T\int_{\mathcal{O}_d}(z-z_d)h\,dx\,dt+\mu\int_0^T\int_{\mathcal{O}}\hat{v}w\,dx\,dt=0,\ \text{for all}\ w\in L^2((0,T)\times\mathcal{O}),\tag{2.8}$$

其中 h 是下式的解

$$\begin{cases}h_t-\Delta h+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)h(t,\theta)\,d\theta &=& w\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} & Q,\\ h &=& 0 & \text{on} & \Sigma,\\ h(0,\cdot) &=& 0 & \text{in} & \Omega.\end{cases}\tag{2.9}$$

现在，我们引入系统（2.9）的伴随状态:

$$\begin{cases}-p_t-\Delta p+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)p(t,\theta)\,d\theta &=& (z-z_d)\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} & Q,\\ p &=& 0 & \text{on} & \Sigma,\\ p(T,\cdot) &=& 0 & \text{in} & \Omega.\end{cases}$$

如果将该后一系统的第一个方程乘以 h （2.9）的解，并在 Q上分部积分，利用富比尼定理可得

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}_d} (z - z_d)h \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} wp \, dx \, dt.$$

将上述等式与 (2.8) 相结合，我们得到

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} w \, (p + \mu\hat{v}) \, dx \, dt = 0 \text{ for all } w \in L^2((0,T) \times \mathcal{O}),$$

由此我们推出 $p + \mu\hat{v} = 0 \in (0,T) \times \mathcal{O}$。

我们证明了以下结果，该结果给出了刻画代价泛函 J 对应最优控制的最优性系统。

命题 2.1 设 $z^0 \in L^2(\Omega)$ 和 $f \in L^2((0,T) \times \omega)$ 给定。则最优控制问题(1.4)-(2.3) 存在唯一解 $\hat{v} \in L^2((0,T) \times \mathcal{O})$。此外，

$$\hat{v} = -\frac{1}{\mu} p \quad in \quad (0,T) \times \mathcal{O}, \tag{2.10}$$

其中 (z,p) 是以下最优性系统的解

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) z(t,\theta) \, d\theta &= f\chi_\omega - \dfrac{1}{\mu} p\chi_{\mathcal{O}} \quad in \quad Q, \\ z &= 0 \quad on \quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) &= z^0 \quad in \quad \Omega \end{cases} \tag{2.11}$$

and

$$\begin{cases} -p_t - \Delta p + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) p(t,\theta) \, d\theta &= (z - z_d)\chi_{\mathcal{O}_d} \quad in \quad Q, \\ p &= 0 \quad on \quad \Sigma, \\ p(T,\cdot) &= 0 \quad in \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.12}$$

注 2 利用命题 2.2 *[11]*，我们可以证明存在正常数 $C = C(\|K\|_\infty, T, \mu)$使得以下估计成立

$$\|\hat{v}\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})} \leq C \left(\|f\|_{L^2((0,T)\times\omega)} + \|z^0\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.13}$$

2.2 Carleman 不等式

在本节中，我们将建立一个适用于求解级联线性系统（2.11）-（2.12）零可控性的合适可观测性不等式。众所周知，求解系统（2.11）-（2.12）的零可控性问题可归结为寻找以下伴随系统解的可观测性不等式:

$$\begin{cases} -\rho_t - \Delta\rho + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) \rho(t,\theta) \, d\theta &= \psi\chi_{\mathcal{O}_d} \quad \text{in} \quad Q, \\ \rho &= 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ \rho(T,\cdot) &= \rho^T \quad \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

and

$$\begin{cases} \psi_t - \Delta\psi + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\psi(t,\theta)\,d\theta &= -\frac{1}{\mu}\rho\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} & Q, \\ \psi &= 0 & \text{on} & \Sigma, \\ \psi(0,\cdot) &= 0 & \text{in} & \Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

对于 $\rho^T \in L^2(\Omega)$。

现在，我们介绍一些记号，并给出一些后续将用到的预备结果。

由于 $\mathcal{O}_d \cap \omega \neq \emptyset$，因此存在一个非空集合 ω'，使得 $\omega' \subset\subset \mathcal{O}_d \cap \omega$。令 $\eta \in \mathcal{C}(\Omega)$ 为 ^{0} ^{2} 一个满足以下条件的函数

$$\eta^0(x) > 0 \text{ in } \Omega,\ \eta^0 = 0 \text{ on } \partial\Omega,\ |\nabla\eta^0| > 0 \text{ in } \overline{\Omega} \setminus \omega'. \tag{2.16}$$

此类函数的存在性已在[14, 引理 1 中证明。1]令 $l \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ 为一个满足以下条件的函数

$$l(t) > 0,\ \forall t \in (0,T),\quad l(t) = t,\ \forall t \in [0,T/4],\quad l(t) = T - t,\ \forall t \in [3T/4, T]. \tag{2.17}$$

对于任意 $\lambda \geq 1$，以及任意的 $(t,x) \in Q$，我们定义如下（正）权函数

$$\eta(t,x) = \frac{\sigma(x)}{l^4(t)},\quad \varphi(t,x) = \frac{e^{\lambda(2\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \eta^0(x))}}{l^4(t)}, \tag{2.18}$$

其中

$$\sigma(x) = e^{4\lambda\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda(2\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \eta^0(x))}. \tag{2.19}$$

接下来，我们采用 [4] 中定义的以下记号：

$$\sigma^+ := \max_{x\in\overline{\Omega}} \sigma(x) = e^{4\lambda\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{2\lambda\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)}}, \tag{2.20a}$$

$$\sigma^- := \min_{x\in\overline{\Omega}} \sigma(x) = e^{4\lambda\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{3\lambda\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)}}. \tag{2.20b}$$

根据 φ、η 的定义，经过简单计算，我们得到以下估计

$$\nabla\eta = -\nabla\varphi \leq C\lambda\varphi,\quad |\eta_t| = |\varphi_t| \leq C(T)\varphi^2,\quad \varphi^{-1} \leq C(T). \tag{2.21}$$

对于 $s \geq 1$，我们针对合适的函数 z 引入以下记号，以简化估计 e

$$\mathcal{M}(z) = s\lambda^2 \int_Q e^{-2s\eta}\varphi|\nabla z|^2 dx\,dt + s^3\lambda^4 \int_Q e^{-2s\eta}\varphi^3|z|^2 dx\,dt. \tag{2.22}$$

对于任意 $F \in L^2(Q)$ 和 $z^T \in L^2(\Omega)$，我们考虑以下系统：

$$\begin{cases} -z_t - \Delta z &= F & \text{in} & Q, \\ z &= 0 & \text{on} & \Sigma, \\ z(T,\cdot) &= z^T & \text{in} & \Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

我们陈述由 [14] 针对热方程（2.23）的解给出的经典 Carleman 估计。

引理 2.1 设 φ 和 η 由 (2.18)定义。则存在正常数 $s_1 \geq 1$, $\lambda_1 \geq 1$ 和$C(\Omega\ \omega) > 0$ 使得，对于任意 $\lambda \geq \lambda_1$, $s \geq s_1$，以及任意 z 方程(2.23)的解，都有

$$\mathcal{M}(z) \leq C(\Omega,\omega)\left(\int_Q e^{-2s\eta}|F|^2 dx\,dt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\omega'} e^{-2s\eta}\varphi^3|z|^2 dx\,dt\right). \tag{2.24}$$

注3 若在 (2.23)中对 $T-t$ 作变量替换 t，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial t} - \Delta \tilde{z} &= \widetilde{F} \quad in \quad Q, \\ \tilde{z} &= 0 \quad on \quad \Sigma, \\ \tilde{z}(0,\cdot) &= z^T \quad in \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.25}$$

~其中 $\tilde{z}(t,\ x) = z(T-t,\ x)$ 以及 $F(t,\ x) = F(T-t,\ x)$。那么，全局卡尔曼不等式(2.24) 对 $\tilde{z}$ 的任意解(2.25)也成立。

现在，我们陈述如下结果，其证明与命题 2.3 [4]的证明类似。

命题 2.2 对任意固定的 $\lambda > 0$ 和 $s > 1$，以下不等式成立

$$\exp\left(-\frac{(1+s)\sigma^-}{l^4(t)}\right) < \exp\left(-\frac{s\sigma^+}{l^4(t)}\right). \tag{2.26}$$

注4 在*[4, 14]*, 中，作者分别使用函数 $l(t) = t(T-t)$ 证明了引理 2.1 和命题 2.2。由于在本文中，我们提出了一个由（2.17）定义的正函数 $l(t)$，其具有当 t 趋于 0^+ 和 T^-时趋于 0 的性质，因此，如果使用由（2.18）定义的权函数和由（2.17）定义的函数 $l(t)$，引理 2.1 和命题 2.2 的证明无需改变。

现在，利用估计（2.24），我们为系统（2.14）-（2.15）的解证明一个新的 Carleman 估计。

命题2.3 假设 $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$ 且 μ 足够大。那么，存在正常数$C = C(\Omega\ \omega, T) > 0$，使得方程 (ρ, ψ) （(2.14)-(2.15) 的解满足

$$\mathcal{M}(\rho) + \mathcal{M}(\psi) \leq Cs^7\lambda^8 \int_0^T \int_\omega e^{-2s\eta}\varphi^7 |\rho|^2 dx\, dt, \tag{2.27}$$

对每个足够大的 $s > 0$，

证明。我们分两步进行。
步骤1。我们证明，当 $s > 0$ 足够大时，有

$$\mathcal{M}(\rho) + \mathcal{M}(\psi) \leq C(\Omega, \omega)\left(s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\omega'} e^{-2s\eta}\varphi^3 \left(|\rho|^2 + |\psi|^2\right) dx\, dt\right). \tag{2.28}$$

我们对（2.24）中的不等式应用卡尔曼不等式，并分别应用于（2.14）和（2.15）的每个方程，然后将结果相加，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\rho) + \mathcal{M}(\psi) \quad &\leq \quad C(\Omega,\omega)s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\omega'} e^{-2s\eta}\varphi^3 \left(|\rho|^2 + |\psi|^2\right) dx\, dt \\ &+ \quad C(\Omega,\omega)\left(\int_Q e^{-2s\eta}|\psi|^2 dx\, dt + \int_Q e^{-2s\eta}\left|-\frac{1}{\mu}\rho\chi_{\mathcal{O}}\right|^2 dx\, dt\right) \\ &+ \quad C(\Omega,\omega)\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho(t,\theta)\ d\theta\right|^2 dx\, dt \\ &+ \quad C(\Omega,\omega)\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\psi(t,\theta)\ d\theta\right|^2 dx\, dt. \end{aligned}$$

取足够大的参数 s，我们可以吸收上述表达式右端的第二项，从而得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\rho)+\mathcal{M}(\psi) &\leq C(\Omega,\omega)s^3\lambda^4\int_0^T\int_{\omega'}e^{-2s\eta}\varphi^3\left(|\rho|^2+|\psi|^2\right)dx\,dt\\ &+ C(\Omega,\omega)\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho(t,\theta)\,d\theta\right|^2 dx\,dt\\ &+ C(\Omega,\omega)\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\psi(t,\theta)\,d\theta\right|^2 dx\,dt.\end{aligned}\tag{2.29}$$

现在，按照 [4], 中的论证，我们估计（2.29）中的最后两项。我们固定参数 $\lambda=\lambda_1$足够大。于是有

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho(t,\theta)\,d\theta\right| &= \left|\int_\Omega e^{\frac{\sigma^-}{l^4(t)}}K(t,x,\theta)e^{-\frac{\sigma^-}{l^4(t)}}\rho(t,\theta)\,d\theta\right|\\ &\leq \left[\left(\int_\Omega e^{\frac{2\sigma^-}{l^4(t)}}|K(t,x,\theta)|^2\,d\theta\right)\left(\int_\Omega e^{-\frac{2\sigma^-}{l^4(t)}}|\rho(t,\theta)|^2\,d\theta\right)\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

利用上述表达式，可得

$$\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho(t,\theta)\,d\theta\right|^2 dx\,dt\leq\mathcal{K}^2\int_Q e^{-2s\eta}\left(\int_\Omega e^{-\frac{2\sigma^-}{l^4(t)}}|\rho(t,\theta)|^2\,d\theta\right)dxdt.\tag{2.30}$$

我们接下来估计上述不等式右端的项。利用富比尼定理，得到

$$\int_Q e^{-2s\eta}\left(\int_\Omega e^{-\frac{2\sigma^-}{l^4(t)}}|\rho(t,\theta)|^2\,d\theta\right)dxdt=\int_Q e^{-\frac{2\sigma^-}{l^4(t)}}|\rho(t,\theta)|^2\left(\int_\Omega e^{-2s\eta}\,dx\right)d\theta dt.$$

利用由（σ^- 2.20b）给出的定义，可得

$$\int_\Omega e^{-2s\eta}\,dx\leq|\Omega|e^{-\frac{2s\sigma^-}{l^4(t)}},\tag{2.31}$$

其中 $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度。根据命题 2.2、由（σ^+ 2.20a）给出的定义以及估计（2.31），有

$$\begin{aligned}\int_Q e^{-2s\eta}\left(\int_\Omega e^{-\frac{2\sigma^-}{l^4(t)}}|\rho(t,\theta)|^2\,d\theta\right)dxdt &\leq C\int_Q e^{-\frac{2(1+s)\sigma^-}{l^4(t)}}|\rho(t,\theta)|^2\,d\theta\,dt\\ &\leq C\int_Q e^{-\frac{2s\sigma^+}{l^4(t)}}|\rho(t,\theta)|^2\,d\theta\,dt\\ &\leq C\int_Q e^{-2s\eta}|\rho(t,\theta)|^2\,d\theta\,dt.\end{aligned}$$

综合以上结果，表达式（2.30）变为

$$\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho(t,\theta)\,d\theta\right|^2 dx\,dt\leq C\mathcal{K}^2\int_Q e^{-2s\eta}|\rho|^2\,dxdt.\tag{2.32}$$

按照上述方法，我们证明以下估计

$$\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\psi(t,\theta)\,d\theta\right|^2 dx\,dt \le C\mathcal{K}^2\int_Q e^{-2s\eta}|\psi|^2\,dxdt. \tag{2.33}$$

结合（2.32）和（2.33），并代入（2.29），然后取 s 充分大，可得估计（2.28）。

步骤 2。 现在，我们要消去估计（2.28）右侧对应于 ψ 的局部项。我们采用与 [7] 中相同的论证。考虑一个开集 ω_0，使得 $\omega' \subset\subset \omega_0 \subset\subset \mathcal{O}_d\cap\omega$，以及一个函数 $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$，满足

$$0 \le \xi \le 1,\ \xi = 1 \text{ in } \omega',\ \xi = 0 \text{ in } \Omega\setminus\omega_0, \tag{2.34a}$$

$$\frac{\Delta\xi}{\xi^{1/2}} \in L^\infty(\omega_0),\ \frac{\nabla\xi}{\xi^{1/2}} \in [L^\infty(\omega_0)]^N. \tag{2.34b}$$

定义 $u = s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}$。利用 φ 和 η 的定义，可得 $u(T) = u(0) = 0$。根据估计（2.21），有如下估计：

$$\begin{aligned} |u\xi| &\le s^3\lambda^4\varphi^3 e^{2s\eta}\xi, \qquad |(u\xi)_t| \le C(T)s^4\lambda^4\varphi^5 e^{2s\eta}\xi,\\ |\nabla(u\xi)| &\le Cs^4\lambda^5\varphi^4 e^{2s\eta}\xi, \qquad |\Delta(u\xi)| \le Cs^5\lambda^6\varphi^5 e^{2s\eta}\xi, \end{aligned} \tag{2.35}$$

其中 C 为正常数。
将（2.14）的第一个方程乘以 $u\xi\psi$，在 Q 上分部积分并应用富比尼定理，得到

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \int_Q u\xi|\psi|^2\chi_{\mathcal{O}_d}\,dx\,dt, \tag{2.36}$$

其中

$$J_1 = -\frac{1}{\mu}\int_Q u\xi|\rho|^2\chi_{\mathcal{O}}\,dx\,dt\,dx\,dt,\ J_2 = \int_Q \rho\psi(u\xi)_t\,dx\,dt,$$
$$J_3 = -2\int_Q \rho\nabla\psi.\nabla(u\xi)\,dx\,dt,\ J_4 = -\int_Q \rho\psi\Delta(u\xi)\,dx\,dt.$$

我们来估计各项 J_i，$i = 1, \cdots$，4. 根据 H¨older 不等式、Young 不等式及估计（2.35），可得

$$J_1 \le \frac{1}{\mu}\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}|\rho|^2\,dx\,dt.$$

$$J_2 \le \frac{\delta_1}{2}\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}|\psi|^2 dx\,dt + \frac{C(T)}{\delta_1}\int_0^T\int_{\omega_0} s^5\lambda^4\varphi^7 e^{-2s\eta}|\rho|^2 dx\,dt,$$

对任意 $\delta_1 > 0$。

$$J_3 \le \frac{\delta_2}{2}\int_Q s\lambda^2\varphi e^{-2s\eta}|\nabla\psi|^2 dx\,dt + \frac{C}{\delta_2}\int_0^T\int_{\omega_0} s^7\lambda^8\varphi^7 e^{-2s\eta}|\rho|^2 dx\,dt,$$

对于任意 $\delta_2 > 0$。

$$J_4 \le \frac{\delta_3}{2}\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}|\psi|^2 dx\,dt + \frac{C}{\delta_3}\int_0^T\int_{\omega_0} s^7\lambda^8\varphi^7 e^{-2s\eta}|\rho|^2 dx\,dt,$$

对于任意 $\delta_3 > 0$。

最后，选择常数 δ_i 使得 $\delta_2 = \frac{1}{C(\Omega\ \omega)}$ 和 $\delta_1 = \frac{\delta_3}{2C} = \frac{1}{2C(\Omega\ \omega)}$，其中 $C(\Omega\ \omega)$ 是式（2.28）中得到的常数，由式（2.36）、前面的不等式以及式（2.35）可得

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\omega'} s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}|\psi|^2 dx\,dt &\leq \frac{1}{2}\mathcal{M}(\psi) + \frac{1}{\mu}\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}|\rho|^2\ dx\,dt \\ &+ C(\Omega,\omega,T)\int_0^T\int_{\omega_0} s^7\lambda^8\varphi^7 e^{-2s\eta}|\rho|^2\ dx\,dt.\end{aligned} \tag{2.37}$$

结合式（2.28）和式（2.37），可推得

$$\mathcal{M}(\rho)+\mathcal{M}(\psi) \leq C(\Omega,\omega,T)\int_0^T\int_{\omega_0} s^7\lambda^8\varphi^7 e^{-2s\eta}|\rho|^2\ dx\,dt + \frac{1}{\mu}\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}|\rho|^2\ dx\,dt.$$

由于 μ 足够大，我们可以将上述不等式的最后一项吸收到左端。利用 $\omega_0 \subset \omega$这一事实，可得式（2.27）。

■

2.3 可观测性与零可控性

为证明所需的可观测性不等式，我们将改进卡尔曼不等式（2.27）。为此，我们引入一些新的权函数，它们与式（2.18）中的权函数类似，并且在 $t = 0$处不为零

首先考虑函数

$$\bar{l}(t) = \begin{cases} \|l\|_{L^\infty((0,T))} & \text{for}\ \ 0 \leq t \leq T/2, \\ l(t) & \text{for}\ \ T/2 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{2.38}$$

以及函数

$$\begin{aligned}&\alpha(t,x) = \frac{e^{4\lambda\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda(2\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)}+\eta^0(x))}}{\bar{l}^4(t)},\quad \zeta(t,x) = \frac{e^{\lambda(2\|\eta^0\|_{L^\infty(\Omega)}+\eta^0(x))}}{\bar{l}^4(t)}, \\ &\alpha^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}}\alpha(t,x),\quad \zeta^*(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}}\zeta(t,x).\end{aligned} \tag{2.39}$$

根据这些定义，我们得到如下结果。

命题 2.4 在命题 2.3的假设下，存在正常数 $C = C(\Omega\ \omega, \|K\|_\infty, T)$ 和正权函数 ϖ_1 使得

$$\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_Q \frac{1}{\varpi_1^2}|\psi|^2\,dx\,dt \leq C\int_0^T\int_\omega |\rho|^2\,dx\,dt, \tag{2.40}$$

其中 $(\rho,\ \psi)$ 是方程 (2.14)-(2.15)的解。

证明。我们固定一个足够大的参数 s，并分两步进行。步骤1。根据构造，$\eta=\alpha$ 和 $\varphi=\zeta$ 属于 $[T/2,T]\times\Omega$，因此我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega}e^{-2s\alpha}\zeta^3|\rho|^2\,dxdt+\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega}e^{-2s\alpha}\zeta^3|\psi|^2\,dxdt\\&=\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega}e^{-2s\eta}\varphi^3|\rho|^2\,dxdt+\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega}e^{-2s\eta}\varphi^3|\psi|^2\,dxdt\\&\le C(\Omega,\omega,T)\int_0^T\int_{\omega}e^{-2s\eta}\varphi^7|\rho|^2\,dx\,dt,\end{aligned}\tag{2.41}$$

其中我们使用了 Carleman 估计（2.27）。
步骤 2。 另一方面，我们对区域 $(0,T/2)\times\Omega$ 上的系统（2.14）使用经典能量估计。令函数 $\beta\in\mathcal{C}^1([0,T])$ 满足

$$0\le\beta\le1,\ \beta(t)=1\text{ for }t\in[0,T/2],\ \beta(t)=0\text{ for }t\in[3T/4,T],\ |\beta'(t)|\le C/T.\tag{2.42}$$

对于任意 $(t,x)\in Q$，我们设

$$z(t,x)=\beta(t)e^{-r(T-t)}\rho(t,x),$$

其中 $r>0$。于是，由（2.14）可知，函数 z 是以下方程的解:

$$\begin{cases}-z_t-\Delta z+\displaystyle\int_{\Omega}K(t,x,\theta)z(t,\theta)\,d\theta+rz &=& \beta e^{-r(T-t)}\psi\chi_{\mathcal{O}_d}-\beta'e^{-r(T-t)}\rho & \text{in} & Q,\\ z &=& 0 & \text{on} & \Sigma,\\ z(T,\cdot) &=& 0 & \text{in} & \Omega.\end{cases}\tag{2.43}$$

由系统（ z （2.43）的解的经典能量估计，并利用 β 和z的定义，我们得到

$$\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\rho|^2\,dxdt\le C(\|K\|_{\infty},T)\left(\int_0^{3T/4}\int_{\Omega}|\psi|^2\,dx\,dt+\int_{T/2}^{3T/4}\int_{\Omega}|\rho|^2\,dx\,dt\right).$$

在上述估计两边加上项 $\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\psi|^2\,dx\,dt$，可得

$$\begin{aligned}&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\rho|^2\,dxdt+\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\psi|^2\,dx\,dt\\&\le C(\|K\|_{\infty},T)\left(\int_{T/2}^{3T/4}\int_{\Omega}|\psi|^2\,dx\,dt+\int_{T/2}^{3T/4}\int_{\Omega}|\rho|^2\,dx\,dt+\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\psi|^2\,dx\,dt\right).\end{aligned}\tag{2.44}$$

为了消去（2.44）右端的最后一项，我们对系统（2.15）使用经典的能量估计，得到:

$$\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\psi|^2\,dxdt\le\frac{1}{\mu^2}C(\|K\|_{\infty},T)\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\rho|^2\,dxdt.\tag{2.45}$$

将（2.45）代入（2.44），并取 μ 足够大，可得

$$\begin{aligned}&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\rho|^2\,dxdt+\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\psi|^2\,dx\,dt\\&\le C(\|K\|_{\infty},T)\left(\int_{T/2}^{3T/4}\int_{\Omega}|\psi|^2\,dx\,dt+\int_{T/2}^{3T/4}\int_{\Omega}|\rho|^2\,dx\,dt\right).\end{aligned}$$

根据定义（2.39），权函数 α 和 ζ 在（t， x） $\in[0,3T/4]$上具有上下界，于是得到

$$\begin{aligned}&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\zeta^3|\rho|^2\,dxdt+\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\zeta^3|\psi|^2\,dx\,dt\\&\leq C(\|K\|_\infty,T)\left(\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\zeta^3|\psi|^2\,dx\,dt+\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\zeta^3|\rho|^2\,dx\,dt\right).\end{aligned}\tag{2.46}$$

利用估计（2.41），前面的估计变为

$$\begin{aligned}&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\zeta^3|\rho|^2\,dxdt+\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\zeta^3|\psi|^2\,dx\,dt\\&\leq C(\Omega,\omega,\|K\|_\infty,T)\int_0^T\int_\omega e^{-2s\eta}\varphi^7|\rho|^2\,dx\,dt.\end{aligned}\tag{2.47}$$

将估计 （2.41）与（2.47）相加，并利用由（2.39）给出的 α^* 和 ζ^* 的定义，我们得到 e

$$\begin{aligned}&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T}\int_\Omega e^{-2s\alpha^*}(\zeta^*)^3|\rho|^2\,dxdt+\int_0^{T}\int_\Omega e^{-2s\alpha^*}(\zeta^*)^3|\psi|^2\,dx\,dt\\&\leq C(\Omega,\omega,\|K\|_\infty,T)\int_0^T\int_\omega e^{-2s\eta}\varphi^7|\rho|^2\,dx\,dt.\end{aligned}\tag{2.48}$$

由于 $e^{-2s\eta}\varphi^7\in L^\infty$（$Q$），并取，我们得到可观测性不等式（2.40）

$$\varpi_1(t)=e^{s\alpha^*}(\zeta^*)^{-3/2}.\tag{2.49}$$

■

现在，通过证明系统（2.11）-（2.12）的零可控性，我们完成定理 1.1 的证明。根据命题2.4，以下结果成立。

命题 **2 5** $\mathcal{O}_d\cap\omega\neq\emptyset$ ϖ_1 *2 4* $z^0\in$。 L^2 $z_d\in L^2$ 0 T $\times\mathcal{O}_d$ 1 14 $f\in$ 假设。令 按命题 中的定义给出。。另设 (Ω) 和 ((,)) 满足 (.)。那么，存在一个领导者控制 $\hat{}L^2((0,T)\times\omega)$, 使得系统 (2.11)-(2.12) 的相应解 (z,p) 满足 (1.7)。此外，存在一个常数 $C=C(\Omega\ \omega,\|K\|_\infty,T)$，使得

$$\|\hat{f}\|_{L^2((0,T)\times\omega)}\leq C\left(\|\varpi_1 z_d\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)}+\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\right).\tag{2.50}$$

证明。令 $\varepsilon>0$，并考虑以下代价函数

$$J_\varepsilon(f)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega|z(T,x)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega|f|^2\,dx\,dt,\tag{2.51}$$

其中 z i 是系统 (2.11)-(2.12) 的解。接下来，我们考虑最优控制问题 :

$$\inf_{f\in L^2((0,T)\times\omega)}J_\varepsilon(f).\tag{2.52}$$

我们可以证明 J_ε 是连续、强制且严格凸的。于是，优化问题（2.52）存在唯一解 f_ε 并仿照 [8], 中的论证，我们可以证明

$$f_\varepsilon=\rho_\varepsilon\ \text{ in }\ (0,T)\times\omega,\tag{2.53}$$

其中（ρ_ε， ψ_ε）是下列系统的解

$$\begin{cases} -\rho_{\varepsilon,t}-\Delta\rho_\varepsilon+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho_\varepsilon(t,\theta)\,d\theta &= \psi_\varepsilon\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} & Q,\\ \rho_\varepsilon &= 0 & \text{on} & \Sigma,\\ \rho_\varepsilon(T,\cdot) &= -\dfrac{1}{\varepsilon}z_\varepsilon(T,\cdot) & \text{in} & \Omega \end{cases} \tag{2.54}$$

and

$$\begin{cases} \psi_{\varepsilon,t}-\Delta\psi_\varepsilon+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\psi_\varepsilon(t,\theta)\,d\theta &= -\dfrac{1}{\mu}\rho_\varepsilon\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} & Q,\\ \psi_\varepsilon &= 0 & \text{on} & \Sigma,\\ \psi_\varepsilon(0,\cdot) &= 0 & \text{in} & \Omega, \end{cases} \tag{2.55}$$

其中（z_ε， p_ε）是与控制 f_ε 相对应的系统（2.11）-（2.12）的解。

将（2.54）和（2.55）的第一个方程分别乘以 z_ε 和 p_ε，并在 Q上分部积分，由（2.53）和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} &\|f_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}+\frac{1}{\varepsilon}\|z_\varepsilon(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &=-\int_\Omega y^0(x)\rho_\varepsilon(0,x)\,dx+\int_0^T\int_{\mathcal{O}_d} z_d\psi_\varepsilon\,dx\,dt\\ &\le\left(\|\varpi_1 z_d\|^2_{L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)}+\|z^0\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\times\left(\left\|\varpi_1^{-1}\psi_\varepsilon\right\|^2_{L^2(Q)}+\|\rho_\varepsilon(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

利用可观测性不等式（2.40），由（2.56）可推出存在常数 C =C（Ω ω， $\|K\|_\infty$， T），使得

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\omega)}\le C\left(\|\varpi_1 z_d\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)}+\|z^0\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{2.57}$$

and

$$\|z_\varepsilon(T,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\le C\sqrt{\varepsilon}\left(\|\varpi_1 z_d\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)}+\|z^0\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.58}$$

利用（2.57）-（2.58）以及对与控制 f_ε相对应的系统（2.11）-（2.12）的经典能量估计，我们可以提取仍记作 f_ε， z_ε 和 p_ε 的子列，使得当 $\varepsilon\to 0$时，有

$$f_\varepsilon \rightharpoonup \hat{f} \text{ weakly in } L^2((0,T)\times\omega), \tag{2.59a}$$

$$z_\varepsilon \rightharpoonup y \text{ weakly in } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \tag{2.59b}$$

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ weakly in } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \tag{2.59c}$$

$$z_\varepsilon(T,\cdot)\longrightarrow 0 \text{ strongly in } L^2(\Omega). \tag{2.59d}$$

如[8, 29] 中的论证，利用收敛性（2.59），我们证明（z， p）是与控制 f 相对应的（2.11）-ˆ（2.12）的解，并且 z 也满足（1.7）。此外，利用收敛性ˆ（2.59a），可得 f 满足（2.50）。

■

2.4 半线性情形

本节中，我们将 Stackelberg策略应用于以下非局部半线性系统

$$\begin{cases} y_t-\Delta y+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)y(t,\theta)\,d\theta &= G(y)+f\chi_\omega+v\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} & Q,\\ y &= 0 & \text{on} & \Sigma,\\ y(0,\cdot) &= y^0 & \text{in} & \Omega, \end{cases} \tag{2.60}$$

其中， G 是一个全局 Lipschitz 连续函数。

在半线性情形下，由（ J 1.3）定义的泛函的凸性并无保证，因此我们失去了最优控制 $\hat{v}$的唯一性。在下一个命题中，我们将证明，如果 μ 足够大，那么对于大数据，泛函（1.3）确实是严格凸的。

命题 2.6 设 $y_d \in L^\infty((0,T);\mathcal{O}_d)$， $f \in L^2((0,T)\times\omega)$ 为固定值，且 μ 足够大。假设 $y^0 \in L^2(\Omega)$， $N \le 12$, $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$，并且存在常数 $L>0$，使得 $|G'(s)|+|G''(s)| \le L$, $\forall s \in \mathbb{R}$。那么，如果 $\hat{v}$ 满足（1.5），则存在一个与 μ 无关的常数 $C>0$，使得

$$D^2J(f;\hat{v})\cdot(w^1,w^1) \ge C\|w^1\|^2_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})},\ \forall w^1 \in L^2((0,T)\times\mathcal{O}),\ w^1 \ne 0. \tag{2.61}$$

特别地，泛函 J 在 $\hat{v}$ 中是严格凸的。

证明。 证明的技巧受到 [2, 命题 14]的启发。

给定 $f \in L^2((0,T)\times\omega)$，并令 $\hat{v}$为（1.4）的相应最优控制解。对于任意 $w^1, w^2 \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$ 和 $s \in \mathbb{R}$, 记 y^s 为以下系统的解

$$\left\{\begin{array}{rcll} y^s_t - \Delta y^s + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)y^s(t,\theta)\,d\theta &=& G(y^s) + f\chi_\omega + (\hat{v}+sw^1)\chi_{\mathcal{O}} & \text{in } Q,\\ y^s &=& 0 & \text{on } \Sigma,\\ y^s(0,\cdot) &=& y^0 & \text{in } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.62}$$

并令 $y := y^s|_{s=0}$。

于是，我们有

$$\begin{aligned} DJ(f;\hat{v}+sw^1)\cdot w^2 - DJ(f;\hat{v})\cdot w^2 &= s\mu\int_0^T\int_{\mathcal{O}} w^1w^2\,dxdt\\ &+\int_0^T\int_{\mathcal{O}_d}(y^s-y_d)z^s\,dxdt - \int_0^T\int_{\mathcal{O}_d}(y-y_d)z\,dxdt, \end{aligned} \tag{2.63}$$

其中， z^s 是 y^s 关于$\hat{v}$ 沿方向 w^2的导数，也就是说， z^s 是以下方程的解

$$\left\{\begin{array}{rcll} z^s_t - \Delta z^s + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)z^s(t,\theta)\,d\theta &=& G'(y^s) + w^2\chi_{\mathcal{O}} & \text{in } Q,\\ z^s &=& 0 & \text{on } \Sigma,\\ z^s(0,\cdot) &=& 0 & \text{in } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.64}$$

我们还将使用记号 $z := z^s|_{s=0}$。

我们引入（2.64）的伴随系统

$$\left\{\begin{array}{rcll} -p^s_t - \Delta p^s + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)p^s(t,\theta)\,d\theta &=& G'(y^s)p^s + (y^s-y_d)\,\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in } Q,\\ p^s &=& 0 & \text{on } \Sigma,\\ p^s(T,\cdot) &=& 0 & \text{in } \Omega \end{array}\right. \tag{2.65}$$

并采用记号 $p := p^s|_{s=0}$。

将（2.64）的第一个方程乘以 p^s （2.65）的解，并在 Q上分部积分，得到

$$\int_0^T\int_{\mathcal{O}_d}(y^s-y_d)z^s\,dxdt = \int_Q w^2p^s\chi_{\mathcal{O}}\,dxdt. \tag{2.66}$$

由（2.63）和（2.66），可得

$$\begin{aligned} DJ(f;\hat{v}+sw^1)\cdot w^2 - DJ(f;\hat{v})\cdot w^2 &= s\mu\int_0^T\int_{\mathcal{O}} w^1 w^2 \, dxdt \\ &+ \int_0^T\int_{\mathcal{O}} (p^s-p)w^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{2.67}$$

注意到

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial t}(p^s-p) - \Delta(p^s-p) + \int_\Omega K(t,x,\theta)(p^s(t,\theta)-p^s(t,\theta)) \, d\theta \\ &= [G'(y^s)-G'(y)]\, p^s + G'(y)(p^s-p) + (y^s-y)\chi_{\mathcal{O}_d} \end{aligned}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t}(y^s-y) - \Delta(y^s-y) + \int_\Omega K(t,x,\theta)(y^s(t,\theta)-y^s(t,\theta)) \, d\theta = [G(y^s)-G(y)] + sw^1\chi_{\mathcal{O}}.$$

因此，以下极限存在

$$\eta = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(p^s-p) \quad \text{and} \quad \phi = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(y^s-y)$$

并验证以下系统:

$$\begin{cases} \phi_t - \Delta\phi + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\phi(t,\theta)\, d\theta &= G'(y)\phi + w^1\chi_{\mathcal{O}} \quad \text{in} \quad Q, \\ \phi &= 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ \phi(0,\cdot) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.68}$$

and

$$\begin{cases} -\eta_t - \Delta\eta + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\eta(t,\theta)\, d\theta &= G'(y)\eta + G''(y)\phi p + \phi\chi_{\mathcal{O}_d} \quad \text{in} \quad Q, \\ \eta &= 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ \eta(T,\cdot) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.69}$$

因此，由（2.67）-（2.69），结合 $w^2 = w^1$，可得

$$D^2J(f;\hat{v})\cdot(w^1,w^1) = \int_0^T\int_{\mathcal{O}} \eta w^1 \, dxdt + \mu\int_0^T\int_{\mathcal{O}} |w^1|^2 \, dxdt. \tag{2.70}$$

现在，我们 想要证明，对于某个与 f、 η、 ϕ、 w^1 和 μ 无关的常数 $C>0$，有一个 h as

$$\left|\int_0^T\int_{\mathcal{O}} \eta w^1 \, dxdt\right| \le C\|w^1\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}. \tag{2.71}$$

事实上，给定 $w_1 \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$，且由于 $G' \in L^\infty(Q)$，于是我们得到与 (2.68) 相关的以下能量估计

$$\|\phi\|^2_{L^2(Q)} + \|\nabla\phi\|^2_{L^2(Q)} \le C\|w^1\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}. \tag{2.72}$$

利用系统 (2.68)-(2.69)，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}\eta w^1\ dxdt &= \int_Q \eta\left(\phi_t-\Delta\phi+\int_\Omega K(t,x,\theta)\phi(t,\theta)\ d\theta - G'(y)\phi\right)\ dxdt\\ &= \int_Q \phi\left(-\eta_t-\Delta\eta+\int_\Omega K(t,x,\theta)\eta(t,\theta)\ d\theta - G'(y)\eta\right)\ dxdt\\ &= \int_Q \phi\left(G''(y)\phi p+\phi\chi_{\mathcal{O}_d}\right)\ dxdt\\ &= \int_Q G''(y)|\phi|^2 p\ dxdt+\int_Q |\phi|^2\chi_{\mathcal{O}_d}\ dxdt.\end{aligned} \tag{2.73}$$

利用 H ¨不等式（2.73）最后一个表达式中的较大值以及 $G''\in L^\infty(Q)$，我们得到

$$\left|\int_0^T\int_{\mathcal{O}}\eta w^1\ dxdt\right| \le \|G''\|_{L^\infty(Q)}\|\phi\|^2_{L^{2r'}((0,T);L^{2s'}(\Omega))}\|p\|_{L^r((0,T);L^s(\Omega))}+\|\phi\|^2_{L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)}, \tag{2.74}$$

其中， r' 和 s' 分别是 r 和 s的共轭。为了估计后一个不等式的右端，思路是找到满足以下条件的 r 和 s：

$$p\in L^r((0,T);L^s(\Omega)),\quad \phi\in L^{2r'}((0,T);L^{2s'}(\Omega)).$$

首先，我们有 $\phi\in L^2((0,T);H^2(\Omega))\cap L^\infty((0,T);H^1(\Omega))$。合理的做法是考察 d 和 b 取何值时，以下嵌入成立：

$$L^2((0,T);H^2(\Omega))\cap L^\infty((0,T);H^1(\Omega))\hookrightarrow L^d((0,T);L^b(\Omega)). \tag{2.75}$$

利用插值结果，我们推得

$$\frac{1}{d}=\frac{\theta}{2},\quad 0<\theta<1. \tag{2.76}$$

根据索博列夫嵌入结果，我们有

$$H^2(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-4}}(\Omega), \tag{2.77a}$$

$$H^1(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega). \tag{2.77b}$$

那么，空间 $L^b(\Omega)$ 是关于 (2.77a) 和 (2.77b) 的一个中间空间，当且仅当

$$\frac{1}{b}=\frac{(N-4)\theta}{2N}+\frac{(N-2)(1-\theta)}{2N},\quad 0<\theta<1. \tag{2.78}$$

取 $d=2r'$ 和 $b=2s'$，可得 r 和 s 的适当取值为

$$r=\frac{d}{d-2}\quad\text{and}\quad s=\frac{dN}{2(d+2)}.$$

另一方面，由于 $f\in L^2((0,T)\times\omega)$、$v\in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$ 和 $y^0\in L^2(\Omega)$，我们得到

$$y\in L^2((0,T);H^1(\Omega))\cap L^\infty((0,T);L^2(\Omega))\hookrightarrow L^{\bar d}((0,T);L^{\bar b}(\Omega)). \tag{2.79}$$

利用插值论证，我们得到

$$\bar{b} = \frac{2\bar{d}N}{\bar{d}N - 4}.$$

根据抛物正则性，我们有

$$\phi \in L^{\bar{d}}((0,T); W^{2,\bar{b}}(\Omega)) \hookrightarrow L^{\bar{d}}((0,T); L^{\frac{N\bar{b}}{N-2\bar{b}}}(\Omega)) = L^{\bar{d}}((0,T); L^{\frac{2\bar{d}N}{\bar{d}(N-4)-4}}(\Omega)). \tag{2.80}$$

取 $\bar{d} = r$，可得 $\phi \in L^{\bar{d}}((0,T); L^{d\frac{2dN}{N-8}()+8}(\Omega))$，~~并且~~为了使 $\phi \in L^r((0,T); L^s(\Omega))$，我们需要

$$\frac{dN}{2(d+2)} \leq \frac{2dN}{d(N-8)+8},$$

当且仅当 $N \leq 12$ 时，这一结论成立。

现在，利用（2.72）以及系统的标准能量估计（2.62）处理 $s = 0$，并利用（2.65）处理$s = 0$，项（2.74）变为

$$\left| \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \eta w^1 \, dxdt \right| \leq C \|w^1\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}, \tag{2.81}$$

其中 C 是一个与 μ 无关的正常数。

结合（2.70）和（2.81），可得

$$D^2 J(f;\hat{v}) \cdot (w^1, w^1) \geq (\mu - C) \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |w^1|^2 \, dxdt, \ \forall w^1 \in L^2((0,T)\times\mathcal{O}), \ w^1 \neq 0.$$

当 μ 足够大时，由（ J 1.3）给出的泛函严格凸，因此，最优控制 $\hat{}v$ （1.4）的解是唯一的。

■

按照命题 2.1中的论证，最优控制 $\hat{}v$ 由下式给出

$$\hat{v} = -\frac{1}{\mu} p \quad \text{in} \quad (0,T)\times\mathcal{O}, \tag{2.82}$$

其中（y， p）是以下最优性系统的解

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \int_\Omega K(t,x,\theta) y(t,\theta) \, d\theta = G(y) + f\chi_\omega - \frac{1}{\mu} p\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} \quad Q, \\ -p_t - \Delta p + \int_\Omega K(t,x,\theta) p(t,\theta) \, d\theta = G'(y)p + (y - y_d)\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ y = 0, \quad p = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ y(0,\cdot) = y^0, \quad p(T,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.83}$$

在以下结果中，我们运用与线性情形相同的思路，证明最优性系统（2.82）-（2.83）的零可控性。

定理 2.1 在命题 2.6 的假设下，存在一个在 $t = T$ 处发散的正权函数 $\varpi_1 = \varpi_1(t)$，使得对于满足 (1.14) 的任意 $y_d \in L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)$，都存在一个控制 $\hat{}f \in L^2((0,T)\times\omega)$ 和一个唯一最优控制 $\hat{}v \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$，使得相应的 (2.83) 的解满足 (1.7)。

证明。 我们简要说明定理2.1 的证明，该证明结合了线性情形中得到的结果与不动点论证。

我们引入变量替换，将轨迹可控性（1.7）简化为零可控性。通过引入变量 $z = y - \bar{y}$，我们可以将（2.83）写成如下形式

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) z(t,\theta)\, d\theta = a(z)z + f\chi_\omega - \frac{1}{\mu} p\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} \quad Q, \\ -p_t - \Delta p + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) p(t,\theta)\, d\theta = b(z)p + (z - z_d)\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ z = 0, \quad p = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) = z^0, \quad p(T,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.84}$$

其中 $z^0 := y^0 - \bar{y}^0$, $z_d := y_d - \bar{y}$ 且

$$a(z) = \int_0^1 G'(\bar{y} + sz)\, ds, \quad b(z) = G'(z + \bar{y}).$$

条件（1.7）等价于 z 的零可控性，即

$$z(T,x) = 0 \text{ in } \Omega. \tag{2.85}$$

对于每个 $w \in L^2(Q)$，我们引入与（2.84）相关联的线性化系统

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) z(t,\theta)\, d\theta = a(w)z + f\chi_\omega - \frac{1}{\mu} p\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} \quad Q, \\ -p_t - \Delta p + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) p(t,\theta)\, d\theta = b(w)p + (z - z_d)\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ z = 0, \quad p = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) = z^0, \quad p(T,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.86}$$

得益于关于 G 的假设，存在 $M > 0$ 使得

$$\|a(w)\|_{L^\infty(Q)}, \ \|b(w)\|_{L^\infty(Q)} \le M, \ \forall w \in L^2(Q).$$

推理　如命题的证明2.4中所示，我们可以得到以下可观测性不等式

$$\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_Q \frac{1}{\varpi_1^2} |\psi|^2\, dx\, dt \le C \int_0^T \int_\omega |\rho|^2\, dx\, dt, \tag{2.87}$$

其中 $C = C(\Omega\ \omega, \|K\|_\infty, \|a(w)\|_{L^\infty(Q)}\ \|b(w)\|_{L^\infty(Q)}\, T) > 0$，函数 ϖ_1 由（2.49）给出，而 (ρ, ψ) 是与（2.86）相关的下列伴随系统的解:

$$\begin{cases} -\rho_t - \Delta\rho + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) \rho(t,\theta)\, d\theta = a(w)\rho + \psi\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ \psi_t - \Delta\psi + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) \psi(t,\theta)\, d\theta = b(w)\psi - \frac{1}{\mu}\rho\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} \quad Q, \\ \rho = 0, \quad \psi = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ \rho(T,\cdot) = \rho^T, \quad \psi(0,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.88}$$

根据估计（2.87）并按照命题2.5中的论证，我们证明了存在一个领导者控制 $\hat{f} \in L^2((0,T)\times\omega)$，它是零可控性问题（2.85）-（2.86）的解。该领导者控制满足以下估计

$$\|\hat{f}\|_{L^2((0,T)\times\omega)} \leq C\left(\|\varpi_1 z_d\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{2.89}$$

其中 $C = C(\Omega\ \omega, \|K\|_\infty, \|a(w)\|_{L^\infty\ (Q)}\ \ \|b(w)\|_{L^\infty\ (Q)}\ T) > 0$。

现在，我们考虑一个非线性映射

$$S : L^2(Q) \to L^2(Q)$$

使得，对每个 $w \in L^2\ (Q)$，$S\ (w)\ = y$ 其中（y，p）是（2.86）的解。证明 S 有一个不动点 $y \in L^2\ (Q)$，即可证明 y 是（2.60）的解。为此，我们使用 Schauder不动点定理。按照 [8, 命题 3。2], 中的方法，可以证明对每个 $w \in L^2\ (Q)$，以下性质成立：

1. S 是连续的,
2. S 是紧的,
3. S 的值域有界；即，$\exists M > 0$: $\|S(w)\|_{L^2\ (Q)}\ \leq M,\ \forall w \in L^2(Q)$。

这就结束了 p 定理的证明 2.1 以及系统（2.60）的 Stackelberg 控制证明 .

■

3 分布式领导者与边界跟随者下的精确可控性

本节中，我们为系统（1.2）建立一个可控性结果。令 $z : = q - \bar{q}$，其中 q 和 $\bar{q}$分别是（1.2）和（1.11）的解。那么， z 是以下系统的解

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) z(t,\theta)\ d\theta &= g\chi_\omega &\text{in} &\quad Q, \\ z &= u\mathbf{1}_\Gamma &\text{on} &\quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) &= z^0 &\text{in} &\quad \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $z^0 : = q^0 - \bar{q}^0$。因此，性质（1.12）等价于

$$z(T,x) = 0 \text{ in } \Omega. \tag{3.2}$$

~由（1.8）定义的代价泛函可改写如下 J

$$\widetilde{J}(g;u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_d} |z - z_d|^2\ dxdt + \frac{\mu}{2}\int_0^T \int_\Gamma |u|^2\ d\sigma dt, \tag{3.3}$$

其中 $z_d := q_d - \bar{q}$。

借鉴第 2.1 节的论证，我们可以证明最优控制 $\hat{u}$ （1.9）的解的存在唯一性。事实上，对于任意固定的领导者 g 和 $z^0 \in L^2(\Omega)$，可以证明

$$\hat{u} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \nu} \quad \text{on} \quad (0,T)\times\Gamma, \tag{3.4}$$

其中（z, p）是最优性系统的解

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) z(t,\theta)\, d\theta = g\chi_\omega & \text{in} \quad Q, \\ -p_t - \Delta p + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta) p(t,\theta)\, d\theta = (z - z_d)\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ z = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial \nu}\mathbf{1}_\Gamma, \quad p = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) = z^0, \quad p(T,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

现在，我们给出方程组 (3.5) 的解的一个正则性结果。

命题 3.1 假设 $g \in L^2((0,T) \times \omega)$，$z^0 \in L^2(\Omega)$，$z_d \in L^2((0,T) \times \mathcal{O}_d)$ 且 μ 足够大。那么，系统 (3.5) 存在唯一解 $(z,p) \in W(Q) \times H^{2,1}(Q)$。此外，$\dfrac{\partial p}{\partial \nu} \in H^{1/2,1/4}(\Sigma)$，其中希尔伯特空间 $H^{1/2,1/4}(\Sigma)$ 和 $W(Q)$ 分别由 (1.15) 和 (2.4) 给出。

上述命题的证明可仿照 [3, 命题 4] 或 [16,命题 5]中的方法得到。

注 5

1. 利用命题 3.1 以及由 (3.4) 给出的最优控制的刻画，我们得到 2. 跟随者在 $H^{1/2,1/4}(\Sigma)$ 中的正则性而非 $L^2(\Sigma)$ 中的正则性非常重要，因为有了这种正则性，我们可以使用属于 $H^{1/2,1/4}(\Sigma)$ 的带非齐次边界条件的卡尔曼不等式。3. 如果在系统 (3.5) 中，我们考虑 $p(T,\cdot) = p^T$，其中 $p^T \in H_0^1(\Omega)$，那么就可以得到与命题 3.1 相同的适定性结果。

现在，我们想研究系统（3.5）的零可控性。按照第 2.3节的方法，要解决系统（3.5）的零可控性问题，需要证明以下伴随系统满足一个适当的可观测性不等式

$$\begin{cases} -\rho_t - \Delta \rho + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho(t,\theta)\, d\theta = \psi\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ \psi_t - \Delta \psi + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\psi(t,\theta)\, d\theta = 0 & \text{in} \quad Q, \\ \rho = 0, \quad \psi = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \rho}{\partial \nu}\mathbf{1}_\Gamma & \text{on} \quad \Sigma, \\ \rho(T,\cdot) = \rho^T, \quad \psi(0,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

其中 $\rho^T \in L^2(\Omega)$。

与（3.6）相关的可观测性估计由以下命题给出。

命题 3.2 假设 $\mathcal{O}_d \cap \omega \neq \emptyset$ 和 μ 足够大。则存在正常数 C 和一个在 $t = T$ 处发散的权函数 $\varpi_2 = \varpi_2(t)$，使得对任意 $\rho^T \in L^2(\Omega)$，以下不等式成立

$$\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_Q \frac{1}{\varpi_2^2}|\psi|^2\, dx\, dt \leq C \int_0^T \int_\omega |\rho|^2\, dx\, dt, \tag{3.7}$$

其中伴随变量 (ρ, ψ) 是以下方程的解 (3.6)。

根据命题3.2 并按照命题 2.5中的方法进行推导，我们可以证明，对于每个$z^0 \in L^2(\Omega)$，存在一个控制 $\hat{}g \in L^2((0,\ T) \times \omega)$，使得方程（$z$，$p$）的相应解 (3.5) 满足（3.2）。

注 6 由于 $H_0^1(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密，可以假设 $\rho^T \in H_0^1(\Omega)$。由于系统 (3.5) 和 (3.6) 具有相似的结构，根据注 5，系统 (3.6) 存在唯一解 $(\rho, \psi) \in H^{2,\ 1}(Q) \times W(Q)$。

现在，我们要证明不等式 (3.7)。根据假设 $\mathcal{O}_d \cap \omega \neq \emptyset$，存在一个非空集合 ω'，使得 $\omega' \subset\subset \mathcal{O}_d \cap \omega$ 且 $\eta^0 \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ 是满足 (2.16) 的一个函数。对于 $(t,x) \in Q$，我们考虑以下函数

$$\eta^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \eta(t,x), \quad \varphi^*(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \varphi(t,x), \tag{3.8}$$

其中 η 和 φ 是由 (2.18) 定义的权函数。

下文将用到以下记号

$$\mathcal{N}(z) = s^{-1}\int_Q e^{-2s\eta}\varphi^{-1}|\nabla z|^2 dxdt + s\lambda^2\int_Q e^{-2s\eta}\varphi|z|^2 dxdt. \tag{3.9}$$

对于 $F \in L^2(Q)$、$z_0 \in L^2(\Omega)$ 和 $h \in H^{1/2,\ 1/4}(\Sigma)$，我们考虑以下系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &= F \quad \text{in} \quad Q, \\ z &= h \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) &= z_0 \quad \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

可观测性不等式（3.7）通过 [18] 中给出的全局卡尔曼估计，对系统（3.10）的解建立。更确切地说，我们有以下结果。

引理 3.1 设 $F \in L^2(Q)$，$z_0 \in L^2(\Omega)$ 和 $h \in H^{1/2,1/4}(\Sigma)$。那么，存在 $s_0 \geq 1$ 和 $\lambda_0 \geq 1$，并且存在一个与 s 和 λ 无关的常数 $C_0 > 0$，使得对所有 $s \geq s_0$ 和 $\lambda \geq \lambda_0$，以及任意 $z \in W(Q)$ 为 (3.10)的解时，均有

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(z) \quad \leq \quad & C_0\left(s^{-\frac{1}{2}}\|\varphi^{-\frac{1}{4}}he^{-s\eta}\|^2_{H^{1/2,1/4}(\Sigma)} + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{-2s\eta}\varphi^{-2}|F|^2\ dxdt \right. \\ & \left. + s\lambda^2\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2s\eta}\varphi|z|^2\ dxdt\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

利用引理 2.1 和引理 3.1，我们可以证明与伴随系统（3.6）相关的卡尔曼不等式。我们有以下结果。

命题 3.3 假设 $\omega \cap \mathcal{O}_d \neq \emptyset$ 和 μ 足够大。那么，存在正常数$C = C(\Omega\ \omega, T) > 0$，使得方程 (ρ, ψ) 的解满足 (3.6) 所示条件

$$\mathcal{M}(\rho) + \mathcal{N}(\psi) \leq Cs^5\lambda^6\int_0^T\int_\omega e^{-2s\eta}\varphi^5|\rho|^2 dx\, dt, \tag{3.12}$$

对所有足够大的 $s > 0$。

证明。 将估计式（2.24）应用于（3.6）的第一个方程，然后将估计式（3.11）应用于（3.6）的第二个方程，并将它们相加，得到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(\rho)+\mathcal{N}(\psi)\\
&\leq C\left(\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2s\eta}\left(s^3\lambda^4\varphi^3|\rho|^2+s\lambda^2\varphi|\psi|^2\right)dx\,dt+\int_Q e^{-2s\eta}|\psi|^2dx\,dt\right)\\
&+C\left(\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho(t,\theta)\,d\theta\right|^2dx\,dt+\int_Q e^{-2s\eta}\left|\int_\Omega K(t,x,\theta)\psi(t,\theta)\,d\theta\right|^2dx\,dt\right)\\
&+Cs^{-\frac{1}{2}}\left\|\varphi^{-\frac{1}{4}}e^{-s\eta}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\mathbf{1}_\Gamma\right\|^2_{H^{1/2,1/4}(\Sigma)},
\end{aligned}
$$

对任意 $s\geq s$，$\lambda\geq\lambda$，其中$s=\max(s_0,s_1)$，$\lambda=\max(\lambda_0,\lambda_1)$，且常数 $C=C(C_0,\Omega\ \omega)>0$。现在，我们固定参数 $\lambda=\lambda$ 使其充分大。由（2.32）和（2.33），我们可以将上述估计右端的若干项吸收，并得到

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(\rho)+\mathcal{N}(\psi)\\
&\leq C\left(\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2s\eta}\left(s^3\lambda^4\varphi^3|\rho|^2+s\lambda^2\varphi|\psi|^2\right)dx\,dt+s^{-\frac{1}{2}}\left\|\varphi^{-\frac{1}{4}}e^{-s\eta}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\mathbf{1}_\Gamma\right\|^2_{H^{1/2,1/4}(\Sigma)}\right),
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

其中 $C=C(C_0,\Omega\ \omega)>0$ 且 C_0 是引理3.1中定义的常数。
现在，我们要估计（3.13）中的最后一项。首先注意，映射 $\rho\longmapsto\dfrac{\partial\rho}{\partial\nu}\mathbf{1}_\Gamma$ 是从 $H^{2,1}(Q)$到 $H^{1/2,1/4}(\Sigma)$的连续线性映射。其次，根据（2.18）和（3.8）中权函数的定义，我们有 η 和 φ 在边界上分别等于 η^* 和 φ^*。因此，我们可以写成

$$
s^{-\frac{1}{2}}\left\|\varphi^{-\frac{1}{4}}e^{-s\eta}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\mathbf{1}_\Gamma\right\|^2_{H^{1/2,1/4}(\Sigma)}\leq\frac{1}{\mu}s^{-\frac{1}{2}}\left\|(\varphi^*)^{-\frac{1}{4}}e^{-s\eta^*}\rho\right\|^2_{H^{2,1}(Q)}.
\tag{3.14}
$$

现在的策略是估计（3.14）右端的项。我们令 $\widehat{\rho}=\sigma\rho$ 其中$\sigma\in\mathcal{C}^\infty([0,T])$ 定义如下：

$$
\sigma=e^{-s\eta^*}(s\varphi^*)^{-1/4}.
\tag{3.15}
$$

注意到 $\sigma(T)=0$，并利用权函数 η^* 和 φ^* 的定义，对于足够大的 s，我们得到

$$
|\sigma_t|\leq Ce^{-s\eta^*}(s\varphi^*).
\tag{3.16}
$$

利用（3.6）的第一个方程，$\widehat{\rho}$ 满足以下系统

$$
\left\{\begin{array}{rcll}
-\widehat{\rho}_t-\Delta\widehat{\rho}+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\widehat{\rho}(t,\theta)\,d\theta &=& \sigma\psi\chi_{\mathcal{O}_d}-\sigma_t\rho & \text{in}\quad Q,\\
\widehat{\rho} &=& 0 & \text{on}\quad \Sigma,\\
\widehat{\rho}(T,\cdot) &=& 0 & \text{in}\quad \Omega.
\end{array}\right.
\tag{3.17}
$$

利用命题 3.1，我们推得系统（3.17）存在唯一解 $\widehat{\rho}\in H^{2,1}(Q)$。此外，与 $\widehat{\rho}$ 相关的经典能量估计为

$$
\|\widehat{\rho}\|^2_{H^{2,1}(Q)}\leq C(\|K\|_\infty,T)\left(\|\sigma\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma_t\rho\|^2_{L^2((Q)}\right).
\tag{3.18}
$$

结合（3.15）和（3.16）以及估计（3.18），我们得到

$$\begin{aligned} & s^{-\frac{1}{2}} \left\| (\varphi^*)^{-\frac{1}{4}} e^{-s\eta^*} \rho \right\|^2_{H^{2,1}(Q)} \\ & \leq C(\|K\|_\infty, T) \left(\int_Q e^{-2s\eta^*} (s\varphi^*)^{-1/2} |\psi|^2 \, dxdt + \int_Q e^{-2s\eta^*} (s\varphi^*)^2 |\rho|^2 \, dxdt \right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

根据权函数的定义 η^* 和 φ^*，再结合（3.19）和（3.14），可得

$$\begin{aligned} & s^{-\frac{1}{2}} \left\| \varphi^{-\frac{1}{4}} e^{-s\eta} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \mathbf{1}_\Gamma \right\|^2_{H^{1/2,1/4}(\Sigma)} \\ & \leq C(\|K\|_\infty, \mu, T) \left(\int_Q e^{-2s\eta} s\varphi |\psi|^2 \, dxdt + \int_Q e^{-2s\eta} (s\varphi)^2 |\rho|^2 \, dxdt \right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

将（3.20）代入（3.13），并取 s 充分大，可得

$$\mathcal{M}(\rho) + \mathcal{N}(\psi) \leq C(C_0, \Omega, \omega) \int_0^T \int_{\omega'} e^{-2s\eta} \left(s^3 \lambda^4 \varphi^3 |\rho|^2 + s\lambda^2 \varphi |\psi|^2 \right) dx \, dt. \tag{3.21}$$

最后一步是消去估计式（3.21）右端与 ψ 对应的局部项。我们按照命题2.3证明中的第二步进行。考虑开集 ω_0以及由（2.34）定义的函数 ξ

定义 $u = s\lambda^2 \varphi e^{-2s\eta}$。根据（2.18）中给出的 φ 和 η 的定义，可得 $u(T) = u(0) = 0$。由估计式（2.21），可得:

$$\begin{aligned} & |u\xi| \leq s\lambda^2 \varphi e^{2s\eta} \xi, \qquad |(u\xi)_t| \leq C(T) s^2 \lambda^2 \varphi^3 e^{2s\eta} \xi, \\ & |\nabla(u\xi)| \leq C s^3 \lambda^3 \varphi^2 e^{2s\eta} \xi, \qquad |\Delta(u\xi)| \leq C s^3 \lambda^4 \varphi^3 e^{2s\eta} \xi, \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中 C 为正常数。
将（3.6）中的第一个方程乘以 $u\xi\psi$，在 Q 上分部积分，并利用富比尼定理，可得

$$I_1 + I_2 + I_3 = \int_Q u\xi |\psi|^2 \chi_{\mathcal{O}_d} \, dx \, dt, \tag{3.23}$$

其中

$$I_1 = \int_Q \rho\psi (u\xi)_t \, dx \, dt \leq \frac{\gamma_1}{2} \int_Q s\lambda^2 \varphi e^{-2s\eta} |\psi|^2 dx \, dt + \frac{C(T)}{\gamma_1} \int_0^T \int_{\omega_0} s^3 \lambda^2 \varphi^5 e^{-2s\eta} |\rho|^2 dx \, dt,$$

$$I_2 = -\int_Q \rho\psi \Delta(u\xi) \, dx \, dt \leq \frac{\gamma_2}{2} \int_Q s\lambda^2 \varphi e^{-2s\eta} |\psi|^2 dx \, dt + \frac{C}{\gamma_2} \int_0^T \int_{\omega_0} s^5 \lambda^6 \varphi^5 e^{-2s\eta} |\rho|^2 dx \, dt,$$

$$I_3 = -2 \int_Q \rho \nabla\psi . \nabla(u\xi) \, dx \, dt \leq \frac{\gamma_3}{2} \int_Q s^{-1} \varphi^{-1} e^{-2s\eta} |\nabla\psi|^2 dx \, dt + \frac{C}{\gamma_3} \int_0^T \int_{\omega_0} s^{5/2} \lambda^6 \varphi^e 5/2^{-2s\eta} |\rho|^2 dx \, dt,$$

for any $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

通过恰当选取 γ_i, $i = 1, 2, 3$，我们得到

$$\int_0^T \int_{\omega'} s\lambda^2 \varphi e^{-2s\eta} |\psi|^2 dx \, dt \leq \frac{1}{2} \mathcal{N}(\psi) + C(T) \int_0^T \int_{\omega_0} s^5 \lambda^6 \varphi^5 e^{-2s\eta} |\rho|^2 \, dx \, dt. \tag{3.24}$$

将（3.24）代入（3.21），并且由于 $\omega_0 \subset \omega$，我们推出（3.12）。

■

现在，我们已准备好证明可观测性不等式（3.7）。

命题 **3.2** 的证明。 我们采用与命题 2.4 的证明相同的方法。其思路是改进（3.12），使权函数在 $t = 0$ 处不退化。为此，我们考虑由（2.39）定义的函数 α、 ζ、 α^* 和 ζ^* 。

我们将参数 s 固定为一个充分大的值。首先，根据构造， $\eta = \alpha$ 和 $\varphi = \zeta$在 $[T/2, T] \times \Omega$ 中，因此，

$$\begin{aligned}
&\int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} e^{-2s\alpha}\zeta^3|\rho|^2\ dxdt + \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} e^{-2s\alpha}\zeta|\psi|^2\ dxdt \\
&= \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} e^{-2s\eta}\varphi^3|\rho|^2\ dxdt + \int_{T/2}^{T}\int_{\Omega} e^{-2s\eta}\varphi|\psi|^2\ dxdt \\
&\leq C(\Omega,\omega,T)\int_0^T\int_{\omega} e^{-2s\eta}\varphi^5|\rho|^2\,dx\,dt,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

其中我们用到了 Carleman 估计 (3.12)。

另一方面，按照命题2.4证明第二步中的方法，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^{T/2}\int_{\Omega} |\rho|^2\ dxdt \\
&\leq C(\|K\|_\infty, T)\left(\int_0^{3T/4}\int_{\Omega} |\psi|^2\ dx\,dt + \int_{T/2}^{3T/4}\int_{\Omega} |\rho|^2\ dx\,dt\right).
\end{aligned}$$

在上述估计两边加上项 $\displaystyle\int_0^{T/2}\int_{\Omega}|\psi|^2\ dx\,dt$ ，得到

$$\begin{aligned}
&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^{T/2}\int_{\Omega} |\rho|^2\ dxdt + \int_0^{T/2}\int_{\Omega} |\psi|^2\ dx\,dt \\
&\leq C(\|K\|_\infty, T)\left(\int_{T/2}^{3T/4}\int_{\Omega} (|\psi|^2 + |\rho|^2)\ dx\,dt + \int_0^{T/2}\int_{\Omega} |\psi|^2\ dx\,dt\right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

为了消去 (3.26) 右端的最后一项，我们对系统 (3.6) 的第二个方程在区域 $(0, T/2) \times \Omega$ 上应用经典能量估计，得到:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T/2}\int_{\Omega} |\psi|^2\ dxdt &\leq \frac{1}{\mu^2}C(\|K\|_\infty, T)\left\|\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\mathbf{1}_\Gamma\right\|^2_{H^{1/2,1/4}((0,T/2)\times\partial\Omega)}, \\
&\leq \frac{1}{\mu^2}C(\|K\|_\infty, T)\,\|\rho\|^2_{H^{2,1}((0,T/2)\times\Omega)}, \\
&\leq \frac{1}{\mu^2}C(\|K\|_\infty, T)\left\|(\zeta^*)^{-\frac{1}{4}}e^{-s\alpha^*}\rho\right\|^2_{H^{2,1}((0,T/2)\times\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{\mu^2}C(\|K\|_\infty, T)\left\|(\zeta^*)^{-\frac{1}{4}}e^{-s\alpha^*}\rho\right\|^2_{H^{2,1}(Q)}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

因为映射 $\rho \longmapsto \dfrac{\partial\rho}{\partial\nu}\mathbf{1}_\Gamma$ 从 $H^{2,1}(Q)$ 到 $H^{1/2,1/4}(\Sigma)$ 是连续线性的，并且函数α^*和 ζ^* 在 $(0, T/2) \times \Omega$ 中关于两个变量均为常数。

将（3.27）代入（3.26），并利用（2.39）中定义的权函数 α 和 ζ 这一事实

在 $[0,3T/4]\times\Omega$ 中有界，可得

$$\begin{aligned}&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\zeta^3|\rho|^2\ dxdt+\int_0^{T/2}\int_\Omega e^{-2s\alpha}\zeta|\psi|^2\ dx\,dt\\&\leq C(\|K\|_\infty,T)\int_{T/2}^{3T/4}\int_\Omega e^{-2s\alpha}(\zeta|\psi|^2+\zeta^3|\rho|^2)\ dx\,dt+\frac{1}{\mu^2}C(\|K\|_\infty,T)\left\|(\zeta^*)^{-\frac{1}{4}}e^{-s\alpha^*}\rho\right\|^2_{H^{2,1}(Q)}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

将估计（3.25）与（3.28相加，并利用 α^* 和 ζ^*的定义，可得

$$\begin{aligned}&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T}\int_\Omega e^{-2s\alpha^*}(\zeta^*)^3|\rho|^2\ dxdt+\int_0^{T}\int_\Omega e^{-2s\alpha^*}\zeta^*|\psi|^2\ dx\,dt\\&\leq C(\Omega,\omega,T)\int_0^{T}\int_\omega e^{-2s\eta}\varphi^5|\rho|^2\,dx\,dt+\frac{1}{\mu^2}C(\|K\|_\infty,T)\left\|(\zeta^*)^{-\frac{1}{4}}e^{-s\alpha^*}\rho\right\|^2_{H^{2,1}(Q)}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

最后，我们想估计前一个不等式中的最后一个范数。为此，我们使用系统（3.17）和估计（3.18），其中 $\sigma=e^{-s\alpha^*}\ (\zeta^*)^{\ -1/4}$ 从而得到

$$\begin{aligned}&\left\|e^{-s\alpha^*}\zeta^*)^{-\frac{1}{4}}\rho\right\|^2_{H^{2,1}(Q)}\\&\leq C(\|K\|_\infty,T)\left(\int_Q e^{-2s\alpha^*}(\zeta^*)^{-1/2}|\psi|^2\ dxdt+\int_Q e^{-2s\alpha^*}(\zeta^*)^2|\rho|^2\ dxdt\right).\end{aligned}\tag{3.30}$$

将（3.30）代入（3.29），利用（$\zeta^*)^{\ -1}$、（$\zeta^*)^{\ -3/2}\in L^\infty(Q)$ 这一事实，并取 μ 充分大，可得

$$\begin{aligned}&\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T}\int_\Omega e^{-2s\alpha^*}(\zeta^*)^3|\rho|^2\ dxdt+\int_0^{T}\int_\Omega e^{-2s\alpha^*}\zeta^*|\psi|^2\ dx\,dt\\&\leq C(\Omega,\omega,T)\int_0^{T}\int_\omega e^{-2s\eta}\varphi^5|\rho|^2\,dx\,dt.\end{aligned}\tag{3.31}$$

我们得到在可观测性不等式（3.7）中，这是由于 $e^{-2s\eta}\varphi^5\in L^\infty(Q)$，并取

$$\varpi_2(t)=e^{s\alpha^*}(\zeta^*)^{-1/2}.\tag{3.32}$$

3.1 半线性情形

沿用第 2.4 节的思路，我们考虑系统（2.60）的一个更一般形式：

$$\begin{cases}y_t-\Delta y+\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)G(y(t,\theta))\ d\theta &=& g\chi_\omega+v\chi_{\mathcal{O}} & \text{in} & Q,\\ y &=& u\mathbf{1}_\Gamma & \text{on} & \Sigma,\\ y(0,\cdot) &=& y^0 & \text{in} & \Omega,\end{cases}\tag{3.33}$$

其中 G 是一个全局 Lipschitz 连续函数。

~与第 2.4 节一样，在半线性情形中，我们失去了由 J（1.8）定义的泛函的凸性。为此，我们陈述以下结果，其证明可通过与命题2.6相同的方法得到。

命题 3.4 假设 $q_d \in L^\infty((0,T);\mathcal{O}_d)$，$g \in L^2((0,T)\times\omega)$ 为固定值，且 μ 足够大。设 $q^0 \in L^2(\Omega)$，$N \le 6$，$G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$，并且存在一个常数 $L>0$ 使得 $|G'(s)|+|G''(s)| \le L$，$\forall s \in \mathbb{R}$。那么，若 $\hat{u}$ 满足 (1.10)，则存在一个与 μ 无关的常数 $C>0$，使得

$$D^2\widetilde{J}(g;\hat{u})\cdot(w^1,w^1) \ge C\|w^1\|^2_{L^2((0,T)\times\Gamma)},\ \forall w^1 \in L^2((0,T)\times\Gamma),\ w^1 \ne 0. \tag{3.34}$$

~特别地，泛函 J 关于 $\hat{u}$ 是严格凸的。

按照命题2.1中的做法，最优控制 $\hat{u}$ 由下式给出

$$\hat{u} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \nu} \quad \text{on} \quad (0,T)\times\Gamma, \tag{3.35}$$

其中，(q,p) 是最优性系统的解

$$\begin{cases} q_t - \Delta q + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)G(q(t,\theta))\ d\theta = g\chi_\omega & \text{in} \quad Q, \\ -p_t - \Delta p + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)G'(q(t,\theta))p(t,\theta)\ d\theta = (q-q_d)\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ q = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial \nu}\mathbf{1}_\Gamma, \quad p = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ q(0,\cdot) = q^0, \quad p(T,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.36}$$

下面的结果成立。

定理 3.1 在命题 3.4 的假设下，存在一个在 $t=T$ 处趋于无穷大的正权函数 $\varpi_2 = \varpi_2(t)$，使得对于满足 (1.17) 的任意 $q_d \in L^2((0,T)\times\mathcal{O}_d)$，都存在一个控制 $\hat{g} \in L^2((0,T)\times\omega)$ 和一个唯一最优控制 $\hat{u} \in H^{1/2,1/4}((0,T)\times\Gamma)$，使得相应的 (3.36) 的解满足 (1.12)。

证明。为了证明定理 3.1，我们可以采用第 2.1 节中给出的定理2.4的思路。令 $z = q - \bar{q}$，其中 q 是 (1.2) 的解，而 $\bar{q}$ 是 (1.11) 的解。将 (3.36) 改写为如下形式

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)a(z(t,\theta))z(t,\theta)\ d\theta = g\chi_\omega & \text{in} \quad Q, \\ -p_t - \Delta p + \displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)b(z(t,\theta))p(t,\theta)\ d\theta = (z-z_d)\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ z = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial \nu}\mathbf{1}_\Gamma, \quad p = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) = z^0, \quad p(T,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.37}$$

其中 $z^0 := q^0 - \bar{q}^0$，$z_d := q_d - \bar{q}$ 且

$$a(z) = \int_0^1 G'(\bar{y}+sz)\ ds, \quad b(z) = G'(z+\bar{y}).$$

条件（1.12）等价于 z 的零可控性，即

$$z(T,x) = 0 \text{ in } \Omega. \tag{3.38}$$

对于每个 $w \in L^2(Q$，考虑与（3.37）相关联的以下线性系统

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + a(w)\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)z(t,\theta)\ d\theta = g\chi_\omega & \text{in} \quad Q, \\ -p_t - \Delta p + b(w)\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)p(t,\theta)\ d\theta = (z - z_d)\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ z = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial \nu}\mathbf{1}_\Gamma, \quad p = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ z(0,\cdot) = z^0, \quad p(T,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.39}$$

根据 G 命题 3.4给出的假设，存在一个常数 $M > 0$ 使得

$$\|a(w)\|_{L^\infty(Q)},\ \|b(w)\|_{L^\infty(Q)} \le M,\ \forall w \in L^2(Q).$$

根据命题3.2，我们可以证明以下可观测性不等式

$$\|\rho(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_Q \frac{1}{\varpi_2^2}|\psi|^2\,dx\,dt \le C\int_0^T\int_\omega |\rho|^2\,dx\,dt, \tag{3.40}$$

其中 $C = C(\Omega\ \omega,\ \|K\|_\infty,\ \|a(w)\|_{L^\infty(Q)}\ \|b(w)\|_{L^\infty(Q)}\ T) > 0$，函数 ϖ_2 由（3.32）给出，而（ρ，ψ）是与（3.39）相关的以下伴随系统的解：

$$\begin{cases} -\rho_t - \Delta\rho + a(w)\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\rho(t,\theta)\ d\theta = \psi\chi_{\mathcal{O}_d} & \text{in} \quad Q, \\ \psi_t - \Delta\psi + b(w)\displaystyle\int_\Omega K(t,x,\theta)\psi(t,\theta)\ d\theta = 0 & \text{in} \quad Q, \\ \rho = 0, \quad \psi = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \rho}{\partial \nu}\mathbf{1}_\Gamma & \text{on} \quad \Sigma, \\ \rho(T,\cdot) = \rho^T, \quad \psi(0,\cdot) = 0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.41}$$

根据估计（3.40），并按照定理 2.1证明结尾处的论证，我们得到半线性系统（3.33）的可控性结果。

■

参考文献

[1] B. Allal、G. Fragnelli 和 J Saihi。含非局部空间项的退化抛物方程的零可控性。《离散与连续动力系统-S》。DOI：10.3934/dcdss.2022164（2022）。[2] F. D. Araruna、E. Fern`andez- Cara 和 M. C. Santos。线性与半线性抛物方程的 Stackelberg-Nash 精确可控性。《ESAIM：控制、优化与变分法》。21(3)，835-856（2015）。[3] F. D. Araruna、E. Fern`andez- Cara 和 L. C. da. Silva。具有分布控制与边界控制的半线性抛物方程的分层精确可控性。《当代数学通讯》。22(7), 1950034（2019），https://doi.org/10.1142/S0219199719500342。

[4] U. Biccari 和 V. Hern´andez-Santamar´ıa。带加性积分核的线性与半线性非局部热方程的零可控性。SIAM J. Control Optim. 57(4), 2924-2938(2019)。

[5] N. Carre˜no 和 M. C. Santos。带边界控制和分布式控制的 Kuramoto-Sivashinsky 方程的 Stackelberg-Nash 精确可控性。Journal of Differential Equations Control. 343, 1-63 (2023)。[6] M. De Leo、S. F. de la Vega 和 D. R. Diego。带非局部项的 Schr ¨odinger 方程的可控性。ESAI M Control Optim. Calc. Var., 20, 23-41 (2014)。[7] L. de Teresa。半线性热方程的去敏控制：半线性热方程。Communications in Partial Differential Equations. 25(1-2), 39-72 (2000)。[8] Djomegne Njoukou´e, L. L. 无界区域中非线性抛物型方程的层级控制。Applicable Analysis, 1-34 (2021)。DOI: 10.1080/00036811.2021.1991327。[9] L. L. Djomegne Njoukou´e 和 G. Deugou´e。无界区域中抛物型方程的 Stackelberg 控制。Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications.Vol. 2021, No. 5, pp. 95-118, (2021)。[10] L. L. Djomegne Njoukou´e、C. Kenne、R. Dorville 和 P. Zongo。非线性耦合退化抛物方程的 Stackelberg–Nash 零可控性。Applied Mathematics & Optimizations. 87, 1-41 (2023)。[11] L. L. Djomegne Njoukou´e、G. Mophou 和 G. Deugou´e。向后线性热方程的 Stackelberg 控制。Advance in Evolution Equations: Evolutionary Processes and Applications. 10, 127-149 (2019)。[12] E. Fern`andez- Cara、Q. L¨u 和 E. Zuazua。含非局部空间项的线性热方程和波动方程的零可控性。SIAM J. Control Optim. 54(4), 2009–2019 (2016)。[13] R. G. Foko Tiomela、G. Mophou 和 G. N'gu´er´ekata。缺失数据下线性热方程的层级控制。Math. Appl. Sci. Vol 43, No 10 pp. 1-22. (2020)。[14] A. V. Fursikov. 和 Y. O. Imanuvilov。演化方程的能控性。Lecture Notes Series, Research Institute of Mathematics. 首尔国立大学，韩国首尔，34 (1996)。[15] V. Hern´andez-Santamar´ıa 和 L. de Teresa。线性和半线性热方程的鲁棒 Stackelberg 能控性。Evolution Equation and Control Theory. Vol 7, No 2, pp. 247-273, (2018)。[16] V. Hern´andez-Santamar´ıa 和 L. Peralta。关于边界控制下热方程鲁棒 Stackelberg 能控性的若干评述。Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B. 25(1), 161-190 (2020)。[17] V. Hern´andez-Santamar´ıa 和 K. Le Balc'h。非局部半线性热方程的零可控性。Appl. Math. Optim. 84, 1435–1483 (2021)。[18] Y. O. Imanuvilov、J. P. Puel 和 M. Yamamoto。二阶非齐次抛物型方程的 Carleman 估计。即将发表，(2010)。[19] N. I. Kavallaris 和 T. Suzuki。工程与生物学中的非局部偏微分方程，Mathematics for Industry 第31卷（东京）。Mathematical Modeling and Analysis. Springer, Cham (2018)。[20] M. K´er´e、M. Mercan 和 G. Mophou。耦合抛物方程的 Stackelberg 控制，J. Dyn. Control Syst. Vol. 23, No 4, pp. 709–733, (2017)。

[21] J. L. Lions. 微分运算方程：边值问题。111. Springer出版社。（2013）。[22] J. L. Lions. 关于Stackelberg优化的一些评论，《应用科学中的数学模型与方法》第4卷，第4期，第477–487页，（1994）。[23] J. L. Lions. 层级控制。《数学科学学报》，104(1)，295–304（1994）。[24] P. Lissy和E. Zuazua. 涉及解析非局部项的抛物系统的内部可控性。《中国数学年刊》B辑39(2)，281–296（2018）。[25] M. Mercan. 受零可控性约束的分布参数线性系统的最优控制。《应用分析》，第92卷，第9期，第1928–1943页，（2013）。[26] M. Mercan. 带状态约束且满足零可控性的分布参数线性系统的最优控制。Springer数学与统计学丛书第37卷，第213–232页，（2013）。[27] M. Mercan和O. Nakoulima. 双冲程问题的Stackelberg控制。《连续、离散与脉冲系统动力学：B辑 应用与算法》，22，441–463（2015）。[28] S. Micu和T. Takahashi. 具有非局部黏性的Burgers方程平稳轨迹的局部可控性。《微分方程杂志》，264，3664–3703（2018）。[29] G. Mophou，M. K´er´e和L. L. Djomegne Njoukou´e. 缺失出生率种群动力学模型的鲁棒层级控制。《数学控制、信号与系统》，32(2)，209–239（2020）。[30] O. Nakoulima. 满足零可控性的分布参数系统的最优控制：在判别哨兵中的应用。ESAIM：COCV，13(4)，623–638（2007）。[31] H. von Stackelberg. 市场形态与均衡。Springer，柏林，德国。第4卷。（1934）。