arXiv:2302.02240v1 [math.NA] 4 Feb 2023

允许小边的反应-对流-扩散方程 VEM 离散：源问题与谱问题*

Felipe Lepe† 和Gonzalo Rivera‡

摘要。 本文分析了一种用于经典反应-对流-扩散载荷问题和对流-扩散谱问题的最低阶虚元方法，其中多边形网格的假设允许多边形包含小边。针对这一几何方法，我们在适当稳定化所确定的良定义半范数下，证明了数值格式的适定性，并给出了载荷问题的误差估计；对于谱问题，则推导了特征值和特征函数的收敛性及误差估计。我们通过数值测试评估了在所考虑的两个问题中，小边对数值方法性能的影响。

关键词。 虚单元方法，先验误差估计，小边。

AMS 学科分类。 49K20, 49M25, 65N12, 65N15, 65N25, 65N30,

1. 引言。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为一个具有多边形边界 $\partial\Omega$的开、有界凸域。我们关注对流-扩散问题

$$\nabla \cdot (-\kappa(\mathbf{x})\nabla u) + \vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + \gamma(\mathbf{x})u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{1.1}$$

其中， κ 和 γ 是定义在 $\Omega \to \mathbb{R}$ 上的光滑函数，满足 $\kappa(\mathbf{x}) \geq \kappa_0 > 0$ 对所有$\mathbf{x} \in \Omega$ 均成立； ϑ是定义在 $\Omega \to \mathbb{R}^2$上的光滑向量值函数。

众所周知，**(1.1)** 是一个数学模型，用于描述粒子、浓度、流体等在物理系统内部通过对流和扩散这两种过程发生传输的物理现象。与该系统相关的特征值问题及其变体，近年来已在[19, 24]中得到分析。

虚拟元方法（VEM）最早由 [9] 针对拉普拉斯算子提出，在逼近偏微分方程的解方面表现出很高的精度，同时与其他经典方法相比显著降低了计算成本。此外，由于 VEM 能够适用于网格上的不同几何形状，因此可将其应用于偏微分方程定义在不适用于有限元方法的区域上的问题，并取得出色效果。

虚拟元方法（VEM）的发展与应用日益增多。关于 VEM 的文献相当丰富，在流体与固体力学、电磁学、特征值问题、抛物型问题以及自适应方法等多个领域均可找到相关成果；其中，原始形式和混合形式已被用于逼近多个问题。我们可以提及 [1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 18, 17, 21, 22,23, 28, 29, 30]及其中的参考文献。

尽管虚拟元方法在不同领域作出了重要贡献，但据作者所知，这种方法的一种新思路

*FL 部分获得了 DIUBB 通过比奥比奥大学项目 2120173 GI/C 以及 ANID-Chile 通过 FONDECYT 项目 11200529（智利）提供的支持。GR 获得了洛斯拉各斯大学 Regular R02/21 项目的支持。

†GIMNAP—数学系，比奥比奥大学，Casilla 5-C，康塞普西翁，智利。 flepe@ubiobio.cl。

‡智利奥索尔诺，洛斯拉戈斯大学精确科学系。gonzalo.rivera@ulagos.cl

已适用于二阶椭圆问题，其中可以放宽 [9] 的标准假设；相关条件与多边形网格中单元边的尺寸有关。目前我们知道，经典虚单元方法要求单元必须是星形的，且边的长度足够大。正是最后这一假设在 [13, 16] 的研究中得到了放宽，现在允许边或面任意，其中具体是边还是面取决于问题所处的维度。这些参考文献表明，在更一般的假设和适当的稳定化条件下，可以保证虚拟元方法的稳定性并获得误差估计。这仍是一个持续研究的课题，目前已有的结果适用于用于离散化 H^1 的虚单元空间。此外，近期在 [3, 20, 27, 32] 中也能找到小边方法的应用。

需要注意的是，允许存在小边的虚拟元方法的理论分析需要付出代价，因为并非所有偏微分方程组都适用于这种方法。更确切地说，解的正则性会影响分析。在 [13, 16] 中，作者证明，当偏微分方程的解满足 H^{1+s} 且 $s > 3/2$时，允许存在小边的虚拟元方法具有逼近性质。这意味着，在对区域、边界条件、数据或物理参数作出某些几何假设的情况下，这种新型虚拟元方法才得以应用。因此，就本文的研究目的而言，据我们所知，无法绕过这一正则性要求。

本文延续了我们关于用于二阶椭圆问题的含小边虚拟元方法的研究计划。具体而言，我们将这一方法应用于两个问题：一方面是对流-扩散-反应问题，另一方面是对流-扩散特征值问题。这两个问题都很重要，因为这类方程具有广泛的应用。对于对流-扩散-反应问题，我们关注载荷问题，因为在特征值问题中，与反应项相关的项类似于问题的右端项，其中包含该问题的特征值。这就是我们在谱框架下仅考虑扩散-对流问题的原因。此外，正如前文所述，我们旨在将小边格式用于虚拟元方法，因此需要满足适当的几何条件。就本文而言，区域需为开、有界且凸的二维区域，并满足齐次狄利克雷边界条件。这些假设对载荷问题和谱问题均适用。

本文的结构如下：第2节介绍源模型问题、所考虑的双线性型、适定性和正则性性质。第3节是本文的核心部分，在多边形网格具有小边的假设下，我们引入虚单元方法。在此，我们定义局部和整体虚空间以及离散双线性型。基于这些要素，我们对第2节中引入的源问题进行离散化，证明离散问题的适定性，并在对网格作出较弱假设的条件下，推导出误差估计。作为迄今所得结果的应用，第5节分析与(1.1)相关的特征值问题。由于谱问题是非对称的，分析中引入了伴随特征值问题。我们证明了所提出虚拟元方法的无伪模态、收敛性和误差估计结果。最后，第6节通过在不同情形和几何区域中给出一组数值测试，展示小边方法在源问题和特征值问题上的理论结果。

2. 变分问题。(1.1)的弱形式如下：求 $u \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.1}$$

其中 $\mathcal{B}$： $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ 是如下定义的双线性形式

$$\mathcal{B}(w,v) := a(w,v) + b(w,v) + c(w,v), \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.2}$$

而 $\mathcal{F}$： $H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ 是如下定义的泛函

$$\mathcal{F}(v) = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in L^2(\Omega), \tag{2.3}$$

分别地， $a(\cdot,\cdot)$、 $b(\cdot,\cdot)$ 和 $c(\cdot,\cdot)$ 是有界双线性形式，定义如下

$$\begin{aligned} a &: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}; \qquad a(w,v) := \int_\Omega \kappa(\mathbf{x}) \nabla w \cdot \nabla v, \forall w, v \in H_0^1(\Omega); \\ b &: H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}; \qquad b(w,v) := \int_\Omega (\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla w) v, \forall w \in H_0^1(\Omega), v \in L^2(\Omega); \\ c &: L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}; \qquad c(w,v) := \int_\Omega \gamma(\mathbf{x}) wv, \forall w, v \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{2.4}$$

关于 (1.1) 中系数的假设使得 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 连续，即存在一个常数 $M_1 > 0$ ，使得

$$\mathcal{B}(w,v) \le M_1 \|w\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

此外，以下条件成立

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{B}(w,v)}{\|v\|_{1,\Omega}} \ge \beta \|w\|_{1,\Omega} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \tag{2.6}$$

其中 $\beta > 0$ 是与 v无关的常数。因此，(2.5) 和 (2.6) 意味着 (2.1) 适定。

另一方面，对于我们所关注的虚拟元方法的实现，(2.1) 的正则性是获得逼近性质的关键要素。给定 $f \in H^{-1}$，存在正常数 C^*， C^{**} ，使得 (2.1) 的解 u 满足

$$\|u\|_{1,\Omega} \le C^* \|f\|_{-1,\Omega} \quad \text{and} \quad \|u\|_{2,\Omega} \le C^{**} \|f\|_{0,\Omega}. \tag{2.7}$$

3. 虚单元法。本节简要回顾一种用于系统 (2.1) 的虚拟元方法（VEM）。首先，我们回顾文献 [9] 中针对虚拟元方法所采用的网格构造及相关假设。设 $\{\mathcal{T}_h\}_h$ 为 Ω 的一列多边形剖分， E。令 h_E 表示单元 E 的直径， h 表示网格中所有单元直径的最大值，即 $h := \max_{E \in \Omega} h_E$。此外，为简便起见，以下假设 κ 和 γ相对于剖分 $\mathcal{T}_h$为分片常数，即，对于所有 $E \in \mathcal{T}_h$ ，它们均为分片常数（例如参见 [13]）。

对于虚拟元方法的分析，我们将作出如下假设：存在一个正实数 ρ ，使得对于每个 $E \in \mathcal{T}_h$ 和每个 $\mathcal{T}_h$，

• **A1.** 对于所有网格 $\mathcal{T}_h$，每个多边形 $E \in \mathcal{T}_h$ 都相对于半径大于或等于 ρh_E 的球呈星形。对于任意简单多边形 E，我们定义

$$\widetilde{V}_h^E := \{v_h \in H^1(E) : \Delta v_h \in \mathbb{P}_1(E), v_h|_{\partial E} \in C^0(\partial E), v_h|_e \in \mathbb{P}_1(e)\ \forall e \in \partial E\}.$$

现在，为了为 $\widetilde{V}_h^E$选择自由度，我们定义

• $\mathcal{V}_E^h$: E每个顶点处的 w_h 值，

作为从 $\widetilde{V}_h^E$到 $\mathbb{R}$的一组线性算子。在 [2] 中已证明，$\mathcal{V}_E^h$ 构成空间 $\widetilde{V}_h^E$的一组自由度。

另一方面，对于每个$v_h \in \widetilde{V}_h^E$，我们将投影算子 $\Pi^{\nabla,E}: \widetilde{V}_h^E \longrightarrow \mathbb{P}_1(E) \subseteq \widetilde{V}_h^E$ 定义为以下问题的解：

$$\int_E (\nabla \Pi^{\nabla,E} v_h - \nabla v_h) \cdot \nabla q = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{P}_1(E),$$
$$\overline{\Pi^{\nabla,E} v_h} = \overline{v_h},$$

其中，对于任意充分正则函数 v，我们定义

$$\overline{v} := |\partial E|^{-1} \int_{\partial E} v.$$

我们注意到，项 $\Pi^{\nabla,E} v_h$ 定义良好，且可由 v 的自由度 $\mathcal{V}_E^h$计算得到；此外，投影算子 $\Pi^{\nabla,E}$ 满足恒等式$\Pi^{\nabla,E}(\mathbb{P}_1(E)) = \mathbb{P}_1(E)$（例如，参见 [2]）。

现在我们可以引入局部虚拟空间了

$$V_h^E := \left\{ v_h \in \widetilde{V}_h^E : \int_E \Pi^{\nabla,E} v_h p = \int_E v_h p, \quad \forall p \in \mathbb{P}_1(E) \right\}. \tag{3.2}$$

现在，由于 $V_h^E \subset \widetilde{V}_h^E$，算子 $\Pi^{\nabla,E}$在 V_h^E上定义良好，且仅根据 $\mathcal{V}_E^h$中算子的输出值即可计算。此外，由于空间 V_h^E的定义中所体现的特殊性质，可以看出$\forall p \in \mathbb{P}_1(E)$，且 $\forall v_h \in V_h^E$项 $(v_h, p)_{0,E}$可由 $\Pi^{\nabla,E} v_h$计算得到，因此 $L^2(E)$ 投影算子 $\Pi^E: V_h^E \to \mathbb{P}_1(E)$ 定义为

$$\int_E \Pi^E v_h = \int_E v_h p \qquad \forall p \in \mathbb{P}_1(E),$$

仅取决于 v_h自由度的取值。事实上，容易验证，投影算子 $\Pi^{\nabla,E}$ 和 Π^E 在空间 V_h^E 上是同一个算子（更多细节参见[2]）。

最后，对于 Ω 到简单多边形 E 的任意剖分 $\mathcal{T}_h$，我们定义全局虚拟空间

$$V_h := \left\{ v \in H^1(E) : \ v|_E \in V_h^E \quad \forall E \in \mathcal{T}_h \right\}, \tag{3.3}$$

全局自由度通过汇总局部自由度得到，其中对应于内部实体的节点自由度和界面自由度只计一次；边界上的自由度则固定为零，以符合环境空间 $H_0^1(\Omega)$ 的要求。

3.1. 离散公式。为了构造离散格式，我们需要先给出一些预备定义。首先，将双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\ \cdot)$ 作如下分解：

$$\mathcal{B}(w,v) := \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \mathcal{B}^E(w,v) := \sum_{E\in\mathcal{T}_h} a^E(w,v) + b^E(w,v) + c^E(w,v)\ \forall w,v\in H^1(\Omega),$$

其中

$$a^E(w,v) := \int_E \kappa(x)\nabla w\cdot\nabla v,\quad b^E(w,v) := \int_E (\vartheta(x)\cdot\nabla w)v,\quad c^E(w,v) := \int_E \gamma(x)wv.$$

现在，为了给 $a(\cdot,\cdot)$ 提出离散双线性形式（参见 (2.4)），我们考虑如下对称半正定双线性型 $S^E:\ V_h^E\times V_h^E\to\mathbb{R}$，其由 [13] 引入。对于每个 $E\in\mathcal{T}_h$，以及任意 $w_h,v_h\in V_h^E$，我们定义

$$S^E(w_h,v_h) := S^\partial(w_h,v_h),$$

其中，若 ∂_s 表示沿边导数，则 $S^\partial(\cdot,\cdot)$ 定义如下（见 [33]）

$$S^\partial(w_h,v_h) := h_E\int_{\partial E}\partial_s w_h\partial_s v_h\qquad \forall w_h,v_h\in V_h^E. \tag{3.4}$$

然后，我们在每个单元 E 上引入局部（且可计算的）双线性形式

- $a_h^E(w_h,v_h) := a^E(\Pi^{\nabla,E}w_h,\Pi^{\nabla,E}v_h)\ + S^E(w_h-\Pi^{\nabla,E}w_h,v_h-\Pi^{\nabla,E}v_h)$,
- $b_h^E(w_h,\ \ v_h) := b^E(\Pi^{\nabla,\ E}w_h,\ \ \Pi^E v_h)$,
- $c_h^E(w_h,\ \ v_h) := c^E(\Pi^E w_h,\ \ \Pi^E v_h)$,

对所有 $w_h,v_h\in V_h^E$.

现在我们引入如下离散半范数：

$$|||v|||_E^2 := a^E\big(\Pi^{\nabla,E}v,\Pi^{\nabla,E}v\big) + S^E(v-\bar v,v-\bar v)\qquad \forall v\in V_h^E+\mathcal{V}^E, \tag{3.5}$$

其中，$\mathcal{V}^E\subseteq H^1(E)$ 是充分正则函数的一个子空间，使得 $S^E(\cdot,\cdot)$ 有意义。

对于任意充分正则函数，我们引入如下全局半范数

$$|||v|||^2 := \sum_{E\in\mathcal{T}_h}|||v|||_E^2,\qquad |v|_{1,h}^2 := \sum_{E\in\mathcal{T}_h}\|\nabla v\|_{0,E}^2.$$

已在 [13, 引理 3.1] 中证明，存在与 h无关、但依赖于 κ 的正常数 C_1,C_2,C_3，使得

$$C_1|||v|||_E^2\le a_h^E(v,v)\le C_2|||v|||_E^2\quad\forall v\in V_h^E, \tag{3.6}$$

$$a_h^E(v,v)\le C_3(|||v|||^2+|v|_{1,E}^2)\quad\forall v\in V_h^E. \tag{3.7}$$

此外，还成立

$$a^E(v,v)\le C_4|||v|||_E^2\quad\forall v\in V_h^E, \tag{3.8}$$

$$|||p|||_E^2\le C_5 a^E(p,p)\quad\forall p\in\mathbb{P}_1(E), \tag{3.9}$$

其中 C_4，C_5 是与 h 无关的正常数。

按照惯例，双线性形式 $\mathcal{B}_h(\cdot,\ \cdot)$ 可以按分量表示如下

$$\mathcal{B}_h(w_h,v_h) := \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \mathcal{B}_h^E(w_h,v_h) = \sum_{E\in\mathcal{T}_h} a_h^E(w_h,v_h) + b_h^E(w_h,v_h) + c_h^E(w_h,v_h). \quad (3.10)$$

现在，我们可以写出问题 (2.1) 的虚拟元离散：求 $u_h \in V_h$，使得

$$\mathcal{B}_h(u_h,v_h) = \mathcal{F}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.11)$$

其中 $\mathcal{F}(v_h) = (f_h, v_h)_{0,\Omega}$ 且 $f_h := \Pi^E f$，并且 $(\cdot,\cdot)_{0,\Omega}$ 表示$L^2(\Omega)$ 中的内积。显然，$\mathcal{B}_h(\cdot,\cdot)$ 是连续的，即

$$\mathcal{B}_h(w_h,v_h) \le M_2 |||w_h||| |||v_h||| \quad v_h, w_h \in V_h^E, \quad (3.12)$$

其中 M_2 是一个与 h 无关的常数。

由双线性形式 $a_h(\cdot,\cdot)$ 的定义可知，很容易验证这个离散双线性形式在 V_h 上是强制的。事实上，令 $v_h \in V_h$。那么，

$$\begin{aligned} a_h(v_h,v_h) = \sum_{E\in\mathcal{T}_h} a_h^E(v_h,v_h) &\ge \sum_{E\in\mathcal{T}_h} C_1 |||v_h|||_E^2 \ge C \sum_{E\in\mathcal{T}_h} a^E(v_h,v_h) \\ &\ge C|v_h|_{1,\Omega}^2 \ge \beta \|v_h\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall v_h \in V_h, \quad (3.13) \end{aligned}$$

其中我们用到了 (3.6)、(3.8) 以及广义 Poincar´e 不等式。

另一方面，对于星形区域中的多项式，我们还有如下逼近结果（例如参见 [15]）。

LEMMA 3.1. 若满足假设 **A1**，则存在常数 C，其仅依赖于 k 和 γ，使得对于任意满足 $0 \le s \le k$ 的 s 以及任意$v \in H^{1+s}(E)$，都存在 $v_\pi \in \mathbb{P}_k(E)$，使得

$$\|v - v_\pi\|_{0,E} + h_E |v - v_\pi|_{1,E} \le C h_E^{1+s} \|v\|_{1+s,E}.$$

下一步是找到合适的项 u_I 和 u_π，以便在上述引理中使用它们来证明所声称的收敛性。对于后者，我们有如下命题：它由整数 s 情形的类似结果，通过 Sobolev 空间之间的插值推导而来（例如参见 [25,定理 I.1.4]）。而整数情形的结果陈述于 [9, 命题 4.2]，并可由经典的 Scott-Dupont 理论推出（参见 [15]）。

以下结论在 [27, 引理 4.3], 中证明，是 [9, 命题 4.3] 对正则性较低的函数的推广。

LEMMA 3.2. 在假设**A1**成立的条件下，对于每个 s 满足 $0 < s \le k$的情形，存在 $\widehat{\sigma}$和一个常数 C，它们仅依赖于 k，使得对于每个 $v \in H^{1+s}(\Omega)$，存在满足以下条件的$v_I \in V_h$

$$\begin{aligned} |v - v_I|_{1+t,E} &\le C h_E^{s-t} |v|_{1+s,E} \qquad 0 \le t \le \min\{\widehat{\sigma}, s\}, \\ \|v - v_I\|_{0,E} &\le C h_E |v|_{1+s,E}. \end{aligned}$$

为了证明虚拟元离散 (3.11) 定义良好，我们需要以下技术性结果。

LEMMA 3.3. 对于每个 $w^* \in H_0^1(\Omega)$，都存在 $w_h^* \in V_h$，使得

$$a_h(w_h^*, v_h) = a(w^*, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h. \quad (3.14)$$

此外，还存在一个与 h 无关的常数 C_κ，使得

$$h\|w^* - w_h^*\|_{1,\Omega} + \|w^* - w_h^*\|_{0,\Omega} \le C_\kappa h \|w^*\|_{1,\Omega}. \tag{3.15}$$

证明。由 (3.13)，简单应用 Lax–Milgram 引理可知，(3.14) 有唯一解，且 $|||w_h^*||| \le C\|w^*\|_{1,\ \Omega}$。另一方面，为证明 (3.15)，我们注意到：

$$\begin{aligned}
|w^* - w_h^*|_{1,\Omega}^2 &\le C_\kappa(a(w^*, w^* - w_h^*) - a(w_h^*, w^* - w_h^*)) \\
&\le C_\kappa \left(|w^*|_{1,\Omega} + |w_h^*|_{1,\Omega}\right) |w^* - w_h^*|_{1,\Omega} \\
&\le \mathcal{C}_\kappa \left(|w^*|_{1,\Omega} + |||w_h^*|||\right) |w^* - w_h^*|_{1,\Omega} \le C_\kappa |w^*|_{1,\Omega} |w^* - w_h^*|_{1,\Omega},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中用到了 (3.8)。现在，为了控制 L^2 范数下的误差，我们采用标准的对偶性论证。设 $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 是下列问题的解

$$a(w, \phi) = (w^* - w_h^*, w)_{0,\Omega} \qquad w \in H_0^1(\Omega), \tag{3.17}$$

并设 $\phi_I \in V_h^E$为其插值函数。于是，由引理 3.2 可得

$$|\phi - \phi_I|_{1,\Omega} \le Ch|\phi|_2 \le Ch\|w^* - w_h^*\|_{0,\Omega}. \tag{3.18}$$

接着，用 $w = w^* - w_h^* \in H_0^1(\Omega)$ 测试 (3.17)，并利用 (3.14)，得到

$$\begin{aligned}
\|w^* - w_h^*\|_{0,\Omega}^2 &= a(w^* - w_h^*, \phi) = a(w^* - w_h^*, \phi - \phi_I) + a(w^* - w_h^*, \phi_I) \\
&= a(w^* - w_h^*, \phi - \phi_I) + a_h(w_h^*, \phi_I) - a(w_h^*, \phi_I) \\
&= a(w^* - w_h^*, \phi - \phi_I) + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \left(a_h^E(w_h^*, \phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I) - a^E(w_h^*, \phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I)\right) \\
&\le C_\kappa \left(|w^* - w_h^*|_{1,\Omega} |\phi - \phi_I|_{1,\Omega} + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} |||w_h^*|||_E \left|\left|\left| \phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I \right|\right|\right|_E \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} |w_h^*|_{1,E} |\phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I|_{1,E} \right) \\
&\le C_\kappa \left(h\|w^*\|_{1,\Omega} |\phi|_{2,\Omega} + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} |||w_h^*|||_E \left|\left|\left| \phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I \right|\right|\right|_E \right),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中，对于最后一个估计，我们用到了 (3.16)、(3.18) 和 (3.8)。接下来要对上述估计中的最后一项进行界定。为此，我们首先注意到，根据 (3.6)、 $a_h^E(\cdot,\ \cdot)$ 的定义，并按照 [13, 定理 4.5]，的证明进行推导，再结合 $\Pi^{\nabla,\ E}\phi_I$ 是通过次数为 k 的多项式对 ϕ_I 进行的最佳逼近这一事实，可得

$$\begin{aligned}
C_1 \left|\left|\left| \phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I \right|\right|\right|_E^2 &\le a_h^E(\phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I, \phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I) \\
&= S^E(\phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I, \phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I) \le h_E |\phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I|_{1,\partial E}^2 \\
&\le C_\kappa(|\phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I|_{1,E}^2 + h^2 |\phi_I|_{2,E}^2 .) \\
&\le C_\kappa(|\phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi|_{1,E}^2 + h^2 |\phi_I - \phi|_{2,E}^2 + h^2 |\phi|_{2,E}^2) \le Ch^2 |\phi|_{2,E}^2,
\end{aligned}$$

由此可以得出

$$\sum_{E\in\mathcal{T}_h} |||w_h^*|||_E \left|\left|\left|\phi_I - \Pi^{\nabla,E}\phi_I\right|\right|\right|_E \leq Ch|||w_h^*|||\,|\phi|_{2,\Omega}.$$

因此，由上述估计，结合 (3.8)、(3.19) 以及$|||w_h^*||| \leq C\|w^*\|_{1,\Omega}$这一事实，可得

$$\|w^* - w_h^*\|_{0,\Omega}^2 \leq C_\kappa h\|w^*\|_{1,\Omega}\|w^* - w_h^*\|_{0,\Omega}.$$

证明至此完成。 □

为陈述离散问题 (3.11) 的适定性，以下离散 inf-sup 条件至关重要。

LEMMA 3.4. 存在一个常数 $\widehat{\beta} > 0$ 使得，对所有 $h < h_0$:

$$\sup_{w_h\in V_h} \frac{\mathcal{B}_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{1,\Omega}} \geq \widehat{\beta}\|v_h\|_{1,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.20}$$

证明。为证明这一结果，我们采用经典的 Fortin 算子构造。由连续 inf-sup 条件 (2.6)，对于 $v_h \in V_h$，存在$w^* \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\frac{\mathcal{B}(v_h, w^*)}{\|w^*\|_{1,\Omega}} \geq M_2\|v_h\|_{1,\Omega}. \tag{3.21}$$

根据引理 3.3，以下问题

$$\text{Find } w_h^* \in V_h \text{ such that } a_h(w_h^*, v_h) = a(w^*, v_h),$$

有唯一解，且满足

$$|||w_h^*||| \leq \|w^*\|_{1,\Omega}, \qquad \|w_h^* - w^*\|_{0,\Omega} \leq h\|w^*\|_{1,\Omega}. \tag{3.22}$$

另一方面，通过基本的代数运算并利用虚拟投影算子的性质，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_h(v_h, w_h^*) &= a_h(v_h, w_h^*) + b_h(v_h, w_h^*) + c_h(v_h, w_h^*) \\
&= a(v_h, w^*) + b_h(v_h, w_h^*) - b(v_h, w^*) + c_h(v_h, w_h^*) - c(v_h, w^*) \\
&+ b(v_h, w^*) + c(v_h, w^*) \\
&= \mathcal{B}(v_h, w^*) + b_h(v_h, w_h^*) - b(v_h, w^*) + c_h(v_h, w_h^*) - c(v_h, w^*) \\
&= \mathcal{B}(v_h, w^*) + b_h(v_h, w_h^*) - b(v_h, w_h^*) + c_h(v_h, w_h^*) - c(v_h, w_h^*) \\
&+ b(v_h, w_h^* - w^*) + c(v_h, w_h^* - w^*).
\end{aligned}$$

重新整理上述计算，以简化材料的呈现，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_h(v_h, w_h^*) + \underbrace{b(v_h, w^* - w_h^*)}_{T_1} + \underbrace{c(v_h, w^* - w_h^*)}_{T_2} \\
&+ \underbrace{c(v_h, w_h^*) - c_h(v_h, w_h^*)}_{T_3} + \underbrace{b(v_h, w_h^*) - b_h(v_h, w_h^*)}_{T_4} = \mathcal{B}(v_h, w^*).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

现在，我们的任务是分别估计各项 T_i、 $i \in \{1,2,3,4\}$，且不依赖于网格尺寸 h。我们先从 T_1 开始。注意，利用 $b(\cdot,\ \cdot)$ 有界这一事实，并结合式 (3.22)，可得

$$T_1 \leq C_\vartheta h \|v_h\|_{1,\Omega} \|w^*\|_{1,\Omega}. \tag{3.24}$$

对于项 T_2，由柯西-施瓦茨不等式结合式（3.22）可得

$$T_2 \leq C_\gamma h \|v_h\|_{1,\Omega} \|w^*\|_{1,\Omega}.$$

对于 T_3，利用 $\gamma(\mathbf{x})$相对于网格是分片常数这一性质，并结合投影算子 Π^E 的性质及式（3.22），可得

$$\begin{aligned} T_3 &= \sum_{E\in\mathcal{T}_h} c^E(v_h, w_h^*) - c_h^E(v_h, w_h^*) = \sum_{E\in\mathcal{T}_h} c^E(v_h, w_h^* - \Pi^E w_h^*) - c_h^E(v_h, w_h^* - \Pi^E w_h^*) \\ &\leq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} c_\gamma \|v_h\|_{0,E} \|w_h^* - \Pi^E w_h^*\|_{0,E} \leq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} c_\gamma h_E \|v_h\|_{0,E} |w_h^*|_{1,E} \\ &\leq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} c_{\gamma,\kappa} h_E C_4 \|v_h\|_{0,E} |||w_h^*|||_E \leq C_{\gamma,\kappa} h \|v_h\|_{1,\Omega} |||w_h^*||| \leq C_{\gamma,\kappa} h \|v_h\|_{1,\Omega} \|w^*\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

这里利用了 $\kappa(\mathbf{x})$相对于网格是分片常数这一性质，并结合式（3.8）和式（3.22）。对于项 T_4，首先需要注意以下关系

$$\begin{aligned} b^E(v_h, w_h^*) - b_h^E(v_h, w_h^*) &= (\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h, w_h^*)_{0,E} - \left(\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Pi^{\nabla,E} v_h, \Pi^E w_h^*\right)_{0,E} \\ &= \left(\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h, w_h^* - \Pi^E w_h^*\right)_{0,E} + \left(\vartheta(\mathbf{x}) \cdot (\nabla v_h - \nabla \Pi^{\nabla,E} v_h), \Pi^E w_h^*\right)_{0,E} \\ &= \left(\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h - \Pi^E(\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h), w_h^* - \Pi^E w_h^*\right)_{0,E} \\ &+ \left(\nabla v_h - \nabla \Pi^{\nabla,E} v_h, \vartheta(\mathbf{x}) \Pi^E w_h^* - \vartheta(\mathbf{x}) w_h^*\right)_{0,E} \\ &+ \left(\nabla v_h - \nabla \Pi^{\nabla,E} v_h, \vartheta(\mathbf{x}) w_h^* - \Pi^E(\vartheta(\mathbf{x}) w_h^*)\right)_{0,E}, \end{aligned}$$

这里利用了虚拟投影算子的性质。因此，我们有以下估计

$$\begin{aligned} b^E(v_h, w_h^*) - b_h^E(v_h, w_h^*) &\leq \|\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h - \Pi_1^E(\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h)\|_{0,E} \|w_h^* - \Pi^E w_h^*\|_{0,E} \\ &+ \|\nabla v_h - \nabla \Pi^{\nabla,E} v_h\|_{0,E} \|\vartheta(\mathbf{x}) \Pi^E w_h^* - \vartheta(\mathbf{x}) w_h^*\|_{0,E} \\ &+ \|\nabla v_h - \nabla \Pi^{\nabla,E} v_h\|_{0,E} \|\vartheta(\mathbf{x}) w_h^* - \Pi^E(\vartheta(\mathbf{x}) w_h^*)\|_{0,E} \\ &\leq h_E C_\vartheta \|v_h\|_{1,E} |w_h^*|_{1,E} \leq h_E C_\vartheta \|v_h\|_{1,E} |||w_h^*|||_E. \end{aligned}$$

因此，对所有单元求和可得

$$T_4 \leq h C_\vartheta \|v_h\|_{1,\Omega} |||w_h^*||| \leq C_{\kappa,\vartheta} h \|v_h\|_{1,\Omega} \|w^*\|_{1,\Omega}.$$

因此，由（3.24）并结合（3.21）和（3.23），可得

$$C_{\gamma,\kappa,\vartheta} h \|v_h\|_{1,\Omega} \|w^*\|_{1,\Omega} + \mathcal{B}_h(v_h, w_h^*) \geq \mathcal{B}(v_h, w^*) \geq M_2 \|v_h\|_{1,\Omega} \|w^*\|_{1,\Omega}.$$

于是我们有

$$\mathcal{B}_h(v_h, w_h^*) \geq (M_2 - C_{\gamma,\kappa,\vartheta} h) \|v_h\|_{1,\Omega} \|w^*\|_{1,\Omega}. \tag{3.25}$$

另一方面，将 (3.22) 和 (3.8) 一并代入 (3.13)，可得

$$\|w^*\|_{1,\Omega}^2 \geq |||w_h^*|||^2 = \sum_{E\in\mathcal{T}_h} |||w_h^*|||_E^2 \geq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{C_4} a^E(w_h^*, w_h^*) \geq \beta \|w_h^*\|_{1,\Omega}^2. \tag{3.26}$$

因此，利用 (3.25) 和 (3.26)，可以直接验证存在$h_0 > 0$，使得对于所有 $h < h_0$, inf-sup 条件 (3.20) 成立。 □

有了这些结果，我们便可以得出以下结论，从而证明 (3.11) 的适定性

THEOREM 3.5 (适定性). 对于给定的 $f \in L^2(\Omega)$，当 h 充分小时，问题 (3.11) 存在唯一的 $u_h \in V_h$ 解。此外，存在一个与 h 无关的正定常数 $C > 0$，使得$\|u_h\|_{1,\,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\,\Omega}$。

4. 先验误差估计。 本节将推导虚拟元方法的先验误差估计。为此，首先指出，我们将 (3.4) 视为小边方法下该方法的稳定化。这促使我们针对当前问题调整 [13, 第 4 节 2] 的结果；其中误差估计（更准确地说，每个估计中的常数）取决于几何假设。

现在我们的目标是为所提出的虚拟元方法推导误差估计。我们证明两个误差估计：一方面，证明关于解的 H^1 误差；另一方面，证明一个 L^2 估计。我们先给出 H^1 估计。

THEOREM 4.1. 设 $u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ 和 $u_h \in V_h$ 分别为连续问题 (2.1) 和离散问题 (3.11)的唯一解。则当 h充分小时，存在与 h 无关的 $C_{\gamma,\kappa,\vartheta} > 0$，使得

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_{\gamma,\kappa,\vartheta} h \|f\|_{1,\Omega}.$$

证明。由三角不等式可得

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \|u - u_I\|_{1,\Omega} + \|u_h - u_I\|_{1,\Omega}. \tag{4.1}$$

其中需要估计右端项中的每一项。注意到，第一项可直接由引理 3.2 控制。主要任务是界定第二项。为此，令 $v_h := u_h - u_I$ 属于 (3.20)。于是

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}\|u_h - u_I\|_{1,\Omega}\|w_h^*\|_{1,\Omega} &\leq \mathcal{B}_h(u_h, w_h^*) - \mathcal{B}_h(u_I, w_h^*) \\ &= (f_h - f, w_h^*)_{0,\Omega} + \mathcal{B}_h(\Pi^\nabla u - u_I, w_h^*) + \mathcal{B}(u - \Pi^\nabla u, w_h^*) \\ &\quad + \mathcal{B}(\Pi^\nabla u, w_h^*) - \mathcal{B}_h(\Pi^\nabla u, w_h^*), \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中用到了 (2.1)、(3.11) 以及初等代数变换。由柯西–施瓦茨不等式可得

$$(f_h - f, w_h^*)_{0,\Omega} \leq \|f_h - f\|_{0,\Omega}\|w_h^*\|_{0,\Omega} \leq Ch\|f\|_{1,\Omega}\|w_h^*\|_{1,\Omega}. \tag{4.3}$$

另一方面，由（2.5）和（3.12），我们得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_h(\Pi^\nabla u - u_I, w_h^*) + \mathcal{B}(u - \Pi^\nabla u, w_h^*) \\ &\qquad \leq C_{\gamma,\kappa,\vartheta}\left(|||\Pi^\nabla u - u_I|||\,|||w_h^*||| + \|u - \Pi^\nabla u\|_{1,\Omega}\|w_h^*\|_{1,\Omega}\right) \\ &\qquad \leq C_{\gamma,\kappa,\vartheta}\big(\left(|||\Pi^\nabla u - u||| + |||u - u_I|||\right)|||w_h^*||| + \|u - \Pi^\nabla u\|_{1,\Omega}|||w_h^*|||\big).\end{aligned}$$

下一步是对前一个估计式右端的各项分别进行界定。为此，利用 $|||\cdot|||$ 的定义（见（3.5）），并再次按照 [13, 定理 4.5], 的证明中的做法，我们得到

$$\begin{aligned}
|||u-u_I|||^2 &= \sum_{E\in\mathcal{T}_h} |||u-u_I|||_E = \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \big\{a^E(\Pi^{\nabla,E}(u-u_I),\Pi^{\nabla,E}(u-u_I)) \\
&+S^E(u-u_I-\overline{(u-u_I)},u-u_I-\overline{(u-u_I)})\big\} \\
&\le C_\kappa \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \big\{|\Pi^{\nabla,E}(u-u_I)|^2_{1,E}+S^E(u-u_I,u-u_I)\big\} \\
&\le C_\kappa \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \big\{|u-u_I|^2_{1,E}+h_E|u-u_I|^2_{1,\partial E}\big\} \le C_\kappa \sum_{E\in\mathcal{T}_h} h_E^2|u|^2_{2,E} \le C_\kappa h^2|u|^2_{2,\Omega},
\end{aligned}$$

其中我们用到了缩放迹不等式（见 [13, 引理 6.1]）。类似地，结合多边形上的标准逼近结果，我们得到

$$|||\Pi^\nabla u-u||| \le C_\kappa h|u|_{2,\Omega}.$$

另一方面，由引理 3.1 可得 $\|u-\Pi^\nabla u\|_{1,\ \Omega} \le C\|u\|_{2,\ \Omega}$。因此，由上述估计可得

$$\mathcal{B}_h(\Pi^\nabla u-u_I,w_h^*)+\mathcal{B}(u-\Pi^\nabla u,w_h^*) \le C_{\gamma,\kappa,\vartheta}h\|u\|_{2,\Omega}|||w_h^*|||.$$

现在我们需要控制项 $|||w_h^*|||$。为此，我们应用引理 3.3~，其中 $\|w^*\|_{1,\ \Omega}=1$。此外，存在一个常数 $C>0$，使得:

$$\begin{aligned}
|||w_h^*|||^2 \le \sum_{E\in\mathcal{T}_h} a_h^E(w_h^*,w_h^*) = a_h(w_h^*,w_h^*) = a(w^*,w_h^*) &\le C_\kappa\|w^*\|_{1,\Omega}\|w_h^*\|_{1,\Omega} \\
&\le C_\kappa(1+\|w_h^*\|^2_{1,\Omega}) \le (\widetilde{C}+1)\|w_h^*\|^2_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\mathcal{B}_h(\Pi^\nabla u-u_I,w_h^*)+\mathcal{B}(u-\Pi^\nabla u,w_h^*) \le C_{\gamma,\kappa,\vartheta}h\|u\|_{2,\Omega}\|w_h^*\|_{1,\Omega}. \tag{4.4}$$

最后，我们需要控制 (4.2) 中的最后一项。为此，利用$\kappa(\mathbf{x})$ 和 $\gamma(\mathbf{x})$ 关于网格是分片常数这一性质，并结合双线性型 $a_h^E(\cdot,\ \cdot)$、$b_h^E(\cdot,\ \cdot)$、$c_h^E(\cdot,\ \cdot)$ 的定义、虚拟投影算子的性质以及引理 3.1，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\Pi^\nabla u,w_h^*)-\mathcal{B}_h(\Pi^\nabla u,w_h^*) &= b(\Pi^\nabla u,w_h^*-\Pi^\nabla w_h^*) \\
&\le C_\vartheta|\Pi^{\nabla,E}u|_{1,\Omega}\|w_h^*-\Pi^\nabla w_h^*\|_{0,\Omega} \\
&\le C_\vartheta|u|_{1,\Omega}\|w_h^*-\Pi w_h^*\|_{0,\Omega} \le hC_\vartheta\|u\|_{1,\Omega}\|w_h^*\|_{1,\Omega}. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

然后，综合式 (4.3)、(4.4) 和 (4.5)，并将这些估计代入式 (4.2)，再结合式 (4.1) 中由引理 3.2 给出的逼近性质，即可完成证明。
□

THEOREM 4.2. 令 $u\in H^2(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 和 $u_h\in V_h$ 分别为连续公式(2.1) 和离散公式(3.11)的唯一解。那么，当 h充分小时，存在与 h 无关的 $C_{\gamma,\kappa,\vartheta}>0$，使得

$$|||u-u_h||| \le C_{\gamma,\kappa,\vartheta}h\|f\|_{1,\Omega}.$$

证明。由三角不等式可得 $|||u-u_h||| \le |||u-u_I||| + |||u_h-u_I|||$。令$v_h := u_h - u_I \in V_h$。由 (3.6) 可得

$$
\begin{aligned}
|||u_h-u_I|||^2 &= \sum_{E\in\mathcal{T}_h} |||u_h-u_I|||_E^2 \\
&\le \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{c_1} a_h^E(u_h-u_I,v_h) \le C\left(\sum_{E\in\mathcal{T}_h}\left(a_h^E(u_h-,v_h)-a_h^E(u_I,v_h)\right)\right) \\
&\le C\left((f_h,v_h)-\sum_{E\in\mathcal{T}_h}\left(b_h^E(u_h,v_h)+c_h^E(u_h,v_h)\right)\right. \\
&\qquad \left.-\sum_{E\in\mathcal{T}_h}\left[a_h^E(u_I-u_\pi,v_h)+a^E(u_\pi-u,v_h)+a^E(u,v_h)\right]\right) \\
&\le C\left((f_h,v_h)-(f,v_h)+\sum_{E\in\mathcal{T}_h}\left(b^E(u,v_h)-b_h^E(u_h,v_h)+c^E(u,v_h)-c_h^E(u_h,v_h)\right)\right. \\
&\qquad \left.-\sum_{E\in\mathcal{T}_h}\left[a_h^E(u_I-u_\pi,v_h)+a^E(u_\pi-u,v_h)\right]\right).
\end{aligned}
$$

现在，我们需要估计上述估计式右端的每一项。为此，我们按照引理 3.4 和定理 4.1 的证明过程进行，从而得到以下估计

$$
\begin{aligned}
(f_h,v_h)_{0,\Omega}-(f,v_h)_{0,\Omega} &\le Ch\|f\|_{1,\Omega}\|v_h\|_{1,\Omega}, \\
\sum_{E\in\mathcal{T}_h}(b^E(u,v_h)-b_h^E(u_h,v_h)) &\le C_{\kappa,\vartheta}h\|u\|_{2,\Omega}\|v_h\|_{1,\Omega}, \\
\sum_{E\in\mathcal{T}_h}(c^E(u,v_h)-c_h^E(u_h,v_h)) &\le C_{\gamma,\kappa}h\|u\|_{1,\Omega}\|w_h\|_{1,\Omega}, \\
\sum_{E\in\mathcal{T}_h}(a_h^E(u_I-u_\pi,v_h)+a^E(u_\pi-u,v_h)) &\le C_\kappa h\|u\|_{2,\Omega}|||v_h|||.
\end{aligned}
$$

结合所有这些估计，我们得到

$$|||u_h-u_I|||^2 \le C_{\gamma,\kappa,\vartheta}h(\|f\|_{1,\Omega}+\|u\|_{2,\Omega})|||u_h-u_I|||,$$

这就完成了证明。 ∎

我们的下一个目标是改进 L^2-范数的误差估计。以下结果给出了这一点。

THEOREM 4.3. 当 h 充分小时，以下误差估计成立：

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} \le C_{\kappa,\vartheta,\gamma}h^2\|f\|_{0,\Omega}.$$

证明。我们采用标准的对偶性论证。设 $\psi \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 为下列伴随问题的解

$$\nabla\cdot(-\kappa(\mathbf{x})+\vartheta(\mathbf{x})\psi)+\gamma(\mathbf{x})\psi = u-u_h \quad \text{in } \Omega, \qquad \psi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

另一方面，设 $\psi_I \in V_h$ 为其插值函数，满足以下误差估计

$$\|\psi-\psi_I\|_{1,\Omega} \leq Ch\|\psi\|_{2,\Omega} \leq Ch\|u-u_h\|_{0,\Omega}.$$

现在，按照 [12, 定理 5.2], 的证明思路，通过初等代数运算并利用虚拟投影算子的性质，可得

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{0,\Omega}^2 &= \mathcal{B}(u-u_h,\psi) = \mathcal{B}(u,\psi-\psi_I)+\mathcal{B}(u,\psi_I)-\mathcal{B}(u_h,\psi)\\ &= (f-f_h,\psi_I-\Pi\psi_I)_{0,\Omega}+\mathcal{B}(u-u_h,\psi-\psi_I)+\mathcal{B}_h(u_h,\psi_I)-\mathcal{B}(u_h,\psi_I) \quad (4.6)\end{aligned}$$

其中，前述估计中的最后一个不等式可通过采用与定理 4.1 证明相同的方法得到。接下来需要对（4.6）右端的所有项进行估计。注意，利用上述性质可以证明

$$\begin{aligned}(f-f_h,\psi_I-\Pi\psi_I)_{0,\Omega} &\leq h^2|f|_{1,\Omega}\|\psi\|_{2,\Omega} \leq h^2|f|_{1,\Omega}\|u-u_h\|_{0,\Omega};\\ \mathcal{B}(u-u_h,\psi-\psi_I) &\leq C_{\gamma,\kappa,\vartheta}h^2\|u\|_{2,\Omega}\|\psi\|_{2,\Omega} \leq C_{\gamma,\kappa,\vartheta}h^2\|u\|_{2,\Omega}\|u-u_h\|_{0,\Omega}.\end{aligned}$$

对于最后一项，有:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_h(u_h,\psi_I)-\mathcal{B}(u_h,\psi_I) = \sum_{E\in\mathcal{T}_h}\big(&a_h^E(u_h,\psi_I)-a^E(u_h,\psi_I)+b_h^E(u_h,\psi_I)-b^E(u_h,\psi_I)\\ &+c_h^E(u_h,\psi_I)-c^E(u_h,\psi_I)\big).\end{aligned}$$

按照引理3.3和3.4的证明思路，可以得到以下估计

$$\begin{aligned}\sum_{E\in\mathcal{T}_h}(a_h^E(u_h,\psi_I)-a^E(u_h,\psi_I)) &\leq \sum_{E\in\mathcal{T}_h}C_\kappa(|||u_h-\Pi^{\nabla,E}u|||_E|||\psi_I-\Pi^{\nabla,E}\psi|||_E\\ &\leq C_\kappa h^2\|u\|_{2,\Omega}\|u-u_h\|_{0,\Omega}.\\ \sum_{E\in\mathcal{T}_h}(b_h^E(u_h,\psi_I)-b^E(u_h,\psi_I)) &\leq C_\vartheta h^2\|u\|_{2,\Omega}\|u-u_h\|_{0,\Omega}.\\ \sum_{E\in\mathcal{T}_h}(c_h^E(u_h,\psi_I)-c^E(u_h,\psi_I)) &\leq \sum_{E\in\mathcal{T}_h}C_\gamma\|u_h-\Pi^E u\|_{0,E}\|\psi_I-\Pi^E\psi\|_{0,E}\\ &\leq C_\gamma h^2\|u\|_{2,\Omega}\|u-u_h\|_{0,\Omega}.\end{aligned}$$

因此，综合所得的所有估计，可得

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}^2 \leq C_{\kappa,\vartheta,\gamma}h^2(\|f\|_{1,\Omega}+\|u\|_{2,\Omega})\|u-u_h\|_{0,\Omega},$$

由此即可完成证明。

□

5. 特征值问题。基于前面的结果，我们现在关注考虑相应特征值问题的自然扩展。需要注意的是，该谱问题是非对称的，因此与解算子相关的特征值可能是复数（例如参见 [24] ）。此外，我们声明，从现在起不再考虑双线性形式 $c(\cdot,\ \cdot)$。这意味着，我们针对扩散-对流问题建立特征值问题，如 [24] 中所分析的那样。

5.1. 连续谱问题。式 (2.2) 中给出的双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\ \cdot)$ 必须针对特征值问题进行修改，即采用复共轭测试函数。此外，由于我们将考虑扩散-对流谱问题，双线性形式 $c(\cdot,\ \cdot)$ 不再需要。因此，特征值问题表述如下：求 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\mathcal{B}_{ab}(u,v) = \lambda d(u,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{5.1}$$

其中，$\mathcal{B}_{ab}(\cdot,\ \cdot)$ 是由下式定义的双线性形式

$$\mathcal{B}_{ab}(w,v) := \int_\Omega \kappa(\mathbf{x})\nabla w \cdot \nabla \bar{v} + \int_\Omega (\vartheta(\mathbf{x}) \cdot \nabla w)\bar{v} \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega),$$

而 $d(\cdot,\ \cdot)$ 是由 $d(w,\ v) := (w,\ v)_{0,\ \Omega}$ 定义的双线性形式。显然，在此语境下，空间 $H_0^1(\Omega)$ 应理解为复希尔伯特空间。此外，我们用 $\bar{v}$ 表示 v 的共轭。

在假设 $\vartheta(\mathbf{x})$ 散度为零的情况下，容易验证存在 $\beta > 0$ 使得

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{B}_{ab}(w,v)}{\|v\|_{1,\Omega}} \geq \underline{\beta}\|w\|_{1,\Omega} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

由此可引入解算子 T，定义如下

$$T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega), \quad f \mapsto Tf = \widetilde{u},$$

其中 $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ 是下列源问题的解

$$\mathcal{B}_{ab}(\widetilde{u}, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{5.2}$$

其中 $\mathcal{F}$ 是定义在 (2.3) 上的泛函。值得注意的是，由于 $H^2(\Omega)$ 紧嵌入 $H^1(\Omega)$，T 定义良好且为紧算子。另一方面，我们注意到，$(\lambda,\ u) \in \mathbb{C} \times H_0^1(\Omega)$ 是 (5.1) 的解，当且仅当 $(\mu,\ u) \in \mathbb{C} \times H_0^1(\Omega)$ 是 T 的特征对。

由于我们具备 (2.7) 中所述的额外正则性，以下关于 T 的谱刻画成立。

LEMMA 5.1 (T 的谱刻画). T 的谱满足 $\mathrm{sp}(T) = \{0\} \cup \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个复特征值序列，并按照各自的重数收敛于零。

5.2. 离散谱问题。现在我们引入问题 (5.1) 的 VEM 离散。为完成这一任务，我们需要在第 3 节中定义的全局空间 V_h 以及该节中提出的假设。

谱问题如下：求 $\lambda_h \in \mathbb{C}$ 和 $0 \neq u_h \in V_h$，使得

$$\mathcal{B}_{ab,h}(u_h, v_h) = \lambda_h d_h(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

其中 $\mathcal{B}_h(\cdot,\cdot)$ 是 (3.10) 中定义的双线性形式，而 $d_h(\cdot,\cdot)$ 是由 $d_h(w_h, v_h)$ 定义的双线性形式：$= (\Pi w_h, \Pi v_h)_{0,\ \Omega}$。

通过调整引理 3.4 的证明，我们证明存在一个常数 $\widehat{\beta} > 0$ 使得，对于所有 $h < h_0$，均有

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{\mathcal{B}_{ab,h}(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{1,\Omega}} \geq \underline{\widehat{\beta}}\|v_h\|_{1,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5.3}$$

这使我们能够引入 T 的离散对应算子，即 T_h，其定义为

$$T_h : H_0^1(\Omega) \to V_h, \quad f \mapsto T_h f = \widetilde{u}_h,$$

其中， $\widetilde{u}_h \in V_h$ 是以下源问题的解

$$\mathcal{B}_{ab,h}(\widetilde{u}_h, v_h) = d_h(f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5.4}$$

主要目标是分析该方法的收敛性，并推导特征值和特征函数的误差估计。由于 T 的紧性，特征值的收敛性可由 [8]的经典理论推得。由于该特征值问题是非对称的，因此考虑相应的伴随问题十分重要。为此，记 T^* 和 T_h^*分别为 T和T_h的伴随算子，它们均由 $T^* f = \widetilde{u}^*$ 和 $T_h^* f = \widetilde{u}_h^*$定义，其中 $\widetilde{u}^*$ 和 $\widetilde{u}_h^*$ 分别是以下问题的解

$$\mathcal{B}_{ab}(v, \widetilde{u}^*) = d(f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_{ab,h}(v, \widetilde{u}_h^*) = d_h(f, v_h) \quad \forall v \in V_h.$$

有了这些算子后，我们首先要证明当 h 趋于零时， T_h到 T以及相应的伴随算子 T_h^*到 T^*的范数收敛。我们从以下结果开始分析。

LEMMA 5.2. 设 $f \in L^2(\Omega)$ 满足 $\widetilde{u} := Tf$且 $\widetilde{u}_h := T_h f$。则存在一个正定常数 $C_{\kappa,\vartheta}$，其与 h无关，使得

$$\|(T - T_h)f\|_{1,\Omega} \le C_{\kappa,\vartheta} h \|f\|_{0,\Omega}.$$

证明。为推导该结果，我们需要调用 inf-sup 条件 (5.3)。与定理 4.1 的证明类似，若 $\widetilde{u} =: Tf$且 $\widetilde{u}_h := T_h f$，由三角不等式可得

$$\|\widetilde{u} - \widetilde{u}_h\|_{1,\Omega} \le \|\widetilde{u} - \widetilde{u}_I\|_{1,\Omega} + \|\widetilde{u}_I - \widetilde{u}_h\|_{1,\Omega},$$

其中， $\widetilde{u}_I$ 表示 $\widetilde{u}$的插值。在 (5.3) 中令 $v_h = \widetilde{u}_I - \widetilde{u}_h$ ，并利用 (5.2) 和 (5.4)，可得

$$\begin{aligned}\widehat{\underline{\beta}} \|\widetilde{u}_I - \widetilde{u}_h\|_{1,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega} &\le \underbrace{[d_h(f_h, v_h) - d(f, v_h)]}_{A} \\ &+ \underbrace{[\mathcal{B}_{ab}(\widetilde{u} - \Pi^\nabla \widetilde{u}, v_h) - \mathcal{B}_{ab,h}(\widetilde{u}_I - \Pi^\nabla \widetilde{u}, v_h)]}_{B} + \underbrace{[\mathcal{B}_{ab}(\Pi^\nabla \widetilde{u}, v_h) - \mathcal{B}_{ab,h}(\Pi^\nabla \widetilde{u}, v_h)]}_{C},\end{aligned}$$

其中，各项 A、 B 和 C 均可按照定理 4.1 的证明及 (2.7) 中的类似方法进行估计。 □

因此，我们已证明，随着 h 趋于零，离散解算子 T_h 在范数意义下收敛于连续解算子 T。

前述结果对伴随算子 T_h^* 和 T^*同样成立。由于证明过程类似，这里省略细节。

LEMMA 5.3. 存在一个正定常数 $C_{\kappa,\vartheta}$，它与 h 无关，使得

$$\|T^* - T_h^*\|_{1,\Omega} \le C_{\kappa,\vartheta} h \|f\|_{0,\Omega}.$$

作为上述两个引理的直接推论，可以采用谱逼近的标准结果（见 [14, 26]）。

作为上述结果的推论，我们证明所提出的方法不会引入伪特征值（见 [26]）。

THEOREM 5.4. 设 $G \subset \mathbb{C}$ 为包含$\mathrm{sp}(T)$的一个开集。则存在$h_0 > 0$，使得对于所有 $h < h_0$，均有$\mathrm{sp}(T_h) \subset G$。

5.3. 误差估计。本节旨在推导特征函数和特征值的误差估计。我们首先回顾谱投影算子的定义。设 μ 是 T 的一个非零孤立特征值，其代数重数为 m；设 Γ是复平面上的一个圆盘，以 μ为圆心，满足 μ 是T在 Γ 内唯一的特征值，且 $\partial\Gamma \cap \mathrm{sp}(T) = \emptyset$。基于这些条件，我们将分别定义与 T 和 T^*对应的 E 和 E^*的谱投影如下：

1. 与 μ 对应的 T 的谱投影算子为 $E := \frac{1}{2\pi i} \hat{} \quad __ \quad (zI - T)^{-1}\, dz;\Gamma$
2. 与 $\bar{\mu}$ 相关的 T^* 的谱投影算子为 $E^* := \frac{1}{2\pi i} \hat{} \, \partial\Gamma (zI - \underline{T^*})^{-1}\, dz,$

wh其中 I 表示恒等算子。值得注意的是，E 和 E^* 是
pr分别投影到广义特征向量 $R(E)$ 和 $R(E^*)$ 上的投影算子。

引理 5.2 的一个推论是，存在 m 个特征值，它们位于 Γ 中，即 $\mu_h^{(1)}$，……，$\mu_h^{(m)}$，按各自的重数重复计算；当 h 趋于零时，它们收敛到 μ。有了这一结果，我们引入如下谱投影

$$E_h := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} (zI - T_h)^{-1}\, dz,$$

它是到 T 的离散不变子空间 $R(E_h)$ 上的投影，该子空间由对应于 $\mu_h^{(1)}$，……，$\mu_h^{(m)}$ 的 T_h 的广义特征向量张成。

现在我们回顾两个闭子空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$在 $L^2(\Omega)$ 中的间隙 δ 的定义：

$$\widehat{\delta}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \max\left\{\delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \delta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})\right\}, \text{ where } \delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \|x\|_{0,\Omega}=1}} \left(\inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|_{0,\Omega} \right).$$

本节最后证明特征函数和特征值的误差估计。THEOREM 5.5. 存在 $C_{\kappa,\ \vartheta} > 0$ 使得

$$\widehat{\delta}(R(E), R(E_h)) \leq C_{\kappa,\vartheta} h \quad \textit{and} \quad |\mu - \mu_h| \leq C_{\kappa,\vartheta} h^2.$$

证明。特征子空间之间间隙的证明直接来自当 h 趋于零时，T 与 T_h 之间的范数收敛。我们重点讨论特征值的双重收敛阶。设 $\{u_k\}_{k=1}^m$ 满足 $Tu_k = \mu u_k$，其中 $k = 1,$ ……，m。$R(E^*)$ 的一个对偶基为 $\{u_k^*\}_{k=1}^m$。该基满足 $\mathcal{B}_{ab}(u_k,\ u_l^*) = \delta_{k.l}$，其中 $\delta_{k.l}$ 表示克罗内克δ。

另一方面，以下恒等式成立

$$|\mu - \widehat{\mu}_h| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |\langle (T - T_h) u_k, u_k^* \rangle| + C \|(T - T_h)|_{R(E)}\| \|(T^* - T_h^*)|_{R(E^*)}\|,$$

其中 $C>0$。我们注意到，上述不等式中最后两项的界可直接由引理 5.2 得到。因此，我们的任务是对剩余的第一项进行估计。为此，可以得到以下恒等式

$$\begin{aligned}|\langle (T-T_h)u_k, u_k^*\rangle| &= \mathcal{B}_{ab}((T-T_h)u_k, u_k^*)\\ &= \mathcal{B}_{ab}((T-T_h)u_k, u_k^*-v_h)+\mathcal{B}_{ab}(Tu_k, v_h))-\mathcal{B}_{ab}(T_hu_k, v_h)\\ &= \underbrace{\mathcal{B}_{ab}((T-T_h)u_k, u_k^*-v_h)}_{\textbf{(I)}}+\underbrace{(d(u_k,v_h)-d_h(u_k,v_h))}_{\textbf{(II)}}\\ &\quad+\underbrace{(\mathcal{B}_{ab,h}(T_hu_k,v_h)-\mathcal{B}_{ab}(T_hu_k,v_h)}_{\textbf{(III)}},\end{aligned}$$

对所有 $v_h\in V_h$。现在我们对各项 **(I)**、**(II)** 和 **(III)**分别进行估计。对于 **(I)**，首先令 $v_h:=(u_k^*)_I$。于是有

$$\begin{aligned}\textbf{(I)} &= \mathcal{B}_{ab}((T-T_h)u_k, u_k^*-(u_k^*)_I) \le C_{\kappa,\vartheta}\|(T-T_h)u_k\|_{1,\Omega}\|u_k^*-(u_k^*)_I\|_{1,\Omega}\\ &\le C_{\kappa,,\vartheta}|(T-T_h)u_k|_{1,\Omega}|u_k^*-(u_k^*)_I|_{1,\Omega}\le C_{\kappa,,\vartheta}h^2|u_k|_{1,\Omega}|u_k^*|_{1,\Omega},\end{aligned}\tag{5.5}$$

其中，我们利用了 $(u_k^*)_I$ 的逼近性质以及引理 **??** 给出的范数收敛性。现在，为了控制项 **(II)**，我们注意到

$$\begin{aligned}(\textbf{II}) &\le \sum_{E\in\mathcal{T}_h}\|u_k-\Pi^E u_k\|_{0,E}\|(u_k^*)_I-\Pi^E(u_k^*)_I\|_{0,E}\\ &\le C\sum_{E\in\mathcal{T}_h}h_E|u_k|_{1,E}(\|u_k^*-(u_k^*)_I\|_{0,E}+\|u_k^*-\Pi^E u_k^*\|_{0,E})\\ &\le Ch^2\|u_k\|_{1,\Omega}\|u_k^*\|_{1,\Omega}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

对于项 **(III)**，我们定义 $w_h:=T_hu_k$。于是

$$\begin{aligned}\textbf{(III)} &= \sum_{E\in\mathcal{T}_h}[\mathcal{B}_{ab,h}^E(w_h,(u_k^*)_I)-\mathcal{B}_{ab}^E(w_h,(u_k^*)_I)]\\ &= \underbrace{\sum_{E\in\mathcal{T}_h}[a_h^E(w_h,(u_k^*)_I)-a^E(w_h,(u_k^*)_I)]}_{A_1}+\underbrace{\sum_{E\in\mathcal{T}_h}[b_h^E(w_h,(u_k^*)_I)-b^E(w_h,(u_k^*)_I)]}_{A_2},\end{aligned}$$

其中，我们需要控制各项 A_1 和 A_2。对于 A_1，有

$$\begin{aligned}a_h^E(w_h,(u_k^*)_I)-a^E(w_h,(u_k^*)_I) \le C_\kappa\big(&|||w_h-\Pi^{\nabla,E}w_h|||_E|||(u_k^*)_I-\Pi^{\nabla,E}(u_k^*)_I|||_E\\ &+|w-\Pi^{\nabla,E}w_h|_{1,E}|(u_k^*)_I-\Pi^{\nabla,E}(u_k^*)_I|_{1,E}\big).\end{aligned}\tag{5.7}$$

现在，我们的任务是估计（5.7）右端项中的各项贡献。注意，由于特征函数具有额外的正则性，我们有

$$|w-\Pi^{\nabla,E}w_h|_{1,E}|(u_k^*)_I-\Pi^{\nabla,E}(u_k^*)_I|_{1,E}\le Ch_E^2|w_h|_{2,E},\tag{5.8}$$

以及以下估计

$$|||w_h-\Pi^{\nabla,E}w_h|||_E\le Ch_E|w_h|_{2,E}.\tag{5.9}$$

注意，利用 $|||\cdot|||_E$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|(u_k^*)_I - \Pi^{\nabla,E}(u_k^*)_I\right|\right|\right|_E^2 &= S^E((u_k^*)_I - \Pi^{\nabla,E}(u_k^*)_I, (u_k^*)_I - \Pi^{\nabla,E}(u_k^*)_I)\\ &= h_E|(u_k^*)_I - \Pi^{\nabla,E}(u_k^*)_I|_{1,\partial E}^2\\ &\leq h_E|u_k^* - (u_k^*)_I|_{1,\partial E}^2 + h_E|u_k^* - \Pi^{\nabla,E}u_k^*|_{1,\partial E}^2 + h_E|\Pi^{\nabla,E}(u_k^* - u_k^*)_I|_{1,\partial E}^2.\end{aligned}$$

注意到，按照 [13, 定理 4.5], 的证明进行，并利用 $\Pi^{\nabla,E} \in \mathbb{P}_1(E)$在$|\cdot|_{1,E}$中稳定这一事实，可得

$$\left|\left|\left|(u_k^*)_I - \Pi^{\nabla,E}(u_k^*)_I\right|\right|\right|_E \leq Ch_E|u_k^*|_{2,E}. \tag{5.10}$$

因此，综合 (5.9)、(5.10) 和 (5.8)，可得 (5.7) 的一个估计：

$$a_h^E(w_h,(u_k^*)_I) - a^E(w_h,(u_k^*)_I) \leq C_\kappa h_E^2|u_k|_{2,E}|u_k^*|_{2,E}. \tag{5.11}$$

另一方面，按照引理 3.4 的证明进行，可得下列关于 A_2的估计

$$b_h^E(w_h,(u_k^*)_I) - b^E(w_h,(u_k^*)_I) \leq C_\vartheta h_E^2|w_h|_{2,E}^2|u_k^*|_{2,E}. \tag{5.12}$$

因此，对 (5.11) 和 (5.12) 中所有 $E \in \mathcal{T}_h$ 求和，可分别得到A_1 和 A_2的所需界，从而可知

$$(\mathbf{III}) \leq C_\vartheta h^2|u_k|_{1,\Omega}|u_k^*|_{1,\Omega}. \tag{5.13}$$

最后，结合 (5.5)、(5.6) 和 (5.13)，证明得证。 □

6. 数值实验。本节报告一些数值测试，以通过计算结果检验本文所提出数值方法的性能。

我们为测试实现了 MATLAB 代码，针对我们空间 (3.2) 中的最低阶虚拟元方法。我们将本节分为两个小节：第一小节报告源问题的数值测试，其中我们关注 L^2 范数和 H^1 半范数的误差与收敛率计算。由于虚拟元方法解 u_h 在单元内部并非显式已知，因此我们将u 与 u_h 在 $\mathbb{P}_1$上的 L^2-投影进行比较；对于 H^1半范数，也采用同样的处理。即，$\|u - \Pi u_h\|_{0,\Omega}$ 对于 L^2，以及$|u - \Pi^\nabla u_h|_{1,\Omega}$ 对于 H^1。

第二部分 посвящ于特征值问题，我们的任务是评估该方法在逼近 T的谱方面的性能。

在整个实验部分中，我们考虑仅满足假设 **A1** 的网格。在图 6.1 中，我们展示了测试中将要考虑的多边形网格图。我们注意到，多边形网格族 $\mathcal{T}_h^1$是通过在 $y = 0.6$ 处拼接两个不同的多边形网格得到的。可以看出，与单元直径相比非常小的边出现在所得网格的界面上。

另一方面，多边形网格族 $\mathcal{T}_h^2$由三角形网格生成：在每条边上添加一个点作为新的自由度，并将该点移至距一个顶点 h_e^2、距另一个顶点 $(h_e - h_e^2)$ 的位置。我们指出，该网格族满足**A1** ，但不满足通常的假设，即每个多边形中任意两个顶点之间的距离都大于或等于 $Ch_\mathscr{E}$，因为最短边的长度为 h_e^2，而单元的直径

被一个 h_e 的倍数所界定。网格的细化层级记为 N，它对应于横坐标的细分次数。

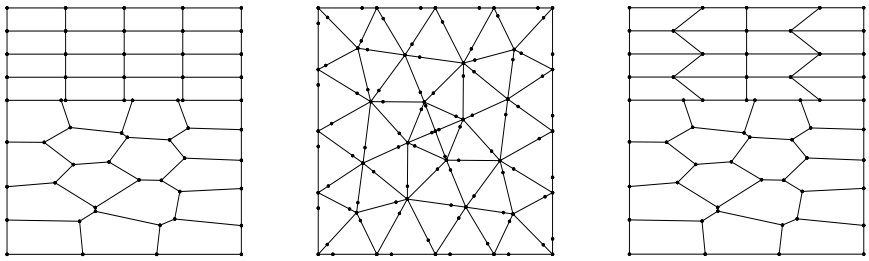

FIG. 6.1. *Sample meshes with small edges. From left to right:* $\mathcal{T}_h^1$, $\mathcal{T}_h^2$ *for* $N = 4$ *and* $\mathcal{T}_h^3$ *fo r* $N = 4$.

6.1. 载荷问题。在此测试中，我们关注如何对给定载荷 $f \in H^1(\Omega)$ 时的方程 (2.1) 的解进行近似。本测试旨在计算该问题相应范数下的误差率。在本测试中，我们考虑两种情形：第一种情形是系数 $\kappa(\mathbf{x})$ 在整个区域 Ω 上为常数，因此在网格的每个多边形上均为分片常数；第二种情形则考虑$\kappa(\mathbf{x})$，这超出了我们所建立的理论范围，因为该系数是一个有界函数。在两种测试中，问题 (1.1) 所定义的区域均为单位正方形 $\Omega := (0,1)^2$，且在边界 $\partial\Omega$ 上施加齐次狄利克雷边界条件。

6.1.1. 分片常数 $\kappa(\mathbf{x})$。 **</style}此处，对于所有x** $\in \Omega$， $\kappa(\mathbf{x}) = 1 = \gamma(\mathbf{x})$，且 $\vartheta(\mathbf{x}) := (x, y)^t$。载荷 f 和狄利克雷边界条件的选取使得精确解为 $u(\mathbf{x}) := \sin(\pi x)\sin(\pi y)$。

图 6.2 以双对数尺度展示了 L^2 和H^1 中，解 u 与虚拟解 u_h的多项式投影之间的误差收敛曲线。

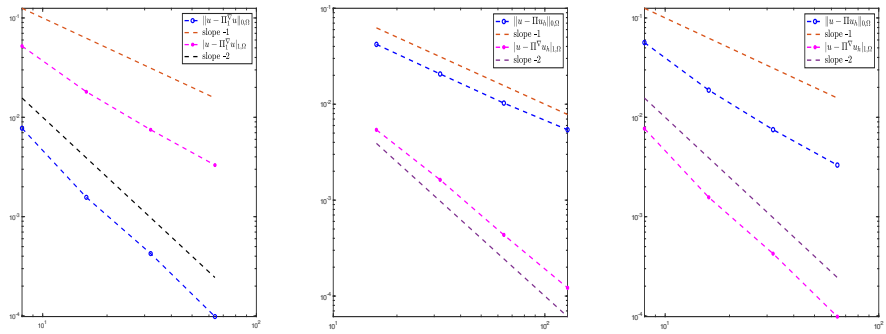

FIG. 6.2。 *Test 1:* L^2 *error with seminorm* H^1 *error for* $\mathcal{T}_h^1$ *(left),* $\mathcal{T}_h^2$ *(middle)and* $\mathcal{T}_h^3$ *(right).*

从图 6.2 可以看出， L^2中的误差具有明显的二次收敛阶，而半范数的收敛阶为 1。请注意，正如理论部分所证明的，这是最优阶数。

6.1.2. 有界且光滑 $\kappa(\mathbf{x})$。 在此测试中，我们考虑以下函数

$$\kappa(\mathbf{x}) := 1, \qquad \vartheta(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \text{and} \qquad \gamma(\mathbf{x}) := x^2 + y^3,$$

且右端项和狄利克雷边界条件定义如下，使得精确解为

$$u(\mathbf{x}) := (x - x^2)(y - y^2) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$

需要指出的是，本测试超出了已发展的理论范围，因为要使所有计算成立，系数必须在每个多边形上均为分片常数；这一假设在测试 1 中成立。不过，该方法不依赖这一假设，仍具有稳健性。图 6.3 中可以清楚地看到我们所声称的结果：对于所考虑的每个网格，误差均在减小。

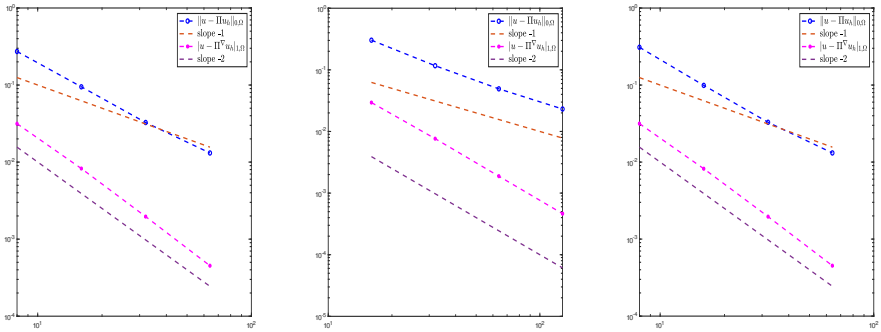

FIG. 6.3。 *Test 2: L^2 error with seminorm 1 error for $\mathcal{T}_h^1$ (left), $\mathcal{T}_h^2$ (middle)and $\mathcal{T}_h^3$ (right).*

6.2. 特征值问题。 现在，我们的任务是采用小边方法近似问题 (5.1) 的特征值和特征函数。对于本测试，我们考虑两种情形：凸域和非凸区域。收敛阶通过最小二乘拟合计算。

6.2.1. 单位正方形。 我们将单位正方形 $\Omega := (0,1)^2$ 作为计算域。该区域采用图 6.1 所示的网格进行离散。对流-扩散谱问题的解析解如下（见[31]）

$$\lambda_{p,q} = \frac{|\vartheta|^2}{4\kappa} + \kappa\pi^2(p^2+q^2) = \lambda^*_{p,q} \qquad \text{for } p,q \in \mathbb{N}_+,$$

$$u_{p,q}(x,y) = \exp\left(\frac{\vartheta\cdot(x,y)}{2\kappa}\right)\sin(p\pi x)\sin(q\pi y), \tag{6.1}$$

$$u^*_{p,q}(x,y) = \exp\left(-\frac{\vartheta\cdot(x,y)}{2\kappa}\right)\sin(p\pi x)\sin(q\pi y). \tag{6.2}$$

对于该测试，我们采用了 $\vartheta(\mathbf{x}) = (1,\ 0)^t$ 和 $\kappa(\mathbf{x}) = 1$。在表 6.1 中，我们报告了使用网格 $\mathcal{T}_h^2$和 $\mathcal{T}_h^3$计算得到的前六个特征值。“阶数”行给出

特征值的收敛性阶数，该阶数相对于利用 (6.2) 得到的精确值计算，这些精确值列于“精确”行中。我们从

TABLE 6.1 *Test 1. The lowest computed eigenvalues* $\lambda_h^{(i)}$, $1 \le i \le 6$ *for different meshes.*

$\mathcal{T}_h^1$						
N	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	$\lambda_h^{(3)}$	$\lambda_h^{(4)}$	$\lambda_h^{(5)}$	$\lambda_h^{(6)}$
8	20.8691	52.3774	57.8481	93.6945	106.3515	134.1838
16	20.1847	51.5506	50.2396	82.4563	100.6677	107.8481
32	20.0379	50.0865	49.7503	79.9785	99.3560	101.1318
64	20.0010	49.6345	49.7195	79.3947	99.0459	99.5049
阶数	2.08	2.08	2.03	2.09	2.07	2.00
精确	19.9892	49.5980	49.5980	79.2068	98.9460	98.9460
$\mathcal{T}_h^2$						
N	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	$\lambda_h^{(3)}$	$\lambda_h^{(4)}$	$\lambda_h^{(5)}$	$\lambda_h^{(6)}$
8	20.8967	56.0401	56.1475	96.3325	125.4921	125.0578
16	20.2310	51.1774	51.1054	83.2877	105.0248	105.2693
32	20.0531	49.9872	49.9944	80.2748	100.5110	100.5074
64	20.0057	49.7015	49.7027	79.4760	99.3675	99.359
阶数	1.93	1.99	1.98	1.99	1.99	1.99
精确	19.9892	49.5980	49.5980	79.2068	98.9460	98.9460
$\mathcal{T}_h^3$						
N	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	$\lambda_h^{(3)}$	$\lambda_h^{(4)}$	$\lambda_h^{(5)}$	$\lambda_h^{(6)}$
8	20.8669	58.1517	52.3612	94.0519	106.2181	137.1134
16	20.1847	51.5743	50.2385	82.4877	100.6575	108.0124
32	20.0379	50.0877	49.7502	79.9805	99.3554	101.1401
64	20.0010	49.7196	49.6345	79.3948	99.0459	99.5054
阶数	2.07	2.04	2.08	2.10	2.06	2.03
精确	19.9892	49.5980	49.5980	79.2068	98.9460	98.9460

报告的结果表明，对于所有网格，特征值均以阶数 $\mathcal{O}(h^2)$收敛。尽管该问题是非对称的，但计算特征值均为实数。另一方面，特征值收敛到精确特征值，这些值列于“精确”一行。

作为本次测试的结束，我们在图 6.4 中展示了该问题的第一、第二和第四个特征函数的图像。

6.2.2. 非凸区域。在接下来的测试中，我们将考虑一个称为旋转T形区域的非凸区域，其定义为 $\Omega := (-0.5,0.5) \times (-0.5,0) \cup (-0.25,0.25) \times (0,1)$，并在整个边界 $\partial\Omega$ 上施加边界条件 $u = 0$。该非凸区域有两个大小相同的再入角 $\omega = 3\pi/2$ （参见图 6.5），因此，该问题的特征函数可能出现奇异性。

图 6.5 展示了本数值测试所采用的网格。我们注意到，多边形网格族 $\mathcal{T}_h^3$、$\mathcal{T}_h^4$ 和 $\mathcal{T}_h^5$ 是通过在 $x = 0$ 处拼接两个不同的多边形网格得到的。可以看出，生成的网格在界面处出现了相对于单元直径而言非常短的边。

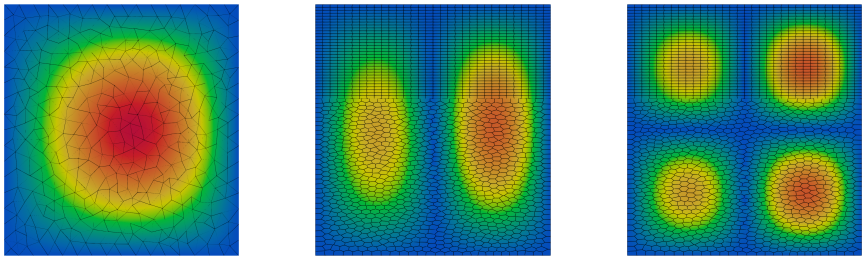

FIG. 6.4. *From left to right plots of the first second and four eigenfunctions computed with* $\mathcal{T}_h^2$ *and* $\mathcal{T}_h^3$.

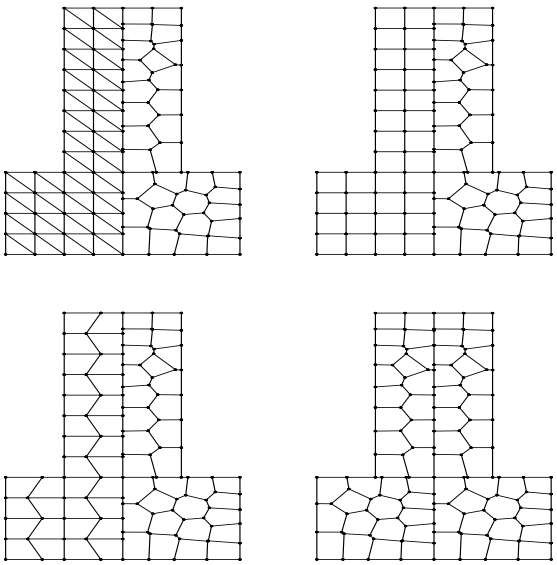

FIG. 6.5. *Sample meshes with small edges. From top left to bottom right:* $\mathcal{T}_h^4$, $\mathcal{T}_h^5$, $\mathcal{T}_h^6$ *and* $\mathcal{T}_h^7$, *for* $N = 8$.

表 6.2 报告了使用我们的方法计算得到的前六个特征值。我们认为，对于这种几何形状，不存在解析解。因此，我们将结果与“Extrap”行中给出的外推值进行比较。与前一个示例一样，“Order”行中报告的收敛阶是通过最小二乘拟合计算得到的。

从表 6.2 可以观察到，区域的奇异性对第一个特征值计算收敛阶的影响。显然，与该特征值对应的特征函数并不光滑，这正是影响收敛阶的原因。值得注意的是，对于本测试所考虑的每一种网格，都会出现这一现象。另一方面，其余计算特征值均以预期的阶数 $\mathcal{O}(h^2)$收敛到外推值。

同样，此测试的计算特征值均为实数，未观察到复特征值。最后，我们给出该谱问题前四个特征

TABLE 6.2*Test 1. The lowest computed eigenvalues* $\lambda_h^{(i)}$, $1 \le i \le 6$ *for different meshes.*

$\mathcal{T}_h^4$						
N	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	$\lambda_h^{(3)}$	$\lambda_h^{(4)}$	$\lambda_h^{(5)}$	$\lambda_h^{(6)}$
16	35.8647	50.9369	74.3495	79.8639	107.1151	138.1449
30	34.9179	49.8908	72.0953	76.7690	102.5379	130.5160
62	34.5028	49.6345	71.5289	75.8149	101.3815	128.6860
130	34.3804	49.5724	71.3967	75.5511	101.0999	128.2229
阶数	1.50	2.28	2.25	1.95	2.24	2.09
外推	34.3074	49.5656	71.3771	75.4885	101.0644	127.9790
$\mathcal{T}_h^5$						
N	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	$\lambda_h^{(3)}$	$\lambda_h^{(4)}$	$\lambda_h^{(5)}$	$\lambda_h^{(6)}$
16	36.1795	51.3140	75.4220	81.3284	109.2599	141.7893
30	35.0277	49.9852	72.3584	77.1608	103.0639	131.3561
62	34.5422	49.6585	71.5953	75.9265	101.5153	128.8964
130	34.3950	49.5786	71.4136	75.5848	101.1348	128.2769
阶数	1.54	2.27	2.26	2.00	2.25	2.32
外推	34.3172	49.5695	71.3900	75.5147	101.0894	128.2296
$\mathcal{T}_h^6$						
N	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	$\lambda_h^{(3)}$	$\lambda_h^{(4)}$	$\lambda_h^{(5)}$	$\lambda_h^{(6)}$
16	36.1709	51.3411	75.4263	81.3049	109.2335	141.8461
30	35.0258	49.9870	72.3587	77.1569	103.0624	131.3610
62	34.5418	49.6586	71.5954	75.9258	101.5152	128.8966
130	34.3949	49.5786	71.4136	75.5846	101.1348	128.2769
阶数	1.54	2.29	2.26	1.99	2.24	2.33
外推	34.3180	49.5702	71.3897	75.5101	101.0851	128.2359
$\mathcal{T}_h^7$						
N	$\lambda_h^{(1)}$	$\lambda_h^{(2)}$	$\lambda_h^{(3)}$	$\lambda_h^{(4)}$	$\lambda_h^{(5)}$	$\lambda_h^{(6)}$
16	36.1532	51.2579	75.0659	80.8267	108.4547	140.4589
28	35.0908	49.9516	72.2464	77.0487	102.8661	130.9399
60	34.5461	49.6508	71.5580	75.8867	101.4574	128.7725
132	34.3937	49.5760	71.4041	75.5698	101.1188	128.2443
阶数	1.56	2.69	2.62	2.23	2.56	2.71
外推	34.3209	49.5847	71.4127	75.5577	101.1394	128.3053

函数的图像，如图 6.6 所示。

参考文献

[1] D. Adak, G. Manzini, and S. Natarajan,*parabolic variational inequalities* *Virtual element approximation of two-dimensional* 116 2022 48 70 ,

Comput. Math. Appl., (), 第 – 页。[2] B. Ahmad, A. Alsaedi, F. Brezzi, L. D. Marini, and A. Russo,
virtual element methods *Equivalent projectors for* 66 2013 376 391 ,Comput. Math. Appl., (), 第 – 页。[3] D. Amigo,
F. Lepe, and G. Rivera,*allowing small edges* *A virtual element method for the elasticity problem* 2211 02792, 2022 ,arXiv: 。()。

[4] P. F. Antonietti, L. Beirão da Veiga, and G. Manzini,
its Applications *The Virtual Element Method and* 31, 2022 ,第 SEMA SIMAI Springer 系列卷, 。

[5] P. F. Antonietti, L. Beirão da Veiga, D. Mora, and M. Verani, *A stream virtual element*

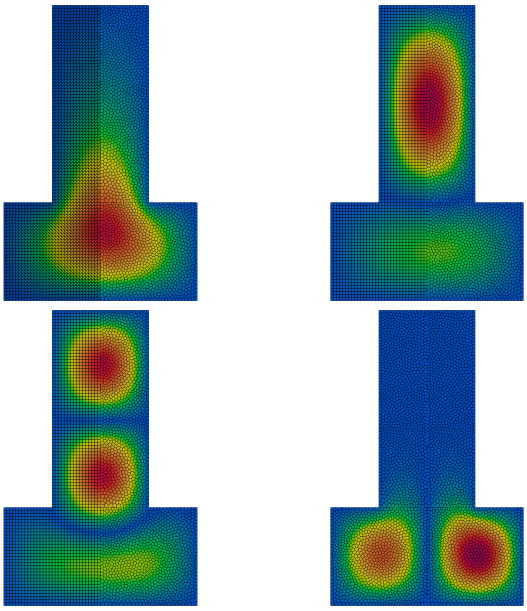

FIG. 6.6。

From top left to bottom right plots of the first four eigenfunctions for the rotated T , , , , , domain computed with $\mathcal{T}_h^4$ $\mathcal{T}_h^5$ $\mathcal{T}_h^6$ *and* $\mathcal{T}_h^7$ *respectively.*

formulation of the Stokes problem on polygonal meshes, SIAM J. Numer. Anal., 52（2014年）, 第 386–404 页。
[6] P. F. ANTONIETTI, L. BEIRÃO DA VEIGA S. SCACCHI AND M. VERANI *A* C^1 *virtual element , , , , method for the Cahn-Hilliard equation with polygonal meshes* 54
SIAM J. Numer. Anal.,（2016年）, 第 34–56 页。[7] E. ARTIOLI, S. DE MIRANDA, C. LOVADINA, AND L. PATRUNO, *A family of virtual element methods for plane elasticity problems based on the Hellinger-Reissner principle* , Comput. Methods Appl.
Mech. Engrg., 340（2018年）, 第 978–999 页。[8] I. BABUŠKA AND J. OSBORN, *Eigenvalue problems*, Handb. Numer. Anal., II, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1991年。[9] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, A. CANGIANI, G. MANZINI, L. D. MARINI, AND A. RUSSO, *Basic principles of virtual element methods* 23 2013 , Math. Models Methods
Appl. Sci.,（ ）, 第 199–214 页。[10] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, F. DASSI, L. D. MARINI, AND A. RUSSO, *Virtual element approximation of 2D magnetostatic problems* 327 , Comput. Methods Appl.
Mech. Engrg.,（2017年）, 第 173–195 页。[11] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, AND L. D. MARINI, *Virtual elements for linear elasticity problems* 51 2013 794 812 , SIAM J. Numer. Anal.,
（ ）, 第 – 页。[12] L. BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, L. D. MARINI, AND A. RUSSO, *Virtual element method for general second-order elliptic problems on polygonal meshes* , Math. Models Methods
Appl. Sci., 26（2016年）, 第 729–750 页。[13] L. BEIRÃO DA VEIGA, C. LOVADINA, AND A. RUSSO, *Stability analysis for the virtual element method* 27 2017 2557 2594 , Math. Models Methods
Appl. Sci.,（ ）, 第 – 页。[14] D. BOFFI, *Finite element approximation of eigenvalue problems*, Acta Numer., 19（2010年）, 第 1–120 页。[15] S. C. BRENNER AND L. R. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 纽约, 2008年。
[16] S. C. BRENNER AND L.Y. SUNG, *Virtual element methods on meshes with small edges or faces*, Math. Models Methods Appl. Sci., 28（2018年）, 第 1291–1336 页。[17] E. CÁCERES AND G. N. GATICA, *A mixed virtual element method for the pseudostress-velocity formulation of the Stokes problem* 37 2017 296 331 , IMA J. Numer. Anal.,（ ）,
第 – 页。[18] A. CANGIANI, E. H. GEORGOULIS, T. PRYER, AND O. J. SUTTON, *A posteriori error estimates for the virtual element method* 137 2017 857 893 , Numer. Math.,（ ）, 第 –
页。

[19] C. Carstensen, J. Gedicke, V. Mehrmann, and A. Miedlar, *An adaptive homotopy approach for non-selfadjoint eigenvalue problems*, Numer. Math., 119 (2011), pp. 557–583.

[20] J. Droniou and L. Yemm, *Robust hybrid high-order method on polytopal meshes with small faces*, Comput. Methods Appl. Math., 22 (2022), pp. 47–71.

[21] M. Frittelli and I. Sgura, *Virtual element method for the Laplace-Beltrami equation on surfaces*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 52 (2018), pp. 965–993.

[22] F. Gardini, G. Manzini, and G. Vacca, *The nonconforming virtual element method for eigenvalue problems*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 53 (2019), pp. 749–774.

[23] F. Gardini and G. Vacca, *Virtual element method for second-order elliptic eigenvalue problems*, IMA J. Numer. Anal., 38 (2018), pp. 2026–2054.

[24] J. Gedicke and C. Carstensen, *A posteriori error estimators for convection-diffusion eigenvalue problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 268 (2014), pp. 160–177.

[25] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer计算数学丛书第 5 卷, Springer-Verlag，柏林，1986年。理论与算法。[26] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, 数学科学基础丛书第132卷，Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，1966年。[27] F. Lepe, D. Mora, G. Rivera, and I. Velásquez, *A virtual element method for the Steklov eigenvalue problem allowing small edges*, J. Sci. Comput., 88 (2021), pp. 论文编号 44, 21.

[28] F. Lepe and G. Rivera, *A priori error analysis for a mixed VEM discretization of the spectral problem for the Laplacian operator*, Calcolo, 58 (2021), pp. 论文编号 20, 30.

[29] *A virtual element approximation for the pseudostress formulation of the Stokes eigenvalue problem*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 379 (2021), pp. 论文编号 113753, 21.

[30] D. Mora, G. Rivera, and R. Rodríguez, *A virtual element method for the Steklov eigenproblem*, Math. Models Methods Appl. Sci., 25 (2015), pp. 1421–1445.

[31] A. Naga and Z. Zhang, *Function value recovery and its application in eigenvalue problems*, SIAM J. Numer. Anal., 50 (2012年), pp. 272–286.

[32] J. Tushar, A. Kumar, and S. Kumar, *Virtual element methods for general linear elliptic interface problems on polygonal meshes with small edges*, Comput. Math. Appl., 122 (2022), pp. 61–75.

[33] P. Wriggers, W. T. Rust, and B. D. Reddy, *A virtual element method for contact*, Comput. Mech., 58 (2016年), pp. 1039–1050.