arXiv:2302.02243v1 [math.NT] 4 Feb 2023

整数序列的整除性质

摘要

如果非零整数序列 $f=(f_1,f_2,\dots)$ 的每个 f-nomid 系数$\left[\begin{smallmatrix}n\\k\end{smallmatrix}\right]_f$都是整数，那么该序列就是 binomid。这些项就是广义二项式系数：

$$\left[\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right]_f = \frac{f_n f_{n-1}\cdots f_{n-k+1}}{f_k\, f_{k-1}\ \cdots\ f_1}.$$

设 $\Delta(f)$ 为一个以这些数为元素的无限三角阵。当 $I=(1,2,3,\dots)$ 时，$\Delta(I)$ 是帕斯卡三角形，我们可以看到 I 是 binomid。

令人惊讶的是，帕斯卡三角形的每一行和每一列都是 binomid。事实上，对于任意 f，$\Delta(f)$ 的每一行和每一列都会生成各自的三角形。这些三角形相互组合，形成“Binomid 金字塔” $\mathbb{BP}(f)$。如果 $\mathbb{BP}(f)$ 的所有元素都是整数，那么序列 f 在每个层级上都是 binomid。

我们证明，若干熟知的数列在每个层级上都是 binomid。例如，满足二阶线性递推的每个数列都具有这一性质，条件是$L(0)=0$。数列 I、斐波那契数以及 $(2^n-1)_{n\geq 1}$ 都是例子。

整数序列的整除性质

Daniel B. Shapiro 数学系 俄亥俄州立大学 哥伦布，OH 43210

1 引言。

本文中，我们考虑序列 $f = (f_n)_{n\geq 1} = (f_1, f_2, \dots)$，其中每个 f_n 都是非零整数。有时我们用 $f(n)$ 代替 f_n。

1 定义。对于满足 $0 \leq k \leq n$ 的整数 n, k， f-nomid 系数为：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_f = \frac{f_n f_{n-1} \cdots f_{n-k+1}}{f_k\, f_{k-1} \;\cdots\; f_1}.$$

定义 f-阶乘为：$\langle n\rangle!_f = f_n f_{n-1} \cdots f_2 f_1$，我们得到

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_f = \frac{\langle n\rangle!_f}{\langle k\rangle!_f \cdot \langle n-k\rangle!_f}$$

设定 $\langle 0\rangle! = 1$，并注意到 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right]_f = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix}\right]_f = 1$。此外，当 $k > n$ 以及当 n 或 k 为负数时，$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_f$ 没有定义。（一些作者在 $k > n$ 时将 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_f = 0$ 设为。）该阶乘公式有助于解释这种对称性：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_f, \quad \text{whenever } 0 \leq k \leq n.$$

这些广义二项式系数曾在各种语境下被多位作者研究。Ward [24] 于1936年提到过它们，随后又发表了数篇讨论其性质和应用的论文。例如，在 [25] 中，他发展了一套包含幂级数类比形式的微积分理论。Gould [11] 介绍了 f-nomid 系数的早期历史（他称之为 Fonten´e-Ward 系数），并提及了它们的一些性质。Knuth 和 Wilf [18] 提供了更多早期参考文献，而 Ballot [2] 则研究了相关思想。

2 定义。binomid 三角形 $\Delta(f)$ 是所有 f-nomid 系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_f$（对于 $0 \le k \le n$）组成的三角数组。若 $\Delta(f)$ 的每个元素都是整数，则数列 f 是 binomid。于是，f 是 binomid 当且仅当：

$$\boxed{f_1 f_2 \cdots f_k \ \text{ divides } \ f_{m+1} f_{m+2} \cdots f_{m+k},} \quad \text{for every } m \text{ and } k \text{ in } \mathbb{Z}^+$$

如果 $f_1 = 1$ 那么 f 就会作为其三角形的第1列出现 $\Delta(f)$，因为 $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_f = f_n$。经典的二项式系数“帕斯卡三角形”是 $\Delta(I)$，其中 $I = (n) = (1, 2, 3, 4, \ldots\ldots)$。OEIS 中提到了这个数值三角形的一些历史 [22]A007318 以及 https://en.wikipedia.org/wiki/Pascals_triangle。

允许有限数列会比较方便。假设存在 $N \ge 1$，使得

$$f_n \neq 0 \text{ for } 1 \le n \le N \ \text{ and } \ f_n \text{ is not defined for } n > N.$$

当 $0 \le k \le n \le N$ 时，按之前的方式定义 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_f$，并在 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_f$ 时将其留空 $n > N$。类似地扩展定义2： $\Delta(f)$ 是一个有限三角形数组，其每条边上都有 $N+1$ 个条目。

为核对记号，下面列出帕斯卡三角形 $\Delta(I)$ 的前几项，其中指标 $n \ge 0$ 位于左侧竖列，指标 $k \ge 0$ 位于顶部横行。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

当 $I(n) = n$ 时的经典帕斯卡三角形 $\Delta(I)$。

有几种方法可以证明每个 $\binom{n}{k}$ 都是整数。例如，$\binom{n}{k}$ 是某个集合中元素的个数，因此是非负整数。归纳证明使用公式 $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$。第三种证明方法源自素因数分解。

以下引理可用于生成 binomid 序列的例子。

3 引理。设 f、g 是整数序列。

(1) 定义数列 fg：$(fg)_n = f_n g_n$。那么 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{fg} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_f \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_g$。如果 f 和 g 是 binomid，那么 fg 是 binomid。如果 c 在 $\mathbb{Z}$ 中非零，则：cf 是 binomid，当且仅当 f 是 binomid.

(2) 假设 f 是因子链：对于每个 n，都有 $f_n \mid f_{n+1}$。等价地：对于某个整数序列 a，有 $f_n = \langle n \rangle!_a$。

如果 f 是因子链，那么 f 是 binomid。

In p特别地，$(c^n) = (c, c^2, c^3, \ldots)$ 和 $n! = (1, 2, 6, 24, 120, \ldots)$ 是 binomid。

(3) 定义一个整数序列 ψ 为 同态的，[1] 如果 $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$ 对每个 m，n。如果 f 是 binomid，那么 $\psi \circ f$ 也同样是 binomid。

(4) 如果 $f = (f_1, f_2, f_3, \ldots)$ 是 binomid，那么数列 $(1, f_1, f_2, f_3, \ldots)$、$(1, f_1, 1, f_2, 1, f_3, \ldots)$ 和 $(f_1, f_1, f_2, f_2, f_3, f_3, \ldots)$ 也都是 binomid。

证明留给读者。 □

“三角数” $T(n) = {}^{n}{}_{(n+1)\ 2}$ 是帕斯卡三角形第2列中的各项。以下是 $\Delta(T)$ 的前几行。

	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1								
1	1	1							
2	1	3	1						
3	1	6	6	1					
4	1	10	20	10	1				
5	1	15	50	50	15	1			
6	1	21	105	175	105	21	1		
7	1	28	196	490	490	196	28	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

$T(n) = C_2(n) = n(n+1)/2$的三角形。

同样，第三个帕斯卡列 $C_3 = (1, 4, 10, 20, 35, \ldots)$生成了这个 binomid 三角形：

	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1								
1	1	1							
2	1	4	1						
3	1	10	10	1					
4	1	20	50	20	1				
5	1	35	175	175	35	1			
6	1	56	490	980	980	56	1		
7	1	84	1176	4116	4116	1176	84	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

$C_3(n) = n(n+1)(n+2)/6$的三角形。

这些整数值让我们怀疑，每个帕斯卡列 C_m 都是 binomid。

这一结果已由多位作者证明。它也可由下文的定理 15和引理 13(3) 推出。

[1]其他名称包括“完全乘法的”和“强乘法的”。

OEIS [22] 中序列 A342889 的网页提供了许多与这些三角形相关的参考资料 $\Delta(C_m)$。例如，$\Delta(T) = \Delta(C_2)$ 是 Narayana 数三角形。OEIS 页面上提到的“广义二项式系数”[2] $(n,\ k)_m$ 是我们由帕斯卡列构造的 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{C_{m+1}}$。

二项式系数的某些行列式与数列 C_m 有关 :

$$\det\left[\binom{n+i}{m+j}\right]_{i,j=0}^{k-1} = \frac{\binom{n+k-1}{m} \cdots \binom{n}{m}}{\binom{m+k-1}{m} \cdots \binom{m}{m}} = \begin{bmatrix} n-m+k \\ k \end{bmatrix}_{C_m}.$$

因此，每个 C_m 都是一个 binomid 序列。该行列式公式在 [3] 第 164 页中有所提及，所指的是 [23] 第 257 页。[3]

Gessel 和 Viennot [10] 为这类 Pascal 行列式找到了组合解释。在最近的一篇论述中，Cigler [5] 推导出了 $\Delta(C_m)$ 中各项的行列式表达式；这些数组按照 [8]的命名，被他称为“Hoggatt 三角形”。

Pascal 行又如何呢？下面是行 $R_m(n) = \binom{m}{n-1}$ 的一些三角形。

	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	1	1	1

$R_2(n) = \binom{2}{n-1}$ 的三角形。

	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	3	1		
3	1	3	3	1	
4	1	1	1	1	1

Triangle for $R_3(n) = \binom{3}{n-1}$.

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	4	1			
3	1	6	6	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	1	1	1	1	1

$R_4(n) = \binom{4}{n-1}$ 三角形。

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	5	1				
3	1	10	10	1			
4	1	10	20	10	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	1	1	1	1	1	1

Triangle for $R_5(n) = \binom{5}{n-1}$.

[2] 一些作者将这个术语用于不同的数值三角形。例如，[3] 第 15 页中的数字 $\binom{n}{m}_s$ 与我们的 binomid 系数并不相同。同样，由三项式系数构成的“Pascal 金字塔”（如 [3] 第 45 页所示）也不是下文提到的 Binomid 金字塔之一。[3]Netto 指出，该行列式公式源自 v. Zeipel 于 1865年 完成的一部著作。

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	6	1					
3	1	15	15	1				
4	1	20	50	20	1			
5	1	15	50	50	15	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	1	1	1	1	1	1	1

$R_6(n)$ = (的三角形 $\binom{6}{n-1}$)。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	7	1						
3	1	21	21	1					
4	1	35	105	35	1				
5	1	35	175	175	35	1			
6	1	21	105	175	105	21	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$R_7(n)$ = (的三角形 $\binom{7}{n-1}$)。

将由 Pascal 行构成的三角形层叠而成的数值金字塔定义为二项式金字塔。这个无限金字塔有三个面，所有外侧元素均为 1。深度为 m 处的水平截面是 $\Delta(R_m)$，即由 Pascal 行 m 构成的三角形。我们的数值示例表明，所有元素都是整数，且该金字塔具有三重旋转对称性。

从该金字塔中移除一个面（该面由全 1 组成），便会露出一个无限的三角形面，这就是原来的帕斯卡三角形。上方展示的三角形 $\Delta(R_m)$ 体现了这一点：每个第1列都是帕斯卡三角形的一行（按构造如此）。

列出上方所示这些三角形的第2列，可得

$$(1,\,1),\quad (1,\,3,\,1),\quad (1,\,6,\,6,\,1),\quad (1,\,10,\,20,\,10,\,1),\quad \text{etc.}$$

这些恰好就是前面展示的 $T = C_2$ =(1, 3, 6, 10, . . .) 的 binomid 三角形各行！也就是说，移去 Binomid 金字塔的两个面层后，会显露出一个三角形面，它等于由帕斯卡第2列构成的 $\Delta(C_2)$。这种规律会继续下去：每个三角形 $\Delta(C_m)$ 都是该 Binomid 金字塔的一个切片。我们在这里将这些断言推广，并在下一节概述证明。

4 定义。对于数列 f，Binomid 金字塔 $\mathbb{BP}(f)$ 由将根据三角形 $\Delta(f)$ 各行构造的 binomid 三角形层叠而成。

Se数列 f 在层级 c 是 binomid 的，当且仅当 $\Delta(f)$ 的第 c 列是一个 binomid 序列.

根据定义， f 在每个层级都是 binomid 的，当且仅当 $\Delta(f)$ 的每一列都是 binomid。根据下文的推论 10 ，这等价于说：金字塔 $\mathbb{BP}(f$的所有项都是整数。

我们提到， T =(1, 3, 6, 10, 15, . . .) 在第1级是 binomid。注意， T在第2级不是 binomid，因为 $\Delta(T)$ 的第2列是 g =(1, 6, 20, 50, 105, . . .)，而 $\left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]_g$ 不是整数。

有些数列在第2级是 binomid 的，但在第1级不是。例如，设 f be 最终常值序列 f =(2^{a_n})，其中： a =(0, 2, 4, 1, 3, 1, 4, 4, 4, . . .)。它不是 binomid，因为 $\left[\begin{smallmatrix}6\\3\end{smallmatrix}\right]_f = \frac{1}{2}$。检查 $\Delta(f)$ 的第2列可知，它是 (2^{b_n})，其中b =(0, 4, 3, 2, 2, 3, 6, 6, 6, . . .)。通过检查几个例子，我们可以证明这一列是 binomid 的。

下面是一些相当容易验证的例子。

5 命题。 沿用引理 3中的记号：

(1) 每条因子链在每个层级上都是 binomid。(2) 假设整数序列 ψ 是同态的。如果 f 在层级 c上是 binomid，那么 $\psi \circ f$也是。

证明。 结论 (2) 由引理 3(3) 得出。(1) 假设 f 是一条因子链。令 C_j为 $\Delta(f)$ 的第 j列 $C_j(n) = \begin{bmatrix} n+j-1 \\ j \end{bmatrix}_f$。由于 $\begin{bmatrix} d \\ j \end{bmatrix}_f = \frac{f_d}{f_{d-j}} \begin{bmatrix} d-1 \\ j \end{bmatrix}_f$且 $\frac{f_d}{f_{d-j}}$ 在 $0 \le j < d$时是整数，我们得出 C_j 是一条因子链。因此，根据引理 C_j 3(2)， C_j 是 binomid。 □

再举一个启发性例子，令 $G_2(n) = 2^n - 1 = (1, 3, 7, 15, \ldots)$。下面是它的三角形的前几行。这些整数项表明 G_2 是 binomid。

	0	1	2	3	4	5	6	
0	1							
1	1	1						
2	1	3	1					
3	1	7	7	1				
4	1	15	35	15	1			
5	1	31	155	155	31	1		
6	1	63	651	1395	651	63	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

$G_2(n) = 2^n - 1$的三角形。

设 $G_q(n) = \frac{q^n-1}{q-1} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$。三角形 $\Delta(G_q)$ 中的项 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{G_q}$ 通常称为“q项式”（或高斯）系数，自高斯 [9] 于1808年引入它们以来，已见于许多文章。例如，参见 [18]。“斐波那契项式”系数是 $\Delta(F)$ 中的项，其中 F 是斐波那契数列。正如卢卡斯 [21] 和 Carmichael [4]很久以前指出的那样， G_q 和 F 都是卢卡斯数列的例子。[4] 它们是满足二阶线性递推且具有 $L(0) = 0$ 的整数序列 L。这样的 L 是定义16中数列 U 的常数倍。[4]中的卡迈克尔第七定理表明，每个卢卡斯数列都是 binomid。

我们的定理15 和引理16如下所示，这意味着每个卢卡斯数列在每个层级上都是 binomid 的。

6 注。binomid 数列的定义可以用加法形式重述。令 $v_p(n)$ 表示素数 p 在 n中的指数。也就是说， $n = \prod_p p^{v_p(n)}$.

（1）设 $(a) = (a_1, a_2, \ldots)$ 是一个处处非零的整数序列。那么，对于每个素数 p，(a) 是 binomid，当且仅当 $(p^{v_p(a_n)})$ 是 binomid。

[4] Ballot [2] 指的是 $\Delta(L)$ 中的项，称为“卢卡斯二项式”系数。

（2）对于整数序列 $b = (b_1, b_2, \ldots)$，定义 $s_b(n) = b_1 + \cdots + b_n$。设 $c > 1$ 是一个整数。则：

$$(c^{b_n}) \text{ is binomid} \iff s_b(m) + s_b(n) \leq s_b(m+n) \text{ for every } m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

下面定义的每个性质都有一个加法版本。但这些改写似乎并不能为这些定理的证明带来显著改进。

2 Binomid 金字塔。

对于数列 f，Binomid 金字塔 $\mathbb{BP}(f)$ 是由三角形 $\Delta(f)$ 的行序列所对应的 binomid 三角形叠放而成的。本节将验证，沿着平行于某个面的平面切割该金字塔，就会得到 $\Delta(f)$ 的列序列对应的 binomid 三角形。

我们的数列从指标 1 开始。我们选择记号，使行序列和列序列都从指标 1 开始。我们通常只考虑满足 $f_1 = 1$ 的序列 f。

7 定义。若 f 是满足 $f_1 = 1$ 的序列，则定义其三角形 $\Delta(f)$ 的行序列和列序列如下：

$$R_m(N) = \begin{bmatrix} m \\ N-1 \end{bmatrix}_f, \quad \text{and} \quad C_j(N) = \begin{bmatrix} N+j-1 \\ j \end{bmatrix}_f.$$

行序列 R_m 只有 $m+1$ 个项：

$$R_m = \left(\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}_f, \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}_f, \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}_f, \ldots, \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_f \right), \text{ with } R_m(N) \text{ undefined for } N > m+1.$$

例如： p

$$R_0 = (1),\ R_1 = (1,1), \quad R_2 = (1, f_2, 1), \quad \ldots \quad , R_m = (1, f_m, \tfrac{f_m f_{m-1}}{f_2}, \ldots, f_m, 1).$$

列序列是无限的，其各项为

$$C_j = \left(\begin{bmatrix} j \\ j \end{bmatrix}_f, \begin{bmatrix} j+1 \\ j \end{bmatrix}_f, \begin{bmatrix} j+2 \\ j \end{bmatrix}_f, \ \ldots \right) = (1, f_{j+1}, \ \tfrac{f_{j+2} f_{j+1}}{f_2}, \ \ldots).$$

注意，$C_0 = (1, 1, 1, \ldots)$ 和 $C_1 = (1, f_2, f_3, \ldots) = f$。

前几行 Pascal 行对应的 Binomid 三角形具有三重旋转对称性。命题 8表明，这是每一行左右对称性的结果。在我们的三角形展示中，这意味着每一列都与一条向下对角线相对应。

例如，数列 $f = (1, a, b, b, a, 1)$ 在其三角形 $\Delta(f)$ 中出现 3 次：

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	a	1				
3	1	b	b	1			
4	1	b	b^2/a	b	1		
5	1	a	b	b	a	1	
6	1	1	1	1	1	1	1

8 引理。假设 $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ 是一个含有 n 项的对称列表。也就是说：$f_k = f_{n+1-k}$。那么三角形 $\Delta(f)$ 具有三重旋转对称性。

证明。我们需要证明：列 $c =$ 行 $n - c$，当且仅当 $0 \le c \le n$。
$(k+1)^{\text{st}}$ C_c 和 R_{n-c} 的项为

$$\begin{bmatrix} c+k \\ k \end{bmatrix}_f = \frac{f_{c+k} f_{c+k-1} \cdots f_{c+1}}{\langle k \rangle !_f} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} n-c \\ k \end{bmatrix}_f = \frac{f_{n-c} f_{n-c-1} \cdots f_{n-c-k+1}}{\langle k \rangle !_f}$$

根据 f的对称性，这些分子逐项相等：

$$f_{c+k} = f_{n-c-k+1}, \quad f_{c+k-1} = f_{n-c-k+2}, \quad \cdots, \quad f_{c+1} = f_{n-c}.$$ □

对于上面的有限数列，对称性表明 $R_n = (1, 1, \ldots, 1)$，而后续各行均未定义。

定义 4 中的 Binomid 金字塔 $\mathbb{BP}(f)$ 是通过叠放三角形构建的 $\Delta(R_m)$。为说明三角形 $\Delta(C_j)$ 是该金字塔的一个切片，我们检查 $\Delta(C_j)$ 的每一行是否都等于水平切片中相应的一行和一列 $\Delta(R_m)$。数值观察表明

$$\text{Row } n \text{ of } \Delta(C_2) = \text{Column 2 of } \Delta(R_{n+1}) = \text{Row } n \text{ of } \Delta(R_{n+1}).$$
$$\text{Row } n \text{ of } \Delta(C_3) = \text{Column 3 of } \Delta(R_{n+2}) = \text{Row } n \text{ of } \Delta(R_{n+2}).$$

一般规律给出了下面的结论：

9 命题。对于数列 f 以及每个 n 和 m：

$$\text{Row } n \text{ of } \Delta(C_m) = \text{Column } m \text{ of } \Delta(R_{n+m-1}) = \text{Row } n \text{ of } \Delta(R_{n+m-1}).$$

证明。 由于 R_k 有 $k+1$ 项，引理 8 表明：

$$\text{Column } m \text{ of } \Delta(R_k) = \text{Row } k+1-m \text{ of } \Delta(R_k).$$

这证明了命题陈述中的第二个等式。为了完成证明，我们将证明：
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{C_m} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{R_{n+m-1}}$ 对每个 n, k, m。
涉及的那些数列为：

$$C_m(N) = \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m \end{bmatrix}_f \text{ and } R_{n+m-1}(N) = \begin{bmatrix} n+m-1 \\ N-1 \end{bmatrix}_f. \text{ Then}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{C_m} = \frac{\begin{bmatrix} n+m-1 \\ m \end{bmatrix}_f \begin{bmatrix} n+m-2 \\ m \end{bmatrix}_f \cdots \begin{bmatrix} n+m-k \\ m \end{bmatrix}_f}{\begin{bmatrix} k+m-1 \\ m \end{bmatrix}_f \begin{bmatrix} k+m-2 \\ m \end{bmatrix}_f \cdots \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_f} \quad \text{and}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{R_{n+m-1}} = \frac{\begin{bmatrix} n+m-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_f \begin{bmatrix} n+m-1 \\ n-2 \end{bmatrix}_f \cdots \begin{bmatrix} n+m-1 \\ n-k \end{bmatrix}_f}{\begin{bmatrix} n+m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_f \begin{bmatrix} n+m-1 \\ k-2 \end{bmatrix}_f \cdots \begin{bmatrix} n+m-1 \\ 0 \end{bmatrix}_f}.$$

所述等式可以通过直接但极其冗长的计算得出。将所有这些 binomid 系数替换为 f-阶乘定义，然后化简分数。此处省略诸多细节。

□

这个公式表明，在金字塔 $\mathbb{BP}(f)$ 中，平行于某个面的切片确实会得到 $\Delta(f)$ 各列对应的 binomid 三角形。

10 推论。如果 f 是一个数列，那么：

$$\text{all columns of } \Delta(f) \text{ are binomid} \iff \text{all rows of } \Delta(f) \text{ are binomid.}$$

当 f 在每个层级上都是 binomid 时，这些条件成立，如定义 4所述。

注。命题 $\Delta(R_m)$（命题 8）中的三重对称性意味着命题 9中的公式等价于：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{C_m} = \begin{bmatrix} k+m \\ m \end{bmatrix}_{R_{n+m-1}}, \text{ for every } n, k, \text{ and } m.$$

3 因子乘积序列。

11 定义。对于数列 g，定义数列 $\mathcal{P}(g)$ 如下： $\mathcal{P}(g)(n) := \prod_{d|n} g(d)$.

序列 f 是因子乘积，当且仅当对于某个整数序列 g，有 $f = \mathcal{P}(g)$。

该乘积记号表示 d遍历 n 的所有正整数因子。分圆多项式为此提供了动机。

定义齐次多项式 $\Phi_n(x,y)$，其中 $\mathbb{Z}[x,y]$，使其满足：

$$x^n - y^n = \prod_{d|n} \Phi_d(x,y).$$

例如

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x,y) &= x - y & \Phi_4(x,y) &= x^2 + y^2 \\
\Phi_2(x,y) &= x + y & \Phi_5(x,y) &= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\
\Phi_3(x,y) &= x^2 + xy + y^2 & \Phi_6(x,y) &= x^2 - xy + y^2
\end{aligned}$$

注意，对于每个 $n > 1$，都有 $\Phi_n(y,x) = \Phi_n(x,y)$。每个（非齐次）圆分多项式 $\Phi_n(x) = \Phi_n(x,1)$ 都是首一多项式，其次数为 $\varphi(n)$，且系数为整数。[5]
例如，数列 $G_2 = (2^n - 1) = (1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, \dots)$ 是一个因数乘积，因为它可以分解为

$$2^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(2),$$

而 $\big(\Phi_n(2)\big) = (1, 3, 7, 5, 31, 3, 127, 17, 73, 11, \dots)$ 的各项都是整数。

这些数列在以下意义下是“可整除的”。

12 定义。若整数序列对于 $k, n \in \mathbb{Z}^+$ 满足：

$$k \mid n \text{ implies } f(k) \mid f(n).$$

这样的 f 称为整除数列或除法数列。

13 引理。

(1) 如果 f 是因子乘积，那么 f 可整除。

(2) 设 $G_{a,\,b}(n) = \dfrac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^n$。

若 a, b 是整数，则 $G_{a,\,b}$ 是因子乘积。

[5] 许多数论教材中都包含更多相关信息。一个方便查阅的参考资料是 https://en.wikipedia.org/wiki/Cyclotomic_多项式。

(3) 对于 $c \in \mathbb{Z}$，这些序列

$$I = (n) = (1, 2, 3, \dots), \quad (c) = (c, c, c, \dots), \text{ and } (c^n) = (c, c^2, c^3, \dots)$$

是因子乘积。

(4) 若 (a_n) 和 (b_n) 是因子乘积，则 $(a_n b_n)$ 也是因子乘积。

(5) 假设整数序列 ψ 是同态的（如引理 3所述）。若 f 是因子乘积，则 $\psi \circ f$也是因子乘积。

证明。 (1) 由定义11可得。另请注意，若 f 是因子乘积且$d = \gcd(m, n)$，则： $f(m)f(n) \mid f(mn)f(d)$。

(2) 验证 $G_{a,\,b}(n) = \prod_{d|n} g(d)$，其中 $g(1) = 1$ 且 $g(n) = \Phi_n(a, b)$，当 $n > 1$ 时。

当 $a = b$ 时，这仍然成立，因为 $G_{a,\,a}(n) = na^{n-1}$

(3) 由于 $I = G_{1,1}$ ，我们可以应用 (2)。具体而言， $I = \mathcal{P}(j)$，其中

$$j(n) = \begin{cases} p & \text{if } n = p^k > 1 \text{ is a prime power,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$(c) = \mathcal{P}(\delta_c)$，其中 $\delta_c = (c, 1, 1, 1, \dots)$。

$(c^n) = \mathcal{P}(c^{\varphi(n)})$，其中 φ 是欧拉函数。

(4) 和 (5)：验证 $\mathcal{P}(gh) = \mathcal{P}(g)\mathcal{P}(h)$，并验证 $\psi \circ \mathcal{P}(g) = \mathcal{P}(\psi \circ g)$. □

对于 $\mathbb{Q}$ 中任意处处非零数列 f，存在唯一的 $\mathbb{Q}$ 中的 g，使得 $f = \mathcal{P}(g)$。M¨obius 反演公式的积性版本给出了 $\mathcal{P}^{-1}(f)$ 的显式公式。

14 引理（M¨obius 反演）。若 f 是处处非零数列且 $f = \mathcal{P}(g)$，则：

$$g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{\mu(n/d)}.$$

莫比乌斯函数 $\mu(k)$ 的取值属于 $\{0, 1, -1\}$。根据定义， f 是因子乘积，当且仅当每个 $g(n)$ 都是整数。莫比乌斯反演的加法形式在许多数论教材中都有讨论。这种乘法形式是其变体，一些教材会明确讨论。[6] 我们省略这一众所周知结果的证明。

1939 年，Ward [26] 指出，因子乘积序列都是 binomid。本文的主要结果是以下推广。

15 定理。因子乘积序列在每个层级上都是 binomid。

[6] 一个不错的参考资料是 https://en.wikipedia.org/wiki/Mobius_反演_公式 .

证明。若 g 是处处非零整数序列，我们将证明 $\mathcal{P}(g)$ 在每个层级上都是 binomid，也就是说：金字塔 $\mathbb{BP}\big(\mathcal{P}(g)\big)$ 的每个元素都是整数。为此，考虑一种“通用”情形。

令 $\mathbb{Z}[X]$ 为由独立不定元无限序列 $X = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ 构成的多项式环。

断言。 $\mathbb{BP}\big(\mathcal{P}(X)\big)$ 的每个元素都是 $\mathbb{Z}[X]$ 中的多项式。

如果此断言成立，我们可以将 g 代入 X，从而得出 $\mathbb{BP}\big(\mathcal{P}(g)\big)$ 中的每一项都属于 $\mathbb{Z}$，进而证明该定理。
金字塔 $\mathbb{BP}\big(\mathcal{P}(X)\big)$ 中的每个元素都是一个商，其中涉及项 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{P}(X)}$ 的乘积， n 和 k 取不同值。因此，它是一个 “ 有理单项式 ”，即涉及变量 x_1, x_2,... 的单项式之商。
对于实数 α，我们用 $\lfloor \alpha \rfloor$ 表示“向下取整

函数”：不大于 $\leq \alpha$ 的最大整数。
注意，

$$\begin{aligned} \langle n \rangle!_{\mathcal{P}(X)} &= \prod_{j=1}^{n} \mathcal{P}(X)(j) = (x_1)(x_1x_2)(x_1x_3)(x_1x_2x_4)(x_1x_5)(x_1x_2x_3x_6)\cdots \\ &= x_1^n x_2^{\lfloor n/2 \rfloor} x_3^{\lfloor n/3 \rfloor} \cdots x_n^{\lfloor n/n \rfloor} \;=\; \prod_{r>0} x_r^{\lfloor n/r \rfloor}. \end{aligned} \tag{a}$$

这个无穷乘积（其中 $r = 1$、2、3、4、.....）是成立的，因为当 $r > n$ 时， $\lfloor n/r \rfloor = 0$。
对于有理单项式 M 和指标 r，用 $v_r(M)$ 表示 M 的因式分解中因子 x_r 的指数。也就是说：

$$M = \prod_{r>0} x_r^{v_r(M)}.$$

于是 $v_r(M) \in \mathbb{Z}$，并且对于除有限多个 r 之外的所有情况， $v_r(M) = 0$ 。此外，当且仅当对每个指标 r 都有 $v_r(M) \geq 0$ 时， M 才是多项式。
公式 (a) 表明： $v_r\big(\langle n \rangle!_{\mathcal{P}(X)}\big) = \lfloor n/r \rfloor$。因此，指数

$$\delta_{m,r}(j) := v_r\Big(\left[\begin{smallmatrix} m+j \\ m \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{P}(X)} \Big)$$

有一个更简单的公式：

$$\delta_{m,r}(j) \;=\; \left\lfloor \frac{m+j}{r} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{r} \right\rfloor.$$

我们将在下文看到，这个量只能是 0 或 1。

要证明 $\mathcal{P}(X)$ 在每个层级上都是 binomid，我们需要证明：对于每个 m，列序列 $C_m(n) = \left[\begin{smallmatrix} m+n-1 \\ m \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{P}}(X)$ 在 $\mathbb{Z}[X]$ 中都是 binomid。换言之，对于每个 $n, a \in \mathbb{Z}^+$:

$$\left[\begin{smallmatrix} m \\ m \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{P}(X)} \cdot \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ m \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{P}(X)} \cdots \left[\begin{smallmatrix} m+n-1 \\ m \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{P}(X)}$$

$$\text{divides } \begin{bmatrix} a+m \\ m \end{bmatrix}_{\mathcal{P}(X)} \cdot \begin{bmatrix} a+m+1 \\ m \end{bmatrix}_{\mathcal{P}(X)} \cdots \begin{bmatrix} a+m+n-1 \\ m \end{bmatrix}_{\mathcal{P}(X)} \text{ in } \mathbb{Z}[X].$$

$\delta_{m,r}(j)$ 的定义表明：

$\mathcal{P}(X)$ 在层级 m 上是 binomid，当且仅当对每个 $n, a, r \in \mathbb{Z}^+$：

$$\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{m,r}(j) \;\le\; \sum_{j=a}^{a+n-1} \delta_{m,r}(j). \tag{b}$$

公式 $\delta_{m,\,r}(j) = \left\lfloor \frac{m+j}{r} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{r} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{r} \right\rfloor$，蕴含 $\delta_{m+rs,\,r}(j) = \delta_{m,\,r}(j)$，对任意$s \in \mathbb{Z}$均成立。于是，我们可以调整 m，假设 $0 \le m < r$。

类似地，$\delta_{m,\,r}(j + rs) = \delta_{m,\,r}(j)$。于是，对于固定的 r, m，值 $\delta_{m,\,r}(j)$ 只取决于（j 模 r）。因此，(b) 中各个和里的任意一块 r 个连续项都会得到相同的结果，即对 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 中所有值求和。于是，若 $n \ge r$，我们可以从 (b) 中每个和的顶部消去 r 项，并将 n 替换为 $n - r$。重复此过程后，我们可以假设 $0 \le n < r$。

对于实数 $\alpha, \beta \in [0, 1)$，简单检验可知

$$\lfloor \alpha + \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor - \lfloor \beta \rfloor \;=\; \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha + \beta \ge 1, \\ 0 & \text{if } \alpha + \beta < 1. \end{cases}$$

在我们的情形中，$0 \le m, n < r$，因此可写作 $j \equiv j'$ (模 r)，其中 $0 \le j' < r$。于是 $\delta_{m,r}(j) = \begin{cases} 1 \text{，若 } m + j' \ge r; \\ \text{若 } m + j' < r. \text{，则为 } 0。 \end{cases}$ 这说明数列 $\delta_{m,r}$ 以$r - m$ 个零开头，

随后是 m 个一，并且这一模式以 r为周期重复。例如，当 $m = 2$ 且 $r = 6$ 时，该数列为

$$\delta_{2,6} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, \ldots).$$

对于这样的数列，不难看出，在任意一个由 n个连续项构成的“窗口”中，各项之和的最小值由最初的 n 项取得。这证明了 (b) 中的不等式，并完成了定理的证明。□

满足二阶线性递推的数列还提供了更多因子乘积的例子。斐波那契数列和 $(2^n - 1)$ 都属于这类“卢卡斯数列”。

16 引理。对于不同时为零的 P、$Q \in \mathbb{Z}$，定义卢卡斯数列 $U = U_{P,\,Q}$，令 $U(0) = 0$ 且 $U(1) = 1$，并要求

$$U(n+2) = P \cdot U(n+1) - Q \cdot U(n) \quad \text{for every } n \ge 0.$$

则 U 是一个因子乘积。

证明。对 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，将 $x^2 - Px + Q = (x - \alpha)(x - \beta)$ 因式分解。于是 α, β 不会同时为零。回顾一下众所周知的公式：

$$\text{If } \alpha \neq \beta \text{ then: } U(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{for every } n \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\text{If } \alpha = \beta \text{ then: } U(n) = n\alpha^{n-1} \quad \text{for every } n \in \mathbb{Z}^+.$$

要验证这些公式，注意到数列 (α^n) 和 (β^n) 满足该递推关系。因此，每个线性组合 $(c\alpha^n + d\beta^n)$ 也满足该关系。当 $\alpha \neq \beta$ 时，所述公式具有这种形式，并且对于 $n = 0, 1$，它与 $U(n)$ 相符。归纳法表明，对每个 n，这些量都相等。

当 $\alpha = \beta$ 验证 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 并用相同方法证明 $U(n) = n\alpha^{n-1}$。在这种情况下，U 是一个因子乘积，因为引理13 表明 (n)、(α^{n-1}) 及它们的乘积都是因子乘积。

假设 $\alpha \neq \beta$。由于 $\alpha^n - \beta^n = \prod \Phi_d(\alpha, \beta)$ 和 $\Phi_1(\alpha, \beta) = \alpha - \beta$，因此 $U = \mathcal{P}(g)^{d|n}$，其中 $g(1) = 1$，且当 $n > 1$ 时，$g(n) = \Phi_n(\alpha, \beta)$。那么，只要 g 取整数值，U 就是一个因子乘积。莫比乌斯（引理 14）说明，每个 $g(n)$ 都是有理数。由于 α、β 是代数整数，且每个 Φ_n 都有整数系数，我们知道 $g(n)$ 是代数整数。因此，每个 $g(n) \in \mathbb{Z}$。[7] □

对于斐波那契数列 $F = U_{1,\,-1}$，此引理意味着 $F = \mathcal{P}(b)$，其中$b = (1, 1, 2, 3, 5, 4, 13, 7, 17, 11, 89, 6, \ldots)$ 是一个整数序列。

本节最后再对因子乘积作几点补充说明。

三角数列 T 是 binomid，但不是因子乘积。（T 甚至不可整除。）数列 $w := (1, c, c, c, c, \ldots)$ 是一条因子链，因此根据引理 5，它在每个层级上都是 binomid。但当 $c > 1$ 时，它不是因子乘积，因为 w_2w_3不能整除 w_1w_6。

可整除性并不意味着是 binomid。数列 $h(n) := \begin{cases} 1 & \text{如果 } n = 1, \text{ 则为 } 5、7、c \\ & \text{否则可整除，但当 } c > 1 \text{ 时，} h \text{ 不是 binomid。（因为 } h_1h_2h_3 \text{ 不能整除 } h_5h_6h_7\text{。）} \end{cases}$；

有趣的是，欧拉函数 $\varphi(n)$ 是一个因子乘积。为了解这一点，回想一下φ 是积性的：$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$，只要 a，b 互素。标准公式表明，φ如定义 12 所述可整除。于是下一个结果适用于 φ。

17 命题。积性整除数列是因子乘积。

证明。若 f 是处处非零数列，令 $f = \mathcal{P}(g)$ 为数列 g 在 $\mathbb{Q}$中的值。若 f 是积性的，则 $g(n) = \begin{cases} f & \\ f^{(p^m)\,(p^{m-1})} & \text{当 } n = p^m > 1 \text{ 是素数幂时；否则为 } 1\text{。} \end{cases}$

如果 f 也可整除，则每个 $g(n)$ 都是整数，而 f 是因子乘积。 □

[7]为避免使用代数整数相关的定理，我们可以运用对称多项式理论：若 $p \in \mathbb{Z}[x, y]$ 和 $p(x, y) = p(y, x)$，则 $p \in \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$，其中 $\sigma_1 = x + y$ 和 $\sigma_2 = xy$ 是初等对称多项式。注意，$\sigma_1(\alpha, \beta) = \alpha + \beta = P$ 且 $\sigma_2(\alpha, \beta) = \alpha\beta = Q$。

18 注。假设 $f = \mathcal{P}(g)$ 是一个因子乘积，且 $f(1) = 1$。那么：

(1) f 是积性的，当且仅当当 n 不是素数幂时， $g(n) = 1$ 。(2) f 是同态的，当且仅当当 n 不是素数幂时， $g(n) = 1$ ，并且对于每个素数幂 $p^m > 1$，$g(p^m) = g(p)$。(3) f 是最大公约数序列（见下文定义19），当且仅当在 $m \nmid n$ 和 $n \nmid m$时，$g(m)$与 $g(n)$互素。

性质（3）在[6]中被指出。

4 相关主题。

4.1 最大公约数序列。

我们首先介绍由格论启发而来的记号：

$$a \wedge b := \gcd(a, b) \quad \text{and} \quad a \vee b := \operatorname{lcm}(a, b).$$

这些运算定义在 $\mathbb{Z}$ 上，但 $0 \wedge 0$ 未定义。

19 定义。整数序列 f 是最大公约数序列，当且仅当：

$$f(m \wedge n) = f(m) \wedge f(n) \quad \text{for every } m, n \in \mathbb{Z}^+$$

用前面的记号来说，这意味着对每个满足 $d =$ 的 m、n，都有 gcd(m, n)：

$$\gcd(f_m, f_n) = f_d.$$

其他作者对具有这一性质的序列使用了不同的名称。Hall [13] 和 Kimberling [17] 称它们为强可整除序列。Granville [12] 研究满足线性递推的序列，并将具有这一最大公约数性质的序列称为强线性除法序列（线性除法序列）。Knuth 和 Wilf [18] 使用术语正则可整除。Dziemia´nczuk 和 Bajguz [6] 称它们为最大公约数态序列。

Carmichael [4] 证明了，每个卢卡斯数列（如引理 16中所述）都是最大公约数序列。1936年，Ward [24] 利用素因数分解证明，每个最大公约数序列都是 binomid；这一结果也在 [18]中得到证明。以下定理与定理 15共同推出：每个最大公约数序列在每个层级上都是 binomid。

20 定理。每个最大公约数序列都是因子乘积。

这一结果已由多位作者分别证明，因此此处不再给出证明。Kimberling [17] 指出，对最大公约数序列应用 M¨obius 反演（见引理 14）会得到整数。Dziemia´nczuk 和 Bajguz [6] 给出了一种截然不同的证明。还可以通过先将问题归约到类型为 $f(n) = c^{a(n)}$的数列情形，给出另一种证明。

注。如果 f、g 是最大公约数序列，那么 $f \wedge g$ 和 $f \circ g$ 也都是最大公约数序列。例如，$2^{F_n} - 1$ 是最大公约数序列，因此它在每个层级上都是 binomid。这个例子在 [1] 中提到过。

4.2 ComboSum 序列

一种归纳证明表明，所有二项式系数 $\binom{n}{k}$ 都是整数，所用公式为

a

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

我们将该递推公式推广到当前情境。其他作者也曾指出其中一些想法。参见 [14], [20], [7]。

21 引理。设 f 是一个数列，$1 \le k \le n$，且 $\langle n\rangle!_f \neq 0$。
若对于某些 u、v，$f_{n+1} = uf_{n-k+1} + vf_k$，则：

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_f = u \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_f + v \cdot \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_f.$$

证明。给定 $\frac{f_{n+1}}{f_k f_{n-k+1}} = u \cdot \frac{1}{f_k} + v \cdot \frac{1}{f_{n-k+1}}$，乘以 $\frac{\langle n\rangle!_f}{\langle k-1\rangle!_f \langle n-k\rangle!_f}$ 得到

$$\frac{\langle n+1\rangle!_f}{\langle k\rangle!_f \langle n-k+1\rangle!_f} = u \cdot \frac{\langle n\rangle!_f}{\langle k\rangle!_f \langle n-k\rangle!_f} + v \cdot \frac{\langle n\rangle!_f}{\langle k-1\rangle!_f \langle n-k+1\rangle!_f}.$$

这就是所述结论。 □

22 定义。若整数序列 f 对每个 m、n 都满足以下条件，则称其为 ComboSum 序列：

$$f_m \wedge f_n \mid f_{m+n}.$$

根据初等数论，该条件等价于：

$$f_{m+n} = u \cdot f_m + v \cdot f_n \quad \text{for some } u, v \in \mathbb{Z}.$$

显然，任何最大公约数序列都是 ComboSum。特别是，卢卡斯数列$U_{P,\,Q}$ 具有 ComboSum 性质。

23 命题。每个 ComboSum 序列都是 binomid。

证明。若 f 是 ComboSum，且 $0 < k < n$，那么 $f_{n+1} = uf_{n-k+1} + vf_k$对于某些整数$u$，$v$，引理 21 适用。归纳证明表明，$f$ 是 binomid。 □

每个 ComboSum 序列都可整除。当 $m = n$时，定义 22推出：$f(n) \mid f(2n)$。归纳论证表明：$f(n) \mid f(kn)$，对每个 $k \in \mathbb{Z}^+$均成立。

Seq列（1，2，2，2，.....）是一个 ComboSum 序列，但不是一个能产生除数的序列 t.

我不知道每个 ComboSum 序列是否在每个层级都是 binomid。

4.3 多项式序列

哪些多项式满足我们对整数序列提出的各种条件?

如果对每个 $n = 1$、2、3、.....，都有 $f(n) \in \mathbb{Z}$，则称多项式 $f \in \mathbb{C}[x]$ 为整值多项式。

24 命题。设 f 是一个次数为 d 的整值多项式。如果对于无穷多个 $n \in \mathbb{Z}^+$，$f(n)$ 可整除 $f(2n)$，那么对于某个 $b \in \mathbb{Z}$，$f(x)$ 可整除 bx^d。

此处省略证明。这个结果确定了所有可整除的多项式序列。确定哪些多项式是 binomid 则更困难。

回顾一下，每个帕斯卡列多项式

$$C_m(x) = \binom{x+m-1}{m}$$

取整数值，次数为 m，且 $C_m(1) = 1$。由定理 15，C_m 是 binomid。

作为更多例子，请注意多项式

$$H_m(x) = \binom{mx}{m}$$

取整数值，次数为 m，且 $H_m(1) = 1$。检查一下 $\langle n\rangle!_{H_m} = (mn)!\ (m!)^n$，因此：$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{H_m} = \binom{mn}{mk}$。由于二项式系数是整数，$H_m$ 是 binomid。

25 定理。设 f 是一个 binomid 多项式数列，且 $f(1) = 1$。若 $\deg(f) \le 2$，则 f 是以下之一：1，x，$\binom{x+1}{2}$，x^2，$\binom{2x}{2}$.

证明涉及许多细节，将另行发表。列出所有三次 binomid 多项式似乎困难得多。

4.4 线性递推

设 f 是满足二阶线性递推的整数序列 :

$$f(n+2) = P\cdot f(n+1) - Q\cdot f(n) \quad \text{for every } n \ge 1, \tag{d}$$

其中 P、$Q \in \mathbb{Z}$。设关联多项式为：

$$p(x) = x^2 - Px + Q = (x-\alpha)(x-\beta), \quad \text{for } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

若 $f(0) = 0$，则 f 是卢卡斯数列 $U_{P\text{的常数倍},\ Q}$ 根据引理 16，并且 f 具有上述大多数性质：它是整除数列、最大公约数序列、因子乘积、ComboSum，并且在每个层级上都是 binomid。

If $f(0) \neq 0$, can f still satisfy some of those properties?

若 $Q = 0$，则 f 满足一阶递推：$f(n+1) = Pf(n)$，其中 $n \ge 2$。于是 $f(n)$ 具有 $a\cdot P^{n-1}$ 的形式（其中 $n \ge 2$），不难确定 f 具备这些性质中的哪些。以下假设 $Q \neq 0$。

对于满足线性递推（任意阶）的序列 f，Kimberling [16]证明了，若 f 是满足 $f(0) \neq 0$ 的最大公约数序列，则 f 必定是周期的。二阶的情形下，所有周期最大公约数序列都列于 [15]。下一个结果所需的假设要弱得多。

26 命题。假设 f 满足上文的线性递推 (d)，且 $Q\cdot f(0) \neq 0$。如果 f 可整除，那么 α/β 是单位根。

证明概要。 如果一个整除数列 f 满足线性递推，Hall [13] 指出，任意 $f(n)$ 的每个素因子也整除 $Q \cdot f(0)$。（事实上，对于二阶情形： $f(n) \mid Q^n \cdot f$对于每个 n，都有 (0)。）那么，所有 $f(n$组成的集合只涉及有限个不同的素因子。

Ward [27] 证明：如果 f 是非退化的（即 α/β 不是单位根），那么 $f(n)$ 的取值涉及无穷多个素数。由此证明完毕。 □

这个命题的一个版本适用于所有线性递归数列，而不仅限于二阶数列。证明用到了 [19], ，在其中 Laxton 推广了 Ward 定理。

命题 26 可用于列出所有满足二阶递推关系的整除数列。除了卢卡斯数列和指数数列之外，还有一些周期情形，周期为 1、2、3、4 或 6。

A. Granville [12]对整除数列进行了更深入的研究 h.

总之，在所有满足递推关系 (d) 的数列 f 中，我们可以列出所有具有最大公约数性质、因子乘积性质或 ComboSum 性质的数列（因为这些性质都蕴含整除性）。对于 binomid 数列，情况则更为复杂。

27 开放问题。

(1) 哪些满足递推关系 (d) 的数列 f 是 binomid? 如果这样的 f 是 binomid（或在每个层级上都是 binomid），那么 f 一定是整除数列吗?

(2) 如果允许阶数为 > 2 的线性递推数列呢?

对于 (2)，注意数列 $T(n) = \binom{n}{2}$ 是 binomid，且 T 满足一个阶数为 3 的线性递推，其多项式为 $p(x) = (x-1)^3$。然而， T 不可整除，在第 2 级也不是 binomid。

致谢。谨向 Jim Fowler、Paul Pollack、Zev Rosen- garten 以及匿名审稿人致谢，感谢他们提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1]G. L. Alexanderson 和 L. F. Klosinski, 《高斯二项式系数的斐波那契类比》, 《斐波那契季刊》12 (2) (1974) 129-132。[2] C. Ballot, 《与卢卡斯数列相关的沃尔斯滕霍尔姆同余与广义二项式系数》, 《整数数列杂志》18 (2015), 文章 15.5.4。[3] B. A. Bondarenko, 《广义帕斯卡三角形与金字塔》（俄文）, FAN, 塔什干, 1990, ISBN 5-648-00738-8。英文译本由斐波那契协会出版, 圣克拉拉大学, 圣克拉拉, 加利福尼亚州, 1993。[4] R. D. Carmichael, 《关于算术形式的数值因子》 $\alpha^n \pm \beta^n$。《数学年刊》15 (1913) 30-70。[5]J. Cigler, 《帕斯卡三角形、Hoggatt 矩阵及类似构造》, (2021), 发布于 https://arxiv.org/abs/2103.01652 , 检索于2022年12月。[6] M. Dziemia´nczuk 和 W. Bajguz, 《关于最大公因数态数列》, (2008), 《IeJNART》: 第 (3) 卷, 2009年9月: 33-37。发布于 http://arxiv.org/abs/0802.1303 , 检索于2019年10月。[7] M. Dziemia´nczuk, 《以长方体铺砌为基础对卢卡斯二项式系数作组合解释》, 《组合数学与组合计算》88 (2014) 225-235。[8] D.C. Fielder 和 C. O, Alford, 《关于 Hoggatt 猜想及其在 Hoggatt 和与 Hoggatt 三角形上的推广》, 《斐波那契季刊》27 (1988) 160-168。[9]C. F. Gauss, 《若干特殊级数的求和》, 《哥廷根皇家科学学会新论丛》1 (1808年), 147–186。重印于《高斯全集》2 (1863), 9–45。（特别是第16–17页）[10]I. Gessel 和 G. Viennot, 《二项式行列式、路径与钩长公式》, 《数学进展》58(3) (1985) 300-321。[11] H. W. Gould, 《括号函数与 Fonten´e-Ward 广义二项式系数及其在斐波那契二项式系数中的应用》, 《斐波那契季刊》7 (1969) 23–40, 55。[12] A. Granville, 《线性除法数列的分类》, https://arxiv.org/abs/2206.11823 检索于2022年7月。[13] M. Hall, 《三阶整除数列》, 《美国数学杂志》58 (1936年) 577-584。

[14] V. E. Hoggatt Jr., 《斐波那契数与广义二项式系数》, 《斐波那契季刊》5, 第4期（1967年）383–400.[15] P. Horak 和 L. Skula, 《二阶强整除数列的刻画》, 《斐波那契季刊》23（1985年）126-132.[16] C. Kimberling, 《具有非零初始项的强整除序列》, 《斐波那契季刊》16（1978年）541-544.[17] C. Kimberling, 《强整除序列与若干猜想》, 《斐波那契季刊》17（1979年）13-17.[18] D. E. Knuth 和 H. S. Wilf, 《整除广义二项式系数的素数幂》, 《纯粹与应用数学杂志》396（1989年）212–219.[19] R. R. Laxton, 《关于 M. Ward 的一个问题》, 《斐波那契季刊》12（1974年）41-44.[20] N. A. Loehr 和 C. D. Savage, 《通过 ℓ-项式推广二项式系数的组合学》, 《整数》10（2010年）531-558. https://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/k45/k45.pdf[21] ´E. Lucas, 《周期函数论》, 《美国数学杂志》1（1878年）184-240 和 289-321。斐波那契二项式见§9[22] 在线整数数列百科全书。 https://oeis.org/[23] E. Netto, 《组合学教科书》, 莱比锡, B. G. Teubner, 1901年。[24] M. Ward, 《关于整除数列的注记》, 《美国数学会通报》42（1936年）843-845.[25] M. Ward, 《数列演算》, 《美国数学杂志》58（1936年）255-266.[26] M. Ward, 《关于整除数列的一则注记》, 《美国数学会通报》45（1939年）334-336.[27] M. Ward, 《二阶递推数列的素因子》, 《杜克数学杂志》21（1954年）607-614。