投稿至《统计年刊》

arXiv:2302.02247v1 [math.ST] 4 Feb 2023

# 函数值空间过程的谱密度估计

BY RAFAIL KARTSIOUKAS[1], STILIAN STOEV[2,*] AND TAILEN HSING[2,†]

[1]rkarts@umich.edu

[2*]sstoev@umich.edu; [†]thsing@umich.edu

谱密度函数描述了定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的平稳随机过程的二阶性质。本文研究取值于可分希尔伯特空间的连续时间随机过程的谱密度的非参数估计。我们的估计量基于核平滑，可应用于多种空间抽样方案，包括数据在不规则空间位置观测的情形。因此，它可直接应用于空间统计学，因为不规则抽样数据在该领域中自然出现。在混合域渐近设定下，我们在一般条件下推导了估计量的偏差和方差的速率。当数据在规则网格上观测时，估计量的最优速率与协方差函数按幂律衰减这一函数类的极小极大速率相匹配。此外，我们还在一般条件下证明了高斯希尔伯特空间值过程的谱密度估计量具有渐近正态性。最后，着眼于实际应用，我们将渐近结果具体化到再生核希尔伯特空间中离散抽样的函数型数据情形。

1. 引言。 从历史上看，对电磁波或声波等信号的研究，自然促使物理学家开始探究谱密度。当前关于谱密度推断问题的文献中，已有大量成熟的估计量和算法（例如，参见 Hannan，1970年； Brillinger，2001年； Brockwell 和 Davis，2006；Percival 和 Walden，2020 年，以及其中的参考文献）。最经典的方法基于周期图（Schuster，1898），它是当今大多数已知方法的核心。不过，其他方法也得到了广泛研究，例如对经验协方差进行求逆（例如，参见 Robinson，1983年）以及小波方法（Percival 和 Walden，2006；Bardet 和 Bertrand，2010年）。

传统的谱密度估计统计研究考虑的是标量值过程。然而，现代科学应用涉及高维甚至函数型数据，这些数据通常以空间和/或时间为索引。近年来，人们对广义上的函数型时间序列日益关注，其中数据是在时刻 1、2、...、$T$观测到的；参见 Hörmann 和 Kokoszka（2012）、Panaretos 和 Tavakoli（2013）、Horváth、Kokoszka 和 Rice（2014）、Li、Robinson 和 Shang（2020）、Zhu 和 Politis（2020）等。尤其是，Panaretos 和 Tavakoli（2013）以及 Zhu 和 Politis（2020）都研究了函数型时间序列的谱密度推断。Panaretos 和 Tavakoli（2013）考察了平滑周期图估计量，并为取值于 $L^2[0,1]$的函数型数据引入了周期图核的概念。Zhu 和 Politis（2020）考察了同一种估计量，但在进行非参数平滑时，重点关注一种称为平顶核的特定核。

*MSC* 2010年学科分类：主要分类 62M10；次要分类 62M15、62R10、60G10。
*Keyw*术语和短语：函数型数据、空间过程、谱密度、极小极大速率、中心极限定理。

本文研究取值于某个希尔伯特空间中的连续时间平稳过程的谱密度非参数估计 $X = \{X(t)\ t \in \mathbb{R}^d\}$。关于 $\mathbb{H}$以及二阶平稳性的定义，将在第2 节作进一步说明。本文的创新之处之一在于考察在不规则空间位置 $\mathbb{H}$ 采样的函数型数据 $X(t)$，而不是在规则网格点上采样，例如 $t_1$，...，$t_n \in \mathbb{R}^d$，这与函数型时间序列中的情形相同$t = 1$，2，.....。一般而言，空间数据并非网格数据。一个绝佳的例子是 Argo 数据集，它近来已成为海洋学和气候研究的重要资源（参见Roemmich、Gould 和 Gilson，2012），并推动了空间统计学新方法的发展（例如，参见Kuusela 和 Stein，2018；Yarger,Stoev and Hsing，2022）。

对于在不规则位置观测到的空间数据，基于周期图的方法难以直接推广。本文考虑一种所谓的滞后窗估计量（参见 Brockwelland Davis，2006；Zhu and Politis，2020年），该估计量基于协方差估计，能够适用于相当一般的观测方案。我们将通过渐近理论评估该估计量的性能。为此，我们采用所谓的混合域渐近框架，即随着观测值数量增加，采样位置变得越来越密集，采样区域也不断扩大；例如，参见 Hall and Patil （1994）；Fazekasand Kukush （2000）；Matsuda and Yajima（2009）；Chang,Huang and Ing （2017）；Maitra and Bhattacharya （2020年）。我们将在相当一般的混合域设定下推导该估计量均方误差的速率界。不过，当数据是在规则网格上观测到的，且假设协方差模型具有特定形式时，便可精确计算速率界，从而为评估该估计量的最优性铺平道路。特别地，我们证明，若协方差函数的衰减受幂律界定，则基于网格数据的估计量具有速率极小极大性。

下面我们概述各个章节的内容。在第2节，我们介绍取值于复希尔伯特空间 $\mathbb{H}$的过程的二阶平稳性的一般概念。尽管多维空间数据十分常见，但与一维情形下的对应概念相比，人们对这一概念的理解仍远远不足。特别是，我们将解释为何必须将 $\mathbb{H}$ 的标量域取为复数，才能对该过程进行谱分析这一微妙问题。我们还将回顾 Bochner 定理，它为谱密度的定义提供了便利。第3 节介绍关键假设，并定义本文重点研究的滞后窗估计量。在第4节，我们在一般条件下建立偏差和方差衰减速率的上界，进而得到谱密度估计量均方误差的上界。在第5 节，对于网格数据情形，我们进一步精确刻画这些速率；其中网格大小要么保持固定，要么随样本量增加而趋于零，并且我们重点研究一类由幂律支配的协方差函数。通过与这些经过仔细计算的速率比较，我们在第6节证明，对于这些模型，我们的谱密度估计量达到了极小极大速率最优。在第7节，我们在高斯性假设下建立估计量的渐近分布。证明基于一个新颖的 Isserlis 型公式，该公式用于计算估计量的所有矩。在第8节，我们在再生核希尔伯特空间（RKHS）框架下探讨不完整函数型数据问题。最后，第9 节简要总结 Panaretos 和 Tavakoli (2013年) 和 Zhu and Politis (2020年)中的结果，并与本文结果进行了一些比较。

在可行的情况下，我们会在陈述结果后立即给出证明概要。不过，所有详细证明均收录于补充材料中。

2. 希尔伯特空间中平稳过程的协方差与谱密度。在本文中，设 $\mathbb{H}$ 是定义在复数域上的可分希尔伯特空间$\mathbb{C}$。在 $\mathbb{H}$ 函数型数据应用中， $L^2$ 常见的例子包括函数空间和再生核希尔伯特空间（RKHS）。然而，除第8节外，我们不对 $\mathbb{H}$作任何额外假设。

$\mathbb{H}$ 的内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$。在少数情况下，为了表述清晰，我们将它们记为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{H}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$。本节的主要目的是回顾随机过程 $X=\{X(t)\ t\in\mathbb{R}^d\}$ 取值于 $\mathbb{H}$时，关于其谱分析的一些基本结果。

**2.1.** 二阶平稳。我们首先讨论取值于复希尔伯特空间的过程的二阶平稳性或协方差平稳性概念。首先考虑一个零均值高斯过程 $X$，其具有 $\mathbb{H}=\mathbb{C}$。令 $\Re(X(t))$ 和 $\Im(X(t))$ 分别表示 $X(t)$的实部和虚部。回顾一下，$X$ 严格平稳，当且仅当二维实高斯过程

$$Y(t)=(X_R(t),X_I(t))^T:=(\Re(X(t)),\Im(X(t)))^\top\in\mathbb{R}^2,$$

是二阶平稳的，即，协方差函数 $C_Y(t,\ s):=\mathbb{E}\left[Y(t)Y(s)^\top\right]$ 是 $t-s$ 的函数。令

$$C(t,s)=\mathbb{E}[X(t)\overline{X}(s)]\quad\text{and}\quad\check{C}(t,s)=\mathbb{E}[X(t)X(s)].$$

由此可得

$$C(t,s)=\mathbb{E}[X_R(t)X_R(s)]+\mathbb{E}[X_I(t)X_I(s)]-\mathrm{i}\big(\mathbb{E}[X_R(t)X_I(s)]-\mathbb{E}[X_I(t)X_R(s)]\big),$$
$$\check{C}(t,s)=\mathbb{E}[X_R(t)X_R(s)]-\mathbb{E}[X_I(t)X_I(s)]+\mathrm{i}\big(\mathbb{E}[X_R(t)X_I(s)]+\mathbb{E}[X_I(t)X_R(s)]\big).$$

注意到，$\{C(t,s)$、$\check{}C(t,s)$ $t$和 $s\in\mathbb{R}^d\}$ 包含的信息与 $\{C_Y(t,s)$、$t$和 $s\in\mathbb{R}^d\}$相同。特别地，当且仅当 $C(t,s)$和$\check{}C(t,s)$均为 $t-s$的函数时，$Y$才是二阶平稳的。函数 $C(t,s)$和$\check{}C(t,s)$通常分别称为协方差函数和伪协方差函数；当且仅当 $X$ 为实值时，两者才相等。超越高斯情形，我们将此作为具有有限二阶矩的一般复值过程 $X$ 的二阶平稳性定义；对 $X$ 协方差的推断可以基于 $C_Y$，也可以结合 $C$ 和 $C$进行。虽然平稳协方差 $C$ 是正定的，为谱域推断提供了依据，但 $C$并非如此。因此，除非 $X$ 本身为实值，否则必须针对实值过程 $Y$ 对$X$ 进行谱推断；若 $X$ 为实值，则只需关注 $C$。上述讨论可以直接推广到有限维情形 $\mathbb{H}=\mathbb{C}^p$，其中任意有限的 $p$所对应的外积为$x\overline{y}^\top$、$x$、$y\in\mathbb{C}^p$（参见 Hannan，1970年；Brillinger，2001年；Tsay，2013年）。

如果 $\mathbb{H}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的无限维希尔伯特空间，那么 $x$，$y\in\mathbb{H}$ 的交叉乘积（或外积）定义为以下线性算子：

$$[x\otimes y](z)=x\cdot\langle z,y\rangle,\quad z\in\mathbb{H},\tag{2.1}$$

并且，只要对所有 $t$，$\mathbb{E}[\|X(t)\|^2]<\infty$，我们就可以将 $X$ 的协方差算子定义为：

$$C(t,s):=\mathbb{E}[X(t)\otimes X(s)].\tag{2.2}$$

注意，$C(t,\ s)$ 取值于迹类算子空间 $\mathbb{T}$，并且在巴拿赫空间 $(\mathbb{T},\ \|\cdot\|_{\mathrm{tr}})$中按 Bochner 意义良定义。关于 $\mathbb{T}$ 的更多信息将在下文第2.2节给出。然而，对于有限维情形的平稳性讨论，尤其是伪协方差的概念，需要作出修改，因为不存在直接对应的“复共轭”概念。按照Shen、Stoev 和 Hsing (2022年)，我们固定 $\mathbb{H}$ 的一个完备正交归一系统（完全正交规范系，CONS）$\{e_j\}$，并称其为实 CONS。于是，对于每个满足$x=\sum_j\langle x,\ e_j\rangle e_j$ 的 $x\in\mathbb{H}$，定义复共轭$\mathrm{conj}(x)\equiv\overline{x}$如下：

$$\overline{x}:=\sum_j\overline{\langle x,e_j\rangle}e_j.$$

因此，$\mathrm{conj}:\mathbb{H}\mapsto\mathbb{H}$ 是一个反线性算子，即：

$$\mathrm{conj}(\alpha x+\beta y)=\overline{\alpha}\mathrm{conj}(x)+\overline{\beta}\mathrm{conj}(y),\ x,y\in\mathbb{H},\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

此外，对于 $x\in\mathbb{H}$，定义其实部和虚部：

$$\Re(x):=\frac{\overline{x}+x}{2},\ \Im(x):=\frac{x-\overline{x}}{2\mathbb{I}}.$$

这一构造使我们能够将复希尔伯特空间 $\mathbb{H}$ 视为

$$\mathbb{H}=\mathbb{H}_{\mathbb{R}}+\mathbb{I}\mathbb{H}_{\mathbb{R}},\tag{2.3}$$

其中 $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}:=\{x\in\mathbb{H}:\ \Im(x)=0\}$ 是 $\mathbb{H}$ 的实元素构成的实希尔伯特空间（例如参见Cerovecki 和 Hörmann，2017）。因此，$x$ 若满足 $x\in\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$，则称其为实的。

对于二阶过程 $\{X(t)\}$，定义其伪协方差算子为

$$\check{C}(t,s):=\mathbb{E}[X(t)\otimes\overline{X}(s)].\tag{2.4}$$

T现在可以将 $\mathbb{H}$ 中过程的二阶平稳性定义表述如下 s.

定义 2.1。取值于$\mathbb{H}$的零均值随机过程 $X=\{X(t)\ \ t\in\mathbb{R}^d\}$，若满足 $\mathbb{E}[\|X(t)\|^2]<\infty$，则称其为 $L^2$-阶过程或二阶过程。若过程 $X$ 的 $C(t,s)$ 和 $\check{C}(t,s)$ 均仅依赖于时滞 $t-s$，则称其为二阶平稳过程或协方差平稳过程。此时，记 $C(h):=C(t+h,t)$ 和 $\check{C}(h):=\check{C}(t+h,t)$，它们分别称为平稳协方差算子和平稳伪协方差算子。

需要注意的是，尽管$\check{C}(t,s)$的定义取决于指定的实基，但$\check{C}(t,s)$是否为时滞的函数与所选基无关；利用换基公式即可看出这一点。

我们以以下两点说明结束本节。

注2.1。与一维情形一样，也可以等价地根据取值于直积希尔伯特空间 $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}\times\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ over $\mathbb{R}$ 中的实值过程 $Y(t):=(\Re(X(t)),\Im(X(t)))$ 来定义平稳性。由此可知，$X$ 是二阶平稳的，当且仅当 $Y$ 是二阶平稳的。在本文其余大部分内容中，为简便起见，我们假设过程 $X$ 是实的（基于某个完全正交规范系），即其取值于 $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}\subset\mathbb{H}$ 中（参见（2.3））；在这种情况下，$C(h)=\check{C}(h)$。这一简化并不会降低一般性，因为所有结果都适用于 $Y$。有两个例外，即第2.2节和第7节；在这两节中，我们通过考虑复值$X$来给出更一般的结果。

注 2.2. 鉴于上一条注释，细心的读者或许会好奇，我们一开始为何选择采用复希尔伯特空间这一框架。一个重要原因是，过程 $X$（无论实值还是复值）在 $\mathbb{H}$ 中的谱密度通常取值于 $\mathbb{T}_+$，即定义在复希尔伯特空间$\mathbb{H}$上的正迹类算子空间。为说明这一点，请看下面这个简单的例子。设 $\{Z(t)\ \ t\in\mathbb{R}\}$ 是一个实值、标量值的零均值高斯过程，其自协方差为 $\gamma(t)=\mathbb{E}[Z(t)Z(0)]$。令 $a>0$，并定义 $X_a(t):=(Z(t)\ \ Z(t+a))^\top$. 那么，$X_a=\{X_a(t)\ \ t\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的平稳过程，其自协方差为

$$C_a(t):=\mathbb{E}[X_a(t)X_a(0)^\top]=\begin{pmatrix}\gamma(t) & \gamma(t-a)\\ \gamma(t+a) & \gamma(t)\end{pmatrix}.$$

这表明，只要 $\gamma(t+a)\neq\gamma(t-a)$对所有 $t$都成立，即自协方差在 $(-a/2,a/2)$上不为零，那么就有 $C_a(t)\neq C_a(-t)\equiv C_a(t)^\top$，也就是说，过程 $X_a$ 不是时间可逆的。下文的注释 *2.3* 由此表明，谱密度不可能是实值的。这个简单的例子说明，若 $d\neq1$，复谱密度是常态而非例外。

2.2. Bochner 定理。 本小节讨论二阶平稳过程的谱密度概念 $X$ 在 $\mathbb{H}$中的情形。首先，我们简要回顾迹类算子的一些基本事实。关于线性算子的详细内容，请参阅标准教材（例如 Simon，2015年）。记 $\mathbb{T}$ 为 $\mathbb{H}$上迹类算子的集合，即迹范数有限的线性算子 $\mathscr{T}: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$:

$$\|\mathscr{T}\|_{\mathrm{tr}} := \sum_{j=1}^{\infty} \langle (\mathscr{T}^*\mathscr{T})^{1/2} e_j, e_j \rangle < \infty, \tag{2.5}$$

其中， $\{e_j\}$ 是 $\mathbb{H}$上的任意完全正交规范系， $\mathscr{T}^*$ 表示 $\mathscr{T}$的伴随算子，即定义为 $\langle \mathscr{T}^* f, g \rangle = \langle f, \mathscr{T} g \rangle$， $f, g \in \mathbb{H}$。迹范数不依赖于完全正交规范系的选择，而配备迹范数的空间 $\mathbb{T}$ 是一个巴拿赫空间。根据外积（2.1）和迹范数（2.5）的定义，我们有 $\|X(t) \otimes X(s)\|_{\mathrm{tr}} = \|X(t)\|\|X(s)\|$。 $X$ 是二阶的这一事实进而意味着

$$\mathbb{E}[\|X(t) \otimes X(s)\|_{\mathrm{tr}}] \le \sqrt{\mathbb{E}[\|X(t)\|^2]\mathbb{E}[\|X(s)\|^2]} < \infty.$$

因此，协方差算子 $C(t, s)$ 在（2.2）中在 $\mathbb{T}$ 意义下定义良好；例如，参见Shen、Stoev和Hsing (2022年)

回忆一下，若 $\mathscr{T} = \mathscr{T}^*$，则 $\mathscr{T}$是自伴的。此外，若 $\mathscr{T}$是自伴的且 $\langle f, \mathscr{T} f \rangle \ge 0$对所有 $f \in \mathbb{H}$ 均成立，则称 $\mathscr{T}$是正定的（或简称为正的），记作 $\mathscr{T} \ge 0$。正的迹类算子所构成的函数类记为 $\mathbb{T}_+$。

经典的 Bochner 定理（参见 Bochner，1948年；Khintchine，1934年）刻画了正定函数，为构建平稳过程的实用模型提供了基础工具。下面我们将陈述这一经典结果在无限维情形下的推广。为此，我们需要了解如何对取值于 $\mathbb{T}_+$ 的测度进行积分，现简要介绍如下。令 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上博雷尔集的 $\sigma$ 域。若 $\mu: \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{T}_+$ 是定义在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的 $\mathbb{T}_+$ 值测度，且 $\mu$ 是 $\sigma$ 可加的，则称之为 $\mathbb{T}_+$ 值测度。注意，由此可知， $\mu(\emptyset) = 0$，并且 $\mu$ 是有限的，具体而言， $0 \le \mu(B) \le \mu(\mathbb{R}^d) \in \mathbb{T}_+$，其中 $\mathscr{T}_1$、 $\mathscr{T}_2 \in \mathbb{T}_+$、 $\mathscr{T}_1 \le \mathscr{T}_2$ 表示 $\mathscr{T}_2 - \mathscr{T}_1 \in \mathbb{T}_+$。对于此类 $\mu$，可以按照勒贝格积分的思路，定义在 $\mathbb{R}^d$ 上取 $\mathbb{C}$ 值的可测函数的积分（详情参见 Shen、Stoev 和 Hsing，2022年）。

定理2.1. 设 $X$ 是一个取值于 $\mathbb{H}$的二阶平稳过程，且 $C(h)$ $h \in \mathbb{R}^d$是其 $\mathbb{T}$值平稳协方差函数，定义见定义2.1。假设 $C$ 在0 处关于迹范数连续。则存在唯一的 $\mathbb{T}_+$值测度 $\nu$，使得

$$C(h) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathrm{i}h^\top \theta} \nu(d\theta), \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

特别地，我们有 $\|\nu(\mathbb{R}^d)\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{trace}(\nu(\mathbb{R}^d)) < \infty$.

此外，若 $\int_{h \in \mathbb{R}^d} \|C(h)\|_{\mathrm{tr}} dh < \infty$， 则测度 $\nu$ 相对于勒贝格测度具有如下密度:

$$f(\theta) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}h^\top \theta} C(h) dh, \quad \theta \in \mathbb{R}^d, \tag{2.6}$$

其中，最后一个积分按 Bochner 意义理解。

式in (2.6)中的密度函数被称为该平稳过程的谱密度。定理2.1 的详细证明见 Shen、Stoev 和 Hsing (2022年)，其中阐明了可分性和复标量域的作用。

以下是对注释2.2的补充说明。

注释 2.3。 定理 2.1 适用于 $X$ 中一般的二阶平稳过程。下面考察当过程为实值时（相对于某个固定的完全正交规范系定义），其谱密度的一个有趣性质。为此，定义算子 $\mathscr{A}$: $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 的共轭 $\overline{\mathscr{A}}$ 为 $\overline{\mathscr{A}}$: $x\mapsto \mathscr{A}(\overline{x})$ $x\in\mathbb{H}$；相应地，定义

$$\Re(\mathscr{A}) := \frac{\overline{\mathscr{A}}+\mathscr{A}}{2},\ \Im(\mathscr{A}) := \frac{\mathscr{A}-\overline{\mathscr{A}}}{2_{\mathbb{I}}}.$$

因此，当 $\Im(\mathscr{A})=0$ 时，$\mathscr{A}$ 称为实的。现在假设 $X$ 是实的（参见注释（2.1））。由一个简单事实可知，若 $x$ 和 $y$ 都是实的，则 $x\otimes y$ 也是实的。因此有 $C(\overline{h})=\overline{C(h)}$。由（2.6）可得，时间反转过程 $Y=\{X(-t)\ \ t\in\mathbb{R}^d\}$ 的谱密度为

$$f_Y(\theta)=\overline{f_X(\theta)},\quad \theta\in\mathbb{R}^d.$$

谱密度的唯一性意味着，$X$ 和 $Y$ 具有相同的自协方差，当且仅当 $f_Y(\theta)=f_X(\theta)$ $=f_X(\theta)$，也就是说，$f_X(\theta)$ 对所有 $\theta\in\mathbb{R}^d$ 而言都是实算子。这是一种特殊性质，仅当 $\mathbb{H}$ 为一维时才自动成立。更多讨论请参见Shen、Stoev 和 Hsing (2022年)。

3. 基于不规则采样数据的谱密度估计。我们的推断问题聚焦于一个二阶实值过程 $X=\{X(t)\ \ t\in\mathbb{R}^d\}$，其取值于 $\mathbb{H}$。按照定义2.1，我们定义平稳协方差算子 $C$，并假设以下条件成立。

假设 C. 令 $C=\{C(h)\ \ h\in\mathbb{R}^d\}$ 为取值于 $\mathbb{H}$ 的二阶平稳实值过程 $X=\{X(t)$ $t\in\mathbb{R}^d\}$ 的 $\mathbb{T}$-值平稳协方差算子。假设

(a) $\int_{h\in\mathbb{R}^d}\|C(h)\|_{\mathrm{tr}}dh<\infty$, and

(b) $C(h)$ 满足以下意义下的 $L^1$-$\gamma$-Hölder 条件:

$$\int_{x\in\mathbb{R}^d}\Big(\sup_{y:\,\|x-y\|\le\delta}\|C(y)-C(x)\|_{\mathrm{tr}}\Big)dx\le |||C|||_\gamma\cdot\delta^\gamma, \tag{3.1}$$

对某个 $0<\gamma\le 1$ 以及某个（因而也对所有）$\delta>0$，其中 $|||C|||_\gamma<\infty$ 为固定常数。

假设 C 中的性质 (a) 保证谱密度 $f$ 由式（2.6）给出。性质 (b) 是计算我们基于离散观测数据的估计量的偏差所必需的。如果 $\gamma=1$ 且 $C$ 具有可积且平滑变化的导数，则条件 (b) 成立。

接下来介绍我们的抽样框架。如第1节所述，我们采用混合域渐近框架，这意味着随着样本量增加，数据的定义域和密度都会增加。假设过程 $\{X(t)\ \ t\in\mathbb{R}^d\}$ 是在不同的位置 $t_{n,i}, i=1,\dots,n$ 观测到的。令 $\mathbb{T}_n:=\{t_{n,i}\}_{i=1}^n$，并令 $T_n$ 表示 $\mathbb{T}_n$ 的闭凸包。我们将 $T_n$ 称为采样区域，其中包含了可能观测到 $X(t)$ 的点。不过，正如我们在证明中所见，其他相邻区域也可用于 $T_n$。为便于讨论，我们将 $T_n$ 视为由互不相交的单元组成的镶嵌，这些单元 $V(t_{n,i})$ 以 $t_{n,i}$ 为“中心”：

$$T_n=\bigcup_{i=1}^n V(t_{n,i}),\quad \text{where}\quad t_{n,i}\in V(t_{n,i})\quad\text{and}\quad |V(t_{n,i})\cap V(t_{n,j})|=0,\ i\ne j.$$

此处及下文中，$|A|$ 表示可测集 $A \subset \mathbb{R}^d$的勒贝格测度。记作$\mathbb{V} = \{V(t_{n,i}) \ \ i = 1, \ldots, n\}$。沃罗诺伊镶嵌 Voronoi (1908) 是这类镶嵌的一个自然例子，也可以高效地构造出来 Yan 等人 (2013年)。虽然我们的结果适用于广泛的镶嵌函数类，但为明确起见，后文将采用沃罗诺伊镶嵌。

将沃罗诺伊镶嵌的直径定义为

$$\delta_n := \mathrm{diam}_{T_n}(\{t_{n,i}\}) = \max_{i=1,\ldots,n} \sup_{t \in V(t_{n,i})} \|t - t_{n,i}\|_2, \tag{3.2}$$

其中，$\|\cdot\|_2$ 表示 $\mathbb{R}^d$中的欧几里得范数。参数 $\delta_n$ 可以看作镶嵌单元最大尺寸的度量，也可以等价地写成

$$\delta_n = \sup_{t \in T_n} \min_{i=1,\ldots,n} \|t - t_{n,i}\|_2.$$

下文中，我们将始终假设以下较为一般的抽样框架。

假设 S。

(a) 序列 $\delta_n$ （定义于3.2）随 $n \to \infty$. 趋于零。此外，$|T_n| \to \infty$ 当$n \to \infty$时。

(b) 样本设计满足

$$\frac{T_n}{|T_n|^{1/d}} \to T, \text{ as } n \to \infty, \tag{3.3}$$

对于某个固定的内部非空有界凸集 $T$，该结论依 Hausdorff度量依概率成立。

上述条件 (a) 描述了前文提到的混合域渐近框架。条件 (3.3) 中的 (b) 实质上对$\mathbb{T}_n$的边界点施加了正则性条件；例如，若 $\mathbb{T}_n = \{1, 2, \ldots, n\}^d$，则 $T = [0, 1]^d$。

我们提出的估计量的定义涉及一个核函数，该函数满足以下标准条件。

假设 K. 核 $K$ 是从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的连续函数，满足

(a) $K$ 的支集 $S_K := \{t \in \mathbb{R}^d \colon K(t) > 0\}$ 是一个包含 0 的有界集；(b) $\|K\|_\infty := \sup_{u \in S_K} K(u) = K(0) = 1$；(c) $K$ 在 0 的某个固定 $\epsilon > 0$ 邻域内可微，其中 $\epsilon$，且

$$\|\nabla K\|_\infty^{(\epsilon)} := \sup_{\|u\|_2 < \epsilon} \|\nabla K(u)\|_2 < \infty,$$

其中，$\nabla$ 表示梯度算子。

估计量。本文重点讨论以下谱密度 $f(\theta)$的非参数估计量：

$$\hat{f}_n(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{t \in \mathbb{T}_n} \sum_{s \in \mathbb{T}_n} e^{\mathbf{i}(t-s)^\top \theta} \frac{X(t) \otimes X(s)}{|T_n \cap (T_n - (t-s))|} \cdot K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right) \cdot |V(t)| \cdot |V(s)|, \tag{3.4}$$

其中， $\Delta_n > 0$ 是带宽参数，其作用是对彼此间隔不超过 $\Delta_n \cdot |S_K|$ 的观测值进行加权平均。要获得令人满意的估计结果， $\Delta_n$ 的选择取决于 $\delta_n$ 和 $|T_n|$.

(3.4) 中的估计量可应用于空间和时间上不规则采样的函数型数据这一一般情形，这在实际应用中经常会遇到（例如，参见 Yarger、Stoev 和 Hsing，2022）。在 $\mathbb{T}_n$ 为规则网格的特殊情形下（其中包括时间序列情形），对于任意 $t \in \mathbb{T}_n$，项 $V(t)$ 均为常数，因此 $|V(s)|$ 和 $|V(t)|$ˆ 可以从 $f_n$ 中的求和号内提出（参见第 5 节）。在这种情况下，(3.4) 中的估计量与时间序列分析中所谓的滞后窗估计量有关；参见 Robinson（1983）、Zhu and Politis（2020）以及下文第 9.1 节中的讨论。

为了更好地理解定义（3.4），考虑完整样本路径 $\{X（t） \ t \in T_n\}$ 均可获得的理想化情形。根据（2.6），自然可以使用估计量

$$g_n(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{t \in T_n} \int_{s \in T_n} e^{\mathrm{i}(t-s)^\top \theta} \frac{X(t) \otimes X(s)}{|T_n \cap (T_n - (t-s))|} K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right) dtds. \tag{3.5}$$

由于实际中无法获得完整的样本路径，因此必须考虑诸如ˆ $f_n(\theta)$这样的近似，它可视为定义 $g_n(\theta)$的积分的黎曼和。函数ˆ$g_n(\theta)$ 引出了 $f_n(\theta)$ 的定义，而且实际上也会出现在渐近理论的证明中。

我们以以下几点说明结束本节。

评注 3.1. 在我们的数据方案中，假设采用固定设计，观测点 $t_{n,i}$ 是非随机的。我们的结果可以很容易地加以修改，以涵盖观测点由独立于过程 $\{X(t)\}$生成的随机设计情形。此时，需要对 (3.4) 中的估计量定义稍作修改，以纳入样本设计的概率密度，而不是体积元（例如参见 *Matsudaand Yajima, 2009*）。

评注 3.2. 在 $|T_n \cap (T_n - (t-s))|$ 中的归一化 (3.4) 和 (3.5) 乍看之下可能显得不同寻常，而采用更简单的 $|T_n|$ 归一化似乎更自然。然而，事实证明，采用后一种归一化会导致在空间情形 $d \geq 2$中产生更高阶的偏差。对于时间序列中基于周期图的估计量，当数据是在规则格点上观测时，也会出现类似现象（*Guyon, 1982*）。

ˆR备注 3.3. 估计量 $f_n$ 的定义假设我们已完整观测到函数型数据 $X(t) \ t \in \mathbb{T}_n$。若 $\mathbb{H}$ 是无限维的，则函数型数据 $X(t)$ 永远无法被完整观测。在这种情况下，我们需要根据函数型数据实际观测到的部分，以某种方式近似 $X(t) \otimes X(s)$，这可能会影响估计量的性能。我们将在第 *8* 节中更详细地讨论这一点。

ˆ4. 渐近性质。我们首先研究第 3 节中定义的 $f_n(\theta)$，先推导其偏差和方差的渐近界。这将得出关于估计量的一致性和收敛速率的结果。尽管 $f(\theta)$ 和 $f_n(\theta)$ 是 $\mathbb{H}$ 上的迹类算子，但为了便于计算方差，使用希尔伯特–施密特（HS）范数更为自然。令 $\mathbb{X}$ 表示 $\mathbb{H}$ 上希尔伯特–施密特算子的函数类。线性算子 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathbb{X}$ 的希尔伯特–施密特内积定义为

$$\langle \mathscr{A}, \mathscr{B} \rangle_{\mathrm{HS}} = \operatorname{trace}(\mathscr{A}^* \mathscr{B})$$

以及 $\|\mathscr{A}\|_{\mathrm{HS}} := \sqrt{\|\mathscr{A}^* \mathscr{A}\|_{\mathrm{tr}}}$（例如，参见Simon，2015年）。

很容易得出以下偏差-方差分解

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\hat{f}_n(\theta)-f(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}^2 &= \mathbb{E}\left\|\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}^2+\left\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-f(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}^2 \\ &=: \mathrm{Var}\left(\hat{f}_n(\theta)\right)+\mathrm{Bias}\left(\hat{f}_n(\theta)\right)^2.\end{aligned} \tag{4.1}$$

ˆ4.1. 渐近偏差。 在本小节中，我们评估 $f_n(\theta)$ 在$n$较大时的偏差速率。我们先给出一个一般界，随后将对其作进一步阐释。与（4.1）一致，以下定理 4.1 中的界均以希尔伯特–施密特范数表述。不过，我们指出，若始终使用更强的迹范数，该结果仍然成立。

定理 4.1. 设假设 *C*、*K*和*S* 成立。选择 $\Delta_n\to\infty$ 使得

$$\Delta_n\cdot S_K\subset T_n-T_n \quad \textit{for all } n$$

其中 $A-B:=\{a-b:\ \ a\in A,\ \ b\in B\}$ 对于集合 $A$，$B\subset\mathbb{R}^d$。那么，对于任意有界集 $\Theta$

$$\sup_{\theta\in\Theta}\left\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-f(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}=\mathscr{O}\left(\delta_n^{\gamma}+B_1(\Delta_n)+B_2(\Delta_n)\right), \tag{4.2}$$

其中

$$\begin{aligned}B_1(\Delta_n)&:=\left\|\int_{h\in\Delta_n\cdot S_K}e^{\mathrm{i}h^\top\theta}C(h)\left(1-K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)\right)dh\right\|_{\mathrm{HS}},\\ B_2(\Delta_n)&:=\left\|\int_{h\notin\Delta_n\cdot S_K}e^{\mathrm{i}h^\top\theta}C(h)dh\right\|_{\mathrm{HS}}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

证明（概要）。定理4.1 的完整证明见第 S.1.1节。这里我们简要概述证明思路。设 $g_n(\theta)$ 由（3.5）定义。根据三角不等式,

$$\left\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-f(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}\le\left\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}g_n(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}+\left\|\mathbb{E}g_n(\theta)-f(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}.$$

这是i mmediate 可由表示式（2.6）和包含关系 $f$直接得到， $\Delta_n\cdot S_K\subset T_n-T_n$ th at

$$\|\mathbb{E}g_n(\theta)-f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}\le B_1(\Delta_n)+B_2(\Delta_n).$$

为了完成证明，需要证明

$$\left\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}g_n(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}=\mathscr{O}(\delta_n^{\gamma}). \tag{4.4}$$

为计算 $\left\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}g_n(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}$，令

$$h_n(t,s;\theta):=e^{\mathrm{i}(t-s)^\top\theta}\frac{X(t)\otimes X(s)}{|T_n\cap(T_n-(t-s))|}K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right),$$

并记

$$\begin{aligned}&g_n(\theta)-\hat{f}_n(\theta)\\ &=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{w\in\mathbb{T}_n}\sum_{v\in\mathbb{T}_n}\int_{t\in V(w)}\int_{s\in V(v)}\left(h_n(t,s;\theta)-h_n(w,v;\theta)\right)\mathbb{I}^{(t\in V(w),s\in V(v))}dtds.\end{aligned} \tag{4.5}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbb{E}g_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}\\&\leq\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{w\in\mathbb{T}_n}\sum_{v\in\mathbb{T}_n}\int_{t\in V(w)}\int_{s\in V(v)}\|\mathbb{E}h_n(t,s;\theta)-\mathbb{E}h_n(w,v;\theta)\|_{\mathrm{HS}}dtds.\end{aligned}$$

然后，利用关于 $K$ 和 $C$的正则性条件，通过常规但技术性的分析可知，最后一个求和项的阶为 $\mathscr{O}(\delta_n^{\gamma})$。由此得到（4.4），并完成（4.2）的证明。 □

有几点说明。

R备注4.1。定理4.1 给出了偏差的一般界。在该定理的假设下，偏差随 $n\to\infty$趋于零。我们简要讨论一下因不同原因产生的项 $\delta_n^{\gamma}$ 和 $B_1(\Delta_n)+B_2(\Delta_n)$ 。

1. 从上述证明概要可以看出，（$\Delta_n$）和($\Delta_n$) 这两项出现在（4.2）中，控制着基于理想化数据的理想化估计量 $g_n(\theta)$ 的偏差。 $B_1(\Delta_n)$ 和 $B_2(\Delta_n)$ 的一个更具体但较粗略的界如下：

$$\begin{aligned}B_1(\Delta_n)&\leq\int_{|h|\leq\epsilon\Delta_n}\|C(h)\|_{\mathrm{tr}}\left|1-K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)\right|dh+\int_{|h|>\epsilon\Delta_n}\|C(h)\|_{\mathrm{tr}}dh\\&\leq\|\nabla K\|_{\infty}^{(\epsilon)}\epsilon\int\|C(h)\|_{\mathrm{tr}}dh+\int_{|h|>\epsilon\Delta_n}\|C(h)\|_{\mathrm{tr}}dh.\end{aligned}\tag{4.6}$$

右端的第一项仅取决于核，而第二项对任意小的 $\epsilon<1$都支配 $B_2(\Delta)$ ，它取决于 $\|C(h)\|_{\mathrm{tr}}$的衰减速率。因此， $B_1(\Delta_n)+B_2(\Delta_n)$ 的速率有如下界：

$$\inf_{\epsilon}\left(\epsilon\vee\psi(\epsilon\Delta_n)\right)\quad where\quad\psi(u):=\int_{|h|>u}\|C(h)\|_{\mathrm{tr}}dh.$$

通过对$\psi(u)$ 在较大 $u$时的行为施加特定假设，可以得到更明确的界，如第 5节所示。

2. 根据 (4.4)，项 $\mathscr{O}(\delta_n^{\gamma})$ 控制由离散化引起的偏差；这种偏差源于在离散集合 $\mathbb{T}_n\subset T_n$上对过程进行采样。在时间序列等数据按规则网格采样的情形下，这一项将从偏差中消失（参见定理5.1）。

ˆ4.2. 渐近方差。鉴于 $f_n(\theta)$的形式，评估 $f_n$的方差需要对ˆ$X$ 施加“四阶矩”条件。

回顾随机变量的累积量定义：对于实值随机变量$Y_j$， $j=1$， ....., $k$，

$$\operatorname{cum}(Y_1,\ldots,Y_k):=\sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_q)}(-1)^{q-1}(q-1)!\prod_{l=1}^{q}\mathbb{E}\left(\prod_{j\in\nu_l}Y_j\right),\tag{4.7}$$

假设右端的所有期望都有定义，其中求和遍及 $\{1,\ldots,k\}$.的所有无序划分 $\nu$

现在，我们为零均值的复希尔伯特空间值随机变量 $Y_1$， $Y_2$， $Y_3$， $Y_4$ 定义四阶累积量的概念。

D定义4.1. 设 $Y_1$， $Y_2$， $Y_3$， $Y_4$ 取值于 $\mathbb{H}$。则四阶累积量定义为

$$\begin{aligned}\operatorname{cum}(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) := &\mathbb{E}\langle Y_1\otimes Y_2, Y_3\otimes Y_4\rangle_{\mathrm{HS}} - \langle \mathbb{E}(Y_1\otimes Y_2), \mathbb{E}(Y_3\otimes Y_4)\rangle_{\mathrm{HS}} \\ &- \mathbb{E}\langle Y_1, Y_3\rangle \cdot \mathbb{E}\langle Y_4, Y_2\rangle - \left\langle \mathbb{E}(Y_1\otimes \overline{Y_4}), \mathbb{E}(Y_3\otimes \overline{Y_2})\right\rangle_{\mathrm{HS}},\end{aligned}$$

只要该表达式有定义且有限。

注意，累积量$(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)$在以下条件下有定义且有限： $\mathbb{E}\|Y_i\|^4<\infty$对每个 $i$(参见命题 S.5.2)。容易验证，当 $k=4$时，如果 $\mathbb{H}=\mathbb{R}$，该定义就化为式（4.7）。由命题 S.5.2可立即得到一些性质。首先，

$$\langle Y_1\otimes Y_2, Y_3\otimes Y_4\rangle_{\mathrm{HS}} = \langle Y_1, Y_3\rangle\langle Y_4, Y_2\rangle, \tag{4.8}$$

因此，我们可以将四阶累积量表示为

$$\begin{aligned}\operatorname{cum}(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) = &\operatorname{Cov}(\langle Y_1, Y_3\rangle, \langle Y_2, Y_4\rangle) - \langle \mathbb{E}(Y_1\otimes Y_2), \mathbb{E}(Y_3\otimes Y_4)\rangle_{\mathrm{HS}} \\ &- \left\langle \mathbb{E}(Y_1\otimes \overline{Y_4}), \mathbb{E}(Y_3\otimes \overline{Y_2})\right\rangle_{\mathrm{HS}}.\end{aligned}$$

接下来，对于 $\mathbb{H}$的任意完全正交规范系 $\{e_j\}$，且令$Y_{i,j} := \langle Y_i, e_j\rangle$,

$$\operatorname{cum}(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) = \sum_i\sum_j \operatorname{cum}(Y_{1,i}, \overline{Y_{2,j}}, \overline{Y_{3,i}}, Y_{4,j}). \tag{4.9}$$

请注意，除非 $\mathbb{H}$是一维的，否则累积量$(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)$通常取决于参数中 $Y_i$出现的顺序。

对于我们在推断问题中所考虑的实值过程 $X$，假设 $\mathbb{E}\|X(t)\|^4<\infty$ 对所有 $t$ 都成立，则有

$$\begin{aligned}&\operatorname{cum}(X(t),X(s),X(w),X(v)) \\ &:= \mathbb{E}\langle X(t)\otimes X(s), X(w)\otimes X(v)\rangle_{\mathrm{HS}} - \langle C(t,s), C(w,v)\rangle_{\mathrm{HS}} \\ &\quad - \mathbb{E}\langle X(t), X(w)\rangle_{\mathbb{H}} \cdot \mathbb{E}\langle X(v), X(s)\rangle_{\mathbb{H}} - \langle C(t,v), C(w,s)\rangle_{\mathrm{HS}}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

˄要评估 $f_n(\theta)$ 的方差，需要以下假设。

假设 V。设过程 $X$ 为实值过程，并满足：

(a) $\mathbb{E}\|X(t)\|^4<\infty$ 对所有 $t$ 均成立；(b) $\operatorname{cum}(X(t+\tau)\ X(s+\tau)\ X(w+\tau)\ X(v+\tau)) = \operatorname{cum}(X(t)\ X(s)\ X(w)\ X(v))$ 对所有 $t$、$s$、$w$、$v$、$\tau$ 均成立；(c) 对某个足够小的 $\delta>0$,

$$\sup_{w\in\mathbb{R}^d}\int_{u\in\mathbb{R}^d}\int_{v\in\mathbb{R}^d}\sup_{\substack{\lambda_i\in B(0,\delta)\\ i=1,2,3}} |\operatorname{cum}(X(\lambda_1+u), X(\lambda_2+v), X(\lambda_3+w), X(0))|\,dvdu<\infty.$$

下面是关于假设V的几点说明。

评注4.2. 1. 该假设的第 (b) 部分可视为“四阶累积量平稳性”，它由严格平稳性蕴含，但比严格平稳性更一般。对于二阶平稳过程 $X$，由 (4.8) 和 (4.10)，第 (b) 部分等价于

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\langle X(t), X(s)\rangle\langle X(w), X(v)\rangle) \\ &= \mathbb{E}(\langle X(t+\tau), X(s+\tau)\rangle\langle X(w+\tau), X(v+\tau)\rangle) \quad \textit{for all } t,s,w,v,\tau.\end{aligned}$$

2. 假设 *V* 的第 (c) 部分是累积量条件“$C(0,4)$”的一种变体，该条件由 Panaretos 和 Tavakoli(2013年) 针对函数型时间序列提出（更多详情见注 *S.5.1* ）。

3. 对于高斯过程，根据 (4.9)，四阶累积量为零，因此在平稳性下，假设 *V* 显然成立。

$\hat{}\ f_n(\theta)$ 的方差界由以下结果给出。

定理 4.2. 设 $X = \{X(t)\ t \in \mathbb{R}^d\}$ 是一个取值于 $\mathbb{H}$ 的实值过程，它具有零均值且二阶平稳。假设条件 *C*、*K*、*S* 和 *V* 均成立。此外，假设 $\Delta_n$ 满足

$$\Delta_n \cdot S_K \subset T_n - T_n \ \textit{for all } n, \textit{ and } \ \Delta_n^d/|T_n| \to 0 \ \textit{as } n \to \infty.$$

*Then*

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\left( \left\| \hat{f}_n(\theta) - \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}}^2 \right) = \mathscr{O}\left( \frac{\Delta_n^d}{|T_n|} \right), \ \textit{as } n \to \infty. \tag{4.11}$$

证明(提纲)。定理 4.2 的完整证明见第 S.1.2 节。此处我们概述主要步骤。首先，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left\| \hat{f}_n(\theta) - \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \sum_{t\in\mathbb{T}_n} \sum_{s\in\mathbb{T}_n} \sum\sum_{\substack{h\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - t) \\ h'\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - s)}} e^{\mathrm{i}(h-h')^\top\theta} K\left(\frac{h}{\Delta}\right) K\left(\frac{h'}{\Delta}\right) \\ &\qquad \cdot |V(t+h)| \cdot |V(t)| \cdot |V(s+h')| \cdot |V(s)| \\ &\qquad \cdot \frac{\mathrm{Cov}\left(X(t+h)\otimes X(t), X(s+h')\otimes X(s)\right)}{|T\cap(T-h)||T\cap(T-h')|} \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}\left(X(t+h)\otimes X(t), X(s+h')\otimes X(s)\right) \\ &:= \mathbb{E}\left\langle X(t+h)\otimes X(t) - C(h), X(s+h')\otimes X(s) - C(h') \right\rangle_{\mathrm{HS}}. \end{aligned}$$

由（4.10）可得,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}\left(X(t+h)\otimes X(t), X(s+h')\otimes X(s)\right) \\ &= \mathbb{E}\langle X(t+h), X(s+h')\rangle_{\mathbb{H}} \cdot \mathbb{E}\left\langle X(s), X(t)\right\rangle_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \langle C(t-s+h), C(s+h'-t)\rangle_{\mathrm{HS}} \\ &\quad + \mathrm{cum}\left(X(t+h), X(t), X(s+h'), X(s)\right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

在我们的详细证明（见补充材料）中，方差中涉及累积量的部分将利用条件 V 进行计算，而另外两项则利用条件 C 的协方差可积性条件处理。

□

4.3. 收敛速率。 第 4.1节和 4.2 节的结果使我们能够得到估计量 $\hat{}\ f_n(\theta)$一致性速率的界，这可由偏差-方差分解直接得出（4.1）。

定理 4.3. 设定理 *4.2* 的假设成立。那么，对于任意有界的 $\Theta \subset \mathbb{R}^d$，有

$$\sup_{\theta\in\Theta}\left(\mathbb{E}\left\|\hat{f}_n(\theta)-f(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}^2\right)^{1/2}=\mathscr{O}\left(\delta_n^{\gamma}+B_1(\Delta_n)+B_2(\Delta_n)+\sqrt{\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}}\right), \tag{4.14}$$

如 $n\to\infty$，其中 $B_1(\Delta_n)$ 和 $B_2(\Delta_n)$ 定义如定理 *4.1*。

ˆ定理 4.3 给出了估计量 $f_n(\theta)$的一致性速率的一般界。在对过程的依赖结构施加进一步条件后，可以得到更明确的速率及其极小极大最优性。最后，我们提出几点评论。

ˆ评注 4.3. 1. 式（4.14）中估计量 $f_n(\theta)$ 的一致性速率界取决于量 $\delta_n, \Delta_n$ 和 $|T_n|$。其中， $\delta_n$ 和 $T_n$ 是样本设计带来的因素，而 $\Delta_n$ 是一个可控的调节参数。在定理的假设下，任何满足 $\Delta_n\to\infty$ 且 $\Delta_n^d/|T_n|\to 0$ˆ的带宽选择，都能得到一致估计量 $f_n(\theta)$。

2. 如注释 *4.1*所讨论的， $B_1(\Delta_n)$ 和 $B_2(\Delta_n)$ 在收敛速率中主要反映了协方差的尾部衰减。它们不会出现在方差 (4.11)的上界中，在该上界中， $\Delta_n$ 取值越小，估计量的方差就越小。 (4.14) 中的上界体现了自然的偏差-方差权衡，最优上界可通过选择 $\Delta_n$ 来获得，使偏差和方差的贡献达到平衡。

3. 确定 $\Delta_n$ 的速率最优选择取决于抽样设计以及所考虑的随机过程。事实上，使 (4.14) 中的上界达到最优的 $\Delta_n$ 选择，同时取决于 $\delta_n$ 和 $T_n$，以及该过程的协方差结构。在第*5*节中，我们将计算 $B_1(\Delta_n)$ 和 $B_2(\Delta_n)$ ，并针对某些协方差结构函数类，探讨 $\Delta_n$ 的选择。

5. 在规则网格上观测到的数据。本节及接下来的两节将聚焦于在规则网格上观测到的数据，即抽样集为

$$\mathbb{T}_n=\bigtimes_{\ell=1}^{d}\{\delta_n,\ldots,n_\ell\delta_n\}, \tag{5.1}$$

其中 $\delta_n$ 为网格大小。在接下来的两个小节中进行渐近理论分析时，我们令 $n_\ell\to\infty$， $\ell=1$, ....., $d$，并考虑 $\delta_n$ 固定和 $\delta_n\to 0$ 两种情形。

在这种设定下，(3.4)，更考虑，我们对一般估计量稍作修改

$$\hat{f}_n(\theta):=\frac{\delta_n^{2d}}{(2\pi)^d}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}e^{\mathrm{i}(t-s)^\top\theta}\frac{X(t)\otimes X(s)}{|T_n\cap(T_n-(t-s))|}K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right). \tag{5.2}$$

在条件

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\|C(k\delta_n)\|_{\mathrm{tr}}<\infty,$$

我们有

$$C(k\delta_n)=\int_{\theta\in[-\pi/\delta_n,\pi/\delta_n]^d}e^{-\mathrm{i}k^\top\theta\delta_n}f(\theta;\delta_n)d\theta,\ k\in\mathbb{Z}^d, \tag{5.3}$$

其中

$$f(\theta;\delta_n) := \frac{\delta^d}{(2\pi)^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{\mathrm{i}k^\top\theta\delta_n} C(k\delta_n),\ \theta\in[-\pi/\delta_n,\pi/\delta_n]^d, \tag{5.4}$$

这是一个正迹类算子，因为 $\{C(k\delta_n)\ k\in\mathbb{Z}^d\}$ 是正定的。(5.3) 的证明可利用复指数函数

$$\phi_k(\theta) := e^{\mathrm{i}k^\top\theta\delta_n}(\delta_n/2\pi)^{d/2}\mathbb{I}_{[-\pi/\delta_n,\pi/\delta_n]^d}(\theta),\ \ k\in\mathbb{Z}^d$$

构成了 $L^2([-\pi/\delta_n,\pi/\delta_n]^d)$ 的完全正交规范系。根据定理 2.1，若将 $f(\theta;\delta_n)$ 替换为折叠谱密度，则（5.3）仍然成立

$$f_{\mathrm{fold}}(\theta) := \mathbb{I}_{[-\pi/\delta_n,\pi/\delta_n]^d}(\theta)\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(\theta+2\pi k/\delta_n).$$

再次利用 $\{\phi_k(\theta)\ k\in\mathbb{Z}^d\}$ 是 $L^2([-\pi/\delta_n,\pi/\delta_n]^d)$ 的完全正交规范系这一事实，$f(\theta;\delta_n)$ 等于折叠谱密度。因此，仅凭 $C(k\delta_n)\ k\in\mathbb{Z}^d$，我们只能识别折叠谱密度。事实上，我们的估计量 $f_n$ 正反映了这一点，因为

$$\hat{f}_n(\theta+2\pi k/\delta_n)=\hat{f}_n(\theta),\ \theta\in[-\pi/\delta_n,\pi/\delta_n]^d,$$

对于任意向量 $k\in\mathbb{Z}^d$。

为估计折叠谱密度，我们定义以下与假设C 和 V相对应的条件。

假设 C′。算子自协方差的迹范数可求和：

$$\sup_n\left\{\delta_n^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\|C(\delta_n k)\|_{\mathrm{tr}}\right\}<\infty.$$

假设 V′。过程 $\{X(\delta_n t)\ t\in\mathbb{Z}^d\}$ 满足

(a) $\sup_n\mathbb{E}\|X(\delta_n t)\|^4<\infty$ 对所有 $t$

均成立；(b) 对所有 $t,s,w,v,\tau$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{cum}\left(X(\delta_n(t+\tau)),X(\delta_n(s+\tau)),X(\delta_n(w+\tau)),X(\delta_n(v+\tau))\right)\\&=\mathrm{cum}\left(X(\delta_n t),X(\delta_n s),X(\delta_n w),X(\delta_n v)\right);\end{aligned}$$

(c) $\sup_n\left\{\delta_n^{2d}\sup_{w\in\mathbb{Z}^d}\sum_{u\in\mathbb{Z}^d}\sum_{v\in\mathbb{Z}^d}\left|\mathrm{cum}\left(X(\delta_n u),X(\delta_n v),X(\delta_n w),X(0)\right)\right|\right\}<\infty.$

与假设 C 和V相比，假设 C′ 和 V′ 的修改源于这样一个事实：如果我们的推断目标是折叠谱密度，积分的离散近似便不再是问题。我们将在第 5.1 节的时间序列背景下应用这些条件。

与前文相同，假设 V′ 对高斯过程而言显然成立，因为四阶累积量为零。更一般地，它对一大类短记忆 $\mathbb{H}$值过程也成立（参见补充材料中的例 S.8.2）。

请注意，我们在假设V′ 中关于累积量的假设，与Panaretos 和 Tavakoli (2013年第571页所采用的基于假设的累积量核有所不同，但也有联系。更多细节请参见注释S.5.1。

5.1 固定网格的情形。考虑（5.1）中的 $\delta_n$ 为固定值的情形。不失一般性，令 $\delta_n \equiv 1$。上一节的讨论表明，我们只能识别 $[-\pi,\pi]^d$上的折叠谱密度。因此，不失一般性，考虑由 $t \in \mathbb{Z}^d$索引的随机过程 $\{X(t)\}$ 。此框架包括时间序列（例如$d=1$），以及更一般地，在离散位置/时刻观测到的许多随机场。此时谱密度 $f$由（5.4）定义。将归一化 $|T_n \cap (T_n - (t-s))|$^替换为 $|T_n|$后， $f_n(\theta)$便得到经典的滞后窗估计量（参见 Robinson，1983年）。

关于 $f_n(\theta)$ 是定理4.3 在网格设定下的对应结果。

定理 5.1. 设 $\{X(t) \quad t \in \mathbb{Z}^d\}$ 是一个取值于 $\mathbb{H}$ 的实值过程，该过程零均值且二阶平稳。假设条件 $K$ 成立，假设条件 $C'$和 $V'$ 在 $\delta_n \equiv 1$ 下成立，并且

$$\Delta_n \cdot S_K \cap \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{T}_n - \mathbb{T}_n \ \textit{for all } n, \textit{ and } \ \Delta_n^d / |\mathbb{T}_n| \to 0 \textit{ as } n \to \infty.$$

那么，

$$\sup_{\theta \in [-\pi,\pi]^d} \left\| \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta) - f(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}} \le B_1(\Delta_n) + B_2(\Delta_n) \tag{5.5}$$

$$\sup_{\theta \in [-\pi,\pi]^d} \mathbb{E} \left\| \hat{f}_n(\theta) - \mathbb{E}[\hat{f}_n(\theta)] \right\|_{\mathrm{HS}}^2 = \mathscr{O}\left( \frac{\Delta_n^d}{|\mathbb{T}_n|} \right), \tag{5.6}$$

其中

$$B_1(\Delta_n) := \left\| \sum_{k \in (\Delta_n \cdot S_K) \cap \mathbb{Z}^d} e_!^{k^\top \theta} C(k) \left( 1 - K\left( \frac{k}{\Delta_n} \right) \right) \right\|_{\mathrm{HS}},$$

$$B_2(\Delta_n) := \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus (\Delta_n \cdot S_K)} e_!^{k^\top \theta} C(k) \right\|_{\mathrm{HS}}.$$

因此，

$$\sup_{\theta \in [-\pi,\pi]^d} \left( \mathbb{E} \left\| \hat{f}_n(\theta) - f(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}}^2 \right)^{1/2} = \mathscr{O}\left( B_1(\Delta_n) + B_2(\Delta_n) + \frac{\Delta_n^{d/2}}{\sqrt{|\mathbb{T}_n|}} \right), \textit{ as } n \to \infty.$$

在这一结果中，偏差界的推导（5.5）比一般情形的推导更为直接，因为它不像（4.5）那样涉及黎曼近似。这里，（4.2）右端的第一项不再出现，另外两项 $B_1$（$\Delta_n$）和 $B_2$（$\Delta_n$）与（4.3）中的项类似，只是以求和代替积分。方差界的推导（5.6）也比（4.11）更简单，因为不再需要涉及 $\delta_n$ 的那一项。为完整起见，补充材料的命题S.2.1 给出了方差界的证明。

定理 5.1 中的偏差界 $B_1(\Delta_n)$ $B_2(\Delta_n)$ 适用于一类非常一般的模型。不过，对于特定模型，可以得到更精确的偏差表达式。下面通过考察一类按幂律衰减的协方差来说明这一点。离散时间过程的幂律衰减类 $\mathscr{P}_D(\beta, L)$定义如下：

$$\mathscr{P}_D(\beta, L) := \left\{ f(\theta) = (2\pi)^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} C(k) e_!^{\theta^\top k} : \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \|C(k)\|_{\mathrm{tr}} (1 + \|k\|_2^\beta) \le L \right\}, \tag{5.7}$$

当 $\beta, L > 0$时。根据傅里叶变换理论，该条件中 $\beta$ 的取值越大，谱密度在 $\theta = 0$处的光滑性阶数越高；例如参见 Bingham 等人(1989)。

下面我们给出其速率的上界，我们通过考察定理5.1中的偏差项 $B_1(\Delta_n)$ 和 $B_2(\Delta_n)$ 来建立该上界。首先，我们对核 $K$ 引入一个额外的光滑性条件，该条件与$\mathscr{P}_D(\beta, L)$中的协方差模型相容。令 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$，并定义偏导数

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} K(h) = \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} K(h)}{\partial h_1^{\alpha_1} \ldots \partial h_d^{\alpha_d}}.$$

于是，对于整数 $\lambda \geq 1$，定义条件

$$\begin{aligned} &\partial^{\boldsymbol{\alpha}} K(0) = 0 \text{ for all } \boldsymbol{\alpha} \text{ with } 1 \leq |\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \leq \lambda, \text{ and} \\ &\sup_h |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} K(h)| < \infty \text{ for all } \boldsymbol{\alpha} \text{ with } |\boldsymbol{\alpha}| = \lambda + 1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

T定理 5.2. 假设定理*5.1* 的所有条件均成立。此外，假设谱密度 $f$ 属于 $\mathscr{P}_D(\beta, L)$，其中某些 $\beta > 0$ 和 $L > 0$满足条件，并且对某个整数 $\lambda > 0 \vee (\beta - 1)$，条件（5.8）成立。则 $f_n(\theta)$的偏差ˆ速率满足以下一致上界：

$$\sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta, L)} \sup_{\theta \in [-\pi, \pi]^d} \left\| \mathbb{E} \hat{f}_n(\theta) - f(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}} = \mathscr{O}\left( \Delta_n^{-\beta} \right), \quad as \quad n \to \infty. \tag{5.9}$$

结合（5.6）中的方差界 $\Delta_n^d / |\mathbb{T}_n|$，并选择带宽 $\Delta_n =$

ˆ$|\mathbb{T}_n|^{\frac{1}{2\beta+d}}$，可得 $f_n(\theta)$ 均方误差的如下统一界：

$$\sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta, L)} \sup_{\theta \in [-\pi, \pi]^d} \left( \mathbb{E} \left\| \hat{f}_n(\theta) - f(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}}^2 \right)^{1/2} = \mathscr{O}\left( |\mathbb{T}_n|^{-\frac{\beta}{2\beta+d}} \right). \tag{5.10}$$

该结果的证明见第 S.2 节。特别提出函数类 $\mathscr{P}_D(\beta, L)$ 的一个重要动机，是它涵盖了广泛的现实协方差模型，其尾部衰减可由参数 $\beta$ 控制。此外，在第 6 节中，我们为该函数类建立了一个极小极大下界，其速率与（5.10）中的上界相匹配。从这个意义上说，采用带宽预言机选择的估计量是极小极大速率最优的。

5.2. 密集网格数据。现在转向（5.1）所述的情形，其中假设 $\delta_n \to 0$。在ˆ此过程中，我们继续关注（5.2）中针对网格数据的估计量 $f_n(\theta)$。然而，与 $\delta_n = 1$ 情形不同的是，此处我们能够估计完整的谱密度，而非折叠谱密度。与上一小节一样，我们也研究类似的幂律衰减类，但需要进行一些细微的修改。连续时间幂律衰减类 $\mathscr{P}_C(\beta, L)$（其中 $\beta,\ L > 0$）包含连续时间过程的谱密度，其定义如下：

$$\mathscr{P}_C(\beta, L) := \left\{ f(\theta) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i} x^\top \theta} C(x) dx : \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|_2^\beta) \|C(x)\|_{\mathrm{tr}} dx \leq L \right\}. \tag{5.11}$$

仿照第 5.1 节中的方法，可以针对这一函数类陈述如下结果。

定理 5.3. 设定理4.3 中的所有假设均成立，并假设谱密度 $f(\theta)$ 属于某个 $\mathscr{P}_C(\beta, L)$，其中 $\beta, L > 0$。设对于某个整数 $\lambda > 0 \vee (\beta - 1)$，条件 (5.8) 成立。那么，对于每个 $f \in \mathscr{P}_C(\beta, L)$ 以及有界的 $\Theta \subset \mathbb{R}^d$，偏差的收敛速率为

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta) - f(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}} = \mathscr{O}\left(\delta_n^{\gamma} + \Delta_n^{-\beta}\right), \quad as \quad n \to \infty.$$

结合定理 4.3，取 $\Delta_n := |T_n|^{1/(2\beta+d)}$ 为速率最优选择，可得总体速率界：

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left( \mathbb{E} \left\| \hat{f}_n(\theta) - f(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}}^2 \right)^{1/2} = \mathscr{O}\left(\delta_n^{\gamma} \vee |T_n|^{-\beta/(2\beta+d)}\right). \tag{5.12}$$

定理 5.3 的证明见第S.2节。

注 5.1. 注意，与定理 5.2 不同，定理 5.3 中的速率界并非在函数类 $\mathscr{P}_C(\beta, L)$ 上一致成立。这主要是因为假设 C(b) 的 (3.1) 中的常数 $|||C|||_{\gamma}$ 无法在 $\mathscr{P}_C(\beta, L)$ 上一致有界，因为 $\|C(x)\|_{\mathrm{tr}}$ 的尾部行为并不能约束 $C(x)$ 的光滑性。目前，我们尚不清楚是否存在一种自适应估计量，使其速率能够被证明是一致的。

注 5.2. 为了阐释 (5.12) 中的速率界，举例来说，假设 $\delta_n := n^{-\alpha}$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$ 成立，它控制了采样频率相对于样本量的大小。$\alpha$ 的值越大，网格越精细。此外，假设对所有 $\ell$，网格都是正方形，且 $n_\ell = n$，因此 $|T_n| \sim (n\delta)^d$。令

$$\alpha_{\beta,\gamma} = \left(1 + \left(\frac{2}{d} + \frac{1}{\beta}\right)\gamma\right)^{-1} \tag{5.13}$$

并考虑以下两种情形：

- （精细采样）当$\alpha \geq \alpha_{\beta,\ \gamma}$，则 $\delta_n^{\gamma} = \mathscr{O}\left(|T_n|^{-\beta/\ (2\beta+d)}\right)$，且（5.12）中的速率界为

$$\mathscr{O}\left((n\delta_n)^{-\beta d/(2\beta+d)}\right) = \mathscr{O}\left(n^{-\beta d(1-\alpha)/(2\beta+d)}\right).$$

- （粗略采样）当 $0 < \alpha < \alpha_{\beta,\ \gamma}$，则 $|T_n|^{-\beta/\ (2\beta+d)} = \mathscr{O}\left(\delta_n^{\gamma}\right)$，速率界变为

$$\mathscr{O}(\delta_n^{\gamma}) = \mathscr{O}(n^{-\alpha\gamma/2}).$$

在精细采样情形下，速率与下文定理6.2 中建立的极小极大下界相同。由（5.13）可知，较大的 $\gamma$（即更平滑的 $C$）会使得能够通过 $f_n(\theta)$ 达到极小极大速率的 ˆ采样速率范围更宽。同样，较大的 $d$ 或较大的 $\beta$（即 $C$ 的尾部衰减更快）会使达到极小极大速率所需的采样速率范围更窄。

6. 极小极大速率。谱密度估计问题的极小极大速率已受到一定关注。时间序列研究中此类研究的几个例子包括 Samarov(1977)、Bentkus (1985)，以及 Efromovich (1998) 等。不过，连续时间情形似乎研究较少（例如，参见 Ginovyan，2011，以及其中的参考文献）。据我们所知，关于函数型时间序列或函数值连续时间过程谱密度点态推断的极小极大速率结果

在离散时间点观测的情况尚未建立。此外，我们也不了解针对以 $\mathbb{Z}^d$ 或 $\mathbb{R}^d, d>1$ 为指标的随机场的此类结果。

假设 $\{X(t)\}$ 为高斯过程，下面我们将 Samarov Samarov (1977) 的工作加以拓展，重点研究第 $\mathscr{P}_D(\beta,L)$ 节和 $\mathscr{P}_C(\beta,L)$ 中讨论的函数类。与第 5 节一样，我们假设数据是在网格上观测到的。

我们的第一个结果关注 $\delta_n=1$ 这一情形，其中按照第 5.1 节，我们考虑离散参数过程 $\{X(t)\ t\in\mathbb{Z}^d\}$。

定理 6.1. 假设 $\{X(t)\ t\in\mathbb{Z}^d\}$ 是一个平稳高斯过程，其谱密度函数为 $f$。令 $\mathscr{M}_n$ 为所有可能的估计量 $f_n$ 的函数类，这些估计量 $f$ 基于观测值 $X(t)\ t\in\{1,\dots,n\}^d$。那么，对于任意内点 $\theta_0\in(-\pi,\pi)^d$ 以及 $\beta,L>0$,

$$\liminf_{n\to\infty}\inf_{f_n\in\mathscr{M}_n}\sup_{f\in\mathscr{P}_D(\beta,L)}\mathbb{P}\left(\|f_n(\theta_0)-f(\theta_0)\|_{\mathrm{HS}}\geq n^{-\frac{d\beta}{2\beta+d}}\right)>0, \tag{6.1}$$

其中 $\mathscr{P}_D(\beta,L)$ 定义见(5.7)。

注释 6.1。注意，对于 $\mathbb{T}_n=\{1,\dots,n\}^d$，$|\mathbb{T}_n|=n^d$。因此，根据定理 5.2，估计量 $\hat{}\ f_n(\theta_0)$ 在函数类 $\mathscr{P}_D(\beta,L)$上一致地达到极小极大速率 $|\mathbb{T}_n|^{-\beta/(2\beta+d)}=n^{-(d\beta)/(2\beta+d)}$。因此，在以 $\mathbb{Z}^d$ 为索引的过程情形下，我们的估计量对于幂律类以及所有维数 $d\geq 1$，在一致意义下都是速率最优的。

定理 6.1 的证明（概要）。定理 6.1 的详细证明见补充材料第 S.3 节。我们在此介绍证明的关键要点。首先，对于实 CONS 中的任意元素 $e_i$，考虑实值（标量）过程 $X_{e_i}(t):=\langle X(t)\ e_i\rangle_{\mathbb{H}}$，并令 $C_{e_i}(x)$ 和 $f_{e_i}(\theta)$ 分别为其平稳协方差和谱密度。若 $f\in\mathscr{P}_D(\beta,L)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|x\|_2^\beta)|C_{e_i}(x)|dx\leq L\quad\text{and}\quad|\hat{f}_{e_i}(\theta_0)-f_{e_i}(\theta_0)|\leq\|\hat{f}(\theta_0)-f(\theta_0)\|_{\mathrm{HS}}.$$

这些结论源于一个简单事实：对于任意有界线性算子$\mathscr{A}$和酉 $\phi\in\mathbb{H}$，都有 $|\langle\mathscr{A}\phi,\phi\rangle_{\mathbb{H}}|\leq\|\mathscr{A}\|_{\mathrm{op}}$。因此，只需证明定理6.1，并将重点放在标量实值过程上。证明的关键步骤是构造两个函数$f_{0,\ n}$，$f_{1,\ n}$，它们属于$\mathscr{P}_D(\beta,\ L)$，且二者之间的距离能够准确衡量估计问题的复杂度。令

$$f_{0,n}(\theta)=L/2\cdot\mathbb{I}(\theta\in[-\pi,\pi]^d).$$

对于 $\theta=(\theta_i)_{i=1}^d\in\mathbb{R}^d$，定义函数

$$g(\theta)=\epsilon\cdot\prod_{i=1}^d\varphi(\theta_i),\quad\text{where }\varphi(x)=\exp\left(-\frac{1}{1-(x/\pi)^2}\right)\mathbb{I}(|x|<\pi),\ \ x\in\mathbb{R},$$

对某个 $\epsilon>0$。注意，所谓的“隆起”函数 $g$ 具有紧支撑且无穷次可微。考虑

$$g_n(\theta)=h_n^\beta g\left(\frac{\theta-\theta_0}{h_n}\right),$$

其中，对某个适当的常数 $M$，有 $h_n=M\cdot n^{-d/(2\beta+d)}$。现在，令†

$$f_{1,n}(\theta)=f_{0,n}(\theta)+[g_n(\theta)+g_n(-\theta)].$$

因此，$f_{0,\ n}(\theta)$ 与$f_{1,\ n}(\theta)$ 之间的距离为 $g_n(\theta)+g_n(-\theta)=\mathscr{O}(n^{-d\beta/(2\beta+d)})$。然后，我们应用Tsybakov(2008)中的定理 2.5(iii)，通过验证以下条件得到所需结果：

(1) $f_{0n}$, $f_{1n} \in \mathscr{P}_D(\beta,\ L)$; (2)
$f_{1n}\ \theta_0\ - f_{0n}\ \theta_0\ = c_{\theta_0} n^{-d\beta/(2\beta+d)}$ $n$ $c_{\theta_0} = M^{\beta}\ 1 + {}_{\mathbb{I}}\ \theta_0 = () ()$ 当
$0\ \ > 0$
其足够大时，其中$(())$；(3) 上确界$_n$ Kullback–Leibler 散度$(\mathbb{P}_{1n},\ \mathbb{P}_{0n}) < \infty$，其中KL 表示 Kullback–Leibler 散度，而 $\mathbb{P}_{0,\ n}$和$\mathbb{P}_{1,\ n}$ 分别是在 $f_{0,\ n}$ 和 $f_{1,\ n}$ 下的概率分布。
证明中技术上最具挑战性的部分，是计算$\mathrm{KL}(\mathbb{P}_{1,\ n},\ \mathbb{P}_{0,\ n})$第 (3) 部分中的这一项；其计算通过遵循并扩展Samarov(1977) 提出的方法完成。详情见补充材料的S.3 节。 □

下一个结果给出了连续参数高斯过程的极小极大速率，其协方差函数属于 $\mathscr{P}_C(\beta,\ L)$，定义见 (5.11)。

定理 6.2。 设 $\{X(t)\ \ t \in \mathbb{R}^d\}$ 是一个平稳高斯过程，其谱密度为 $f$。设 $\mathscr{M}_n$ 是所有可能的 $f_n$ 基于观测值 $f$ 的估计量函数类$X(k\delta_n)\ k \in \{1,\dots,n\}^d$。那么，对每个 $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ 以及 $\beta, L > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{f_n \in \mathscr{M}_n} \sup_{f \in \mathscr{P}_C(\beta,L)} \mathbb{P}\left( \|f_n(\theta_0) - f(\theta_0)\|_{\mathrm{HS}} \geq (n\delta_n)^{-d\beta/(2\beta+d)} \right) > 0, \tag{6.2}$$

其中 $\mathscr{P}_C(\beta,\ L)$ 定义见(5.11)。

定理6.2 的证明与定理6.1 的证明类似，也见S.3 节的补充材料。本节最后给出几点说明。

注6.2. 比较（6.1）和（6.2）中的极小极大下界，可以将$(n\delta_n)^d$ 视为混合域渐近情形下的“有效”样本量:

$$\delta_n \to 0 \quad \textit{and} \quad n\delta_n \to \infty.$$

ˆ1. 回顾注 5.2 ，并注意到，在精细采样情形下， $f_n(\theta)$ 在(5.12) 中得到的速率与(6.2)中的极小极大下界相匹配。据我们所知，这是关于混合域设置下谱密度估计的极小极大速率的首个结果。

2. 一个尚未解决的问题是构造一个更窄的函数类 $\mathscr{P}_C$，使其同时反映自协方差的尾部衰减（通过 $\beta$）和光滑性（通过 $\gamma$），从而使精细采样和粗略采样情形下估计量速率的上界和下界相匹配（参见注 5.2）。

7. 渐近分布。与前两节一样，我们继续考虑由（5.1）和（5.2）所描述的网格数据情形。这里的目标是在假设 $\{X(t)\}$ 是平稳高斯过程的前提下，为我们的谱密度估计量 $f_n(\theta)$ 给出一个中心ˆ极限定理；本节中，我们不限制 $X$ 在 $\mathbb{H}$ 中为实数。不过，鉴于这一主题的技术性，我们将重点讨论情形 $d = 1$。如备注ˆ3.2所述，对于 $d = 1$， $f_n(\theta)$ 中的归一化因子 $|\mathbb{T}_n \cap (\mathbb{T}_n - (t-s))|$ 不会影响收敛速率。因此，为方便起见，我们将其省略，转而考虑

$$\hat{f}_n(\theta) = \frac{\delta_n}{2\pi n} \sum_{i,j=1}^{n} e^{\mathbb{I}(i-j)\delta_n\theta} X(\delta_n i) \otimes X(\delta_n j) K\left( \frac{i-j}{\Delta_n} \cdot \delta_n \right). \tag{7.1}$$

ˆ我们将证明 $f_n(\theta)$ 的中心极限定理，假设 $\delta_n \to$ 某些 $\delta_\infty \in [0,\infty)$ 当$n \to \infty$时成立。时间序列和混合域情形分别由 $\delta_\infty = 1$ 和 0涵盖。

ˆ有趣的是， $f_n(\theta)$ 的渐近分布涉及伪协方差的概念。回顾式（2.4）中，伪协方差函数定义为 ˇ$C(h) = \mathbb{E}[X(t+h) \otimes \overline{X}(t)]$。根据式（2.6）和式（5.4），定义伪谱密度：

$$\check{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathbb{I}\theta x} \check{C}(x) dx, \ \ \theta \in \mathbb{R},$$

并且，对于 $\delta > 0$，折叠伪谱密度为：

$$\check{f}(\theta; \delta) := \frac{\delta}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\mathbb{I}k^\top \theta \delta} \check{C}(k\delta), \ \theta \in [-\pi/\delta, \pi/\delta].$$

注意，假设 $\int_{\mathbb{R}} \| \check{C}(x) \|_{\mathrm{tr}} dx < \infty$ 和 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \| \check{C}(k\delta) \|_{\mathrm{tr}} < \infty$，则 ˇ $f(\theta)$ 和 ˇ $f(\theta; \delta)$ 分别是良定义的。为方便起见，也记 $f(\theta; 0) = f(\theta)$ 和 ˇ$f(\theta; 0) =$ ˇ$f(\theta)$。

现在，令 $\{e_j\}$ 为 $\mathbb{H}$ 的任意固定完全正交规范系，并定义

$$C_{k,\ell}(t) = \langle C(t) e_k, e_\ell \rangle = \mathbb{E}[\langle X(t), e_\ell \rangle \overline{\langle X(0), e_k \rangle}],$$
$$\check{C}_{k,\ell}(t) = \langle \check{C}(t) \overline{e_k}, e_\ell \rangle = \mathbb{E}[\langle X(t), e_\ell \rangle \langle X(0), e_k \rangle].$$

建立中心极限定理需要以下假设。

CLT 假设。设网格大小 $\delta_n$ 和带宽 $\Delta_n$ 满足 $\delta_n \to$ 某个 $\delta_\infty \in [0, \infty)$ 且 $(n\delta_n)/\Delta_n \to \infty$。此外，假设存在正常数 $L_n$，使得

$$L_n \delta_n \to \infty, \ L_n / \Delta_n \to 0,$$

并且满足以下条件：
(a) $\sup_n \delta_n \sum_{x=-\infty}^{\infty} \| C(\delta_n x) \|_{\mathrm{tr}} < \infty$ 和 $\delta_n \sum_{|x| > L_n} \| C(\delta_n x) \|_{\mathrm{tr}} \to 0$; (b) $\| f(\theta; \delta_n) - f(\theta; \delta_\infty) \|_{\mathrm{tr}} \to 0$; (c) $\sup_n \delta_n \sum_{x=-\infty}^{\infty} \| \check{C}(\delta_n x) \|_{\mathrm{tr}} < \infty$ 和 $\delta_n \sum_{|x| > L_n} \| \check{C}(\delta_n x) \|_{\mathrm{tr}} \to 0$; (d) $\| \check{f}(\theta; \delta_n) - \check{f}(\theta; \delta_\infty) \|_{\mathrm{tr}} \to 0$; (e) $\delta_n^2 \sum_{x_1, x_2=-\infty}^{\infty} |C_{k,k}(\delta_n x_1)| \cdot |C_{\ell,\ell}(\delta_n x_2)| \le a_{k,\ell}$，使得 $\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} < \infty$; (f) $\delta_n^2 \sum_{x_1, x_2=-\infty}^{\infty} | \check{C}_{k,\ell}(\delta_n x_1)| \cdot | \check{C}_{k,\ell}(\delta_n x_2)| \le b_{k,\ell}$，使得 $\sum_{k,\ell} b_{k,\ell} < \infty$。

注意，若对所有 $n$ 都有 $\delta_n = \delta_\infty \in (0, \infty)$，则条件 (a)–(f) 可由 $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \| C(\delta_\infty x) \|_{\mathrm{tr}} < \infty$ 和 $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \| \check{C}(\delta_\infty x) \|_{\mathrm{tr}} < \infty$ 推出。对于 $\delta_\infty = 0$，上述假设中的条件 (a) 和 (c) 与直接黎曼可积性（dRi）的概念有关（例如参见 Feller，2008）；此外，若 $C(x)$ 和 ˇ$C(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的函数，则 $C(x) e_\ell^{\mathbb{I}x\theta}$ 和 ˇ$C(x) e^{-\mathbb{I}x\theta}$ 的 dRi 也分别意味着条件 (b) 和 (d)。

还需要对核 $K$ 作如下修改后的假设。

假设 K′。非负核 $K$ 具有紧支撑，关于0对称，且有界变差。

ˆ以下结果是关于 $f_n(\theta)$ 的中心极限定理，其中弱收敛是在 $\mathbb{H}$ 上的希尔伯特–施密特算子空间 $\mathbb{X}$ 中定义的。

定理 7.1. 设平稳零均值高斯过程 $\{X(t), \ t \in \mathbb{R}\}$ 并假设条件 中心极限定理 和 *K′* 成立。定义

$$\mathscr{T}_n(\theta) := \sqrt{\frac{n\delta_n}{\Delta_n}} \left[ \hat{f}_n(\theta) - \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta) \right], \ \theta \in \mathbb{R},$$

ˆ其中 $f_n(\theta)$ 由 (7.1)给出。于是，对任意 $\theta \in [-\pi/\delta_\infty, \pi/\delta_\infty]$，取作 $\mathbb{R}$ 若$\delta_\infty = 0$,

$$\mathscr{I}_n(\theta) \xrightarrow{d} \mathscr{I}(\theta) \ \textit{in}\ \mathbb{X},$$

其中 $\mathscr{I}(\theta)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的零均值高斯元，满足对于任意有限集合$\{g_\ell, \ell = 1, \ldots, m\}$，以及正数 $\{a_\ell, \ell = 1, \ldots, m\}$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}\left(\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \langle \mathscr{I}(\theta) g_\ell, g_\ell \rangle\right) \\ &= \|K\|_2^2 \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{m} a_{\ell_1} a_{\ell_2} \left[ |\langle f(\theta;\delta_\infty) g_{\ell_2}, g_{\ell_1} \rangle|^2 + c(\theta) \left| \left\langle \check{f}(\theta;\delta_\infty) \overline{g_{\ell_2}}, g_{\ell_1} \right\rangle \right|^2 \right], \end{aligned} \tag{7.2}$$

其中$\|K\|_2^2 = \int K^2(x)dx$，且 $c(\theta) = I_{(\theta=0)}$ 若 $\delta_\infty = 0$，而 $I_{(\theta=0,\pm\pi/\delta_\infty)}$ 若 $\delta_\infty > 0$。

R备注 7.1. 1. 注意，量 $\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \langle \mathscr{I}(\theta) g_\ell, g_\ell \rangle$ 在 (7.2) 中为实数，因为$K$ 假设为对称。

2. 对于所有 (7.2) 中 $\{a_\ell\}$ 和 $\{g_\ell\}$ 的取值，其方差完全刻画了 $\mathscr{I}$的分布。表达式 $\langle \check{f}(\theta)\overline{g_{\ell_2}}, g_{\ell_1} \rangle$在 (7.2)不依赖于实 CONS 的选取，因为

$$\langle \check{C}(t,s)\overline{g}, h\rangle = \mathbb{E}\langle X(t), h\rangle \langle \overline{g}, \overline{X(s)}\rangle = \mathbb{E}\langle X(t), h\rangle \langle X(s), g\rangle, \ g, h \in \mathbb{H}.$$

该结果的证明见补充材料第 S.4 节，其基于验证估计量的“所有矩”收敛以及一个紧性条件。

前一个结果未给出极限的显式表示。接下来，我们将为 $\mathscr{I}(\theta)$ 在 $c(\theta) = 0$, 的情形下，给出这样的显式随机表示，其中 $c(\theta)$ 如（7.2）所示。定义复高斯随机变量 $Z_{i,j}$’如下:

$$Z_{i,j} = \xi_{i,j} + \mathrm{i}\eta_{i,j}, \ \ i < j, \tag{7.3}$$

其中 $\xi_{i,j}$和 $\eta_{i,j}$是独立同分布的 $N(0, 1/2)$，且 $Z_{j,i} := \overline{Z_{i,j}}$。对于 $i = j$，我们有 $Z_{i,i}$’为实数且服从 $N(0,1)$，并且与 $Z_{i,j}$’相互独立，对任意 $i \neq j$。于是可得，$Z_{i,j}$’是零均值复高斯变量，满足

$$Z_{i,j} = \overline{Z_{j,i}} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[Z_{i,j}\overline{Z_{i',j'}}] = \delta_{(i,j),(i',j')}. \tag{7.4}$$

推论 7.2. 设 $c(\theta) = 0$ 属于（7.2），并假设定理 7.1的条件成立。设$\{e_i(\theta)\}$ 为对角化 $f(\theta)$的（不一定为实数的）完全正交规范系，即,

$$f(\theta) = \sum_i \lambda_i(\theta) e_i(\theta) \otimes e_i(\theta).$$

随机变量 $\mathscr{I}(\theta)$ 具有如下随机表示

$$\mathscr{I}(\theta) \overset{d}{=} \|K\|_2 \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i(\theta)\lambda_j(\theta)} Z_{i,j} e_i(\theta) \otimes e_j(\theta), \tag{7.5}$$

其中 $Z_{i,\ j}$ 如（7.3）中所定义。特别地， $\mathscr{I}(\theta)$ 的协方差算子为

$$\mathbb{E}[\mathscr{I}(\theta) \otimes_{\mathrm{HS}} \mathscr{I}(\theta)] = \|K\|_2^2 \sum_{i,j} \lambda_i(\theta)\lambda_j(\theta)(e_i(\theta) \otimes e_j(\theta)) \otimes_{\mathrm{HS}} (e_i(\theta) \otimes e_j(\theta)).$$

证明。设 $g_\ell$， $\ell=1$， $\cdots$， $m$ 为 $\mathbb{H}$ 中的任意元素，并假设

$$g_\ell=\sum_i x_i(\ell)e_i,\ \ x_i(\ell)\in\mathbb{C}.$$

Then，根据定理 7.1，只需验证 $\mathscr{T}$ 在（7.5）中的表示满足

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{\ell=1}^m a_\ell\langle\mathscr{T}g_\ell,g_\ell\rangle\Big)=\|K\|_2^2\sum_{\ell_1,\ell_2}a_{\ell_1}a_{\ell_2}|\langle f(\theta)g_{\ell_2},g_{\ell_1}\rangle|^2, \tag{7.6}$$

对于实常数 $a_\ell\in\mathbb{R}$， $\ell=1$， ....., $m$. 注意到

$$\langle\mathscr{T}g_\ell,g_\ell\rangle=\|K\|_2\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}Z_{i,j}x_i(\ell)\overline{x_j(\ell)}.$$

因此，由（7.4），（7.6）的左端等于

$$\begin{aligned}&\|K\|_2^2\sum_{\ell_1,\ell_2}a_{\ell_1}a_{\ell_2}\sum_{i,i',j,j'}x_i(\ell_1)\overline{x_j(\ell_1)x_{i'}(\ell_2)}x_{j'}(\ell_2)\sqrt{\lambda_i\lambda_j\lambda_{i'}\lambda_{j'}}\mathbb{E}[Z_{i,j}\overline{Z_{i',j'}}]\\&=\|K\|_2^2\sum_{\ell_1,\ell_2,i,j}a_{\ell_1}a_{\ell_2}\lambda_i\lambda_j x_i(\ell_1)x_j(\ell_2)\overline{x_j(\ell_1)x_i(\ell_2)}.\end{aligned} \tag{7.7}$$

后一个表达式就是（7.6）的右端。另一方面，

$$\langle f(\theta)g_{\ell_2},g_{\ell_1}\rangle=\sum_i\lambda_i x_i(\ell_1)\overline{x_i(\ell_2)}.$$

因此，很容易看出（7.6）和（7.7）的右端相同。 □

本节最后给出以下评论。

备注 7.2. 注意，对于 (7.2) 中的 $\mathscr{T}(\theta)$（ $c(\theta)=0$ ），它是希尔伯特空间 $\mathbb{X}$ 中取值于希尔伯特–施密特算子空间的零均值随机元素。因此，关系式 (7.5) 给出了它的 Karhunen–Loéve 型表示。也就是说， $\mathscr{T}(\theta)$ 的协方差算子在基 $e_{i,j}(\theta):=e_i(\theta)\otimes e_j(\theta)$, $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ 下对角化，其中 $\{e_i(\theta)\}$ 是 $\mathbb{H}$ 的完全正交规范系，用于对角化算子 $f(\theta)$。协方差算子 $\mathbb{E}[\mathscr{T}(\theta)\otimes\mathscr{T}(\theta)]$ 的特征值恰为 $\lambda_{i,j}(\theta):=\lambda_i(\theta)\lambda_j(\theta)$，其中 $\lambda_i(\theta)$ 是 $f(\theta)$ 的特征值。

8. 基于离散观测函数型数据的再生核希尔伯特空间表述。本节将针对抽象希尔伯特空间得出的结果，专门应用于以下情形： $\mathbb{H}$ 是一个函数空间。在真实数据应用中，无法获得完整函数，因此每个函数型数据 $X(t_i)$ 仅在有限个点上观测。对于这种情形，一个自然的空间选择是 $\mathbb{H}$ 为再生核希尔伯特空间（RKHS）。与更常考虑的空间 $L^2[a,b]$不同，再生核希尔伯特空间 $\mathbb{H}$ 使我们能够将 $\mathbb{H}$值随机元素视为真正的函数，因为点求值泛函定义良好且连续。这使得本文迄今建立的理论与基于离散观测数据的应用能够无缝衔接。关于再生核希尔伯特空间的文献极为丰富。若想快速了解再生核希尔伯特空间在函数型数据分析中的作用，请参阅Hsing和Eubank(2015年)。

设 $\mathbb{H}$ 是一个再生核希尔伯特空间（RKHS），其包含定义在紧集 $E$ 上的函数，其中核 $R(\cdot,\cdot)$ 在 $E\times E$ 上连续。再生性质表明

$$g(u)=\langle g,R(u,\cdot)\rangle_{\mathbb{H}},\ u\in E.$$

现在，设 $\{X(t)\ \ t\in\mathbb{R}^d\}$ 是一个平稳的 $\mathbb{H}$ 值过程，其协方差函数为 $C$，谱密度为 $f$。那么，它可以视为一个二元随机过程 $\{X(u,t):=\langle X(t)\ \ R(u,\cdot)\rangle_{\mathbb{H}}, u\in E, t\in\mathbb{R}^d\}$. 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X(u,t+h),X(v,t)) &= \langle C(h)R(u,\cdot),R(v,\cdot)\rangle_{\mathbb{H}}\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathbb{I}^{h^\top\theta}} f_{u,v}(\theta)d\theta,\end{aligned}\tag{8.1}$$

其中

$$f_{u,v}(\theta)=\langle f(\theta)R(u,\cdot),R(v,\cdot)\rangle_{\mathbb{H}}.$$

鉴于（8.1），将 $f_{u,v}(\theta)$ 称为谱密度或许更方便。然而，无法保证它对 $u\neq v$ 非负。根据柯西–施瓦茨不等式，我们对算子 $f(\theta)$ 的估计收敛速率可直接转化为 $f_{u,v}(\theta)$ 的估计收敛速率，对所有 $u,v$ 均成立。

假设对所有 $t\in\mathbb{T}_n$，过程均在公共离散点集 $D_n=\{u_{n,j},j=1,..,m_n\}$ 上观测。为了将部分观测的函数型数据与 $\mathbb{H}$ 中的完整函数型数据联系起来，可以采用以下方法。假设矩阵

$$\boldsymbol{R}_n:=\{R(u_{n,i},u_{n,j})\}_{i,j=1}^{m_n}\tag{8.2}$$

对每个 $n$ 都可逆。令 $\mathbb{H}_n$ 为由 $\{R(u,\cdot)\ u\in D_n\}$ 张成的 $\mathbb{H}$ 子空间，且 $\Pi_n$ 是到 $\mathbb{H}_n$ 上的投影算子。那么，对任意 $g\in\mathbb{H}$,

$$\tilde{g}:=\Pi_n g$$

在 $g$ 中的各点处进行插值， $D_n$ 事实上是 $g$ 在 $D_n$上的最小范数插值函数；参见 Wahba（1990）或命题 S.6.1。

T ~ ~平稳过程 $\{X（t）\}$ 的协方差为 $C（h）:=\Pi_nC（h）\Pi_n$。首先注意到

$$\|\widetilde{C}(h)\|_{\mathrm{tr}}\le\|C(h)\|_{\mathrm{tr}}.$$

~ ~ ~这由引理 S.7.1 （i）得出，因为 $\langle C（h）\ \mathscr{W}\rangle_{\mathrm{HS}}=\langle C（h）\ \ \mathscr{W}\rangle_{\mathrm{HS}}$，其中 $\mathscr{W}=\Pi_n\mathscr{W}\Pi_n$ 对于每个酉 $\mathscr{W}$都是酉的。因此，条件 $\int\|C（h）\|_{\mathrm{tr}}dh<\infty$ 确保~ ~ $\{X（t）\}$ 的谱密度 $f$ 定义良好，并满足

$$\tilde{f}(\theta)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathbb{I}^{h^\top\theta}}\widetilde{C}(h)dh.$$

~沿用（3.4）中基于数据 $X（t_i）$ 的方法，定义

$$\tilde{f}_n(\theta)=\Pi_n\hat{f}_n(\theta)\Pi_n.$$

~ ~考虑通过 $f$ 对 $f_n$进行估计。为使表述简洁，我们聚焦于高斯情形。以下结果可直接由定理4.3得出。

定理 8.1. 设过程 $\{X(t)\ t\in\mathbb{R}^d\}$ 是一个取值于 $\mathbb{H}$ 的零均值平稳高斯过程。假设 *C*、*K* 和 *S* 均成立。此外，若有

$$\Delta_n\cdot S_K\subset T_n-T_n\ \ \textit{for all } n.$$

那么，对于任意有界集 $\Theta$,

$$\sup_{\theta\in\Theta}\left(\mathbb{E}\left\|\tilde{f}_n(\theta)-\tilde{f}(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}^2\right)^{1/2}=\mathscr{O}\left(\delta_n^\gamma+B_1(\Delta_n)+B_2(\Delta_n)+\sqrt{\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}}\right),\tag{8.3}$$

如 $n\to\infty$。

~ ~请注意，在 (8.3) 中，我们分别用 $B_1(\Delta_n)$ $B_2(\Delta_n)$ 界定了 $B_1(\Delta_n)$ $B_2(\Delta_n)$，即 $B_1(\Delta_n)$ $B_2(\Delta_n)$~ 的对应项，其中将其中的 $C(h)$ 替换为 $C(h)$。这是利用以下简单事实得到的： $\|\mathscr{T}_1\mathscr{T}_2\|_{\mathrm{HS}} \le \|\mathscr{T}_1\|\|\mathscr{T}_2\|_{\mathrm{HS}}$，其中 $\|\mathscr{T}_1\|$ 表示 $\mathscr{T}_1$ 的算子范数。根据定理 8.1，要确定 $\mathbb{E}\|\tilde{f}_n(\theta) - f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}^2$ 的收敛速率，只需~考虑偏差 $\|f(\theta) - f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}$；其值需根据所考虑的再生核希尔伯特空间类型逐一评估。下面我们讨论一个能够得到特定收敛速率的例子。

考虑索об列夫空间 $\mathbb{H} = W_1[0,1]$，它由区间 $[0,1]$ 上形如 $c + \int_0^1 (t \wedge u)h(u)du$, $c \in \mathbb{R}$ 且 $h$ 可积的函数构成（参见 Wahba, 1990）。该空间中的内积为 $\langle f, g\rangle_{\mathbb{H}} := f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$，由此得到范数

$$\|g\|_{\mathbb{H}}^2 = g(0)^2 + \int_0^1 \left(g'(t)\right)^2 dt.$$

在此背景下，我们可以针对 $\mathbb{E}\|\tilde{f}_n(\theta) - f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}^2$陈述如下结果。

定理 8.2. 设正迹类算子 $f(\theta)$ 具有如下特征分解:

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j \phi_j \otimes \phi_j,$$

其中，特征值 $\nu_j$ 可求和（因为 $f(\theta) \in \mathbb{T}_+$）。假设对每个 $j$，导数 $\phi_j'$是利普希茨连续的，且 $|\phi_j'(s) - \phi_j'(t)| \le C_j|s-t|$，其中某个有限常数为$C_j$，且 $\sum_{j=1}^{\infty} C_j\nu_j^2 < \infty$。此外，假设抽样设计为 $u_{n,i} = i/m_n, 0 \le i \le m_n$。那么，

$$\|\tilde{f}(\theta) - f(\theta)\|_{\mathrm{HS}} = \mathscr{O}(m_n^{-1/2}).$$

定理8.2 的证明见S.6节。

9. 相关工作与讨论。本节重点介绍Panare-tos and Tavakoli （2013年）和Zhu and Politis （2020年）中的方法，聚焦于时间序列情形，并说明它们与我们方法的关系。

9.1. 与平顶核估计量的关系。平顶核估计量已在Politis （2011）； Zhu and Politis （2020年）等人的工作中得到倡导。根据Zhu and Politis （2020年）的关系（15），其中第3.1节提出的替代估计量具有如下形式

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{|u|<T} \lambda(B_T u)\hat{r}_u(\tau,\sigma)e^{-\mathbb{i}\omega u},$$

其中

$$\hat{r}_u(\tau,\sigma) = \frac{1}{T} \sum_{0\le t, t+u\le T-1} X_{t+u}(\tau)X_t(\sigma) \quad \text{and} \quad \lambda(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x)e^{-\mathbb{i}sx}dx$$

对于某个 $\Lambda(x)$。在 $d=1$ 的时间序列情形下，我们在 (5.2) 中的估计量的一种渐近等价改写如下:

$$\hat{f}_T(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{T} \sum_{|u|<T} K\left(\frac{u}{\Delta_T}\right) \cdot e^{-\mathbb{i}u\theta} \sum_{0\le t, t+u\le T-1} X_{t+u} \otimes X_t. \tag{9.1}$$

参见注3.2。因此，这两个估计量本质上相同，其中 $\omega$ 对应于 $\theta$，$B_T$ 对应于 $1/\Delta_T$，$\lambda$ 对应于 $K$。Zhu and Politis（2020年）关注 $p$ 次可微的平顶核 $\lambda$，其满足 $\lambda(t) = 1$，对所有 $\|t\| \le \epsilon$ 均成立，其中 $\epsilon > 0$ 为某个值，且 $p$ 根据协方差函数的尾部衰减进行调整。此类核以与本文中满足（5.8）的核 $K$ 本质相同的方式降低核谱密度估计量的偏差。通过（4.6）中的粗略计算，可以对此有一个大致的了解。

此外，在Zhu and Politis (2020年）的第 5 节中，提出了带宽参数 $B_T$的一种有效的数据依赖选择方法。作者基于互相关图的函数型版本进行选择。利用这一量，他们为选择 $B_T$提出了一条经验规则。在实践中，我们建议使用平顶核，并采用类似的方法来选择 $\Delta_T = 1/B_T$。然而，在不规则采样数据的设定下，对 $\Delta_T$ 的数据驱动自适应选择进行深入研究，仍有待进一步的理论和方法论研究。

9.2. 函数型时间序列的基于周期图的估计量。Panaretos 和 Tavakoli （2013年）的开创性工作研究了函数值时间序列，其取值于$(L^2[0,1],\mathbb{R})$。他们建立了关于谱密度算子推断的全面理论和方法，将经典的基于周期图的方法推广到函数型时间序列情形。该文提出的估计量为：

$$f_\omega^{(T)}(\tau,\sigma) = \frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\omega - \frac{2\pi s}{T}\right) p_{2\pi s/T}^{(T)}(\tau,\sigma), \tag{9.2}$$

其中

$$W^{(T)}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{B_T} W\left(\frac{x+2\pi j}{B_T}\right),$$

其中 $W$ 是一个具有有界支撑的渐消权重函数。这里，

$$p_\omega^{(T)}(\tau,\sigma) = \widetilde{X}_\omega^{(T)}(\tau)\widetilde{X}_{-\omega}^{(T)}(\sigma)$$

是周期图，其中

$$\widetilde{X}_\omega^{(T)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\sum_{t=0}^{T-1} X_t(\tau) e^{-\mathbb{i}\omega t},$$

是离散傅里叶变换（DFT）。这称为平滑周期图估计量（参见 Robinson，1983年）。

这些基于周期图的估计量的渐近性质，采用以下一般的基于累积量的假设进行研究：

条件 $C(\ell,k)$。对于每个 $j = 1,\dots,k-1$，

$$\sum_{t_1,\dots,t_{k-1}=-\infty}^{\infty} (1+|t_j|^\ell)\|\mathrm{cum}(X_{t_1},\dots,X_{t_{k-1}},X_0)\|_2 < \infty.$$

例如，根据 Panaretos 和 Tavakoli (2013年)中的定理3.6，若 $C(1,2)$ 和 $C(1,4)$ 成立，则 $f_{(T)\omega}(\cdot,\cdot)$ 在 $\omega \neq 0, \pm\pi$ 下的均方误差为：

$$\mathbb{E}\|\mathscr{F}_\omega^{(T)} - \mathscr{F}_\omega\|_{\mathrm{HS}}^2 = \mathscr{O}\left(B_T^2 + B_T^{-1}T^{-1}\right),$$

其中，$\mathscr{F}_{(T)\omega}$和 $\mathscr{F}_{\omega}$分别是核为 $f_{(T)\omega}$和 $f_{\omega}$的算子。 $B_T$ 的最优速率选择为 $T^{-1/3}$，由此得到估计量 $\mathscr{O}(T^{-1/3})$的一致性速率界。

我们的结果在对协方差施加简单结构假设的情况下，对收敛速率给出了更细致的估计。事实上，注意条件 $C(1,2)$ 对应于我们的条件 $\mathscr{P}_D(\beta, L)$，其中 $\beta = 1$ 满足 (5.7)。我们的定理 5.2（参见关系 (5.10) 及 $d = 1$）给出了一致性速率界 $\mathscr{O}(T^{-\beta/(2\beta+1)})$；对于 $\beta = 1$，该界与 Panaretos 和 Tavakoli（2013）的速率最优界相符。然而，与条件 $C(1,2)$ 相比，我们的条件 (5.7) 允许更广泛的协方差结构，其中我们允许 $\beta > 0$ 小于 1。正如第 6 节所讨论的，速率 $\mathscr{O}(T^{-\beta/(2\beta+1)})$ 在函数类$\mathscr{P}_D(\beta, L)$中是极小极大最优的。

正如Zhu and Politis (2020年) 第 3 节所述，可以将时域估计量与频域（基于周期图的）估计量联系起来。事实上，可以认为，我们在 (9.1) 中的估计量渐近地对应于采用窗函数的 (9.2) 中基于周期图的估计量

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} K(t) dt,$$

其中 $\Delta_T \sim 1/B_T$。在这种情况下，我们有 $2\pi \|W\|_2^2 = \|K\|_2^2$，并且（9.1）和（9.2）中估计量的渐近协方差相同（例如，参见 Panaretos 和 Tavakoli，2013年 的定理 3.7，以及我们的推论 7.2）。Panaretos 和 Tavakoli （2013年）在条件$C(1,2)$和 $C(1,4)$，以及 $C(0,k)$下，证明了基于周期图的估计量具有渐近正态性，其中所有 $k \geq 2$。在定理 7.1 中，我们采用了更强的假设，即底层过程为高斯过程。不过，我们证明了，在算子协方差函数和伪协方差函数满足较宽松的尾部衰减条件时，我们的估计量仍具有渐近正态性。

致谢。作者感谢 Zakhar Kabluchko 在理解内在体积的性质方面提供的帮助。第一作者获得了 Onassis 基金会的资助——奖学金编号：F ZN 028-1 /2017-2018。

## 参考文献

BARDET, J.-M. 和 BERTRAND, P. R.（2010年）。对在随机时刻观测到的连续时间高斯过程的谱密度进行非参数估计。《斯堪的纳维亚统计学杂志》37 458–476。MR2724508 BENTKUS, R.（1985）。可微函数空间中谱密度统计估计量的一致收敛速率。《立陶宛数学杂志》25 209–219。BILLINGSLEY, P.（2012）。《概率与测度》。Wiley，纽约。BINGHAM, N. H.、GOLDIE, C. M.、TEUGELS, J. L. 和 TEUGELS, J.（1989）。《正则变差》27。剑桥大学出版社。BOCHNER, S.（1948）。《傅里叶积分讲义》。Chelsea 出版公司。BRILLINGER, D. R.（2001）。《时间序列》。应用数学经典丛书36。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州。数据分析与理论，1981年版重印。MR1853554 BROCKWELL, P. J. 和 DAVIS, R. A.（2006）。《时间序列：理论与方法》。《施普林格统计学丛书》。施普林格，纽约；第二版（1991年）重印。MR2839251 CEROVECKI, C. 和 HÖRMANN, S.（2017）。关于函数型时间序列离散傅里叶变换的中心极限定理。《多元分析杂志》154 282–295。CHANG, C.-H.、HUANG, H.-C. 和 ING, C.-K.（2017）。具有时间趋势和测量误差的随机过程模型的混合域渐近性。《伯努利》23 159–190。DAVIES, R. B.（1973）。平稳高斯时间序列的渐近推断。《应用概率进展》469–497。EFROMOVICH, S.（1998）。谱密度的数据驱动高效估计。《美国统计学会会刊》93 762–769。FAZEKAS, I. 和 KUKUSH, A. G.（2000）。线性模型中最小二乘估计量在递增域内的填充渐近性。《随机过程统计推断》3 199–223。

FELLER, W.（2008）。《概率论及其应用导论》，第2卷。John Wiley & Sons。GINOVYAN, M. S.（2011）。连续时间平稳模型的谱泛函高效估计。应用数学学报**115** 233–254。MR2818916 GRUBER, P. M.（2007）。《凸几何与离散几何》336。Springer Science & Business Media。GUYON, X.（1982）。d维格点上平稳过程的参数估计。《生物计量学》69 95–105。HALL, P. 和 PATIL, P.（1994）。平稳随机场自协方差非参数估计量的性质。《概率论及相关领域》99 399–424。HANNAN, E. J.（1970年）。《多重时间序列》。John Wiley and Sons, Inc.，纽约—伦敦—悉尼。MR0279952HARDY, G. H.、LITTLEWOOD, J. E.、PÓLYA, G.、PÓLYA, G.、LITTLEWOOD, D. 等（1952）。《不等式》。剑桥大学出版社。HÖRMANN, S. 和 KOKOSZKA, P.（2012）。函数型时间序列。载于《统计学手册》30 157–186。Elsevier。HORVÁTH, L.、KOKOSZKA, P. 和 RICE, G.（2014）。函数型时间序列平稳性的检验。《计量经济学杂志》179 66–82。HSING, T. 和 EUBANK, R.（2015）。《函数型数据分析的理论基础：线性算子导论》。John Wiley & Sons。ISSERLIS, L.（1918）。关于正态频率分布中任意变量个数下任意阶积矩系数的一个公式。《生物计量学》12 134–139。KHINTCHINE, A.（1934）。平稳随机过程的相关理论。《数学年刊》109 604–615。KUUSELA, M. 和 STEIN, M. L.（2018）。Argo剖面浮标数据的局部平稳时空插值。《英国皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》474 20180400。LI, D.、ROBINSON, P. M. 和 SHANG, H. L.（2020）。长程相关曲线时间序列。《美国统计学会会刊》115 957–971。LOTZ, M.、MCCOY, M. B.、NOURDIN, I.、PECCATI, G. 和 TROPP, J. A.（2018）。凸体内在体积的集中。arXiv预印本 arXiv:1810.12412。MAITRA, T. 和 BHATTACHARYA, S.（2020）。分数布朗运动驱动的随机微分方程的递增域填充渐近性。arXiv预印本 arXiv:2005.09577。MATSUDA, Y. 和 YAJIMA, Y.（2009）。 $R^d$上不规则间隔数据的傅里叶分析。《皇家统计学会杂志：B辑（统计方法学）》71 191–217。PANARETOS, V. M. 和 TAVAKOLI, S.（2013）。函数空间中平稳时间序列的傅里叶分析。《统计年刊》41 568–603。PERCIVAL, D. B. 和 WALDEN, A. T.（2006）。《时间序列分析的小波方法》。《剑桥统计与概率数学丛书》4。剑桥大学出版社，剑桥；2000年原版重印 [MR1770693]。MR2218866 PERCIVAL, D. B. 和 WALDEN, A. T.（2020年）。《单变量时间序列的谱分析》。《剑桥统计与概率数学丛书》51。剑桥大学出版社，剑桥。MR4406756 POLITIS, D. N.（2011）。大样本协方差和谱密度矩阵的高阶精确半正定估计。《计量经济理论》703–744。ROBINSON, P.（1983 3 343 368 ）。功率谱估计的各种方法综述。载于《统计学手册》–。ROEMMICH, D.、GOULD, W. J. 和 GILSON, J.（2012）。从挑战者号考察到Argo计划的135年全球海洋变暖。《自然·气候变化》2 425-428。ROSENBLATT, M.（1985）。《平稳序列与随机场》。施普林格。SAMAROV, A.（1977）。谱密度估计量风险的下界。《信息传输问题》13 67–72。SCHUSTER, A.（1898）。隐含周期性的研究及其在气象现象一个假设的26天周期中的应用。《地磁学》3 13–41。SHEN, J.、STOEV, S. 和 HSING, T.（2022年）。切场、内禀平稳性与自相似性。《电子概率期刊》27 1–56。SIMON, B.（2015年）。《分析学综合课程》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。TSAY, R. S.（2013年）。《多变量时间序列分析：含R和金融应用》。John Wiley & Sons。TSYBAKOV, A. B.（2008）。《非参数估计导论》。Springer Science & Business Media。VORONOI, G.（1908）。连续参数在二次型理论中的新应用。第一篇论文：关于正定完美二次型的若干性质。《纯粹与应用数学杂志》1908 97 - 102。

WAHBA，G.（1990年）。观测数据样条模型。CBMS-NSF 应用数学区域会议丛书**59**。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州。MR1045442 YAN, D.-M.、WANG, W.、LÉVY, B. 和 LIU, Y.（2013年）。用于网格生成的裁剪 Voronoi 图的高效计算。《计算机辅助设计》45，843–852。YARGER, D.、STOEV, S. 和 HSING, T.（2022年）。Argo 数据的函数型数据方法。《应用统计年刊》16，216-246。ZHU, T. 和 POLITIS, D. N.（2020年）。函数型时间序列的高阶精确谱密度估计。《时间序列分析杂志》41，3–20。

## 补充材料

补充材料包含详细证明和一些说明。为了将补充材料中的章节和结果与主论文中的章节和结果区分开来，我们在补充材料中的章节、引理等前面加上字母“S”。

为方便起见，我们使用记号 $a_n \lesssim_c b_n$ 表示存在一个有限的正常数 $B$，使得 $a_n \le B b_n$ 对所有 $n$ 均成立。

S.1. 第 4 节的证明。我们首先回顾一些关键记号。$\mathbb{H}$值二阶平稳过程 $X = \{X(t)\ t \in \mathbb{R}^d\}$ 的谱密度为：

$$f(\theta) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ih^\top \theta} C(h) dh, \quad \theta \in \mathbb{R}^d, \tag{S.1.1}$$

其中，最后一个积分是在 Bochner 意义下理解的，并且 $C(t) = \mathbb{E}[X(t) \otimes X(0)]$ 是 $X$的算子自协方差函数。

谱密度的估计量定义为：

$$\hat{f}_n(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{t \in \mathbb{T}_n} \sum_{s \in \mathbb{T}_n} e^{i(t-s)^\top \theta} \frac{X(t) \otimes X(s)}{|T_n \cap (T_n - (t-s))|} \cdot K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right) \cdot |V(t)| \cdot |V(s)|. \tag{S.1.2}$$

另外，引入一个基于连续采样路径$\{X(t)\ \ t \in T_n\}$的辅助理想化估计量：

$$g_n(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{t \in T_n} \int_{s \in T_n} e^{i(t-s)^\top \theta} \frac{X(t) \otimes X(s)}{|T_n \cap (T_n - (t-s))|} K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right) dt ds. \tag{S.1.3}$$

S.1.1. 定理*4.1*的证明。 我们首先回顾该定理的表述。

定理 S.1.1（定理 4.1）。设假设 *C*、*K*和*S* 成立，并假设 $\delta_n \vee |T_n|^{-1} \to 0$。选择 $\Delta_n \to \infty$ 使得

$$\Delta_n \cdot S_K \subset T_n - T_n \ \textit{for all } n,$$

其中 $A - B := \{a - b : \ a \in A,\ b \in B\}$ 对于集合 $A$，$B \subset \mathbb{R}^d$。那么，对于任意有界集 $\Theta \subset \mathbb{R}^d$，我们有

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta) - f(\theta) \right\|_{\mathrm{HS}} = \mathcal{O}\left(\delta_n^\gamma + B_1(\Delta_n) + B_2(\Delta_n)\right), \tag{S.1.4}$$

其中

$$B_1(\Delta_n) := \left\| \int_{h \in \Delta_n \cdot S_K} e^{ih^\top \theta} C(h) \left(1 - K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)\right) dh \right\|_{\mathrm{HS}},$$

$$B_2(\Delta_n) := \left\| \int_{h \notin \Delta_n \cdot S_K} e^{ih^\top \theta} C(h) dh \right\|_{\mathrm{HS}}.$$

证明。由三角不等式，

$$\left\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-f(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}\le\left\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}g_n(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}+\|\mathbb{E}g_n(\theta)-f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}.$$

由（S.1.1）可立即得到 $f$，再结合包含关系 $\Delta_n\cdot S_K\subset T_n-T_n$，可知

$$\|\mathbb{E}g_n(\theta)-f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}\le B_1(\Delta_n)+B_2(\Delta_n).$$

为完成证明，需要证明

$$\|\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}g_n(\theta)\|_{\mathrm{HS}}=\mathscr{O}(\delta_n^{\gamma}). \tag{S.1.5}$$

为计算 $\|\mathbb{E}f_n(\theta)-\mathbb{E}g_n(\theta)\|_{\mathrm{HS}}$，首先将（S.1.3）中的被积函数记为

$$h_n(t,s;\theta):=e^{\mathrm{i}(t-s)^{\top}\theta}\frac{X(t)\otimes X(s)}{|T_n\cap(T_n-(t-s))|}K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right).$$

根据（S.1.2），且由于 $|V(w)|\cdot|V(v)|=\int_{t\in V(w)}\int_{s\in V(v)}\mathbb{I}_{(t\in V(w),\ s\in V(v))}dtds$，因此可以写成：

$$\begin{aligned}&g_n(\theta)-\hat{f}_n(\theta)\\&=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{w\in\mathbb{T}_n}\sum_{v\in\mathbb{T}_n}\int_{t\in V(w)}\int_{s\in V(v)}\left(h_n(t,s;\theta)-h_n(w,v;\theta)\right)dtds.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbb{E}g_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\right\|_{\mathrm{HS}}\\&\le\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{w\in\mathbb{T}_n}\sum_{v\in\mathbb{T}_n}\int_{t\in V(w)}\int_{s\in V(v)}\|\mathbb{E}h_n(t,s;\theta)-\mathbb{E}h_n(w,v;\theta)\|_{\mathrm{HS}}dtds.\end{aligned} \tag{S.1.6}$$

在证明的其余部分，我们将利用 $K$ 和 $C$的光滑性，并通过常规但技术性的分析证明最后一个求和的阶为 $\mathscr{O}(\delta_n^{\gamma})$。这将得到（S.1.5），并完成（S.1.4）的证明。

回顾一下，$S_K$ 表示核函数 $K$ 的有界支撑。这意味着

$$K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right)=0,\ \text{whenever}\ t-s\notin\Delta_n\cdot S_K.$$

在（S.1.6）各个求和中的每个积分里，我们都有 $t\in V(w)$ 以及 $s\in V(v)$。因此，

$$t-s=t-w+w-v+v-s\in w-v+B(0,2\delta_n),$$

其中我们根据 $\delta_n$（3.2）和 $B(0,r)=\{x\in\mathbb{R}^d$ 的定义，使用了$\max\{\|t-w\|,\|s-v\|\}\le\delta_n$:
$\|x\|_2<r\}$。

由（S.1.6），我们有

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}g_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\|_{\mathrm{HS}}\le&\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{w\in\mathbb{T}_n}\sum_{v\in\mathbb{T}_n}\iint_{t,s\in T_n}\|C(t-s)-C(w-v)\|_{\mathrm{HS}}|L_n(w-v)|dtds\\&+\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{w\in\mathbb{T}_n}\sum_{v\in\mathbb{T}_n}\iint_{t,s\in T_n}\|C(t-s)\|_{\mathrm{HS}}|L_n(t-s)-L_n(w-v)|dsdt\\=:&\ I_n+J_n,\end{aligned} \tag{S.1.7}$$

其中

$$L_n(x):=\frac{e^{\mathrm{i}x^{\top}\theta}}{|T_n\cap(T_n-x)|}K\Big(\frac{x}{\Delta_n}\Big),\ \ x\in\mathbb{R}^d.$$

注意，由于 $K(x/\Delta_n) = 0$ 对 $x \notin \Delta_n \cdot S_K$成立，且 $\Delta_n^d/|T_n| \to 0$，引理 S.1.4 意味着 $|T_n \cap (T_n - x)| \sim |T_n|$ 关于 $x \in \Delta_n \cdot S_K$ 一致成立。这一点以及核$K$ 的有界性意味着

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |L_n(x)| = \mathscr{O}\Big(\frac{1}{|T_n|}\Big). \tag{S.1.8}$$

回顾假设C中的式(3.1，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{y\in B(x,\delta)} \|C(y) - C(x)\|_{\mathrm{tr}} dx \le \|\!|C|\!\|_\gamma \cdot \delta^\gamma, \ \ \delta \in (0,1) \tag{S.1.9}$$

因此，对于项 $I_n$ （见S.1.7），利用关系式（S.1.8）和（S.1.9），并作变量替换 $x := t - s$, 得到

$$\begin{aligned} I_n &\le \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{t\in T_n} \int_{s\in T_n} \sup_{\substack{\|t'-t\|\le\delta_n \\ \|s'-s\|\le\delta_n}} \|C(t-s) - C(t'-s')\|_{\mathrm{HS}} \cdot \sup_{\tau\in\mathbb{R}^d} |L_n(\tau)| dtds \\ &\le_c \frac{1}{|T_n|} \int_{s\in T_n} \Big( \int_{x\in s+T_n} \sup_{y\,:\,\|x-y\|\le 2\delta_n} \|C(x) - C(y)\|_{\mathrm{HS}} dx \Big) ds \\ &\le_c \frac{1}{|T_n|} \int_{s\in T_n} \|\!|C|\!\|_\gamma \cdot \delta_n^\gamma ds = \mathscr{O}(\delta_n^\gamma). \end{aligned}$$

接下来，考察项 $J_n$ （见S.1.7）。我们将在下文证明

$$\sup_{\|x-y\|\le 2\delta_n} |L_n(x) - L_n(y)| = \mathscr{O}\Big(\frac{\delta_n}{|T_n|}\Big). \tag{S.1.10}$$

因此，回顾 $\|t - s - (w - v)\| \le 2\delta_n$，每当 $t \in V(w)$ 且 $s \in V(v)$时，关系式(S.1.10对于项 $J_n$ （见S.1.7）蕴含

$$J_n \le_c \frac{\delta_n}{|T_n|} \int_{t\in T_n} \int_{s\in T_n} \|C(t-s)\|_{\mathrm{HS}} dtds = \mathscr{O}(\delta_n),$$

wher最后一个关系式由变量替换 $x := t - s$ 以及假设C (a)可得 .

为完成证明，还需证明式(S.1.10)。通过添加并减去若干项，我们得到

$$|L_n(x) - L_n(y)| \le |K(x/\Delta_n)| \Big| \frac{1}{|T_n \cap (T_n - x)|} - \frac{1}{|T_n \cap (T_n - y)|} \Big| \tag{S.1.11}$$

$$+ \frac{|K(x/\Delta_n) - K(y/\Delta_n)|}{|T_n \cap (T_n - y)|} + \frac{|K(y/\Delta_n)|}{|T_n \cap (T_n - y)|} \Big| e^{\mathrm{i}x^\top\theta} - e^{\mathrm{i}y^\top\theta} \Big| \tag{S.1.12}$$

$$=: A + B + C. \tag{S.1.13}$$

注意， $K(y/\Delta_n)$和 $K(x/\Delta_n)$在 $x$和 $y$位于 $\Delta_n \cdot S_K$之外时均为零。因此，由于 $\delta_n \to 0$ 和 $\Delta_n \to \infty$，式 (S.1.11) 的右侧对所有满足 $\|x - y\| \le 2\delta_n$且 $\|y\| \ge$const $\cdot \Delta_n$的，因此，式 (S.1.10) 中的上确界在以下集合上取值时不会改变

$$\mathscr{I}_n := \{(x, y) : \|x - y\| \le 2\delta_n, \ \|y\| \le \mathrm{const} \cdot \Delta_n\}.$$

因此，我们将注意力限制在 $(x,\ y) \in \mathscr{I}_n$。根据引理 S.1.4，有 $|T_n \cap (T_n - y)| \sim |T_n|$，关于 $(x,\ y) \in \mathscr{I}_n$一致成立。由此事实以及复指数函数和核的利普希茨性质 $K$ （根据假设K的 (c)），可立即推出

$$B \le_c \frac{\delta_n/\Delta_n}{|T_n|} \quad \text{and} \quad C \le_c \frac{\delta_n}{|T_n|},$$

关于 $(x,\ y) \in \mathscr{I}_n$一致成立。

现在，对于项 $A$，利用核的有界性以及 $\|x-y\| \le 2\delta_n$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} A &\le \|K\|_\infty \frac{\Big||T_n \cap (T_n - x)| - |T_n \cap (T_n - y)|\Big|}{|T_n \cap (T_n - x)| \cdot |T_n \cap (T_n - y)|} \\ &\le \|K\|_\infty \frac{|T_n + B(0, 2\delta_n)| - |T_n|}{|T_n \cap (T_n - x)| \cdot |T_n \cap (T_n - y)|} \\ &\le_c \frac{|T_n + B(0, 2\delta_n)| - |T_n|}{|T_n|^2} = \mathscr{O}\left(\frac{\delta_n}{|T_n|^{1+1/d}}\right), \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由引理 S.1.4 和假设 S推出。请注意，最后一个界关于 $(x, y) \in \mathscr{I}_n$ 是一致的。结合上述关于各项 $A, B$、和 $C$的界，我们得到（S.1.10）。证明至此完成。□

S.1.2. 定理*4.2*的证明。 为便于查阅，我们先回顾定理4.2的陈述。

定理 S.1.2（定理 4.2）。 设 $X = \{X(t)\ t \in \mathbb{R}^d\}$ 是一个零均值、严格平稳的实值 $\mathbb{H}$值过程。假设条件 *C*、*K*、*S*和 *V* 均成立。此外，假设 $\Delta_n$ 满足

$$\Delta_n \cdot S_K \subset T_n - T_n \qquad \textit{for all } n, \textit{ and} \qquad \delta_n + \Delta_n^d / |T_n| \to 0 \textit{ as } n \to \infty.$$

*Then*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}\|\hat{f}_n(\theta) - \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\|_{\mathrm{HS}}^2 = \mathscr{O}\left(\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}\right), \textit{ as } n \to \infty.$$

证明。下文中，我们将用 $\Delta$ 和 $T$ 分别代替 $\Delta_n$ 和 $T_n$。回顾主论文中的（4.12）和（4.13）。具体而言，我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\|\hat{f}_n(\theta) - \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\|_{\mathrm{HS}}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \sum_{t \in \mathbb{T}_n} \sum_{s \in \mathbb{T}_n} \sum\sum_{\substack{h \in [\Delta \cdot S_K] \cap (\mathbb{T}_n - t) \\ h' \in [\Delta \cdot S_K] \cap (\mathbb{T}_n - s)}} e^{\mathrm{i}(h-h')^\top \theta} K\left(\frac{h}{\Delta}\right) K\left(\frac{h'}{\Delta}\right) \\ &\quad \cdot |V(t+h)| \cdot |V(t)| \cdot |V(s+h')| \cdot |V(s)| \\ &\quad \cdot \frac{\mathrm{Cov}\left(X(t+h) \otimes X(t), X(s+h') \otimes X(s)\right)}{|T \cap (T-h)||T \cap (T-h')|} \end{aligned} \tag{S.1.14}$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}\left(X(t+h) \otimes X(t), X(s+h') \otimes X(s)\right) \\ &:= \mathbb{E}\left\langle X(t+h) \otimes X(t) - C(h), X(s+h') \otimes X(s) - C(h')\right\rangle_{\mathrm{HS}}. \end{aligned}$$

˙根据定义 4.1 (主论文)，由于 $X$ 是实的 $C = C$，并且

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}\left(X(t+h) \otimes X(t), X(s+h') \otimes X(s)\right) \\ &= \mathbb{E}\langle X(t+h), X(s+h')\rangle_{\mathbb{H}} \cdot \mathbb{E}\langle X(s), X(t)\rangle_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \langle C(t-s+h), C(s+h'-t)\rangle_{\mathrm{HS}} \\ &\quad + \mathrm{cum}\left(X(t+h), X(t), X(s+h'), X(s)\right). \end{aligned} \tag{S.1.15}$$

为简化记号，记作 $\operatorname{cum}(s,\ t,\ u,\ v) = \operatorname{cum}(X(s)\ X(t)\ X(u)\ X(v))$。固定一个实 CONS $\{e_j\}$，并使用命题 S.5.2 (另见主论文中的 (4.9)) 中的表示。接下来，我们将右侧 (S.1.14) 中的和拆分为与分解 (S.1.15) 对应的三项。具体而言，我们定义

$$A := \sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-t)\\ h'\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-s)}}\sum e_{\mathbb{I}}^{(h-h')^\top\theta} K\left(\frac{h}{\Delta}\right) K\left(\frac{h'}{\Delta}\right)\cdot|V(t+h)|\cdot|V(t)|$$
$$\cdot|V(s+h')|\cdot|V(s)|\cdot\frac{\mathbb{E}\left\langle X(t+h),X(s+h')\right\rangle_{\mathbb{H}}\cdot\mathbb{E}\left\langle X(s),X(t)\right\rangle_{\mathbb{H}}}{|T\cap(T-h)||T\cap(T-h')|},$$
$$B := \sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-t)\\ h'\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-s)}}\sum e_{\mathbb{I}}^{(h-h')^\top\theta} K\left(\frac{h}{\Delta}\right) K\left(\frac{h'}{\Delta}\right)\cdot|V(t+h)|\cdot|V(t)|$$
$$\cdot|V(s+h')|\cdot|V(s)|\cdot\frac{\left\langle C(t-s+h),C(s-t+h')\right\rangle_{\mathrm{HS}}}{|T\cap(T-h)||T\cap(T-h')|}$$

and

$$C := \sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-t)\\ h'\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-s)}}\sum e_{\mathbb{I}}^{(h-h')^\top\theta} K\left(\frac{h}{\Delta}\right) K\left(\frac{h'}{\Delta}\right)\cdot|V(t+h)|\cdot|V(t)|$$
$$\cdot|V(s+h')|\cdot|V(s)|\frac{\operatorname{cum}\left(X(t+h),X(t),X(s+h'),X(s)\right)}{|T\cap(T-h)||T\cap(T-h')|}.$$

因此，

$$(2\pi)^d\mathbb{E}\|\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\|_{\mathrm{HS}}^2 = A+B+C. \tag{S.1.16}$$

在下文中，我们将得到的界基于对各求和项绝对值的求和。因此，根据引理 S.1.4（下文）以及假设 $\Delta^d = o(|T|)$，$A$、$B$、$C$中的分母可以替换为 $|T|^{-2}$.

我们从项 $C$开始。引理 S.1.7表明

$$C = \mathscr{O}\left(\frac{\mathscr{N}(\Delta_n\cdot S_K,\mathbb{T}_n)}{|T_n|}\right) = \mathscr{O}\left(\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}\right), \tag{S.1.17}$$

其中，最后一个关系由引理 S.1.3得出。

项 $B$ 的上界为

$$|B| \le \frac{1}{|T_n|^2}\sum_{\substack{t,s\in\mathbb{T}_n\\ u\in\mathbb{T}_n\cap(t+\Delta\cdot S_K)\\ v\in\mathbb{T}_n\cap(s+\Delta\cdot S_K)}}\|C(u-s)\|_{\mathrm{HS}}\|C(v-t)\|_{\mathrm{HS}}\cdot|V(t)|\cdot|V(s)|\cdot|V(u)|\cdot|V(v)|,$$

其中我们进行了如下变量替换 $u = t+h$ 以及 $v = s+h'$. 应用引理 S.1.6，立即可得

$$B = \mathscr{O}\left(\frac{\mathscr{N}(\Delta_n\cdot S_K,\mathbb{T}_n)^2}{|T_n|^2}\right) = \mathscr{O}\left(\frac{\Delta_n^{2d}}{|T_n|^2}\right), \tag{S.1.18}$$

其中我们应用了引理 S.1.3。

最后，我们将注意力转向项 $A$。注意到

$$|\mathbb{E}\langle X,Y\rangle| = |\mathbb{E}\operatorname{trace}(X\otimes Y)| = |\operatorname{trace}(\mathbb{E}[X\otimes Y])| \le \|\mathbb{E}[X\otimes Y]\|_{\mathrm{tr}} \tag{S.1.19}$$

根据引理 S.7.1 的 (iii)。因此，

$$
\begin{aligned}
|A| \leq_c \frac{\|K\|_\infty^2}{|T|^2} \sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n} \sum_{\substack{h\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-t)\\ h'\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-s)}}\sum \left\|\mathbb{E}[X(t+h)\otimes X(s+h')]\right\|_{\mathrm{tr}} \\
\cdot \|\mathbb{E}[X(s)\otimes X(t)]\|_{\mathrm{tr}} \cdot |V(t+h)|\cdot|V(t)|\cdot|V(s+h')|\cdot|V(s)| \\
= \frac{\|K\|_\infty^2 \mathscr{N}(\Delta\cdot S_K,\mathbb{T}_n)}{|T|}\cdot A_1\cdot A_2,
\end{aligned}
$$

其中

$$
A_1 = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}\|C(s-t)\|_{\mathrm{tr}}\cdot|V(t)|\cdot|V(s)|
$$

and

$$
A_2 = \frac{1}{\mathscr{N}(\Delta\cdot S_K,\mathbb{T}_n)} \sum_{\substack{h\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-t)\\ h'\in[\Delta\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-s)}}\sum \left\|C(t-s+h-h')\right\|_{\mathrm{tr}}\cdot|V(t+h)|\cdot|V(s+h')|.
$$

Now

$$
A_2 \leq \frac{1}{\mathscr{N}(\Delta\cdot S_K,\mathbb{T}_n)} \max_{t,s\in\mathbb{T}_n} \sum_{\substack{u\in\mathbb{T}_n\cap(t+\Delta\cdot S_K)\\ v\in\mathbb{T}_n\cap(s+\Delta\cdot S_K)}} \|C(u-v)\|_{\mathrm{tr}}\cdot|V(u)|\cdot|V(v)|.
$$

由引理 S.1.5 可得 $A_2 = \mathscr{O}(1)$。 此外，仔细考察引理 S.1.5 的证明可知， $A_1$ 也具有 $\mathscr{O}(1)$的阶。仅保留关于 $A$的主导界，我们得到

$$
A = \mathscr{O}\left(\frac{\mathscr{N}(\Delta\cdot S_K,\mathbb{T}_n)}{|T|}\right) = \mathscr{O}\left(\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}\right), \tag{S.1.20}
$$

由引理 S.1.3。根据（S.1.16），汇总（S.1.17）、（S.1.18）和（S.1.20）中的所有界，我们完成了定理的证明。 □

S.1.3. 定理*4.1* 和 *4.2* 证明中用到的引理。对于接下来的引理，我们需要定义以下量:

$$
\mathscr{N}(A,\mathbb{T}_n) := \max_{w\in\mathbb{T}_n}\left|\cup_{v\in\mathbb{T}_n, w-v\in A+B(0,2\delta_n)}V(v)\right|. \tag{S.1.21}
$$

这是 $w$ 上所有镶嵌单元的并集的最大体积，其中这些单元的代表点 $v$'位于 $w$ 的 $2\delta_n$ 膨胀 $A$ 邻域内。

引理 S.1.3. 设 $\mathscr{N}(\Delta_n\cdot S_K,\mathbb{T}_n)$ 按 (S.1.21) 定义，并假设假设条件 *S* 的 (a) 成立。则

$$
\mathscr{N}(\Delta_n\cdot S_K,\mathbb{T}_n) = \mathscr{O}\left(\Delta_n^d\right), \quad as\ \Delta_n\to\infty.
$$

证明。事实上，设 $Z(t)$: $=\cup_{s\in\mathbb{T}_n, t-s\in\Delta_n\cdot S_K+B(0,2\delta_n)}V(s)$ 并且 $t_0\in\mathbb{T}_n$. 我们将证明

$$
Z(t_0)\subseteq B(t_0, 3\delta_n+\Delta_n\cdot M_K), \tag{S.1.22}
$$

其中 $M_k =$ 上确界$_{h\in S_K}\|h\|_2$. 假设 $u\in Z(t_0)$。那么，存在 $s_u\in\mathbb{T}_n$ 使得

$$
\|t_0-s_u\|_2 \leq \Delta_n\cdot M_K + 2\delta_n
$$

其中 $u \in V(s_u)$。因此，

$$\|u - t_0\|_2 \le \|u - s_u\|_2 + \|s_u - t_0\|_2 \le \delta_n + \Delta_n M_K + 2\delta_n = 3\delta_n + \Delta_n M_K,$$

这意味着（S.1.22）。由此可得，

$$\begin{aligned}\mathscr{N}(\Delta_n \cdot S_K, \mathbb{T}_n) &= \max_{t \in \mathbb{T}_n} |Z(t)| \le |B(0, 3\delta_n + \Delta_n M_K)| \\ &= \mathscr{O}\left((\Delta_n + \delta_n)^d\right) = \mathscr{O}\left(\Delta_n^d\right),\end{aligned}$$

由于 $\Delta_n \to \infty$，其中最后一个关系由假设 S 的 (a) 部分推出。 □

引理 S.1.4. 在假设 *S* 下，对于 $\|h\|_2 \le |T_n|^{1/d}$，我们有

$$\frac{|T_n| - |T_n \cap (T_n - h)|}{|T_n|} = \mathscr{O}\left(\frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/d}}\right), \text{ as } n \to \infty.$$

因此，若 $\sup_{h \in A_n} \|h\|^d = o(|T_n|)$，则有

$$\sup_{h \in A_n} \frac{|T_n \cap (T_n - h)|}{|T_n|} = \mathscr{O}(1).$$

证明。我们将关键地用到凸分析中的 Steiner公式（例如参见Gruber，2007）。我们有

$$\frac{|T_n| - |T_n \cap (T_n - h)|}{|T_n|} \le \frac{|T_n + B(0, \|h\|_2)| - |T_n|}{|T_n|}.$$

将 Steiner公式应用于凸集 $T_n$ 可得

$$|T_n + B(0, \|h\|_2)| = \sum_{j=0}^{d} \mu_j(T_n) \|h\|_2^{d-j},$$

其中 $\mu_j(\cdot)$ 表示阶数为 $j$ 的内在体积。注意，$\mu_d(T_n) = |T_n|$. 因此，

$$\begin{aligned}\frac{|T_n + B(0, \|h\|_2)| - |T_n|}{|T_n|} &= \sum_{j=0}^{d-1} \frac{\mu_j(T_n) \|h\|_2^{d-j}}{|T_n|} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \mu_j\left(\frac{T_n}{|T_n|^{1/d}}\right) \cdot \left(\frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/d}}\right)^{d-j},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由内在体积的齐次性得出。

假设S的 (b) 部分，加上内在体积在凸体集合上关于 Hausdorff度量的连续性（例如参见 Lotz 等人 （2018）或 Gruber （2007）中的第 1.2.2 节，或定理6.13(iii)），以及 $\|h\|_2 \le |T_n|^{1/d}$ 即可完成证明。 □

下面的注释表明，利用 Steiner 公式得到的引理 S.1.4 中的界的阶无法改进。

注记 S.1.1. 对于 $d = 2$ 和 $d = 3$ 的情况，当 $T_n$ 分别为圆和球面时，我们可以精确计算所求体积。事实上，对于 $d = 2$，我们有

$$\frac{|T_n| - |T_n \cap (T_n - h)|}{|T_n|}$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{\|h\|_2}{2|T_n|^{1/2}}\right) + \frac{1}{2|T_n|^{1/2}} \|h\|_2 \sqrt{4 - \left(\frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/2}}\right)^2}$$

$$= \mathscr{O}\left(\frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/2}}\right),$$

对于 $d=3$，我们有

$$\frac{|T_n| - |T_n \cap (T_n - h)|}{|T_n|} = \frac{3}{4} \frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/3}} - \frac{1}{16} \left(\frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/3}}\right)^3 = \mathscr{O}\left(\frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/3}}\right).$$

这两个情形表明，应用Steiner公式并不会给出过于宽松的上界，至少当 $T_n$ 是一个 $n$维球时是如此。

*N*现在，当 $T_n$ 是一个正方形，并假设 $S_n$ 为正方形的边长时，我们有

$$\max \frac{|T_n| - |T_n \cap (T_n - h)|}{|T_n|} = \frac{S_n \cdot \|h\|_2 \cdot \sqrt{2} - \|h\|_2^2/2}{S_n^2} = \mathscr{O}\left(\frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/2}}\right).$$

最后，当 $T_n$ 是边长为 $S_n$的立方体时，我们有

$$\max \frac{|T_n| - |T_n \cap (T_n - h)|}{|T_n|} = \frac{\frac{3}{2} \cdot S_n^2 \cdot \|h\|_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \|h\|_2^3}{S_n^3} = \mathscr{O}\left(\frac{\|h\|_2}{|T_n|^{1/3}}\right).$$

这表明，使用 $n$维立方体确实能得到与 $n$维球相同的收敛速率。

引理 S.1.5. 设 $\{A_n\}$ 为一列不断扩大的开集，满足 $A_n \uparrow \mathbb{R}^d$，当 $n \to \infty$时。此外，设 $\mathbb{T}_n$ 为 $T_n$ 的一个镶嵌的代表元集合，其直径为$\delta_n \to 0$，当 $n \to \infty$时，其中 $T_n$ 与 (3.4) 中的定义相同。此外，假设条件 *C*、*K* 和 *S* 均成立。则

$$\frac{1}{\mathscr{N}(A_n, \mathbb{T}_n)} \max_{t,s \in \mathbb{T}_n} \sum_{\substack{u \in \mathbb{T}_n \cap (t + A_n) \\ v \in \mathbb{T}_n \cap (s + A_n)}} \|C(u-v)\|_{\mathrm{tr}} \cdot |V(u)| \cdot |V(v)|$$

$$= \mathscr{O}\left(\delta_n^{\gamma} + 1\right) = \mathscr{O}(1),$$

作为 $n \to \infty$，其中 $\mathscr{N}(\cdot,\ \cdot)$ 定义见 (S.1.21)。

证明。利用不等式

$$\left| \max_{i=1,\cdots,m} a_i - \max_{j=1,\cdots,m} b_j \right| \le \max_{i=1,\cdots,m} |a_i - b_i|,$$

对所有 $a_i,\ b_i \in \mathbb{R},\ i=1,\ \cdots,\ m$ 均成立，因此我们得到

$$\left| \max_{t,s \in \mathbb{T}_n} \sum_{\substack{u \in \mathbb{T}_n \cap (t + A_n) \\ v \in \mathbb{T}_n \cap (s + A_n)}} \|C(u-v)\|_{\mathrm{tr}} \cdot |V(u)| \cdot |V(v)| \right.$$

$$\left. - \max_{t,s \in \mathbb{T}_n} \iint_{\substack{h \in \cup_{u \in \mathbb{T}_n \cap (t + A_n)} V(u) \\ h' \in \cup_{v \in \mathbb{T}_n \cap (s + A_n)} V(v)}} \|C(h-h')\|_{\mathrm{tr}} dh' dh \right|$$

$$\le \max_{t,s \in \mathbb{T}_n} \left| \sum_{\substack{u \in \mathbb{T}_n \cap (t + A_n) \\ v \in \mathbb{T}_n \cap (s + A_n)}} \|C(u-v)\|_{\mathrm{tr}} \cdot |V(u)| \cdot |V(v)| \right.$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \iint_{\substack{h\in\cup_{u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)}V(u)\\ h'\in\cup_{v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}V(v)}} \|C(h-h')\|_{\mathrm{tr}}dh'dh\Bigg| \\
&= \max_{t,s\in\mathbb{T}_n}\left|\sum_{\substack{u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)\\ v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}}\iint_{\substack{h\in V(u)\\ h'\in V(v)}}\|C(u-v)\|_{\mathrm{tr}}-\|C(h-h')\|_{\mathrm{tr}}dh'dh\right| \\
&\le \max_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}\int_{h'\in V(v)}\int_{x\in\mathbb{R}^d}\left(\sup_{y\,:\,\|x-y\|\le 2\delta_n}\Big|\|C(y)-C(x)\|_{\mathrm{tr}}\Big|dx\right)dh' \\
&\le |||C|||_\gamma(2\delta_n)^\gamma\cdot\max_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}\int_{h'\in V(v)}dh' \\
&\le |||C|||_\gamma(2\delta_n)^\gamma\mathscr{N}(A_n,\mathbb{T}_n),
\end{aligned}
$$

这里我们进行了变量替换 $x:=h-h'$ 并将积分区域扩大到 $x\in\mathbb{R}^d$。最后两个不等式由（3.1）以及（$\mathscr{N}(\cdot,\ \cdot)$ 中（S.1.21）的定义得出。为完成证明，我们证明

$$
\frac{1}{\mathscr{N}(A_n,\mathbb{T}_n)}\max_{t,s\in\mathbb{T}_n}\iint_{\substack{h\in\cup_{u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)}V(u)\\ h'\in\cup_{v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}V(v)}}\|C(h-h')\|_{\mathrm{tr}}dh'dh=\mathscr{O}(1).
$$

作变量替换 $x=h-h'$，后，上述项等于

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathscr{N}(A_n,\mathbb{T}_n)}\max_{t,s\in\mathbb{T}_n}\iint_{\substack{x\in[\cup_{u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)}V(u)-\cup_{v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}V(v)]\\ h'\in[\cup_{v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}V(v)]\cap[\cup_{u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)}V(u)-x]}}\|C(x)\|_{\mathrm{tr}}dh'dx \\
&\le \max_{t,s\in\mathbb{T}_n}\int_{\substack{x\in[\cup_{u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)}V(u)\\ -\cup_{v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}V(v)]}}\|C(x)\|_{\mathrm{tr}}\frac{\big|[\cup_{v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}V(v)]\cap[\cup_{u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)}V(u)-x]\big|}{\mathscr{N}(A_n,\mathbb{T}_n)}dx \\
&\le \int_{w\in\mathbb{R}^d}\|C(x)\|_{\mathrm{tr}}dx=\mathscr{O}(1),
\end{aligned}
$$

根据假设C (a)。证明完毕。 □

下一个引理与引理S.1.5类似。它用于定理 $B$ 的证明中的项S.1.2。

引理 S.1.6。 设引理*S.1.5* 的所有假设均成立，则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|T_n|^2}\sum_{\substack{t,s\in\mathbb{T}_n\\ u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)\\ v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}}\|C(u-s)\|_{\mathrm{HS}}\|C(t-v)\|_{\mathrm{HS}}\cdot|V(t)|\cdot|V(s)|\cdot|V(u)|\cdot|V(v)| \\
&=\mathscr{O}\left(\frac{\mathscr{N}(A_n,\mathbb{T}_n)^2}{|T_n|^2}\right),
\end{aligned}
\tag{S.1.23}
$$

为 $n\to\infty$，其中 $\mathscr{N}(\cdot,\ \cdot)$ 定义于 (S.1.21)。

证明。对任意 $w \in T_n$，令 $\tau_w$ 表示点 $t_{n,\,i} \in \mathbb{T}_n$ 它与 $w$ 位于同一单元格中；若 $w$ 位于某个单元格的边界上，则令 $\tau_w$ 为相邻单元格中的任意一个 $t_{n,\,i} \in \mathbb{T}_n$。因此，$\|w - \tau_w\|_2 \leq \delta_n$。由此可得

$$\sum_{\substack{t,s\in\mathbb{T}_n\\ u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)\\ v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}} \|C(u-s)\|_{\mathrm{HS}}\|C(t-v)\|_{\mathrm{HS}}\cdot|V(t)|\cdot|V(s)|\cdot|V(u)|\cdot|V(v)|$$

$$= \iiiint\limits_{\substack{w,\,x\in T_n\\ h\in\bigcup_{u\in\mathbb{T}_n\cap(\tau_w+A_n)}V(u)\\ h'\in\bigcup_{v\in\mathbb{T}_n\cap(\tau_x+A_n)}V(v)}} \|C(\tau_h-\tau_x)\|_{\mathrm{HS}}\|C(\tau_w-\tau_{h'})\|_{\mathrm{HS}}dh'dhdxdw$$

$$\leq \iiiint\limits_{\substack{w,\,x\in T_n\\ h\in w+A_n+B(0,2\delta_n)\\ h'\in x+A_n+B(0,2\delta_n)}} \|C(\tau_h-\tau_x)\|_{\mathrm{HS}}\|C(\tau_w-\tau_{h'})\|_{\mathrm{HS}}dh'dhdxdw$$

$$\leq \iiiint\limits_{\substack{w,\,x\in T_n\\ h\in w+A_n+B(0,2\delta_n)\\ h'\in x+A_n+B(0,2\delta_n)}} \sup_{\substack{\lambda_i\in B(0,2\delta_n),\\ i=1,2}} \|C(\lambda_1+h-x)\|_{\mathrm{HS}}\|C(\lambda_2+w-h')\|_{\mathrm{HS}}dh'dhdxdw$$

$$= \iiiint\limits_{\substack{w,\,x\in T_n\\ \tilde h\in A_n+B(0,2\delta_n)\\ \tilde h'\in A_n+B(0,2\delta_n)}} \sup_{\substack{\lambda_i\in B(0,2\delta_n),\\ i=1,2}} \|C(\lambda_1+\tilde h+w-x)\|_{\mathrm{HS}}\|C(\lambda_2+w-\tilde h'-x)\|_{\mathrm{HS}}d\tilde h'd\tilde hdxdw$$

$$\leq \iint\limits_{\substack{\tilde h\in A_n+B(0,2\delta_n)\\ \tilde h'\in A_n+B(0,2\delta_n)}} \left(\int_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{\lambda\in B(0,2\delta_n)}\|C(\lambda+x)\|_{\mathrm{HS}}dx\right)^2 d\tilde h'd\tilde h$$

$$= |A_n+B(0,2\delta_n)|^2\left(\int_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{\lambda\in B(0,2\delta_n)}\|C(\lambda+x)\|_{\mathrm{HS}}dx\right)^2$$

根据假设 C 可得（S.1.23），从而完成证明，因为

$$|A_n+B(0,2\delta_n)| \asymp \mathscr{N}(A_n,\mathbb{T}_n), \tag{S.1.24}$$

因为 $\delta_n/|A_n|\to 0$（回忆一下（S.1.21））。 □

最后，我们给出一个引理，以处理定理 $C$ 证明中的项 S.1.2。

引理 S.1.7. 设引理*S.1.5* 的假设和假设*V* 成立。此外，假设过程 $\{X(t)\}$ 严格平稳。那么，

$$\frac{1}{|T_n|^2}\sum_{\substack{t,s\in\mathbb{T}_n\\ u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)\\ v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}} \Big|\mathrm{cum}\left(X(u),X(t),X(v),X(s)\right)\Big|\cdot|V(t)|\cdot|V(s)|\cdot|V(u)|\cdot|V(v)|$$

的阶为 $\mathscr{O}(\mathscr{N}(A_n,\ \mathbb{T}_n)/|T_n|)$，其中 $\mathscr{N}(\cdot,\ \cdot)$ 定义见 (S.1.21)。

证明。仿照引理 S.1.6的证明过程，可得

$$\sum_{\substack{t,s\in\mathbb{T}_n\\ u\in\mathbb{T}_n\cap(t+A_n)\\ v\in\mathbb{T}_n\cap(s+A_n)}} |\mathrm{cum}(u,t,v,s)| \prod_{\tau\in\{t,s,v,u\}} |V(\tau)|$$

$$= \iiiint\limits_{\substack{w,x\in T_n\\ h\in\cup_{u\in\mathbb{T}_n\cap(\tau_w+A_n)}V(u)\\ h'\in\cup_{v\in\mathbb{T}_n\cap(\tau_x+A_n)}V(v)}} |\mathrm{cum}(\tau_h,\tau_w,\tau_{h'},\tau_x)|dh'dhdxdw$$

$$\le \iiiint\limits_{\substack{w,x\in T_n\\ h\in\tau_w+A_n+B(0,\delta_n)\\ h'\in\tau_x+A_n+B(0,\delta_n)}} |\mathrm{cum}(\tau_h,\tau_w,\tau_{h'},\tau_x)|dh'dhdxdw$$

$$\le \iiiint\limits_{\substack{w,x\in T_n\\ h\in w+A_n+B(0,2\delta_n)\\ h'\in x+A_n+B(0,2\delta_n)}} |\mathrm{cum}(\tau_h,\tau_w,\tau_{h'},\tau_x)|dh'dhdxdw.$$

应用假设V的 (b)，最后一个表达式变为

$$\iiiint\limits_{\substack{w,x\in T_n\\ h\in w+A_n+B(0,2\delta_n)\\ h'\in x+A_n+B(0,2\delta_n)}} |\mathrm{cum}(\tau_h-\tau_x,\tau_w-\tau_x,\tau_{h'}-\tau_x,0)|dh'dhdxdw$$

$$\le \iiiint\limits_{\substack{w,x\in T_n\\ h\in w+A_n+B(0,2\delta_n)\\ h'\in x+A_n+B(0,2\delta_n)}} \sup_{\substack{\lambda_i\in B(0,2\delta_n),\\ i=1,2,3}} |\mathrm{cum}(\lambda_1+h-x,\lambda_2+w-x,\lambda_3+h'-x,0)|dh'dhdxdw$$

$$= \iiiint\limits_{\substack{w,x\in T_n\\ \tilde h,\tilde h'\in A_n+B(0,2\delta_n)}} \sup_{\substack{\lambda_i\in B(0,2\delta_n),\\ i=1,2,3}} |\mathrm{cum}(\lambda_1+\tilde h+w-x,\lambda_2+w-x,\lambda_3+\tilde h',0)|d\tilde h'd\tilde hdxdw$$

$$= \iiint\limits_{\substack{y\in T_n-T_n\\ \tilde h,\tilde h'\in A_n+B(0,2\delta_n)}} |T_n\cap(T_n-y)| \sup_{\substack{\lambda_i\in B(0,2\delta_n),\\ i=1,2,3}} |\mathrm{cum}(\lambda_1+\tilde h+y,\lambda_2+y,\lambda_3+\tilde h',0)|d\tilde h'd\tilde hdy$$

$$\le |T_n| \int\limits_{\tilde h'\in A_n+B(0,2\delta_n)} \sup_{z\in\mathbb{R}^d} \iint\limits_{\substack{y\in T_n-T_n\\ \tilde h\in A_n+B(0,2\delta_n)}} \sup_{\substack{\lambda_i\in B(0,2\delta_n),\\ i=1,2,3}} |\mathrm{cum}(\lambda_1+\tilde h+y,\lambda_2+y,\lambda_3+z,0)|d\tilde h'd\tilde hdy$$

$$= \mathscr{O}(\mathscr{N}(A_n,\mathbb{T}_n)\cdot|T_n|),$$

其中，最后一个关系由假设V (b) 和 (S.1.24) 得到证明。注意，我们已˜ ˜进行了两次变量替换；第一次是 $h=h-\tau_w$ 和 $h'=h'-x$，第二次是 $v=\tilde w-x$。至此，引理得证。□

ˆS.2. 第5节的证明。我们从推导第 $f_n(\theta)$节中 5 的方差收敛速率开始。本节首先建立一个比证明所需结果更一般的结论

ˆ第 5 节的结论。我们将利用它来计算 $f_n(\theta)$ 在满足$\delta_n \equiv 1$的时间序列情形下的方差。

命题 S.2.1. 设过程 $\{X(t)\}_{t\in\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}$ 严格平稳，并假设条件$C'$、$S$和$V'$ 均成立。那么，对于在(5.2)中定义的估计量ˆ $f_n(\theta)$，方差速率满足以下上界

$$\sup_{\theta\in\Theta}\mathbb{E}\|\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\|_{\mathrm{HS}}^2=\mathscr{O}\left(\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}\right),\quad \text{as}\quad n\to\infty,$$

其中 $T_n=\delta_n\cdot[0,n]^d$和 $|T_n|=(n\delta_n)^d$。

证明。与前面一样，我们将始终使用 $\|\mathscr{A}\|_{\mathrm{HS}}\le\|\mathscr{A}\|_{\mathrm{tr}}$。回顾一下， $\mathbb{T}_n=\delta_n\{1,\cdots,n\}^d$是由 $n^d$个样本构成的离散集合，而 $T_n=\delta_n\cdot[0,n]^d$是边长为 $n\delta_n$的超立方体。我们从以下表达式开始

$$\begin{aligned}&\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\\&=\frac{\delta_n^{2d}}{(2\pi)^d}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}e_{\mathbb{I}}^{(t-s)^\top\theta}\frac{X(t)\otimes X(s)-C(t-s)}{|T_n\cap(T_n-(t-s))|}K\left(\frac{t-s}{\Delta_n}\right)\\&=\frac{\delta_n^{2d}}{(2\pi)^d}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{h\in\Delta_n S_K\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}e_{\mathbb{I}}^{h^\top\theta}\frac{X(t+h)\otimes X(t)-C(h)}{|T_n\cap(T_n-h)|}K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)\cdot\mathbb{I}(h+t\in\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d).\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\\&=\frac{\delta_n^{2d}}{(2\pi)^d}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{h\in\Delta_n S_K\cap(\mathbb{T}_n-t)}e_{\mathbb{I}}^{h^\top\theta}\frac{X(t+h)\otimes X(t)-C(h)}{|T_n\cap(T_n-h)|}K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right).\end{aligned}$$

于是，方差变为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\|\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\|_{\mathrm{HS}}^2\\&=\frac{\delta_n^{4d}}{(2\pi)^{2d}}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-t)\\h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-s)}}\sum e_{\mathbb{I}}^{(h-h')^\top\theta}K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{h'}{\Delta_n}\right)\\&\qquad\cdot\frac{\mathrm{Cov}\left(X(t+h)\otimes X(t),X(s+h')\otimes X(s)\right)}{|T_n\cap(T_n-h)|\cdot|T_n\cap(T_n-h')|}.\end{aligned}$$

由命题 S.5.2 可得，协方差 $(X(t+h)\otimes X(t)\ \ X(s+h')\otimes X(s))$ 等于

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\mathrm{cum}\left(X_i(t+h),X_j(t),X_i(s+h'),X_j(s)\right)\\&\quad+\mathbb{E}\left\langle X(t+h),X(s+h')\right\rangle_{\mathbb{H}}\cdot\mathbb{E}\left\langle X(t),X(s)\right\rangle_{\mathbb{H}}+\left\langle C(t-s+h),C(s-t+h')\right\rangle_{\mathrm{HS}}.\end{aligned}$$

以类似于定理 4.2 证明的方式，我们定义以下量

$$A:=\delta_n^{4d}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-t)\\h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-s)}}\sum e_{\mathbb{I}}^{(h-h')^\top\theta}K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{h'}{\Delta_n}\right)$$

$$\cdot \frac{\mathbb{E}\langle X(t+h), X(s+h')\rangle_{\mathbb{H}} \cdot \mathbb{E}\langle X(s), X(t)\rangle_{\mathbb{H}}}{|T_n \cap (T_n - h)| \cdot |T_n \cap (T_n - h')|},$$

$$B := \delta_n^{4d} \sum_{t\in\mathbb{T}_n} \sum_{s\in\mathbb{T}_n} \sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - t)\\ h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - s)}}\sum e_{\mathbb{I}}^{(h-h')^\top\theta} K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{h'}{\Delta_n}\right)$$

$$\cdot \frac{\langle C(t-s+h), C(s-t+h')\rangle_{\mathrm{HS}}}{|T_n \cap (T_n - h)| \cdot |T_n \cap (T_n - h')|}$$

and

$$C := \delta_n^{4d} \sum_{t\in\mathbb{T}_n} \sum_{s\in\mathbb{T}_n} \sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - t)\\ h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - s)}}\sum e_{\mathbb{I}}^{(h-h')^\top\theta} K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{h'}{\Delta_n}\right)$$

$$\cdot \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \frac{\mathrm{cum}\left(X_i(t+h), X_j(t), X_i(s+h'), X_j(s)\right)}{|T_n \cap (T_n - h)| \cdot |T_n \cap (T_n - h')|}.$$

我们从项 $A$ 开始。利用范数对各项进行界定（使用 (S.1.19)）并作变量替换，可得

$$\begin{aligned}
|A| &\le \delta_n^{4d} \sum_{t\in\mathbb{T}_n} \sum_{s\in\mathbb{T}_n} \sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - t)\\ h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - s)}}\sum \frac{|\mathbb{E}\langle X(t+h), X(s+h')\rangle_{\mathbb{H}} \cdot \mathbb{E}\langle X(s), X(t)\rangle_{\mathbb{H}}|}{|T_n \cap (T_n - h)| \cdot |T_n \cap (T_n - h')|}\\
&\le \delta_n^{4d} \sum_{t\in\mathbb{T}_n} \sum_{s\in\mathbb{T}_n} \sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - t)\\ h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - s)}}\sum \frac{\|C(h-h'+t-s)\|_{\mathrm{tr}} \cdot \|C(s-t)\|_{\mathrm{tr}}}{|T_n \cap (T_n - h)| \cdot |T_n \cap (T_n - h')|}\\
&= \delta_n^{4d} \sum_{t\in\mathbb{T}_n} \sum_{s\in\mathbb{T}_n} \|C(s-t)\|_{\mathrm{tr}} \sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - t)\\ h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n - s)}}\sum \frac{\|C(h-h'+t-s)\|_{\mathrm{tr}}}{|T_n \cap (T_n - h)| \cdot |T_n \cap (T_n - h')|}\\
&= \delta_n^{4d} \sum_{w\in\mathbb{T}_n - \mathbb{T}_n} \|C(w)\|_{\mathrm{tr}} \sum_{x\in\mathbb{T}_n\cap(\mathbb{T}_n - w)} \sum_{\substack{u\in[\Delta_n\cdot S_K\cap(\mathbb{T}_n-(w+x))]-[\Delta_n\cdot S_K\cap(\mathbb{T}_n-x)]\\ v\in[\Delta_n\cdot S_K\cap(\mathbb{T}_n-x)]\cap\{[\Delta_n\cdot S_K\cap(\mathbb{T}_n-(w+x))]-u\}}}\sum \\
&\qquad \frac{\|C(u+w)\|_{\mathrm{tr}}}{|T_n \cap (T_n - (u+v))| \cdot |T_n \cap (T_n - v)|},
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是通过变量替换得到的： $w = s - t, x = s, u = h - h', v = h'$.

根据引理S.1.4，鉴于假设S(ii)，并通过在求和中去掉,两项求和的交集来略微放大求和 $u\,v$ ，我们得到

$$\begin{aligned}
|A| &\le_{\mathrm{c}} \frac{\delta_n^{2d}\times\delta_n^{2d}}{|T_n|^2} \sum_{w\in\mathbb{T}_n - \mathbb{T}_n} \|C(w)\|_{\mathrm{tr}} \sum_{x\in\mathbb{T}_n\cap(\mathbb{T}_n - w),\, u\in\Delta_n(S_K - S_K)} \sum \|C(u+w)\|_{\mathrm{tr}}\\
&\qquad \sum_{v\in(\Delta_n S_K)\cap(\Delta_n S_K - u)\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d} 1\\
&\le_{\mathrm{c}} \frac{\delta_n^{2d}}{|T_n|^2} \sum_{w\in\mathbb{T}_n - \mathbb{T}_n} \|C(w)\|_{\mathrm{tr}} \cdot |T_n \cap (T_n - w)|
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{u\in\Delta_n(S_K-S_K)\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d} \|C(u+w)\|_{\mathrm{tr}}\cdot|(\Delta_n S_K)\cap(\Delta_n S_K-u)|$$

$$\leq_{\mathrm{c}} \frac{\Delta_n^d}{|T_n|}\times\delta_n^d\sum_{w\in\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}\|C(w)\|_{\mathrm{tr}}\times\delta_n^d\sum_{u\in\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}\|C(u)\|_{\mathrm{tr}}=\mathscr{O}\left(\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}\right),$$

根据假设C′，其中我们用到了$\delta_n^d\sum_t 1_{\{t\in\mathbb{T}_n\}}\sim|T_n|$以及

$$\delta_n^d\sum_t 1_{\{t\in(\Delta_n\cdot S_K)\cap(\Delta_n\cdot S_K-u)\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d\}}\leq 2|\Delta_n S_K|=\mathscr{O}(\Delta_n^d).$$

现在，我们转向项 $B$。利用变量替换 $w:=t-s$以及柯西–施瓦茨不等式，可得

$$|B|\leq\delta_n^{4d}\sum_{w\in\mathbb{T}_n-\mathbb{T}_n}\sum_s 1_{\{\mathbb{T}_n\cap(\mathbb{T}_n-w)\}}(s)\sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d\\ h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}}\sum K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{h'}{\Delta_n}\right)$$
$$\cdot\frac{\|C(h+w)\|_{\mathrm{HS}}\|C(h'-w)\|_{\mathrm{HS}}}{|T_n\cap(T_n-h)|\cdot|T_n\cap(T_n-h')|}$$
$$\leq_c\frac{\delta_n^{3d}}{|T_n|}\sum_{w\in\mathbb{T}_n-\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d\\ h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}}\sum\|C(h+w)\|_{\mathrm{HS}}\|C(h'-w)\|_{\mathrm{HS}},$$

其中，我们利用了 $\delta_n^d\sum_s 1_{\{\mathbb{T}_n\cap(\mathbb{T}_n-w)\}}(s)=\mathscr{O}(|T_n|)$，并由引理 S.1.4 得出$|T_n\cap(T_n-h)|\sim|T_n\cap(T_n-h')|\sim|T_n|$，且该结论对 $h,h'\in\Delta_n\cdot S_K$ 一致成立。现在，利用变量替换 $u:=h+w$，并扩大求和范围，可进一步得到

$$|B|\leq_{\mathrm{c}}\frac{\delta_n^{3d}}{|T_n|}\sum_{u\in\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}\|C(u)\|_{\mathrm{HS}}\sum_{h'\in\Delta_n S_K\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}\sum_{h\in\Delta_n S_K\cap(u-(\mathbb{T}_n-\mathbb{T}_n))}\|C(h'-u+h)\|_{\mathrm{HS}}$$
$$\leq\frac{1}{|T_n|}\Big(\sum_{u\in\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}\delta_n^d\|C(u)\|_{\mathrm{HS}}\Big)\Big(\delta_n^d\sum_{h'\in\Delta_n S_K\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}1\Big)\Big(\sum_{h\in\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}\delta_n^d\|C(h)\|_{\mathrm{HS}}\Big)$$
$$=\mathscr{O}\left(\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}\right),$$

鉴于假设 C′。

最后，我们考察项 $C$。应用引理 S.1.4，再次可得

$$|C|\leq_{\mathrm{c}}\frac{\delta_n^{4d}}{|T_n|^2}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-t)\\ h'\in[\Delta_n\cdot S_K]\cap(\mathbb{T}_n-s)}}\sum\left|\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\mathrm{cum}\left(X_i(t+h),X_j(t),X_i(s+h'),X_j(s)\right)\right|$$
$$\leq\frac{\delta_n^{4d}}{|T_n|^2}\sum_{t\in\mathbb{T}_n}\sum_{s\in\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in\Delta_n\cdot S_K\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d\\ h'\in\Delta_n\cdot S_K\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}}\sum\left|\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\mathrm{cum}\left(X_i(h+t-s),X_j(t-s),X_i(h'),X_j(0)\right)\right|$$
$$\leq\frac{\delta_n^{3d}}{|T_n|}\sum_{w\in\mathbb{T}_n-\mathbb{T}_n}\sum_{\substack{h\in\Delta_n\cdot S_K\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d\\ h'\in\Delta_n\cdot S_K\cap\delta_n\cdot\mathbb{Z}^d}}\sum\left|\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\mathrm{cum}\left(X_i(h+w),X_j(w),X_i(h'),X_j(0)\right)\right|$$

$$\leq_{\mathrm{c}} \frac{\Delta_n^d}{|T_n|} \sup_{h' \in \delta_n \cdot \mathbb{Z}^d} \delta_n^{2d} \sum_{w \in \delta_n \cdot \mathbb{Z}^d} \sum_{h \in \delta_n \cdot \mathbb{Z}^d} \left| \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \operatorname{cum}\left(X_i(h+w), X_j(w), X_i(h'), X_j(0)\right) \right|$$

$$= \mathscr{O}\left(\frac{\Delta_n^d}{|T_n|}\right),$$

这里用到了 $\delta_n^d \sum_{h' \in \Delta_n \cdot S_K \cap \delta_n \cdot \mathbb{Z}^d} 1 = \mathscr{O}(|\Delta_n|^d)$，以及 $\delta_n^d \sum_{s \in \mathbb{T}_n \cap \mathbb{T}_n} = \mathscr{O}(|T_n|)$这一事实，以及假设 V′。证明至此完成。 □

定理 **5.2** 的证明：如前所述，仿照命题 S.2.1 的证明可知，方差界 $\mathscr{O}(\Delta_n^d/|T_n|)$ 关于 $f \in \mathscr{P}_D(\beta, L)$ 是一致的。因此，要证明 (5.9)，根据定理 5.1 中的关系 (5.5)，只需对 $f \in \mathscr{P}_D(\beta, L)$ 一致地控制项 $B_1(\Delta_n)$ 和 $B_2(\Delta_n)$。令 $M_k$ 和 $m_k$ 分别为包含 $S_K$ 的最小球和包含于 $S_K$ 的最大球的半径。从项 $B_2$ 开始，我们有，

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta,L)} B_2(\Delta_n) &\leq \sum_{\|h\|_2 \geq \Delta_n m_k} \sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta,L)} \|C(h)\|_{\mathrm{HS}} \|h\|_2^{\beta} \|h\|_2^{-\beta} \\
&\leq (\Delta_n m_k)^{-\beta} \sum_{\|h\|_2 \geq \Delta_n m_k} \sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta,L)} \|C(h)\|_{\mathrm{HS}} \|h\|_2^{\beta} \\
&\leq (\Delta_n m_k)^{-\beta} \cdot L = \mathscr{O}(\Delta_n^{-\beta}),
\end{aligned}$$

根据 (5.7)。回忆 $K(0) = 1,$，我们有，对于 $\lambda + 1 > \beta$,

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta,L)} B_1(\Delta_n) &\leq \sum_{0 < \|h\|_2 \leq \Delta_n M_K} \sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta,L)} \|C(h)\|_{\mathrm{HS}} \left[1 - K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)\right] \\
&\leq \tilde{c} \sum_{0 < \|h\|_2 \leq \Delta_n M_K} \sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta,L)} \|C(h)\|_{\mathrm{HS}} \frac{\|h\|_2^{\lambda+1}}{\Delta_n^{\lambda+1}} \\
&\leq \tilde{c} \Delta_n^{-\beta} M_K^{\lambda+1-\beta} \sum_{0 < \|h\|_2 \leq \Delta_n M_K} \sup_{f \in \mathscr{P}_D(\beta,L)} \|C(h)\|_{\mathrm{HS}} \|h\|_2^{\beta} = \mathscr{O}(\Delta_n^{-\beta}),
\end{aligned}$$

第二个不等式由多元泰勒定理得出，因为 (5.8) 成立。事实上，在此条件下，并利用 $K(0) = 1$，我们得到

$$K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right) = 1 + R_{0,\lambda}\left(\frac{h}{\Delta_n}\right),$$

其中 $|R_{0,\lambda}(h)| \leq \frac{L_1}{(\lambda+1)!} \|h\|_2^{\lambda+1}$.

综合 $B_1(\Delta_n)$ 和 $B_2(\Delta_n)$ 的界，我们得到偏差的阶为 $\mathscr{O}(\Delta_n^{\beta})$，且在函数类 $\mathscr{P}_D(\beta, L)$ 上一致成立。现在，根据定理 5.1，方差的阶为 $\mathscr{O}(\Delta_n^d/|T_n|)$，取 $\Delta_n = |T_n|^{1/(2\beta+d)}$，即可得到 (5.10) 中的速率最优界。 □

定理 **5.3** 的证明。根据定理 S.1.1，只需对项 $B_1(\Delta_n)$ 和 $B_2(\Delta_n)$ 进行适当的界定。从项 $B_2$ 开始，若 $m_K$ 表示包含在 $S_K$, 中的最大球的半径，则有

$$B_2(\Delta_n) \leq \int_{x \notin \Delta_n \cdot S_K} \|C(x)\|_{\mathrm{HS}} dx$$

$$\leq (\Delta_n \cdot m_K)^{-\beta} \cdot \int_{\|x\|>\Delta_n \cdot m_K} \|x\|_2^{\beta} \cdot \|C(x)\|_{\mathrm{HS}} dx$$
$$\leq (\Delta_n \cdot m_K)^{-\beta} \cdot L = \mathscr{O}(\Delta_n^{-\beta}).$$

接下来，回忆一下

$$B_1(\Delta_n) := \left\| \int_{h \in \Delta_n \cdot S_K} e^{-\mathbb{i} h^\top \theta} C(h) \left(1 - K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right)\right) dh \right\|_{\mathrm{HS}}.$$

由于 $K(0) = 1$ 且（5.8）成立，根据泰勒定理，我们有

$$K\left(\frac{h}{\Delta_n}\right) = 1 + R_{0,\lambda}\left(\frac{h}{\Delta_n}\right),$$

其中 $|R_{0,\lambda}(h)| \leq \frac{L_1}{(\lambda+1)!}\|h\|_2^{\lambda+1}$. 因此，记 $M_K$ 为以原点为中心且包含 $S_K$ 的最小球的半径，项 $B_1$ 可被以下式子界定：

$$B_1(\Delta_n) \leq \frac{L_1}{(\lambda+1)!} \int_{h \in \Delta_n \cdot S_K} \|C(h)\|_{\mathrm{HS}} \left(\frac{\|h\|_2}{\Delta_n}\right)^{\lambda+1} dh$$
$$\leq \frac{L_1 \cdot (M_K \cdot \Delta_n)^{\lambda+1-\beta}}{(\lambda+1)! \cdot \Delta_n^{\lambda+1}} \int_{h \in \Delta_n \cdot S_K} \|C(h)\|_{\mathrm{HS}} \|h\|_2^{\beta} dh = \mathscr{O}(\Delta_n^{-\beta}),$$

由于 $\lambda + 1 > \beta$ 且鉴于（5.11）。

综合 $B_1$ 和 $B_2$ 的界，我们得到 $B_1(\Delta_n) + B_2(\Delta_n) = \mathscr{O}\left(\Delta_n^{-\beta}\right)$. 现在，对 $\Delta_n$ 的最优选择是在最后一个界与方差的速率之间取得平衡，即 $\Delta_n^d / |T_n| \sim \Delta_n^{-2\beta}$。取为以下值即可实现：

$$\Delta_n := |T_n|^{1/(2\beta+d)} \equiv (n\delta_n)^{d/(2\beta+d)},$$

代入后得到 $\delta_n^\gamma \vee \Delta_n^{-\beta} = \delta_n^\gamma \vee (n\delta_n)^{-\beta d/(2\beta+d)}$ 见（5.12）中的速率。 □

S.3. 第6节的证明。对于实 CONS 的任意成员 $e_i$，考虑实值（标量）过程

$$X_{e_i}(t) := \langle X(t), e_i \rangle_{\mathbb{H}}$$

并令 $C_{e_i}(x)$ 和 $f_{e_i}(\theta)$ 分别表示其平稳协方差和谱密度。若$f \in \mathscr{P}_D(\beta, L)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|_2^{\beta}) |C_{e_i}(x)| dx \leq L \quad \text{and} \quad |\hat{f}_{e_i}(\theta_0) - f_{e_i}(\theta_0)| \leq \|\hat{f}(\theta_0) - f(\theta_0)\|_{\mathrm{HS}}.$$

这些结论源于以下简单事实：$|\langle \mathscr{A}\phi, \phi \rangle_{\mathbb{H}}| \leq \|\mathscr{A}\|_{\mathrm{op}}$ 对于任意有界线性算子$\mathscr{A}$和酉算子 $\phi \in \mathbb{H}$。因此，只需对标量实值过程证明定理6.1 和6.2，如下所示。

定理6.1的证明。令 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的欧几里得范数，并令 $C_g$ 表示与谱密度 $g$ 相对应的协方差。固定一个内点 $\theta_0 \in (-\pi, \pi)^d$，并令$f_{0,n}(\theta) = L/(2 \cdot (2\pi)^d) \cdot \mathbb{I}(\theta \in [-\pi, \pi]^d)$。于是，

$$C_{f_{0,n}}(k) = \int_{\theta \in [-\pi,\pi]^d} e^{-\mathbb{i}\theta^\top k} \frac{L}{2 \cdot (2\pi)^d} d\theta = \mathbb{I}(k = 0) L/2, \tag{S.3.1}$$

因此

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |C_{f_{0,n}}(k)|(1 + \|k\|^{\beta}) = C_{f_{0,n}}(0) = L/2 < L. \tag{S.3.2}$$

令 $\theta=(\theta_i)_{i=1}^d\in\mathbb{R}^d$,

$$g(\theta)=\epsilon\cdot\prod_{i=1}^d\varphi(\theta_i),\quad \text{where } \varphi(x)=\exp\left(-\frac{1}{1-(x/\pi)^2}\right)\mathbb{I}(|x|<\pi),\ (x\in\mathbb{R}) \tag{S.3.3}$$

对于某个待确定的 $\epsilon>0$。函数 $\varphi$ 是一种“隆起”函数，属于 $C_0^\infty$（$\mathbb{R}$）（具有紧支集的无穷可微函数类）。$\varphi$ 的支集是紧区间 $[-\pi,\pi]$。因此，$g\in C_0^\infty$（$\mathbb{R}^d$），其支集为 $[-\pi,\pi]^d$。考虑函数

$$g_n(\theta)=h_n^\beta g\left(\frac{\theta-\theta_0}{h_n}\right), \tag{S.3.4}$$

其中 $0<h_n\le 1$，并以稍后确定的速率趋于 0。注意，由于 $\theta_0\in(-\pi,\pi)^d$，对于所有充分小的 $h_n$，$g_n$ 的支集都包含于 $\theta_0+h_n\cdot[-\pi,\pi]^d\subset(-\pi,\pi)^d$ 中。

现在考虑“替代”谱密度模型：

$$f_{1,n}(\theta)=f_{0,n}(\theta)+[g_n(\theta)+g_n(-\theta)]=:\frac{L}{2}\cdot\mathbb{I}_{(-\pi,\pi)^d}(\theta)+r_n(\theta),\ \theta\in[-\pi,\pi]^d.$$

我们将选择序列 $h_n$ 和常数 $\epsilon>0$，使其满足以下三个性质。

性质：

（1）$f_{0,n},f_{1,n}\in\mathscr{P}_D(\beta,L)$，其中函数类 $\mathscr{P}_D(\beta,L)$ 定义于（5.7）中。（2）对于所有 $n$ 充分大的情形，我们有

$$f_{1,n}(\theta_0)-f_{0,n}(\theta_0)=h_n^\beta[g(0)+g(2\theta_0/h_n)]=g(0)(1+\mathbb{I}(\theta_0=0))\cdot h_n^\beta. \tag{S.3.5}$$

(3) $\mathrm{KL}(\mathbb{P}_{1n},\mathbb{P}_{0n})\le C<\infty$，其中KL 表示Kullback–Leibler距离，$\mathbb{P}_{0n}$和 $\mathbb{P}_{1n}$ 分别是在$f_{0,n}$和$f_{1,n}$ 条件下，数据 $\{X(k)\ k\in\{1,\cdots,n\}^d\}$ 的概率分布。

性质（1）的证明。我们已经证明了$f_{0,n}\in\mathscr{P}_D(\beta,L)$。回顾（5.7），并结合（S.3.1）和（S.3.2），要证明$f_{1,n}\in\mathscr{P}_D(\beta,L)$，只需证明

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_{g_n}(k)|(1+\|k\|^\beta)<\frac{L}{4}, \tag{S.3.6}$$

其中$C_{g_n}(k)=\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d}e^{-\mathbb{i}\theta^\top k}g_n(\theta)d\theta$。

我们有，对所有 $k=(k_i)_{i=1}^d\in\mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}C_{g_n}(k)&=\int_{\theta\in[-\pi,\pi]^d}e^{-\mathbb{i}\theta^\top k}h_n^\beta g\left(\frac{\theta-\theta_0}{h_n}\right)d\theta\\&=h_n^{\beta+d}\cdot e^{-\mathbb{i}\theta_0^\top k}\int_{x\in[-\pi,\pi]^d}e^{-\mathbb{i}x^\top kh_n}g(x)dx\\&=\epsilon\cdot h_n^{\beta+d}\cdot e^{-\mathbb{i}\theta_0^\top k}\prod_{i=1}^d\widehat{\varphi}(k_ih_n),\end{aligned} \tag{S.3.7}$$

其中我们使用了变量替换 $x=(\theta-\theta_0)/h_n$ 以及这一事实：$\theta_0+h_n\cdot[-\pi,\pi]^d\subset(-\pi,\pi)^d$，对所有充分小的 $h_n$成立。最后一个关系由（S.3.3）得出，其中 $\widehat{\varphi}(x):=$

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathbb{i}xu}\varphi(u)du$ 表示光滑凸起函数 $\varphi$ 的傅里叶变换。现在利用 $\varphi$ 的导数在 $\pm\pi$ 处为零这一事实，即对所有 $\ell=0$，$1$，……，$\varphi^{(\ell)}(\pm\pi)=0$，分部积分可得

$$\widehat{\varphi}(x)=\frac{1}{(-ix)^{\ell}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\mathbb{i}xu}\varphi^{(\ell)}(u)du,\quad \ell=0,1,\ldots$$

In因此，对于所有 $\ell$，导数 $\varphi^{(\ell)}(x)$ 连续，且支集包含于 $[-\pi,\pi]$，从而

$$|\widehat{\varphi}(x)|\le c_0\wedge(|x|^{-\ell}c_\ell),\quad \text{where } c_\ell:=\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi^{(\ell)}(u)|du.$$

根据 (S.3.7)，我们有

$$|C_{g_n}(k)|\le\epsilon\cdot h_n^{\beta+d}\prod_{i=1}^{d}\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|k_ih_n|^{\ell}}\right). \tag{S.3.8}$$

我们将选择 $\ell\ge 2$ 和 $\epsilon>0$，使得对于所有充分小的 $h_n$，(S.3.6) 成立。注意到 $\|k\|^{\beta}\le d^{(\beta-1)\vee 0}\sum_{i=1}^{d}|k_i|^{\beta}$。因此，(S.3.6) 可由以下结论推出

$$d^{(\beta-1)\vee 0}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_{g_n}(k)|(1+|k_i|^{\beta})=d^{\beta\vee 1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_{g_n}(k)|(1+|k_1|^{\beta})<\frac{L}{4},$$

其中 $k=(k_i)_{i=1}^{d}$。事实上，由于根据 (S.3.7) 可得

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_{g_n}(k_1,\cdots,k_d)||k_i|^{\beta}=d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_{g_n}(k_1,\cdots,k_d)||k_1|^{\beta}.$$

因此，只需证明

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_{g_n}(k)|(1+|k_1|^{\beta})&\le|C_{g_n}(0)|+2\sum_{k=(k_i)_{i=1}^{d}\in\mathbb{Z}^d}|C_{g_n}(k)||k_1|^{\beta}\\&\le\frac{L}{4(d^{\beta\vee 1})}.\end{aligned} \tag{S.3.9}$$

由于 $h_n\in(0,1)$，(S.3.8) 可直接推出

$$|C_{g_n}(0)|\le\epsilon\cdot c_0^{d}.$$

此外，应用 (S.3.8)，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=(k_i)_{i=1}^{d}\in\mathbb{Z}^d}|C_{g_n}(k)||k_1|^{\beta}\\&\le\epsilon\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left[h_n^{\beta+1}|k_1|^{\beta}\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|k_1h_n|^{\ell}}\right)\cdot h_n^{d-1}\prod_{i=2}^{d}\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|k_ih_n|^{\ell}}\right)\right]\\&=\epsilon\cdot\left[h_n\cdot\sum_{j\in\mathbb{Z}}|jh_n|^{\beta}\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|jh_n|^{\ell}}\right)\right]\times\left[h_n\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|jh_n|^{\ell}}\right)\right]^{d-1}\\&=:\epsilon\times A_n\times(B_n)^{d-1}.\end{aligned} \tag{S.3.10}$$

注意到 $A_n$ 和 $B_n$ 是这些积分的黎曼和

$$A:=\int_{x\in\mathbb{R}}|x|^{\beta}\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|x|^{\ell}}\right)dx\quad\text{and}\quad B:=\int_{x\in\mathbb{R}}\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|x|^{\ell}}\right)dx,$$

显然，当 $\ell \geq \lfloor \beta \rfloor + 2$时，这些积分有限。取这样的 $\ell$ 值，并利用$A_n \to A$ 和 $B_n \to B$在 $h_n \to 0$时的事实，我们得到，式（S.3.10）的右侧有上界 $2\epsilon \times A \times B^{d-1}$，对所有充分小的 $h_n$均成立。因此，选取满足下式的 $\epsilon > 0$，即可确保式（S.3.9）成立

$$0 < \epsilon \cdot \left[ c_0^d + 4A \times B^{d-1} \right] \leq \frac{L}{4(d^{\beta \vee 1})}.$$

这表明 $f_{1,\ n} \in \mathscr{P}_D(\beta,\ L)$ 并完成性质（1）的证明。

性质（2）的证明。显然成立。对于所有充分大的 $n$，关系（S.3.5）都成立，因为 $g(\theta_0/h_n) \to g(0)\mathbb{I}(\theta_0 = 0)$，当 $h_n \to 0$ 时，这是因为 $g$ 的支集包含于 $[-\pi, \pi]$。

性质（ 3 $D_n$ $B_{n\,\xi}$ $X\ t\ \ t \in$）的证明。令，为数据的协方差矩阵 $\{1,\ldots,n\}^d$ ()，分别对应于谱密度 () () ()和 $f_{0,\ n}(\theta) + \xi r_n(\theta)$，对于某个 $r_n\ \theta = g_n\ \theta\ + g_n\ -\theta$ $\xi \in [0,1]$. 根据引理 S.3.2,

$$\mathrm{KL}(\mathbb{P}_{1n}, \mathbb{P}_{0n}) \leq \frac{1}{2} \|D_n\|_{\mathrm{F}}^2 \|B_{n,\xi}^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2, \tag{S.3.11}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 是弗罗贝尼乌斯范数，$\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 是由欧几里得向量范数诱导的矩阵算子范数。将引理 S.3.1 的 (iii) 部分应用于 $A_n :\ = D_n$，可得

$$\frac{1}{n^d} \|D_n\|_{\mathrm{F}}^2 \leq (2\pi)^d \int_{\theta \in [-\pi,\pi]^d} r_n^2(\theta) d\theta.$$

因此，回顾 $r_n(\theta)\ = g_n(\theta) + g_n(-\theta)$，关系 (S.3.4)，并进行变量替换，可得:

$$\frac{1}{n^d} \|D_n\|_{\mathrm{F}}^2 \leq (2\pi)^d h_n^{2\beta+d} \left\{ 4 \int_{\theta \in [-\pi,\pi]^d} g^2(\theta) d\theta \right\} = 4 \cdot (2\pi)^d \cdot \epsilon^2 h_n^{2\beta+d} \|\varphi\|_{L^2}^{2d}, \tag{S.3.12}$$

这里用到了 (S.3.3)。应用引理 S.3.1的 (i) 和 (ii)，可得

$$\|B_{n,\xi}^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \sup_{\theta \in [-\pi,\pi]^d} [f_{0n}(\theta) + \xi r_n(\theta)]^{-1} \leq \frac{2}{L}, \tag{S.3.13}$$

si由于 $r_n(\theta)\ \geq 0$ 以及 $f_{0n}(\theta)\ = L/(2 \cdot (2\pi)^d)\ \ \theta \in [-\pi, \pi]$。结合 (S.3.11) - (S.3.13) ，

$$\mathrm{KL}(\mathbb{P}_{1n}, \mathbb{P}_{0n}) \leq \frac{1}{2} \|D_n\|_F^2 \|B_{n,\xi}^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2 \leq \left( \frac{8 \cdot (2\pi)^d \epsilon^2 \|g\|_{L^2}^2}{L^2} \right) n^d h_n^{2\beta+d},$$

若令.....，则该式有界

$$h_n = M \cdot n^{-d/(2\beta+d)}.$$

选取 $M = M_{\theta_0}$ 使得 $[g(0) + g(0)_{\mathbb{I}}(\theta_0 = 0)] \cdot M^\beta = 1$，则对所有充分大的 $n$，有

$$|f_{1n}(\theta_0) - f_{0n}(\theta_0)| = [g(0) + g(0)_{\mathbb{I}}(\theta_0 = 0)] \cdot M^\beta \cdot n^{-\frac{d\beta}{2\beta+d}} = n^{-\frac{d\beta}{2\beta+d}},$$

这是估计误差的一个下界。通过引用 Tsybakov（2008）中的定理 2.5(iii)，证明即告完成。□

定理6.2的证明。如定理 6.1的证明中所述，只需考虑标量值过程 $\{X(t)$ $t\in\mathbb{R}^d\}$ 的情形。与离散时间情形一样，我们将引入两个具有谱密度 $f_{0,n}(\theta)$ 和 $f_{1,n}(\theta)$ 的模型，以及相应的自协方差 $C_{0,n}(t)$ 和 $C_{1,n}(t)$。考虑函数：

$$f_{0,n}(\theta):=\epsilon\cdot\prod_{i=1}^{d}\phi(\delta_n\theta_i),\quad \theta=(\theta_i)_{i=1}^d\in\mathbb{R}^d, \tag{S.3.14}$$

其中 $\phi(z)=e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $z\in\mathbb{R}$ 是标准正态密度。

通过直接的变量替换，我们得到：

$$C_{0,n}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\mathbb{i}x^\top\theta}f_{0,n}(\theta)d\theta=\epsilon(2\pi)^{d/2}\cdot\delta_n^{-d}\prod_{i=1}^{d}\phi(x_i/\delta_n), \tag{S.3.15}$$

其中我们用到了这样一个事实：$\int_{\mathbb{R}}e^{-\mathbb{i}xu}\phi(u)du=\sqrt{2\pi}\phi(x)$。

与时间序列情形一样，令

$$f_{1,n}(\theta)=f_{0,n}(\theta)+h_n^\beta\left[g\left(\frac{\theta-\theta_0}{h_n}\right)+g\left(\frac{\theta+\theta_0}{h_n}\right)\right], \tag{S.3.16}$$

其中 $g$ 与式（S.3.3）中的定义相同。仿照定理6.1的证明，我们将验证以下结论。

性质：

**(1)** $f_{0,n}$, $f_{1,n}\in\mathscr{P}_C(\beta,L)$，其中函数类 $\mathscr{P}_C(\beta,L)$ 定义见 **(5.11)**。**(2)** 函数 $f_{0,n}$ 和 $f_{1,n}$ 满足关系式 **(S.3.5)**。**(3)** KL 散度有界，即 $\sup_n \mathrm{KL}(\mathbb{P}_{1n},\mathbb{P}_{0n})<\infty$，其中 $\mathbb{P}_{i,n}$ 是数据 $\{X(\delta_n k)\ \ k\in\{1,\cdots,n\}^d\}$ 在模型 $f_{i,n}$, $i=0$ 下的概率分布，**1**。

上面的性质（2）根据定义显然成立，因为差值 $f_{0,n}(\theta)-f_{1,n}(\theta)$ 是按照定理的证明6.1中的方式构造的。

性质（1）的证明：事实 $f_{0,n}\in\mathscr{P}_C(\beta,L)$ 显然成立。事实上，根据（S.3.15），我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|x\|^\beta)|C_{0,n}(x)|dx&\le_c\epsilon\cdot\delta_n^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|x\|^\beta)e^{-\|x\|^2/2\delta_n^2}dx\\&=\epsilon\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\delta_n\cdot u\|^\beta)e^{-\|u\|^2/2}du\le\epsilon\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|u\|^\beta)e^{-\|u\|^2/2}du\le L/2,\end{aligned} \tag{S.3.17}$$

对所有 $\delta_n\in(0,1)$ 以及充分小的 $\epsilon>0$ 均成立。这是因为当 $\delta_n\in(0,1)$ 时，我们有 $\|\delta_n u\|^\beta\le\|u\|^\beta$，且 $\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|u\|^\beta)e^{-\|u\|^2/2}du<\infty$。这保证了（5.11）在将 $C$ 替换为 $C_{0,n}$、将 $L$ 替换为 $L/2$ 后仍然成立。也就是说，$f_{0,n}\in\mathscr{P}_C(\beta,L)$。

现在，我们通过适当减小 $\epsilon>0$ 的值，证明在（S.3.16）中定义的 $f_{1,n}$ 属于 $\mathscr{P}_C(\beta,L)$。令

$$C_{g_n}(x):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\mathbb{i}\theta^\top x}g_n(\theta)d\theta,$$

其中 $g_n$ 与（S.3.4）中的相同。正如定理6.1的证明中所论证的，鉴于（S.3.17），只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(1+\|x\|^\beta\right)|C_{g_n}(x)|dx\le\frac{L}{4}. \tag{S.3.18}$$

请注意，关系（S.3.8）仍然成立，只要将其中的 $k\in\mathbb{Z}^d$ 替换为 $x\in\mathbb{R}^d$。因此，只需选取一个可能更小的 $\epsilon>0$，即可得出（S.3.18），前提是

$$h_n^{\beta+d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(1+\|x\|^\beta\right)\prod_{i=1}^d\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|h_nx_i|^{\ell_i}}\right)dx<\infty,$$

对于某个 $\ell\in\mathbb{N}$，$i=1,\cdots,d$。注意，对于 $h_n\in(0,1],$，我们有 $h_n^\beta$（$1+\|x\|^\beta$）$\le(1+\|h_nx\|^\beta)$，因此最后一个积分的上界为

$$h_n^d\int_{\mathbb{R}^d}\left(1+\|h_nx\|^\beta\right)\prod_{i=1}^d\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|h_nx_i|^\ell}\right)dx=\int_{\mathbb{R}^d}\left(1+\|u\|^\beta\right)\prod_{i=1}^d\left(c_0\wedge\frac{c_\ell}{|u_i|^\ell}\right)du,$$

这里我们使用了变量替换 $u:=h_nx$。显然，只要$\ell\ge\lfloor\beta\rfloor+2$，最后一个积分就是有限的。这意味着通过适当选择 $\epsilon>0$，式（S.3.18）成立，从而得到$f_{1,\ n}\in\mathscr{P}_C(\beta,\ L)$，并完成性质（2）的证明。

性质（3）的证明：现在，与定理 6.1 的证明一样，我们将对 KL 散度 KL( $\mathbb{P}_{1\,n}\ \mathbb{P}_{0\,n}$ $\mathbb{P}_{i\,n}$ $\{X_i\ \delta_nk\quad k\in,\ ,\ ,\ )$给出上界，其中，是模型，，$\{1,\cdots,n\}^d\}$ $f_{i\,n}$ $i=0\ 1$ ，下高斯向量（）的分布律。

注意到，以 $\mathbb{Z}^d$ 为指标的平稳过程 $\{X_i(\delta_nk)\quad k\in\mathbb{Z}^d\}$ 具有所谓的折叠谱密度

$$\widetilde{f}_{i,h}(\theta):=\delta_n^{-d}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d}f_{i,n}\left(\frac{\theta+2\pi\ell}{\delta_n}\right),\ \theta\in[-\pi,\pi]^d,\ i=0,1. \tag{S.3.19}$$

我们将对折叠谱密度应用与定理6.1的证明中相同的论证，该证明基于 Samarov 引理 S.3.2和S.3.1。

对于 $\xi\in[0,1]$，令 $D_n$ 和 $B_{n,\ \xi}$ 分别为具有谱密度 $\widetilde{r}_n(\theta):=\widetilde{f}_{1,\ n}(\theta)-\widetilde{f}_{0,\ n}(\theta)$ 和 $\widetilde{f}_{0,\ n}(\theta)+\xi\widetilde{r}_n(\theta)\quad\theta\in[-\pi,\pi]^d$的零均值高斯向量的协方差矩阵，其中

$$\widetilde{r}_n(\theta)=h_n^\beta\delta_n^{-d}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d}\left[g\left(\frac{\theta+2\pi\ell}{h_n\delta_n}-\frac{\theta_0}{h_n}\right)+g\left(\frac{\theta+2\pi\ell}{h_n\delta_n}+\frac{\theta_0}{h_n}\right)\right].$$

于是，根据引理 S.3.2，我们有

$$\mathrm{KL}(\mathbb{P}_{1,n},\mathbb{P}_{0,n})\le\frac{1}{2}\|D_n\|_{\mathrm{F}}^2\|B_{n,\xi}^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2, \tag{S.3.20}$$

for 某个 $\xi\in[0,1]$。如引理 S.3.12中的（S.3.1(iii)应用于 $A_n:=D_n$）所示，我们得到 ain

$$\begin{aligned}\|D_n\|_{\mathrm{F}}^2&\le(2\pi)^d\cdot n^d\int_{[-\pi,\pi]^d}\widetilde{r}_n(\theta)^2d\theta\\&\le4\cdot(2\pi)^d\cdot n^dh_n^{2\beta}\delta_n^{-2d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d}g\left(\frac{\theta+2\pi\ell}{h_n\delta_n}-\frac{\theta_0}{h_n}\right)^2d\theta\\&=4\cdot(2\pi)^d\cdot n^dh_n^{2\beta}\delta_n^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}g\left(\frac{u}{h_n}-\frac{\theta_0}{h_n}\right)^2du\\&=4\cdot(2\pi)^d\cdot n^dh_n^{2\beta+d}\delta_n^{-d}\|g^2\|_{L^2}^2=4\epsilon\cdot(2\pi)^d\cdot n^dh_n^{2\beta+d}\delta_n^{-d}\|\varphi\|_{L^2}^{2d},\end{aligned} \tag{S.3.21}$$

其中，在最后两个积分中我们进行了变量替换，而最后一个关系由 $g$ 在（S.3.3）中的定义得出。

现在，我们来处理$\|B_n^{-1}$ 、$_\xi\|_{\mathrm{op}}$ 的界。注意，$B_n$、$\xi$ 是高斯向量 $\{X_\xi(\delta_n k)$ $k\in\{1,\cdots,n\}^d\}$ 的协方差矩阵，该向量来自平稳过程 $Y(k)$ $=X_\xi(\delta_n k)$ $k\in\mathbb{Z}^d$，其谱密度为 $\widetilde{f}_0$，$_n(\theta)$ $+\xi\widetilde{r}_n(\theta)$ $\theta\in[-\pi,\pi]^d$，其中 $\widetilde{r}_n(\theta)$ $\geq 0$ 且 $\xi\in[0,1]$。由引理 S.3.1(ii)，我们得到

$$\|B_{n,\xi}^{-1}\|_{\mathrm{op}}\| \leq \sup_{\theta\in[-\pi,\pi]^d}\left[\widetilde{f}_{0n}(\theta)+\xi\widetilde{r}_n(\theta)\right]^{-1} \leq \sup_{\theta\in[-\pi,\pi]^d}\left[\widetilde{f}_{0n}(\theta)\right]^{-1}.$$

回顾 $f_{0,n}$ 在（S.3.14）中的$f_0$定义以及（S.3.19）中的折叠谱密度，我们得到 $\widetilde{f}_{0,n}(\theta)$ $\geq \epsilon\delta_n^{-d}\prod_{i=1}^d\phi(\theta_i)$ $\geq \epsilon\delta_n^{-d}e^{-d\pi^2/2}/(2\pi)^{d/2}$，其中 $\theta\in[-\pi,\pi]^d$。因此

$$\|B_{n,\xi}^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{(2\pi)^d}\sup_{\theta\in[-\pi,\pi]^d}\left[\widetilde{f}_{0n}(\theta)\right]^{-1} \leq \frac{e^{d\pi^2/2}}{(2\pi)^{d/2}\cdot\epsilon}\cdot\delta_n^d \tag{S.3.22}$$

最后，根据（S.3.20）、（S.3.21）和（S.3.22），

$$\mathrm{KL}(\mathbb{P}_{1n},\mathbb{P}_{0n}) \leq \frac{1}{2}\|D_n\|_{\mathrm{F}}^2\|B_{n,\xi}^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2 \leq c\cdot n^d h_n^{2\beta+d}\delta_n^{-d}\cdot\delta_n^{2d} = c\cdot(n\delta_n)^d h_n^{2\beta+d},$$

其中 $c=2\epsilon^{-1}\|\varphi\|_{L^2}^{2d}e^{d\pi^2}$。因此，如果令该量为设定值，KL 散度是一致有界的

$$h_n = M\cdot(n\delta_n)^{-d/(2\beta+d)}.$$

选取 $M$，使得 $g(0)(1+(\theta_0=0))\cdot M^\beta=1$，则有

$$|f_{1n}(\theta_0)-f_{0n}(\theta_0)| = g(0)(1+\mathbb{I}(\theta_0=0))\cdot M^\beta\cdot(n\delta_n)^{-\frac{d\beta}{2\beta+d}} = (n\delta_n)^{-\frac{d\beta}{2\beta+d}},$$

根据 Tsybakov（2008）的定理 2.5(iii)，可得（6.2）中的估计误差所需下界。

□

上述证明所需的技术引理源自 Samarov (1977)。第一个引理是对 $d$ 维情形的轻微推广。为完整起见，我们在下文给出证明。

引理 S.3.1. 设 $a_j$, $j\in\mathbb{Z}^d$ 是一个数列，满足 $\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|a_j|^2<\infty$ 且 $a_j=a_{-j}$。另设 $A_n$ 为一个维度为 $n^d\times n^d$ 的矩阵，其$(j,k)$ 项等于 $a_{j-k}$，其中 $j$ 和 $k$ 是属于 $[0:n-1]^d:=\{0,1,\cdots,n-1\}^d$ 的多重指标（即，按照 $[0:\ n-1]^d$ 的多重指标自然顺序排列的第$(j,k)$ 项）。最后，定义 $\alpha(\lambda)=(2\pi)^{-d}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}a_j e^{\mathbb{i}j^\top\lambda}$，其中 $\lambda\in[-\pi,\pi]^d$。那么，对于 $A_n$ 的范数，以下结论成立。

(i)$\|A_n\|_{\mathrm{op}}\leq(2\pi)^d\cdot$上标$_{\lambda\in[-\pi,\pi]^d}|\alpha(\lambda)|$.(ii) 如果 $A_n$ 是正定的，则 $\|A_n^{-1}\|_{\mathrm{op}}\leq(2\pi)^{-d}\cdot$上标$_{\lambda\in[-\pi,\pi]^d}|1/\alpha(\lambda)|$.(iii) $n^{-d}\|A_n\|_{\mathrm{F}}^2\leq\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|a_j|^2=$ $(2\pi)^d\int_{[-\pi,\pi]^d}\alpha^2(\lambda)d\lambda$.

证明。令 $N:=n^d$并使用记号 $[0:\ n-1]^d:=\{0,1,\cdots,n-1\}^d$.我们将遵循 Samarov(1977) 中的论证。

(i) 由于 $A_n$ 是对称矩阵，我们有

$$\|A_n\|_{\mathrm{op}}=\sup\left\{|x^\top A_n y|:\ \|x\|_2=\|y\|_2=1,\ x,y\in\mathbb{R}^N\right\},$$

其中， 是由欧几里得向量范数诱导的矩阵（算子）范数。现在，令 $x=(x_i)$ $_{i\in[0:n-1]^d}$ 和 $y=(y_i)_{i\in[0:n-1]^d}$。根据傅里叶反演，我们有

$$a_{j-k}=\int_{[-\pi,\pi]^d}e^{-\mathbb{i}(j-k)^\top\lambda}\alpha(\lambda)d\lambda.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
|x^\top A_n y| &= \left| \sum_{j\in[0:n-1]^d} \sum_{k\in[0:n-1]^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} x_j e^{-\mathbb{i}(j-k)^\top \lambda} y_k \alpha(\lambda) d\lambda \right| \\
&\le \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| \sum_{j\in[0:n-1]^d} x_j e^{\mathbb{i} j^\top \lambda} \right| \cdot |\alpha(\lambda)| \cdot \left| \sum_{k\in[0:n-1]^d} e^{\mathbb{i} k^\top \lambda} y_k \right| d\lambda \\
&\le \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]^d} |\alpha(\lambda)| \cdot \left( \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| \sum_{j\in[0:n-1]^d} x_j e^{\mathbb{i} j^\top \lambda} \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&\qquad \times \left( \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| \sum_{k\in[0:n-1]^d} y_k e^{\mathbb{i} k^\top \lambda} \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&= (2\pi)^d \cdot \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]^d} |\alpha(\lambda)| \cdot \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,
\end{aligned}
$$

第二个不等式由柯西-施瓦茨不等式得出，最后一个等式则由帕塞瓦尔恒等式得出，因为函数 $\varphi_k(\lambda) := (2\pi)^{-d/2} e^{\mathbb{i} k^\top \lambda}$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$, $k \in [0:(n-1)]^d$ 在 $L^2([-\pi,\pi]^d; \mathbb{C})$ 中正交归一。

（ii）若 $A_n$ 也正定，则 $A_n$ 可逆。由于 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 是谱范数，我们有

$$
\|A_n^{-1}\|_{\mathrm{op}} = \max \sigma_i(A_n^{-1}) = \max \frac{1}{\sigma_i(A_n)} = \sup \left\{ \frac{1}{x^\top A_n x} : \|x\|_2 = 1, x \in \mathbb{R}^N \right\}
$$

其中，最后一个等式由瑞利商优化的结果得出，此时 $A_n$ 为正定矩阵。

与（1）中的情况相同，令 $z^\star$ 表示 $z$ 的复共轭，我们有

$$
\begin{aligned}
|x^\top A_n x| = x^\top A_n x &= \int_{[-\pi,\pi]^d} \left( \sum_{j\in[0:n-1]^d} x_j e^{\mathbb{i} j^\top \lambda} \right) \alpha(\lambda) \left( \sum_{k\in[0:n-1]^d} e^{\mathbb{i} k^\top \lambda} y_k \right) d\lambda \\
&= \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| \sum_{j\in[0:n-1]^d} x_j e^{-\mathbb{i} j^\top \lambda} \right|^2 \alpha(\lambda) d\lambda \\
&\ge \inf_{\lambda\in[-\pi,\pi]^d} |\alpha(\lambda)| \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| \sum_{j\in[0:n-1]^d} x_j e^{-\mathbb{i} j\lambda} \right|^2 d\lambda \\
&= \left( \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]^d} |\alpha^{-1}(\lambda)| \right)^{-1} \cdot \|x\|_2^2 \cdot (2\pi)^d,
\end{aligned}
$$

由此即可得出结论。

(iii) 由此可得

$$
\|A_n\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i\in[0:n-1]^d} \sum_{j\in[0:n-1]^d} |a_{i-j}|^2 = \sum_{k\in[-(n-1):(n-1)]^d} \prod_{i=1}^d (n - |k_i|) |a_k|^2,
$$

其中 $[-(n-1):(n-1)]^d := \{-(n-1) \cdots, n-1\}^d$。因此，

$$\frac{1}{n^d}\|A_n\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{k\in[-(n-1):(n-1)]^d}\prod_{i=1}^{d}\left(1-\frac{|k_i|}{n}\right)|a_k|^2 \le \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|a_j|^2 = (2\pi)^d\int_{[-\pi,\pi]^d}\alpha^2(\lambda)d\lambda,$$

根据帕塞瓦尔恒等式。

□

LEMMA S.3.2. 设 $B_0$ 和 $B_1$ 为对称正定 $n\times n$ 矩阵，且$D := B_1 - B_0$ 为半正定矩阵。设 $P_0$ 和 $P_1$ 分别为均值为零、协方差矩阵分别为 $B_0$ 和 $B_1$的高斯向量的概率分布。那么，存在一个$\xi \in [0,1]$ 使得

$$\mathrm{KL}(P_1,P_0) \le \frac{1}{2}\|D\|_{\mathrm{F}}^2\|B_\xi^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2,$$

其中 $B_\xi := B_0 + \xi D$， $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 表示矩阵弗罗贝尼乌斯范数， $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$表示由欧几里得向量范数诱导的矩阵算子范数。

证明。由于假设数据服从高斯分布，我们可以立即得到

$$\mathrm{KL}(P_1,P_0) = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}(B_1B_0^{-1}-E) + \log|B_0| - \log|B_1|\right\}, \tag{S.3.23}$$

其中 $\mathrm{tr}(A)$ 和 $|A|$ 分别是矩阵 $A$ 的迹和行列式，而 $E$ 是维数为 $n\times n$的单位矩阵。注意， $B_\lambda := B_0 + \lambda D$， $\lambda\in[0,1]$ 是一个正定协方差矩阵。式（S.3.23）可以改写为

$$\mathrm{KL}(P_1,P_0) = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}[B_1(B_0^{-1}-B_1^{-1})] + \log|B_0| - \log|B_1|\right\}. \tag{S.3.24}$$

我们定义函数 $\phi(\lambda) = \mathrm{tr}(B_1B_\lambda^{-1}) + \log|B_\lambda|$，并注意到根据介值定理，我们有

$$\mathrm{KL}(P_1,P_0) = \frac{\phi(0)-\phi(1)}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\phi'(\xi),$$

对某个 $\xi\in[0,1]$ 成立。利用以下求导法则

$$\frac{d}{d\lambda}A^{-1}(\lambda) = -A^{-1}(\lambda)\left(\frac{d}{d\lambda}A(\lambda)\right)A^{-1}(\lambda),$$

$$\frac{d}{d\lambda}\log|A(\lambda)| = \mathrm{tr}\left(A^{-1}(\lambda)\frac{d}{d\lambda}A(\lambda)\right),$$

以及 $dB_\lambda/d\lambda = D$ 这一事实，我们得到式（S.3.24）变为：

$$\begin{aligned}\mathrm{KL}(P_1,P_0) &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{tr}\left[B_1B_\xi^{-1}DB_\xi^{-1} - DB_\xi^{-1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{tr}\left[(B_1-B_\xi)B_\xi^{-1}DB_\xi^{-1}\right],\end{aligned} \tag{S.3.25}$$

对于某个$\xi\in[0,1]$。为了估计（S.3.25）的右端项，我们将使用以下不等式（例如参见 Davies, 1973）：

$$|\mathrm{tr}(AB)| \le \|A\|_{\mathrm{F}}\cdot\|B\|_{\mathrm{F}}. \tag{S.3.26}$$

若矩阵 $A$ 和 $B$ 是对称的，则

$$\|BA\|_{\mathrm{F}} = \|AB\|_{\mathrm{F}} \le \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{F}}, \tag{S.3.27}$$

其中

$$\|A\|_{\mathrm{F}} = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}, \quad \|A\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Ax\|_2;\ \|x\|_2 = 1,\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

由（S.3.25）结合（S.3.26）和（S.3.27）可得：

$$\mathrm{KL}(P_1, P_0) \le \frac{1}{2}\|B_1 - B_\xi\|_{\mathrm{F}}\|D\|_{\mathrm{F}}\|B_\xi^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2 \le \frac{1}{2}\|D\|_{\mathrm{F}}^2\|B_\xi^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2.$$

□

S.4. 第7节的证明。本节给出定理7.1的证明。如第7节所述，$\{X(t)\ t \in \mathbb{R}\}$ 是复希尔伯特空间 $\mathbb{H}$中的平稳高斯过程，我们在 $t = k\delta_n$，$k = 1$，……，$n$处观察 $X$，其中 $n\delta_n \to \infty$。我们将重点讨论情形 $\delta_n \equiv 1$，其中包含了证明的主要思路。一般情形的证明可通过对特殊情形作直接推广得到。

S.4.1. 定理7.1的证明概述。 如前所述，我们重点讨论情形$\delta_n \equiv 1$，这实质上是时间序列情形（参见第 5.1节）。因此，我们考虑离散时间平稳过程 $X = \{X(t)\ t \in \mathbb{Z}\}$，其中 $X(t)$ 是复希尔伯特空间 $\mathbb{H}$中的高斯元素。我们在论文第 7 节中说明了，在此情形下，若中心极限定理 假设中的条件 (a)-(f) 成立

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \left[\|C(x)\|_{\mathrm{tr}} + \|\check{C}(x)\|_{\mathrm{tr}}\right] < \infty, \tag{S.4.1}$$

ˇ这是我们在下文中的假设。注意， $C$ 和 $C$ 分别在（2.2）和（2.4）中定义。回顾一下， $\mathbb{X}$ 表示希尔伯特–施密特算子 $\mathscr{A}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$所构成的希尔伯特空间，其配备希尔伯特–施密特内积 $\langle \mathscr{A}, \mathscr{B}\rangle_{\mathrm{HS}} := \mathrm{trace}(\mathscr{B}^*\mathscr{A})$ $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathbb{X}$，以及相应的范数 $\|\mathscr{A}\|_{\mathrm{HS}} = \langle \mathscr{A}, \mathscr{A}\rangle^{1/2}{}_{\mathrm{HS}}$。在这种情况下，谱密度函数和伪谱密度函数定义如下

$$f(\theta) = \frac{\delta}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathbb{I}k^\top\theta\delta}C(k),\ \check{f}(\theta) = \frac{\delta}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\mathbb{I}k^\top\theta\delta}\check{C}(k),\ \theta \in [-\pi, \pi].$$

此外，

$$\mathscr{T}_n(\theta) := \sqrt{\frac{n}{\Delta_n}}\left(\hat{f}_n(\theta) - \mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\right),$$

其中

$$\hat{f}_n(\theta) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{i,j=1}^{n} e^{\mathbb{I}(i-j)\theta}X(i) \otimes X(j)K\left(\frac{i-j}{\Delta_n}\right),\ \theta \in [-\pi, \pi].$$

对于这一特殊情形，我们将证明以下定理：

定理 S.4.1. 设 $X=\{X(t)\ t\in\mathbb{Z}\}$ 是复希尔伯特空间 $\mathbb{H}$上的平稳高斯过程。设 $\Delta_n\to\infty,\Delta_n/n\to 0$，并假设 (S.4.1) 和假设 *K′*成立。定义

$$\mathscr{T}_n(\theta):=\sqrt{\frac{n}{\Delta_n}}\left[\hat{f}_n(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)\right],\ \theta\in\mathbb{R},$$

ˆ其中 $f_n(\theta)$ 由(7.1)给出。于是，对于任意 $\theta\in[-\pi,\pi]$,

$$\mathscr{T}_n(\theta)\xrightarrow{d}\mathscr{T}(\theta)\ \ in\ \mathbb{X},$$

其中 $\mathscr{T}(\theta)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的零均值高斯元，使得对于每个有限集合$\{g_\ell,\ell=1,\ldots,m\}$，以及正数 $\{a_\ell,\ell=1,\ldots,m\}$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\left(\sum_{\ell=1}^m a_\ell\langle\mathscr{T}(\theta)g_\ell,g_\ell\rangle\right)\\&=\|K\|_2^2\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^m a_{\ell_1}a_{\ell_2}\left[|\langle f(\theta)g_{\ell_2},g_{\ell_1}\rangle|^2+I_{(\theta=0,\pm\pi)}\left|\langle\check{f}(\theta)\overline{g_{\ell_2}},g_{\ell_1}\rangle\right|^2\right].\end{aligned}$$

下面的命题概述了证明这一结果的步骤。为简化记号，以下我们省略 $\mathscr{T}_n(\theta)$ 中的参数 $\theta$，因为它是固定的。

命题S.4.2. 设定理*S.4.1* 的假设成立。此外，设 $\{e_i,i\geq 1\}$ 是 $\mathbb{H}$的完全正交规范系。假设

**(i)** 对任意 $\epsilon$，$\delta>0$，存在 $u\in\mathbb{Z}_+$ 使得

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}(\|(\mathrm{I}-\Pi_u)\mathscr{T}_n\|_{\mathrm{HS}}>\epsilon)<\delta,$$

其中 $\Pi_u:\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}$是作用于 $\mathbb{X}_u:=\mathrm{span}(e_i\otimes e_j,\ i,\ j\leq u)$上的正交投影算子，并且

**(ii)** 对所有 $a_\ell\in\mathbb{R}$ 和 $g_\ell\in\mathbb{H}$，有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\ell=1}^m a_\ell\langle\mathscr{T}_ng_\ell,g_\ell\rangle\right]^k\sim\begin{cases}\mathscr{O}\left(\left(\frac{\Delta_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) & ,\ k\quad odd,\\(k-1)!!\left[\sigma_{a,g}^2\right]^{\frac{k}{2}} & ,\ k\quad even,\end{cases}\tag{S.4.2}$$

其中

$$\sigma_{a,g}^2:=\|K\|_2^2\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^m a_{\ell_1}a_{\ell_2}\left(|\langle f(\theta)g_{\ell_1},g_{\ell_2}\rangle|^2+1_{\{0,\pm\pi\}}(\theta)\left|\langle\check{f}(\theta)\overline{g_{\ell_1}},g_{\ell_2}\rangle\right|^2\right).$$

那么存在一个高斯过程 $\mathscr{T}$属于 $\mathbb{X}$，满足定理*S.4.1*的描述。

证明。首先，我们陈述复希尔伯特空间中的一个有用恒等式。令

$$\langle\mathscr{T}_n,e_i\otimes e_j\rangle_{\mathrm{HS}}=\langle\mathscr{T}_ne_j,e_i\rangle_{\mathbb{H}}=:\mathscr{T}_n(e_j,e_i),$$

根据Shen、Stoev和Hsing（2022年）的引理A.8,

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_n(e_j,e_i)=&\frac{-1}{2}(\mathscr{T}_n(e_j,e_j)+\mathscr{T}_n(e_i,e_i))+\frac{1}{2}\mathscr{T}_n(e_j+e_i,e_j+e_i)\\&-\frac{1}{2}\mathscr{T}_n(e_j+e_i,e_j+e_i).\end{aligned}\tag{S.4.3}$$

此外，回顾 $\{e_i \otimes e_j, i, j \geq 1\}$ 是 $\mathbb{X}$的完全正交规范系。因此，（i）蕴含了Hsing和Eubank（2015年）定理7.7.4的条件1中的平坦集中条件。由（ii），应用（S.4.3）以及马尔可夫不等式，可得Hsing和Eubank（2015年）定理7.7.4的条件2也成立。因此，$\{\mathscr{T}_n, n \geq 1\}$ 是紧的，因而相对紧。为证明 $\mathscr{T}_n$ 依分布收敛到某个 $\mathscr{T}$，只需证明：若 $\mathscr{T}_{n'} \xrightarrow{d} \mathscr{T}$沿某个子序列 $\{n'\}$，则 $\mathscr{T}$不依赖于该子序列。现在，根据连续映射定理、（S.4.2）以及标准的一致可积性论证，有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \langle \mathscr{T}_{n'} g_\ell, g_\ell \rangle\right]^k \to \mathbb{E}\left[\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \langle \mathscr{T} g_\ell, g_\ell \rangle\right]^k \quad \text{for all } k,$$

其中，极限矩意味着$\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \langle \mathscr{T} g_\ell, \ g_\ell \rangle$ 服从 $N(0, \ \sigma_a^2, \ _g)$ 分布(参见 Billingsley, 2012 的定理30.1)。关系式（S.4.3）表明，实高斯过程 $\{\langle \mathscr{T} g_\ell, g_\ell \rangle, \ g_\ell \in \mathbb{H}\}$ 的有限维分布决定了 $\{\langle \mathscr{T} g, h \rangle, \ g, h \in \mathbb{H}\}$的有限维分布，而后者又刻画了 $\mathbb{X}$值随机元素 $\mathscr{T}$的分布律。因此结论成立。 □

我们将通过验证命题S.4.2的条件 (i) 和 (ii)，完成定理 S.4.1的证明。这些条件将分别在第S.4.2 节和S.4.3节中得到验证。

S.4.2. 验证命题*S.4.2*的 (i)。在本小节中，我们将证明在命题的假设下，命题 S.4.2 的 (i) 对 $\{\mathscr{T}_n\}$ 成立。该性质称为 $\{\mathscr{T}_n\}$的平坦集中。

根据马尔可夫不等式，

$$\mathbb{P}(\|(\mathrm{I} - \Pi_u)\mathscr{T}_n\|_{\mathrm{HS}} > \epsilon) \leq \epsilon^{-2}\mathbb{E}\|(\mathrm{I} - \Pi_u)\mathscr{T}_n\|_{\mathrm{HS}}^2.$$

由于

$$\mathbb{E}\|(\mathrm{I} - \Pi_u)\mathscr{T}_n\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{k \vee \ell > u} \mathbb{E}|\langle \mathscr{T}_n, e_k \otimes e_\ell \rangle_{\mathrm{HS}}|^2, \tag{S.4.4}$$

只需证明

$$\sum_{k,\ell} \sup_n \mathbb{E}\,|\langle \mathscr{T}_n, e_k \otimes e_\ell \rangle_{\mathrm{HS}}|^2 < \infty, \tag{S.4.5}$$

这由（S.4.4）可推出命题 S.4.2 的（i）。

不失一般性，假设 $\{e_j, \ j \in \mathbb{N}\}$ 的完全正交规范系 $\mathbb{H}$ 为实数，因此$X$（$t$）$= \sum_{j \in \mathbb{N}} X_j$（$t$）$e_j$，其中 $X_j$（$t$）$= \langle X$（$t$）$e_j \rangle_{\mathbb{H}}$ 是复零均值高斯随机变量。此外，令

$$C_{k,\ell}(x) = \langle C(x), e_k \otimes e_\ell \rangle_{\mathrm{HS}} = \langle C(x) e_\ell, e_k \rangle. \tag{S.4.6}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\langle \mathscr{T}_n, e_k \otimes e_\ell \rangle_{\mathrm{HS}} \\
&= \frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i,j=1}^{n} \langle X(i) \otimes X(j) - C(i-j), e_k \otimes e_\ell \rangle_{\mathrm{HS}} e^{\theta(i-j)} K\left(\frac{i-j}{\Delta_n}\right) \\
&= \frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i,j=1}^{n} \left[X_k(i)\overline{X_\ell(j)} - C_{k,\ell}(i-j)\right] e^{\theta(i-j)} K\left(\frac{i-j}{\Delta_n}\right),
\end{aligned}$$

其中 $C_{k,\ \ell}(i-j)\ =\mathbb{E}[X_k(i)\overline{X_\ell(j)}]$. 根据引理 S.5.3，我们有

$$\mathbb{E}[X_k(i_1)\overline{X_\ell(j_1)X_k(i_2)}X_\ell(j_2)] = C_{k,\ell}(i_1-j_1)\overline{C_{k,\ell}(i_2-j_2)} + \check{C}_{k,\ell}(i_1-j_2)\overline{\check{C}_{k,\ell}(i_2-j_1)} + C_{k,k}(i_1-i_2)\overline{C_{\ell,\ell}(j_1-j_2)}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,|\langle \mathscr{T}_n, e_k\otimes e_\ell\rangle_{\mathrm{HS}}|^2 \\
&= \frac{(2\pi)^{-2}}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1}\sum_{i_2,j_2} e_{\mathbb{I}}^{\theta(i_1-j_1-i_2+j_2)} K\left(\frac{i_1-j_1}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{i_2-j_2}{\Delta_n}\right) \\
&\quad\times \mathbb{E}\left\{\left[X_k(i_1)\overline{X_\ell(j_1)} - C_{k,\ell}(i_1-j_1)\right]\left[\overline{X_k(i_2)}X_\ell(j_2) - \overline{C_{k,\ell}(i_2-j_2)}\right]\right\} \\
&= \frac{(2\pi)^{-2}}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1}\sum_{i_2,j_2} e_{\mathbb{I}}^{\theta(i_1-j_1-i_2+j_2)} K\left(\frac{i_1-j_1}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{i_2-j_2}{\Delta_n}\right) \\
&\qquad\qquad\times C_{k,k}(i_1-i_2)\overline{C_{\ell,\ell}(j_1-j_2)} \\
&\quad + \frac{(2\pi)^{-2}}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1}\sum_{i_2,j_2} e_{\mathbb{I}}^{\theta(i_1-j_1-i_2+j_2)} K\left(\frac{i_1-j_1}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{i_2-j_2}{\Delta_n}\right) \\
&\qquad\qquad\times \check{C}_{k,\ell}(i_1-j_2)\overline{\check{C}_{k,\ell}(i_2-j_1)} \\
&=: A_{k,\ell} + B_{k,\ell}.
\end{aligned} \tag{S.4.7}$$

我们从 $A_{k,\ \ell}$ 开始。进行变量替换

$$x_1 = i_1 - i_2,\ x_2 = j_1 - j_2,$$
$$y_1 = i_1 - j_1,\ y_2 = i_1,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
A_{k,\ell} &= \frac{(2\pi)^{-2}}{n\Delta_n}\sum_{x_1,x_2=1-n}^{n-1} C_{k,k}(x_1)\overline{C_{\ell,\ell}(x_2)} e_{\mathbb{I}}^{\theta(x_1-x_2)} \\
&\qquad\times \sum_{y_1=(-\Delta_n)\vee(1-n+x_1-x_2)}^{\Delta_n\wedge(n-1+x_1-x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{-x_1+x_2+y_1}{\Delta_n}\right) \sum_{y_2=1\vee(1+y_1)}^{n\wedge(n+y_1)} 1 \\
&= \frac{(2\pi)^{-2}}{n\Delta_n}\sum_{x_1,x_2=1-n}^{n-1} C_{k,k}(x_1)\overline{C_{\ell,\ell}(x_2)} e_{\mathbb{I}}^{\theta(x_1-x_2)} \\
&\qquad\times \sum_{y_1=(-\Delta_n)\vee(1-n+x_1-x_2)}^{\Delta_n\wedge(n-1+x_1-x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{-x_1+x_2+y_1}{\Delta_n}\right) (n-|y_1|).
\end{aligned}$$

因此，令 $\|K\|_\infty :=$ 最大值$_t\,|K(t)|$，我们得到

$$\begin{aligned}
|A_{k,\ell}| &\le \frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\sum_{x_1,x_2=1-n}^{n-1} |C_{k,k}(x_1)||C_{\ell,\ell}(x_2)| \\
&\le \frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\sum_{x_1,x_2=-\infty}^{\infty} |C_{k,k}(x_1)||C_{\ell,\ell}(x_2)| =: \alpha_{k,\ell}.
\end{aligned}$$

由（S.4.6）以及引理 S.7.1 的 (ii)，可得

$$\sum_{k,\ell}\alpha_{k,\ell}\le\frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\left(\sum_{x=-\infty}^{\infty}\|C(x)\|_{\mathrm{tr}}\right)^2<\infty. \tag{S.4.8}$$

现在转向 $B_{k,\ell}$ 见（S.4.7）。作变量替换

$$x_1=i_1-j_2,\ x_2=i_2-j_1,$$
$$y_1=i_1-j_1,\ y_2=i_1,$$

$$\begin{aligned}B_{k,\ell}&=\frac{(2\pi)^{-2}}{n\Delta_n}\sum_{x_1,x_2=1-n}^{n-1}\check{C}_{k,\ell}(x_1)\overline{\check{C}_{k,\ell}(x_2)}e^{\mathrm{i}\theta(-x_1-x_2+2y_1)}\\&\quad\times\sum_{y_1=(-\Delta_n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{\Delta_n\wedge(n-1+x_1+x_2)}K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{x_1+x_2-y_1}{\Delta_n}\right)\sum_{y_2=1\vee(1+y_1)}^{n\wedge(n+y_1)}1\\&=\frac{(2\pi)^{-2}}{n\Delta_n}\sum_{x_1,x_2=1-n}^{n-1}\check{C}_{k,\ell}(x_1)\overline{\check{C}_{k,\ell}(x_2)}e^{\mathrm{i}\theta(-x_1-x_2+2y_1)}\\&\quad\times\sum_{y_1=(-\Delta_n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{\Delta_n\wedge(n-1+x_1+x_2)}K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{x_1+x_2-y_1}{\Delta_n}\right)(n-|y_1|).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}|B_{k,\ell}|&\le\frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\sum_{x_1,x_2=1-n}^{n-1}\left|\check{C}_{k,\ell}(x_1)\right|\left|\check{C}_{k,\ell}(x_2)\right|\\&\le\frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\sum_{x_1,x_2=1-n}^{n-1}\left|\check{C}_{k,\ell}(x_1)\right|\left|\check{C}_{k,\ell}(x_2)\right|=:\beta_{k,\ell}.\end{aligned}$$

应用柯西-施瓦茨不等式，并根据希尔伯特–施密特内积的定义，

$$\begin{aligned}\sum_{k,\ell}\beta_{k,\ell}&\le\frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\sum_{x_1,x_2=-\infty}^{\infty}\sum_{k,\ell}\left|\check{C}_{k,\ell}(x_1)\right|\left|\check{C}_{k,\ell}(x_2)\right|\\&\le\frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\sum_{x_1,x_2=-\infty}^{\infty}\sqrt{\sum_{k,\ell}\left|\check{C}_{k,\ell}(x_1)\right|^2}\sqrt{\sum_{k,\ell}\left|\check{C}_{k,\ell}(x_2)\right|^2}\\&=\frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\left(\sum_{x=-\infty}^{\infty}\|\check{C}(x)\|_{\mathrm{HS}}\right)^2\le\frac{\|K\|_\infty^2}{2\pi^2}\left(\sum_{x=-\infty}^{\infty}\|\check{C}(x)\|_{\mathrm{tr}}\right)^2<\infty,\end{aligned} \tag{S.4.9}$$

由于上界 $\alpha_{k,\ell}$ 和 $\beta_{k,\ell}$ 均不依赖于 $n$，我们有

$$\sup_n\mathbb{E}\left|\langle\mathscr{T}_n,e_k\otimes e_\ell\rangle_{\mathrm{HS}}\right|^2\le\alpha_{k,\ell}+\beta_{k,\ell},$$

及关系（S.4.8）和（S.4.9）推出（S.4.5）。

S.4.3. 验证命题 *S.4.2* 的（ii）。（ii）的证明相当冗长，是中心极限定理证明的核心。在第 S.4.3.1 节中，我们将首先着重证明 $X$ 为标量的情形，即 $X$ 取值于 $\mathbb{C}$。在此，我们将利用这一简单情形来阐释证明思路。在第 S.4.3.2 节中，我们将证明 $X \in \mathbb{H}$ 的一般情形下的命题。

S.4.3.1. 标量情形。本节重点讨论取值于 $\mathbb{C}$ 的零均值平稳高斯时间序列，并计算 $\mathscr{T}_n$ 的矩。本节旨在为证明 (ii) 所需的一般矩计算建立技术工具。

在此情形下，$C(t-s) = \mathbb{E}[X(t)\overline{X(s)}]$, $\check{C}(t-s) := \mathbb{E}[X(t)X(s)]$,，并且

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=-\infty}^{\infty} C(x) e^{\mathbb{i}x\theta}. \tag{S.4.10}$$

此外，(S.4.1) 变为

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \left[ |C(x)| + |\check{C}(x)| \right] < \infty. \tag{S.4.11}$$

注意，由于在此情形下 $\overline{C(x)} = C(-x)$，因此 $f(\theta)$ 是实数，尽管过程 $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ 是复值的。我们还需要所谓的伪谱密度，其定义为

$$\check{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \check{C}(x) e^{-\mathbb{i}x\theta}. \tag{S.4.12}$$

还请回忆，谱密度估计量为

$$\hat{f}_n(\theta) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{i,j=1}^{n} X_i \overline{X_j} K_\theta(i-j),$$

其中

$$K_\theta(y) = e^{\mathbb{i}y\theta} K(y/\Delta_n).$$

下述命题给出了标量情形下 $\mathbb{E}(\mathscr{T}_n^k)$ 的渐近表达式。

命题 S.4.3. 假设命题*S.4.2* 的条件在设定$\mathbb{H} = \mathbb{C}$下成立。那么，当 $n \to \infty$时，

$$\mathbb{E}(\mathscr{T}_n^k) = \begin{cases} \mathscr{O}\left( \left( \frac{\Delta_n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right) & , \ k \quad odd, \\ (1+o(1))(k-1)!! \left[ (f(\theta)^2 + 1_{\{0,\pm\pi\}}(\theta) |\check{f}(\theta)|^2) \|K\|_2^2 \right]^{\frac{k}{2}} & , \ k \quad even, \end{cases}$$

其中 $f(\theta)$ 和 $\check{}\, f(\theta)$ 如式 (S.4.10) 和 (S.4.12)所示。

证明。不失一般性，假设 $K$ 的支集为 $[-1,1]$。

情形 $k=2$

根据引理 S.5.4 (对于 $N=0,\quad M=2$，即见（S.5.3），

$$(2\pi)^2 \mathbb{E}(\mathscr{T}_n^2) = \frac{1}{n\Delta_n} \sum_{i_1,j_1=1}^{n} \sum_{i_2,j_2=1}^{n} K_\theta(i_1 - j_1) K_\theta(i_2 - j_2)$$

$$\times \mathbb{E}\left[\left(X_{i_1}\overline{X_{j_1}} - C(i_1-j_1)\right)\left(X_{i_2}\overline{X_{j_2}} - C(i_2-j_2)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1=1}^{n}\sum_{i_2,j_2=1}^{n} K_\theta(i_1-j_1)\,K_\theta(i_2-j_2)$$

$$\times\left[C(i_1-j_2)C(i_2-j_1) + \check{C}(i_1-i_2)\overline{\check{C}(j_1-j_2)}\right]$$

$$=: \widetilde{A}_2 + \overline{A}_2,$$

其中

$$\widetilde{A}_2 := \frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1=1}^{n}\sum_{i_2,j_2=1}^{n} K_\theta(i_1-j_1)\,K_\theta(i_2-j_2)\cdot C(i_1-j_2)C(i_2-j_1),$$

and

$$\overline{A}_2 := \frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1=1}^{n}\sum_{i_2,j_2=1}^{n} K_\theta(i_1-j_1)\,K_\theta(i_2-j_2)\cdot \check{C}(i_1-i_2)\overline{\check{C}(j_1-j_2)}.$$

$\widetilde{}$这两个项的性质略有不同，我们先从 $A_2$开始。通过变量替换

$$x_1 = i_1 - j_2, \quad x_2 = i_2 - j_1,$$
$$y_1 = i_1 - j_1, \quad y_2 = i_1,$$

我们有

$$\widetilde{A}_2 = \frac{1}{n\Delta_n}\sum_{x_1,x_2=-n+1}^{n-1} C(x_1)C(x_2)e_{\overline{\imath}}^{x_1\theta}e_{\overline{\imath}}^{x_2\theta}$$

$$\times \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1+x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{x_1+x_2-y_1}{\Delta_n}\right)\sum_{y_2=1\vee(1+y_1)}^{n\wedge(n+y_1)} 1$$

$$= \frac{1}{n\Delta_n}\sum_{x_1,x_2=-n+1}^{n-1} C(x_1)C(x_2)e_{\overline{\imath}}^{x_1\theta}e_{\overline{\imath}}^{x_2\theta}$$

$$\times \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1+x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{x_1+x_2-y_1}{\Delta_n}\right)\cdot(n-|y_1|)$$

$$= \frac{1}{\Delta_n}\sum_{|x_1|\vee|x_2|\le L} C(x_1)C(x_2)e_{\overline{\imath}}^{x_1\theta}e_{\overline{\imath}}^{x_2\theta}$$

$$\times \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1+x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{x_1+x_2-y_1}{\Delta_n}\right)\frac{n-|y_1|}{n}$$

$$+ \frac{1}{\Delta_n}\sum_{|x_1|\vee|x_2|\ge L} C(x_1)C(x_2)e_{\overline{\imath}}^{x_1\theta}e_{\overline{\imath}}^{x_2\theta}$$

$$\times \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1+x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)K\left(\frac{x_1+x_2-y_1}{\Delta_n}\right)\frac{n-|y_1|}{n}$$

$$=: B_1 + B_2,$$

对于某些 $L = L_n \to \infty$ 和 $L = o(\Delta_n)$。不难看出

$$|B_2| \le \frac{\|K\|_\infty}{\Delta_n} \sum_{|x_1|\vee|x_2|\ge L} |C(x_1)||C(x_2)| \sum_{y_1=-n+1}^{n-1} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)$$

$$\le 2\|K\|_\infty \sum_{|x_1|\vee|x_2|\ge L} |C(x_1)||C(x_2)| = o(1), \text{ as } L \to \infty,$$

由 (S.4.11)。现在，在 $B_1$ 中加上并减去同一项，可得 $B_1 = C_1 + C_2$，其中

$$C_1 := \frac{1}{\Delta_n} \sum_{|x_1|\vee|x_2|\le L} C(x_1)C(x_2) e^{ix_1\theta} e^{ix_2\theta} \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1+x_2)} K^2\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) \frac{n-|y_1|}{n}$$

and

$$C_2 := \frac{1}{\Delta_n} \sum_{|x_1|\vee|x_2|\le L} C(x_1)C(x_2) e^{ix_1\theta} e^{ix_2\theta}$$

$$\times \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1+x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) \left[K\left(\frac{x_1+x_2-y_1}{\Delta_n}\right) - K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)\right] \times \frac{n-|y_1|}{n}.$$

我们首先考察 $C_1$。首先注意到，关于 $y_1$ 的内和仅限于 $-\Delta_n \le y_1 \le \Delta_n$，因为 $K$ 的支集包含在 $[-1,1]$ 中。此外，由于对所有 $|x_1| \vee |x_2| \le L$ 以及所有充分大的 $n$，有 $L = o(\Delta_n)$ 和 $\Delta_n = o(n)$，因此 $(1-n) \vee (1-n+x_1+x_2) \le -\Delta_n$，且 $\Delta_n \le (n-1) \wedge (n-1+x_1+x_2)$。这意味着，在 $C_1$ 和 $C_2$ 的定义中，内和的求和范围为 $[-\Delta_n, \Delta_n]$，且不依赖于 $x_1$ 和 $x_2$。也就是说，对所有充分大的 $n$，

$$C_1 = \sum_{|x_1|\vee|x_2|\le L} C(x_1)C(x_2) e^{ix_1\theta} e^{ix_2\theta} \times \frac{1}{\Delta_n} \sum_{y_1=-\Delta_n}^{\Delta_n} K^2\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right)$$

$$\sim 4\pi^2 f(\theta)^2 \int_{-1}^{1} K^2(y)dy, \quad \text{as } n \to \infty,$$

其中，最后一个关系由 $K^2$ 的黎曼可积性以及以下事实得出：$\sum_{|x|\le L} C(x) e^{ix\theta} \to 2\pi f(\theta)$，当 $L \to \infty$时。

现在，关注项 $C_2$。利用以下事实：$K$ 是偶函数，且

$$|K(x) - K(y)| \le c|x-y|,$$

（由于 $K'$有界），我们得到 $|K\left(\left(x_1+x_2-y_1\right)/\Delta_n\right) - K\left(y_1/\Delta_n\right)| \le 2cL/\Delta$，对所有 $|x_1| \vee |x_2| \le L$均成立。因此，根据条件（S.4.11）以及 $K$的黎曼可积性，我们得到

$$|C_2| \le \left(\sum_{|x|\le L} |C(x)|\right)^2 \frac{1}{\Delta_n} \sum_{y=-\Delta_n}^{\Delta_n} K\left(\frac{y}{\Delta_n}\right) \frac{2Lc}{\Delta_n}$$

$$\sim \frac{2Lc}{\Delta_n} \left(\sum_{x=-\infty}^{\infty} |C(x)|\right)^2 \int_{u=-1}^{1} K(u)du = o(1),$$

由于 $L = o(\Delta_n)$。综上，对于所有 $\theta$（包括 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pm\pi$），我们有

$$\widetilde{A}_2 = C_1 + C_2 + B_2 \sim 4\pi^2 f(\theta)^2 \int_{-1}^{1} K^2(u)du.$$

接下来考虑 $\overline{A}_2$。与 $A_2$ 的推导类似，进行变量替换

$$x_1 = i_1 - i_2, \quad x_2 = j_1 - j_2,$$
$$y_1 = i_1 - j_1, \quad y_2 = i_1,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{A}_2 &= \frac{1}{n\Delta_n} \sum_{x_1,x_2=-n+1}^{n-1} \check{C}(x_1)\overline{\check{C}(x_2)} e^{-\mathbb{i}x_1\theta} e^{\mathbb{i}x_2\theta} \\
&\quad \cdot \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1-x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1-x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{-x_1+x_2+y_1}{\Delta_n}\right) e^{\mathbb{i}2y_1\theta} \sum_{y_2=1\vee(1+y_1)}^{n\wedge(n+y_1)} 1 \\
&= \frac{1}{\Delta_n} \sum_{x_1,x_2=-n+1}^{n-1} \check{C}(x_1)\overline{\check{C}(x_2)} e^{-\mathbb{i}x_1\theta} e^{\mathbb{i}x_2\theta} \\
&\quad \cdot \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1-x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1-x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{-x_1+x_2+y_1}{\Delta_n}\right) e^{\mathbb{i}2y_1\theta} \cdot \frac{n-|y_1|}{n}.
\end{aligned}$$

首先注意，对于 $\theta = \pm\pi$ 或 $\theta = 0$，有 $e^{\mathbb{i}2y_1\theta} = 1$，$y_1 \in \mathbb{Z}$ 而对于项 $\overline{A}_2$，当 $\widetilde{\ }$ 时，采用与项 $A_2$ 相同的论证，可得

$$\overline{A}_2 \sim 4\pi|\check{f}(\theta)|^2\|K\|_2^2, \quad \text{where} \quad \check{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{x=-\infty}^{\infty} \check{C}(x)e^{-\mathbb{i}x\theta}, \ \theta \in \{0, \pm\pi\}.$$

现在假设 $\theta \neq 0$ 且 $\theta \neq \pm\pi$，因此项 $e^{\mathbb{i}2y_1\theta}$ 存在。通过加上并减去一项，可得 $\overline{A}_2 = D_1 + D_2$，其中 $D_2$ 定义见下文的（S.4.14），并且

$$\begin{aligned}
D_1 &:= \frac{1}{\Delta_n} \sum_{x_1,x_2=-n+1}^{n-1} \check{C}(x_1)\overline{\check{C}(x_2)} e^{-\mathbb{i}x_1\theta} e^{\mathbb{i}x_2\theta} \\
&\quad \cdot \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1-x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1-x_2)} K^2\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) e^{\mathbb{i}2y_1\theta} \frac{n-|y_1|}{n} \\
&= \mathscr{O}\left(\frac{1}{\Delta_n}\right).
\end{aligned} \tag{S.4.13}$$

事实上，写作

$$w_n(y) = K^2\left(\frac{y}{\Delta_n}\right)\frac{n-|y|}{n}$$

并针对任意 $c_1, \ c_2 \in [1, \Delta_n]$,

$$\sum_{y=c_1}^{c_2} w_n(y) e^{\mathbb{i}2y\theta}(e^{\mathbb{i}2\theta} - 1)$$

$$= \sum_{y=c_1+1}^{c_2+1} w_n(y-1) e_{\mathbb{I}}^{2y\theta} - \sum_{y=c_1}^{c_2} w_n(y) e_{\mathbb{I}}^{2y\theta}$$

$$= w_n(c_2) e_{\mathbb{I}}^{2(c_2+1)\theta} - w_n(c_1) e_{\mathbb{I}}^{2c_1\theta} + \sum_{y=c_1+1}^{c_2} (w_n(y-1) - w_n(y)) e_{\mathbb{I}}^{2y\theta}.$$

聚焦于第二项,

$$\sum_{y=c_1+1}^{c_2} (w_n(y-1) - w_n(y)) e_{\mathbb{I}}^{2y\theta}$$

$$= \sum_{y=c_1+1}^{c_2} \left( K^2\left(\frac{y-1}{\Delta_n}\right) \frac{n-1-(y-1)}{n} - K^2\left(\frac{y}{\Delta_n}\right) \frac{n-1-y}{n} \right) e_{\mathbb{I}}^{2y\theta}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{y=c_1+1}^{c_2} K^2\left(\frac{y-1}{\Delta_n}\right) e_{\mathbb{I}}^{2y\theta} + \sum_{y=c_1+1}^{c_2} \left( K^2\left(\frac{y-1}{\Delta_n}\right) - K^2\left(\frac{y}{\Delta_n}\right) \right) \frac{n-1-y}{n} e_{\mathbb{I}}^{2y\theta}$$

$$=: E_1 + E_2.$$

显然, $E_1 = \mathcal{O}(\Delta_n/n) = o(1)$ 在 $c_1, c_2$ 上一致成立。此外，可以得到

$$|E_2| \le \sum_{y=c_1+1}^{c_2} \left| K^2\left(\frac{y-1}{\Delta_n}\right) - K^2\left(\frac{y}{\Delta_n}\right) \right| < \infty \text{ uniformly in } c_1, c_2$$

因为 $K^2$ 有界变差（注意到 $K'$ 有界且 $K$ 紧支撑）。因此,

$$\sum_{y=c_1}^{c_2} w_n(y) e_{\mathbb{I}}^{2y\theta}$$

$$= (e_{\mathbb{I}}^{2\theta} - 1)^{-1} \left( w_n(c_2) e_{\mathbb{I}}^{(c_2+1)\theta} - w_n(c_1) e_{\mathbb{I}}^{c_1\theta} + \sum_{y=c_1+1}^{c_2} (w_n(y-1) - w_n(y)) e_{\mathbb{I}}^{y\theta} \right),$$

它一致有界。（注意这里我们利用了这一事实：$e_{\mathbb{I}}^{2\theta} - 1 \neq 0$，因为 $\pm\pi \neq \theta \neq 0$。）应用这一论证可知，(S.4.13) 中的内和一致有界，因此由条件 (S.4.11)，我们得到 $D_1 = o(1)$。

另一方面，对于项 $D_2$，我们得到

$$\begin{aligned} D_2 := \frac{1}{\Delta_n} \sum_{x_1, x_2 = -n+1}^{n-1} & \check{C}(x_1) \overline{\check{C}(x_2)} e^{-\mathbb{I} x_1 \theta} e^{\mathbb{I} x_2 \theta} \\ & \times \sum_{y_1 = (1-n) \vee (1-n+x_1-x_2)}^{(n-1) \wedge (n-1+x_1-x_2)} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) \left[ K\left(\frac{-x_1+x_2+y_1}{\Delta_n}\right) - K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) \right] \\ & \times e_{\mathbb{I}}^{2y_1\theta} \cdot \frac{n-|y_1|}{n} \\ = o(1), & \end{aligned} \tag{S.4.14}$$

使用与 $B_2$ 和 $C_2$相同的论证。因此,

$$\overline{A}_2 \to 0 \quad \text{for} \quad \theta \neq 0 \quad \text{and} \quad \theta \neq \pm\pi.$$

由此完成了 $\mathbb{E}(\mathscr{T}_n^2)$的推导。

情形 $k \geq 3$

固定某个整数 $k \geq 3$。令 $\mathscr{P}$ 为 $\{i_\ell, j_\ell\colon\ \ell = 1, \ldots, k\}$ 的所有可能配对构成的集合。那么配对 $\mathbb{b} \in \mathscr{P}$ 当且仅当

$$\mathbb{b} = \left\{ \{I, J\}, \{I, \tilde{I}\}, \{J, \tilde{J}\} : I \neq \tilde{I} \in \{i_\ell, \ell = 1, \ldots, k\}, J \neq \tilde{J} \in \{j_\ell, \ell = 1, \ldots, k\} \right\},$$

其中所有符号 $i_\ell, j_\ell, \ell = 1, \ldots, k$ 都只能使用一次。

根据引理 S.5.4,

$$\mu_k := (2\pi)^k \mathbb{E}(\mathscr{T}_n^k) = \frac{1}{(n\Delta_n)^{k/2}} \sum_{\substack{i_\ell, j_\ell = 1 \\ \ell = 1, \ldots, k}}^{n} \mathbb{E}\left[ \prod_{\ell=1}^{k} \left[ X_{i_\ell} \overline{X_{j_\ell}} - C(i_\ell - j_\ell) \right] \right] \prod_{\ell=1}^{k} K_\theta(i_\ell - j_\ell)$$

$$= \frac{1}{(n\Delta_n)^{k/2}} \sum_{\substack{i_\ell, j_\ell = 1 \\ \ell = 1, \ldots, k}}^{n} \prod_{\ell=1}^{k} K_\theta(i_\ell - j_\ell)$$

$$\times \sum_{\substack{\mathbb{b} \in \mathscr{P}: \\ \cup_{p=1}^{k} \{\{i_p, j_p\}\} \cap \mathbb{b} = \emptyset}} \prod_{\{i,j\} \in \mathbb{b}} \Big[ C(I - J)_{\mathbb{I}\{i,j\} = \{I,J\}} + \check{C}(I - \tilde{I})_{\mathbb{I}\{i,j\} = \{I,\tilde{I}\}}$$

$$+ \overline{\check{C}(J - \tilde{J})}_{\mathbb{I}\{i,j\} = \{J,\tilde{J}\}} \Big],$$

现在令 $r \leq k$，并固定 $2r$ 指标的一个子集 $\{i'_1, j'_1, \ldots, i'_r, j'_r\} \subset \{i_1, j_1, \cdots, i_k, j_k\}$，其中$(i'_1, j'_1) = (i_{\sigma_1}, j_{\sigma_1}) \cdots, (i'_r, j'_r) = (i_{\sigma_r}, j_{\sigma_r})$，对某个 $1 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_r \leq k$ 成立。将$\{i'_1, j'_1, \ldots i'_r, j'_r\}$ 划分为若干对称为阶数为 $r$ 的子配对。也就是说，这是一种将$\{i'_1, j'_1, \ldots i'_r, j'_r\}$ 划分为若干对的方式，其中涉及 $r$ 对 $i'$，和/或只取自集合 $\{i'_1, j'_1, \ldots i'_r, j'_r\}$ 的 $j'$ 符号。

如果一个（子）配对不再包含子配对，即不能将其拆分为两个或更多低阶子配对的不相交并，就称其为不可约。令$C_{\mathscr{P},\ r,\ k}$ 表示所有阶为 $r$ 的不可约子配对的集合。

观察 $\mu_k$，中的第二个和的单个求和项，可以看出，每个配对$\mathbb{b} \in \mathscr{P}$ 都是多个形如 $C_{\mathscr{P},\ r,\ k}$ 且满足 $r \geq 2$ 的不可约配对之并。下文将论证，在 $\mathscr{P}$ 的所有配对中，只有包含阶为 $r = 2$ 的不可约分量的配对会渐近地作出贡献，其余配对的阶都较低，如$n \to \infty$所示。

令$\mathbb{b} \in \mathscr{P}$ 表示出现在$(2\pi)^d \mathbb{E}(\mathscr{T}_n^k)$第二个和中的一个配对，并假设

$$\mathbb{b} = \mathbb{b}^{r_1} \cup \cdots \cup \mathbb{b}^{r_m},$$

wher其中$\mathbb{b}^{r_i} \in C_{\mathscr{P}, r_i, k},\ r_i \geq 2,\ i = 1, \ldots, m,$是$\mathbb{b}$的不可约子配对。于是 ,

(S.4.15)

$$\mu_k = (2\pi)^k \mathbb{E}(\mathscr{T}_n^k) = \frac{1}{(n\Delta_n)^{k/2}} \sum_{\substack{i_\ell, j_\ell = 1 \\ \ell = 1, \ldots, k}}^{n} \Big\{ \prod_{\ell=1}^{k} K_\theta(i_\ell - j_\ell)$$

$$\times \sum_{\substack{\mathbb{b} \in \mathscr{P}: \\ \cup_{p=1}^{k} \{\{i_p, j_p\}\} \cap \mathbb{b} = \emptyset}} \prod_{\{i,j\} \in \mathbb{b}} \Big[ C(I - J)_{\mathbb{I}\{i,j\} = \{I,J\}} + \check{C}(I - \tilde{I})_{\mathbb{I}\{i,j\} = \{I,\tilde{I}\}}$$

$$+\overline{\check{C}(J-\tilde{J})}_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{J,\tilde{J}\}}\Big]\Big\}$$

$$=:\left(\frac{n}{\Delta_n}\right)^{k/2}\sum_{\mathbb{b}=\mathbb{b}^{r_1}\cup\cdots\cup\mathbb{b}^{r_m},\ m\geq 1}\ \sum_{\mathbb{b}^{r_t}\in\mathscr{P}}\prod_{t=1}^{m}A_{\mathscr{P},\mathbb{b}^{r_t},k},$$

其中 $A_{\mathscr{P},\mathbb{b}^{r_t},k}$涉及受限于不可约子配对$_{\mathbb{b}^{r_t}}$的各项乘积，且 $r_1+\cdots+r_m=k$，其中 $r_i\geq 2,\ i=1,\ldots,m$。具体而言，假设指标子集 $\{i'_1,j'_1,\cdots,i'_r,j'_r\}=\{i_{\sigma_2},j_{\sigma_1},\cdots,i_{\sigma_r},j_{\sigma_r}\},\ r\leq k$包含在不可约配对 $A_{\mathscr{P},\mathbb{b}^r,k}$ 中，则有

$$A_{\mathscr{P},\mathbb{b}^r,k}=\frac{1}{n^r}\sum_{\substack{i'_\ell,j'_\ell=1\\ \ell=1,\ldots,r}}^{n}\prod_{\ell=1}^{r}K_\theta(i'_\ell-j'_\ell)\times$$

$$\prod_{\{i,j\}\in_{\mathbb{b}^r}}\Big[C(I-J)_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{I,J\}}+\check{C}(I-\tilde{I})_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{I,\tilde{I}\}}$$

$$+\overline{\check{C}(J-\tilde{J})}_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{J,\tilde{J}\}}\Big].$$

令 $r\geq 3, r\leq k$，并进行变量替换

$$x_\ell=i-j,\ i,j\in_{\mathbb{b}^r}$$
$$y_\ell=i'_\ell-j'_\ell,\ell=1,\ldots,r-1,$$
$$y_r=i'_r,$$

其中，$i,j$的顺序由它们在 $C,\check{C}$ 和 $\overline{C}$ 项中出现的顺序决定。注意，由于核 $K$ 非负且有界，

$$\Big|\prod_{\ell=1}^{r}K_\theta(i'_\ell-j'_\ell)\Big|\leq\|K\|_\infty\prod_{\ell=1}^{r-1}K\Big(\frac{y_\ell}{\Delta_n}\Big).$$

于是，令 $D(x):=|C(x)|\vee|\check{C}(x)|$，我们得到

$$\begin{aligned}
&|A_{\mathscr{P},\mathbb{b}^r,k}|\\
&\leq\frac{\|K\|_\infty}{n^r}\sum_{\substack{x_\ell=-n+1\\ \ell=1,\ldots,r}}^{n-1}\prod_{\ell=1}^{r}D(x_\ell)\cdot\sum_{\substack{y_m=-n+1\\ m=1,\ldots,r-1}}^{n-1}\prod_{m=1}^{r-1}K\Big(\frac{y_m}{\Delta_n}\Big)\sum_{y_r=1}^{n}1\\
&\leq\frac{\|K\|_\infty}{n^{r-1}}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}}D(x)\right)^r\cdot\sum_{\substack{y_m=-n+1\\ m=1,\ldots,r-1}}^{n-1}\prod_{m=1}^{r-1}K\left(\frac{y_m}{\Delta_n}\right)\qquad\text{(S.4.16)}\\
&=\mathscr{O}\left(\left(\frac{\Delta_n}{n}\right)^{r-1}\right).
\end{aligned}$$

这里我们利用了关系 (S.4.11)、$\sum_x D(x)<\infty$ 以及 $K$ 支集的紧性。

利用（S.4.16），根据（S.4.15），立即可得

$$\mathbb{E}(\mathscr{T}_n^k)=\mathscr{O}\left(\Big(\frac{n}{\Delta_n}\Big)^{k/2}\cdot\max_{\substack{m=1,\cdots,\lfloor k/2\rfloor\\ r_1+\cdots+r_m=k,\ r_t\geq 2}}\Big(\frac{\Delta_n}{n}\Big)^{\sum_{t=1}^m(r_t-1)}\right)\equiv\mathscr{O}\left(\Big(\frac{\Delta_n}{n}\Big)^{k/2-M}\right),$$

其中

$$M := \max_{m=1,\cdots,\lfloor k/2\rfloor} \Big\{ m : r_1 + \cdots + r_m = k, \text{ where } r_t \in \{2,\cdots,k\} \Big\}.$$

显然，如果 $k$ 为奇数，那么 $M=(k-1)/2$，我们有 $k/2-M=1/2$，由上述界可得

$$\mathbb{E}[\mathscr{T}_n^k] = \mathscr{O}((\Delta_n/n)^{1/2}),$$

从而完成了此情形下命题 S.4.3 的证明。注意，该矩在$n\to\infty$ 时趋于零。

如果 $k$ 为偶数，那么 $M=k/2$ 和 $k/2-M=0$。根据上述论证，当 $n\to\infty$ 时，渐近地不趋于零的唯一配对对应于 $r_1=\cdots=r_{k/2}=2$。也就是说，指标 $\{i_1,j_1,\cdots,i_k,j_k\}$ 被配成 $k/2$ 个阶数为 2 的不可约子配对，并且这一情形在代数上归结为情形 $k=2$。

考虑四个指标 $\{i_1,j_1,i_2,j_2\}$，令 $A^{(\{i_1,j_2\},\{i_2,j_1\})_{\mathscr{P}}}$, $k$ 以及 $A^{(\{i_1,i_2\},\{j_1,j_2\})_{\mathscr{P}}}$, $k$ 分别为（S.4.15）中对应于子配对 $\{\{i_1,j_2\},\{i_2,j_1\}\}$ 和 $\{\{i_1,i_2\},\{j_1,j_2\}\}$的项。再令

$$A_{\mathscr{P},k}^{(\{i_1,j_1,i_2,j_2\})} := A_{\mathscr{P},k}^{(\{i_1,j_2\},\{i_2,j_1\})} + A_{\mathscr{P},k}^{(\{i_1,i_2\},\{j_1,j_2\})}$$

根据证明的第一部分，这两个对应于相同指标 $\{i_1,j_1,i_2,j_2\}$ 的二阶不可约子配对之和，对期望的速率贡献了以下项：

$$\Big(\frac{n}{\Delta_n}\Big)^1 A_{\mathscr{P},k}^{(\{i_1,j_1,i_2,j_2\})} \to \sigma_f^2(\theta) := \Big(f(\theta)^2 + 1_{\{0,\pm\pi\}}(\theta)|\check{f}(\theta)|^2\Big)\|K\|_2^2,$$

为 $n\to\infty$。因此，鉴于（S.4.15），

$$\begin{aligned}
\mu_k = (2\pi)^k\mathbb{E}(\mathscr{T}_n^k) &= \Big(\frac{n}{\Delta_n}\Big)^{k/2} \sum_{\mathbb{b}=\mathbb{b}^{r_1}\cup\cdots\cup\mathbb{b}^{r_m},\ m\ge 1} \ \sum_{\mathbb{b}\in\mathscr{P}} \prod_{t=1}^{m} A_{\mathscr{P},\mathbb{b}^{r_t},k} \\
&\asymp \Big(\frac{n}{\Delta_n}\Big)^{k/2} \sum_{\substack{\mathbb{b}=\mathbb{b}^{r_1}\cup\cdots\cup\mathbb{b}^{r_{k/2}} \\ r_1=\ldots=r_{k/2}=2}} \ \sum_{\mathbb{b}\in\mathscr{P}} \prod_{t=1}^{m} A_{\mathscr{P},\mathbb{b}^{r_t},k} \\
&= \Big(\frac{n}{\Delta_n}\Big)^{k/2} \sum_{\mathbb{d}=\{\{i_1',j_1',i_2',j_2'\},\cdots,\{i_{k-1}',j_{k-1}',i_k',j_k'\}\}} \ \sum_{\mathbb{d}\in\mathscr{Q}_2} \prod_{\substack{\ell,m=1,\ldots,k \\ \ell\neq m}} \Big(A_{\mathscr{P},k}^{(\{i_\ell',j_m'\},\{i_m',j_\ell'\})} + A_{\mathscr{P},k}^{(\{i_\ell',i_m'\},\{j_\ell',j_m'\})}\Big) \\
&= \Big(\frac{n}{\Delta_n}\Big)^{k/2} \sum_{\mathbb{d}=\{\{i_1',j_1',i_2',j_2'\},\cdots,\{i_{k-1}',j_{k-1}',i_k',j_k'\}\}} \ \sum_{\mathbb{d}\in\mathscr{Q}_2} \prod_{\substack{\ell,m=1,\ldots,k \\ \ell\neq m}} A_{\mathscr{P},k}^{(\{i_\ell',j_\ell',i_m',j_m'\})} \\
&\to N_2(k)\times\Big[\sigma_f^2(\theta)\Big]^{k/2},
\end{aligned}$$

其中，$N_2(k)$ 表示将集合 $\{i_1,j_1,\cdots,i_k,j_k\}$ 划分为若干个包含 4 个元素的集合，且每个集合包含相同指标的 $i$ 和 $j$ 的方式数；$\mathscr{Q}_2$ 表示所有这些划分构成的集合。

为完成命题 S.4.3的证明，还需说明 $N_2(k) = |\mathscr{Q}_2| = (k-1)!!$。注意，每个 $q \in \mathscr{Q}_2$ 都由一种划分唯一确定，即将 $2k$个符号 $\{i_1, j_1, \cdots, i_k, j_k\}$的指标划分为若干个包含4 个指标的集合$\{i_{\ell_1}, j_{\ell_1}, i_{\ell_2}, j_{\ell_2}\}$。因此，确定数量$N_2(k)$等价于计算将集合 $\{i_1, \cdots, i_k\}$划分为 2–个点子集 $\{i_{\ell_1}, i_{\ell_2}\}$的方式数。选取第一对的方式有 $\binom{k}{2}$种，选取第二对的方式有 $\binom{k-2}{2}$种，依此类推。因此， $N_2(k)$ 等于

$$\frac{1}{(k/2)!}\binom{k}{2}\cdot\binom{k-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = (k-1)!!,$$

其中，我们除以 $(k/2)!$，因为子集 $\{i_{\ell_1}, i_{\ell_2}\}$ 的顺序并不重要。 □

S.4.3.2. 一般情形。本节旨在完成对命题 S.4.2 中 (ii) 的验证，针对一般的 $\mathbb{H}$，并满足该命题的假设。回顾一下，我们已在上一小节中验证了空间情形 $\mathbb{H} = \mathbb{C}$ 下的 (ii)。从标量情形推广到一般情形实际上相当直接。我们以二阶矩为例进行说明。

回顾一下，$X_{g_\ell}(i) = \langle X(i)\ g_\ell\rangle$。记 <style id="18">$(2\pi)^2\mathbb{E}\left[\sum_{\ell=1}^m a_\ell \langle \mathscr{T}_n g_\ell, g_\ell\rangle\right]^2$ 为 $A_{n,2}$。根据引理S.5.3中的 Isserlis 公式，

$$\begin{aligned}
A_{n,2} = &\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^m a_{\ell_1}a_{\ell_2}\frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1=1}^n\sum_{i_2,j_2=1}^n K_\theta(i_1-j_1)K_\theta(i_2-j_2)\\
&\times\mathbb{E}\Big\{\Big[X_{g_{\ell_1}}(i_1)\overline{X_{g_{\ell_1}}(j_1)} - \mathbb{E}X_{g_{\ell_1}}(i_1)\overline{X_{g_{\ell_1}}(j_1)}\Big]\\
&\qquad\times\Big[X_{g_{\ell_2}}(i_2)\overline{X_{g_{\ell_2}}(j_2)} - \mathbb{E}X_{g_{\ell_2}}(i_2)\overline{X_{g_{\ell_2}}(j_2)}\Big]\Big\}\\
= &\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^m a_{\ell_1}a_{\ell_2}\frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1=1}^n\sum_{i_2,j_2=1}^n K_\theta(i_1-j_1)K_\theta(i_2-j_2)\\
&\times\Big[\mathbb{E}X_{g_{\ell_1}}(i_1)\overline{X_{g_{\ell_1}}(j_1)}X_{g_{\ell_2}}(i_2)\overline{X_{g_{\ell_2}}(j_2)}\\
&\qquad-\mathbb{E}X_{g_{\ell_1}}(i_1)\overline{X_{g_{\ell_1}}(j_1)}\mathbb{E}X_{g_{\ell_2}}(i_2)\overline{X_{g_{\ell_2}}(j_2)}\Big]\\
= &\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^m a_{\ell_1}a_{\ell_2}\frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1=1}^n\sum_{i_2,j_2=1}^n K_\theta(i_1-j_1)K_\theta(i_2-j_2)\\
&\qquad\times\mathbb{E}X_{g_{\ell_1}}(i_1)\overline{X_{g_{\ell_2}}(j_2)}\mathbb{E}X_{g_{\ell_2}}(i_2)\overline{X_{g_{\ell_1}}(j_1)}\\
+ &\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^m a_{\ell_1}a_{\ell_2}\frac{1}{n\Delta_n}\sum_{i_1,j_1=1}^n\sum_{i_2,j_2=1}^n K_\theta(i_1-j_1)K_\theta(i_2-j_2)\\
&\qquad\times\mathbb{E}X_{g_{\ell_1}}(i_1)X_{g_{\ell_2}}(i_2)\mathbb{E}\overline{X_{g_{\ell_1}}(j_1)X_{g_{\ell_2}}(j_2)}\\
=:&\ \widetilde{A}_{n,2} + \overline{A}_{n,2}.
\end{aligned}$$

定义

$$C_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(t) := \mathbb{E}X_{g_{\ell_1}}(t)\overline{X_{g_{\ell_2}}(0)}. \tag{S.4.17}$$

从 $\theta \notin \{0, \pm\pi\}$ 开始。根据命题 S.4.3 中相同的论证，我们只需关注~于 $A_2$. 通过变量替换

$$x_1 = i_1 - j_2,\ x_2 = i_2 - j_1,$$

$$y_1 = i_1 - j_1,\ y_2 = i_1,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{n,2} &= \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{m} a_{\ell_1} a_{\ell_2} \frac{1}{n\Delta_n} \sum_{x_1,x_2=-n+1}^{n-1} C_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(x_1)\overline{C_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(-x_2)} \\
&\quad \times \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1+x_2)} K_\theta(y_1) K_\theta(x_1+x_2-y_1) \sum_{y_2=1\vee(1+y_1)}^{n\wedge(n+y_1)} 1 \\
&= \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{m} a_{\ell_1} a_{\ell_2} \sum_{x_1,x_2=-n+1}^{n-1} C_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(x_1) e^{\mathbb{i}x_1\theta} \overline{C_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(-x_2) e^{-\mathbb{i}x_2\theta}} \\
&\quad \times \frac{1}{\Delta_n} \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1+x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1+x_1+x_2)} K(y_1) K(x_1+x_2-y_1) \frac{n-|y_1|}{n} \\
&\sim \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{m} a_{\ell_1} a_{\ell_2} 4\pi^2 \int_{y=-1}^{1} K^2(y)dy \Big| \sum_{x=-\infty}^{\infty} C_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(x) e^{\mathbb{i}x\theta} \Big|^2
\end{aligned}$$

基于命题 S.4.3 的证明。由（S.4.17），这恰好是

$$4\pi^2 \int_{y=-1}^{1} K^2(y)dy \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{m} a_{\ell_1} a_{\ell_2} |\langle f(\theta) g_{\ell_1}, g_{\ell_2} \rangle|^2.$$

对 $\overline{A}_{n,2}$ 的推导类似。例如，考虑 $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{n,2} &= \frac{1}{n\Delta_n} \sum_{i_1,j_1=1}^{n} \sum_{i_2,j_2=1}^{n} K_0(i_1-j_1) K_0(i_2-j_2) \\
&\quad \times \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{m} a_{\ell_1} a_{\ell_2} \check{C}_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(i_1-i_2) \overline{\check{C}_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(j_1-j_2)},
\end{aligned}$$

其中

$$\check{C}_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(t) := \mathbb{E}[X_{g_{\ell_1}}(t) X_{g_{\ell_2}}(0)] = \left\langle \mathbb{E}\left[ X(t) \otimes \overline{X(0)} \right] \overline{g_{\ell_2}}, g_{\ell_1} \right\rangle = \langle \check{C}(t) \overline{g_{\ell_2}}, g_{\ell_1} \rangle.$$

作变量替换

$$\begin{aligned}
x_1 &= i_1 - i_2,\ x_2 = j_1 - j_2, \\
y_1 &= i_1 - j_1,\ y_2 = i_1,
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\overline{A}_{n,2} &= \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{m} a_{\ell_1} a_{\ell_2} \frac{1}{\Delta_n} \sum_{x_1,x_2=1-n}^{n-1} \check{C}_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(x_1) \overline{\check{C}_{g_{\ell_1},g_{\ell_2}}(x_2)} \\
&\quad \times \sum_{y_1=(1-n)\vee(1-n+x_1-x_2)}^{(n-1)\wedge(n-1)+x_1-x_2} K\left(\frac{y_1}{\Delta_n}\right) K\left(\frac{-x_1+x_2+y_1}{\Delta_n}\right) \frac{n-|y_1|}{n} \\
&\sim 4\pi^2 \int_{y=-1}^{1} K^2(y)dy \sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{m} a_{\ell_1} a_{\ell_2} \left| \left\langle \check{f}(0) \overline{g_{\ell_2}}, g_{\ell_1} \right\rangle \right|^2,
\end{aligned}$$

再次使用命题S.4.3的证明中的论证。因此，我们验证了命题S.4.2 对 $k=2$。

类似地，对于一般空间 $\mathbb{H}$， $k\geq 3$ 的 $\mathbb{E}\left[\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \langle \mathscr{T}_n g_\ell, g_\ell\rangle\right]^k$ 推导可以从标量情形推广而来，具体细节从略。

## S.5. 累积量与 Isserlis 公式。

**S.5.1. 函数型数据的累积量。**本节具有独立的研究价值，给出了伊瑟利斯定理在希尔伯特空间取值的高斯随机变量情形下的推广。我们首先给出取值于 $\mathbb{R}$ 的标量随机变量的累积量定义。

定义 S.5.1. 设 $Y_1,\ldots,Y_k$ 为取值于 $\mathbb{R}$ 的随机变量，使得对 $\{1,\ldots,k\}$的所有子集 $B$，$\mathbb{E}(\prod_{j\in B} Y_j)$ 均有定义且有限。则，

$$\operatorname{cum}(Y_1,\ldots,Y_k) := \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_q)} (-1)^{q-1}(q-1)! \prod_{l=1}^{q} \mathbb{E}\left[\prod_{j\in\nu_l} Y_j\right],$$

其中求和遍及 $\{1,\ldots,k\}$.的所有无序划分

以下引理可由 Rosenblatt (1985) 第 34 页的讨论推出。

引理 S.5.1. 设 $Y_i, i=1,\ldots,k$ 为实随机变量，使得对 $\{1,\ldots,k\}$的所有子集 $B$， $\mathbb{E}(\prod_{j\in B} Y_j)$ 均有定义且有限。则

$$\mathbb{E}[Y_1\cdot\ldots\cdot Y_k] = \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_p)} \prod_{l=1}^{p} \operatorname{cum}(Y_i;\ i\in\nu_l),$$

其中求和遍及 $\{1,\ldots,k\}$.的所有无序划分

命题 S.5.2. 设 $\{X(t)\}$ 是一个取值于希尔伯特空间$\mathbb{H}$的随机过程，其中对所有 $t$，$\mathbb{E}(\|X(t)\|^4) < \infty$。注意，这里我们不假设 $X$ 为实值。固定 $\mathbb{H}$ 的一个任意实 CONS $\{e_i,\ i\in I\}$，并记 $X_i(t) := \langle X(t)\ e_i\rangle$。则对于任意$t,s,w,v\in\mathbb{R}^d$，有

$$\operatorname{cum}(X(t),X(s),X(w),X(v)) = \sum_i \sum_j \operatorname{cum}(X_j(t),\overline{X_i(s)},\overline{X_j(w)},X_i(v)).$$

Proof。回顾（4.1）中累积量的定义：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cum}(X(t),X(s),X(w),X(v))\\
&= \mathbb{E}\langle X(t)\otimes X(s), X(w)\otimes X(v)\rangle_{\mathrm{HS}} - \langle \mathbb{E}(X(t)\otimes X(s)), \mathbb{E}(X(w)\otimes X(v))\rangle_{\mathrm{HS}}\\
&\qquad - \mathbb{E}\langle X(t),X(w)\rangle_{\mathbb{H}}\cdot \mathbb{E}\langle X(v),X(s)\rangle_{\mathbb{H}}\\
&\qquad\qquad - \left\langle \mathbb{E}(X(t)\otimes\overline{X(v)}), \mathbb{E}(X(w)\otimes\overline{X(s)})\right\rangle_{\mathrm{HS}}.
\end{aligned}$$

对于任意 $x(1)\ldots,x(4)\in\mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}
\langle x(1)\otimes x(2), x(3)\otimes x(4)\rangle_{\mathrm{HS}} &= \sum_i \langle (x(1)\otimes x(2))e_i, (x(3)\otimes x(4))e_i\rangle_{\mathbb{H}}\\
&= \langle x(1),x(3)\rangle_{\mathbb{H}}\,\overline{\langle x(2),x(4)\rangle_{\mathbb{H}}}\\
&= \sum_i\sum_j x_i(1)\overline{x_i(3)x_j(2)}x_j(4).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\langle X(t)\otimes X(s), X(w)\otimes X(v)\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_i \sum_j \overline{X_i(s)} X_i(v) X_j(t) \overline{X_j(w)}.$$

只需证明

$$\mathbb{E}\,\langle X(t)\otimes X(s), X(w)\otimes X(v)\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_i \sum_j \mathbb{E}(\overline{X_i(s)} X_i(v) X_j(t) \overline{X_j(w)}),$$

其中，交换求和次序与取期望次序是合理的，这可由 $X(t)$ 的四阶矩假设以及富比尼定理得到。

类似地，我们有

$$\langle \mathbb{E}(X(t)\otimes X(s)), \mathbb{E}(X(w)\otimes X(v))\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_i \sum_j \mathbb{E}(\overline{X_i(s)} X_j(t)) \mathbb{E}(X_i(v) \overline{X_j(w)})$$

and

$$\langle \mathbb{E}(X(t)\otimes \overline{X(v)}), \mathbb{E}(X(w)\otimes \overline{X(s)})\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_i \sum_j \mathbb{E}(X_j(t) X_i(v)) \mathbb{E}(\overline{X_i(s) X_j(w)}),$$

其中，我们利用了 CONS $\{e_j\}$ 是实数这一事实，从而可以写成 $X(s) = \sum_i X_i(s)\, e_j$.最后，

$$\mathbb{E}\,\langle X(t), X(w)\rangle_{\mathbb{H}} \cdot \mathbb{E}\,\langle X(v), X(s)\rangle_{\mathbb{H}} = \sum_i \sum_j \mathbb{E} X_j(t) \overline{X_j(w)} \mathbb{E} X_i(v) \overline{X_i(s)}.$$

将所有四项合并后，很容易看出累积量和

$$\sum_i \sum_j \mathrm{cum}(X_j(t), \overline{X_i(s)}, \overline{X_j(w)}, X_i(v))$$

得以重构。 □

我们以一条评注结束本小节，讨论与 Panaretos 和 Tavakoli（2013年）中采用的一种相关但不同的累积量概念之间的联系。

评注 S.5.1. Panaretos 和 Tavakoli （2013年）在论文第571页底部定义了一种累积量概念。本评注旨在说明 $C(0,4)$ 中的条件与 Panaretos 和 Tavakoli （2013年）中的假设 $V'$的（c）之间的联系。

为简单起见，我们将使用实希尔伯特空间。回顾一下，在 Panaretos 和 Tavakoli （2013年）中，作者考虑了 $\mathbb{H} = L^2[0,1]$ 并定义了所谓的累积量核:

$$\mathrm{cum}_{\mathrm{ker}}(X(t_1),\cdots,X(t_k)) := \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_p)} (-1)^{p-1}(p-1)! \prod_{\ell=1}^{p} \mathbb{E}\Big[\prod_{j\in\nu_\ell} X(\tau_j;t_j)\Big],$$

其中 $X(t) := (X(\tau;\ t)\quad \tau\in[0,1]) \in L^2([0,1])$。对于阶数为 $2k$ 的核，可以定义所谓的累积量算子 $\mathscr{R}:\ L^2([0,1]^k) \to L^2([0,1]^k)$，定义如下:

$$\mathscr{R}(h) := \int_{[0,1]^2} \mathrm{cum}_{\mathrm{ker}}(X(t_1),\cdots,X(t_{2k}))(\tau_1,\cdots,\tau_{2k}) h(\tau_{k+1},\cdots,\tau_{2k}) d\tau_{k+1}\cdots d\tau_{2k},$$

其中，后者被理解为一个关于$(\tau_1,\cdots,\tau_k)$的函数，可以证明它属于$L^2([0,1]^k)$。

固定一个由 $L^2([0,1])$构成的完全正交规范系 $\{e_j\}$，对于 $k=2$，我们得到

$$\mathrm{cum}_{\mathrm{ker}}(X(t_1),\cdots,X(t_4))=\sum_{i,j,k,\ell}\mathrm{cum}(X_i(t_1),X_j(t_2),X_k(t_3),X_\ell(t_4))e_i\otimes e_j\otimes e_k\otimes e_\ell,$$

其中cum 表示随机变量的通常累积量，并且 $X_i(t)=\langle X(t)\ e_i\rangle$是

$X\ t$ $\{e_j\}$ $\{e_i\otimes e_j\}$ $L^2\ [0,1]^2]\equiv()$在 $L^2\ [0,1]\ \otimes L^2\ [0,1]$ $\mathscr{R}\ \ L^2\ [0,1]\ \otimes L^2\ [0,1]\ \to$ 基中的坐标。因此，在$(()\,()$的基下，可以将累积量算子:$()\,()L^2([0,1])\otimes L^2([0,1])$ 视为

$$\mathscr{R}=\sum_{i,j,k,\ell}r_{(i,j),(k,\ell)}(e_i\otimes e_j)\otimes(e_k\otimes e_\ell),$$

其中$r_{(i,j),(k,\ell)}:=\mathsf{cum}(X_i(t_1)\ X_j(t_2)\ X_k(t_3)\ X_\ell(t_4))$。

从这个角度来看，根据(4.9)，我们得到，累积量的概念与希尔伯特–施密特累积量算子 $\mathscr{R}$:

$$\mathrm{trace}(\mathscr{R})=\mathrm{cum}(X(t_1),X(t_2),X(t_3),X(t_4))=\sum_{i,j}r_{(i,j),(i,j)}.$$

另一方面，Panaretos 和 Tavakoli (2013年) 的 C(0,4) 条件中所用累积量核的范数为:

$$\|\mathrm{cum}_{\mathrm{ker}}(X(t_1),\cdots,X(t_4))\|_{L^2}^2=\sum_{i,j,k,\ell}\mathrm{cum}(X_i(t_1),X_j(t_2),X_k(t_3),X_\ell(t_4))^2.$$

而请回想,

$$\mathrm{cum}(X(t_1),\cdots,X(t_4))=\sum_{i,j,k,\ell}\mathrm{cum}(X_i(t_1),X_j(t_2),X_k(t_3),X_\ell(t_4)).$$

因此， $C(0,4)$ 条件Panaretos 和 Tavakoli (2013年) 并非

$$\sum_{t_1,t_2,t_3}\|\mathrm{cum}_{\mathrm{ker}}(X(t_1),X(t_2),X(t_3),X(0))\|_{L^2}<\infty$$

严格弱于或强于假设$V'$中的条件 (c)。

S.5.2. 伊瑟利斯公式。以下内容将经典伊瑟利斯公式推广到了单变量复高斯变量。

引理 S.5.3. 设 $Z_j=X_j+\mathrm{i}Y_j$, $j=1,2,\cdots$为零均值复联合高斯随机变量。也就是说， $X_j,Y_j$, $j=1,2,\cdots$为零均值联合高斯 $\mathbb{R}$值随机变量。那么，对所有 $m\in\mathbb{N}$，均有 $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{2m-1}Z_j]=0$, 并且

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{2m}Z_j\right)=\sum_{\pi}\prod_{i=1}^{m}\mathbb{E}(Z_{a_{\pi,i}}Z_{b_{\pi,i}}),$$

其中，配对 $\pi$指的是将 $\{1,\ldots,2m\}$分解为 $m$对，这些配对表示为 $(a_{\pi,i},b_{\pi,i})$ $i=1$, ....., $m$。

证明。回顾一下，$Z_j=X_j+\mathrm{i}Y_j$，其中 $X_i,Y_i$均为实数。令 $\sigma_a^{(0,0)},_b=\mathbb{E}(X_aX_b)$ $\sigma_a^{(0,1)},$ $\mathbb{E}$ $(X_aY_b)$ $\sigma_a^{(1,0)},_b=\mathbb{E}(Y_aX_b)$ $\sigma_a^{(1,1)},$ $_b=\mathbb{E}(Y_aY_b)$。记作

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{2m}(X_j+\mathrm{i}Y_j)\right)=\sum_{S\subset\{1,\ldots,2m\}}\mathrm{i}^{|S|}\mathbb{E}\left(\prod_{j\notin S}X_j\prod_{k\in S}Y_k\right).$$

根据 Isserlis (1918) 提出的实高斯随机变量的伊瑟利斯公式，我们有

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j\notin S} X_j \prod_{k\in S} Y_k\right) = \sum_{\pi}\prod_{i=1}^{m} \sigma_{a_{\pi,i},b_{\pi,i}}^{(\mathbb{I}(a_{\pi,i}\in S),\mathbb{I}(b_{\pi,i}\in S))},$$

因此

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{2m}(X_j +_{\mathbb{I}} Y_j)\right) = \sum_{\pi}\sum_{S\subset\{1,\ldots,2m\}} \dot{\mathbb{I}}^{|S|}\prod_{i=1}^{m} \sigma_{a_{\pi,i},b_{\pi,i}}^{(\mathbb{I}(a_{\pi,i}\in S),\mathbb{I}(b_{\pi,i}\in S))}.$$

对于任意给定的 $\pi$ 和 $S$，令 $\alpha_i = \mathbb{I}(a_{\pi,i}\in S)$ $\beta_i = \mathbb{I}(b_{\pi,i}\in S)$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{2m}(X_j +_{\mathbb{I}} Y_j)\right) &= \sum_{\pi}\sum_{\substack{\alpha_i,\beta_i=0,1\\ i=1,\ldots,m}} \dot{\mathbb{I}}^{\sum_i\alpha_i+\sum_i\beta_i}\prod_{i=1}^{m}\sigma_{a_{\pi,i},b_{\pi,i}}^{(\alpha_i,\beta_i)} \\ &= \sum_{\pi}\prod_{i=1}^{m}\sum_{\alpha_i,\beta_i=0,1} \dot{\mathbb{I}}^{\alpha_i+\beta_i}\sigma_{a_{\pi,i},b_{\pi,i}}^{(\alpha_i,\beta_i)} \\ &= \sum_{\pi}\prod_{i=1}^{m}(1,_{\mathbb{I}})C(a_{\pi,i},b_{\pi,i})(1,_{\mathbb{I}})^{\top},\end{aligned} \tag{S.5.1}$$

其中

$$C(a,b) = \begin{pmatrix}\mathbb{E}(X_aX_b) & \mathbb{E}(X_aY_b)\\ \mathbb{E}(X_bY_a) & \mathbb{E}(Y_aY_b)\end{pmatrix}.$$

N注意，$\mathbb{E}[Z_aZ_b] = (1,_{\mathbb{I}})C(a,b)(1,_{\mathbb{I}})^{\top}$，因此（S.5.1）的右端等于 s

$$\sum_{\pi}\prod_{i=1}^{m}\mathbb{E}(Z_{a_{\pi,i}}Z_{b_{\pi,i}}),$$

这表明，复值随机变量的伊瑟利斯公式与实值随机变量的公式完全相同。

□

引理 S.5.4. 设 $\{X(t)\ t\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的平稳高斯过程，其 $C(t-s) = \mathbb{E}X(t)X(s)$，且 $\breve{C}(t-s) = \overline{\mathbb{E}X(t)}X(s)$。考虑 $X(t_i)$ $X(s_i)$、$i=1$、.....、$N+M$，其中$N$、$M\in\mathbb{Z}$，且 $N\geq 0$ 和 $M\geq 0$。记 $\mathscr{P}_{N,\ M}$ 为集合的所有配对所组成的函数类

$$\{t_i, s_i | i = 1,\ldots,N+M\}$$

并且由 $\mathscr{P}_{N,\ M,\ -k}$ 所有配对构成的函数类

$$\{t_i, s_i | i = 1,\ldots,N+M\}\setminus\{t_k, s_k\}.$$

这意味着 $\tilde{u}\in\mathscr{P}_{N,\ M}$ 当且仅当

$$\tilde{u} = \{\{\tau,\sigma\},\{\tau,\tilde{\tau}\},\{\sigma,\tilde{\sigma}\}\,|\tau\neq\tilde{\tau}\in\{t_i\colon\ i=1,\ldots,N+M\},\ \sigma\neq\tilde{\sigma}\in\{s_i\colon\ i=1,\ldots,N+M\}\}$$

并且每个符号 $t_i, s_i,\ i=1,\ldots,N+M$只能使用一次。于是,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^{N} X(t_n)\overline{X(s_n)} \cdot \prod_{m=1}^{M}\left(X(t_{N+m})\overline{X(s_{N+m})} - C(t_{N+m}-s_{N+m})\right)\right]$$

$$= \sum_{\substack{\tilde{u}\in\mathscr{P}_{N,M}:\\ \cup_{m=1}^{M}\{\{t_{N+m},s_{N+m}\}\}\cap\tilde{u}=\emptyset}} \prod_{\{i,j\}\in\tilde{u}} \Big[C(\tau-\sigma)_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\tau,\sigma\}} + \check{C}(\tau-\tilde{\tau})_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\tau,\tilde{\tau}\}} + \overline{\check{C}(\sigma-\tilde{\sigma})}_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\sigma,\tilde{\sigma}\}}\Big]. \tag{S.5.2}$$

这一 Isserlis 型结果用于命题 S.4.3 （例如见（S.4.15））， 其中谱密度估计量的 $k$ 阶矩包含形如（S.5.2）的项，其中$N=0$。我们将（S.5.2）表述为一般的 $N\geq 0$ ，是为了便于用归纳法证明这一关系。

引理 S.5.4 的证明。我们将对 $N+M$ 使用归纳法来证明所需的等式。当 $N+M=1$ 时，该等式显然成立。归纳法的基步取 $N+M=2$。我们考察三种不同的情形。

(a) $N=2$。由伊瑟利斯公式，该等式显然成立。(b) $N=M=1$。
我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X(t_1)\overline{X(s_1)}\cdot(X(t_2)\overline{X(s_2)} - C(t_2-s_2))\right]\\
&= \mathbb{E}\left[X(t_1)\overline{X(s_1)}X(t_2)\overline{X(s_2)}\right] - C(t_1-s_1)C(t_2-s_2)\\
&= \mathbb{E}\left[X(t_1)\overline{X(s_1)}\right]\mathbb{E}\left[X(t_2)\overline{X(s_2)}\right] + \mathbb{E}\left[X(t_1)X(t_2)\right]\mathbb{E}\left[\overline{X(s_1)X(s_2)}\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[X(t_1)\overline{X(s_2)}\right]\mathbb{E}\left[\overline{X(s_1)}X(t_2)\right] - C(t_1-s_1)C(t_2-s_2)\\
&= \check{C}(t_1-t_2)\overline{\check{C}(s_1-s_2)} + C(t_1-s_2)C(t_2-s_1)
\end{aligned}$$

第二个等式中使用了伊瑟利斯公式。
(c) $M=2$。我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(X(t_1)\overline{X(s_1)} - C(t_1-s_1))\cdot(X(t_2)\overline{X(s_2)} - C(t_2-s_2))\right]\\
&= \mathbb{E}\left[X(t_1)\overline{X(s_1)}X(t_2)\overline{X(s_2)}\right] - C(t_1-s_1)C(t_2-s_2)\\
&= \check{C}(t_1-t_2)\overline{\check{C}(s_1-s_2)} + C(t_1-s_2)C(t_2-s_1)
\end{aligned} \tag{S.5.3}$$

与情形$(b)$类似。

对于归纳假设，我们假设当 $N+M=r.$时所需的等式成立。现在令 $N+M=r+1.$。我们区分两种情形。

(a) $N=r+1$。该结果可由伊瑟利斯公式直接推出。(b)
$N<r+1$。以下结论成立

$$\mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^{N} X(t_n)\overline{X(s_n)} \cdot \prod_{m=1}^{M}\left(X(t_{N+m})\overline{X(s_{N+m})} - C(t_{N+m}-s_{N+m})\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^{N+1} X(t_n)\overline{X(s_n)} \prod_{m=2}^{M}\Big(X(t_{N+m})\overline{X(s_{N+m})} - C(t_{N+m}-s_{N+m})\Big)\right]$$

$$- C(t_{N+1}-s_{N+1})\mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^{N} X(t_n)\overline{X(s_n)} \cdot \prod_{m=2}^{M}\Big(X(t_{N+m})\overline{X(s_{N+m})} - C(t_{N+m}-s_{N+m})\Big)\right]$$

$$= \dots$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^{N+M} X(t_n)\overline{X(s_n)}\right]$$

$$- \sum_{m=1}^{M} C(t_{N+m}-s_{N+m})\mathbb{E}\Big[\prod_{n=1}^{N+m-1} X(t_n)\overline{X(s_n)}$$

$$\cdot \prod_{k=m+1}^{M}\Big(X(t_{N+k})\overline{X(s_{N+k})} - C(t_{N+k}-s_{N+m})\Big)\Big]$$

应用伊瑟利斯公式，第一个求和项等于

$$\sum_{\tilde{u}\in\mathscr{P}_{N,M}} \prod_{\{i,j\}\in\tilde{u}} \Big[C(\tau-\sigma)_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\tau,\sigma\}} + \check{C}(\tau-\tilde{\tau})_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\tau,\tilde{\tau}\}}$$

$$+ \overline{\check{C}(\sigma-\tilde{\sigma})}_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\sigma,\tilde{\sigma}\}}\Big].$$

在第二个求和项中应用归纳假设，由于所有项总共都包含 $r$ 个因子，我们有第二项等于

$$\sum_{m=1}^{M} C(t_{N+m}-s_{N+m}) \sum_{\substack{\tilde{u}\in\mathscr{P}_{N,M,-m}:\\ \cup_{i=N+m+1}^{N+M}\{\{t_i,s_i\}\}\cap\tilde{u}=\emptyset}} \prod_{\{i,j\}\in\tilde{u}} \Big[C(\tau-\sigma)_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\tau,\sigma\}}$$

$$+ \check{C}(\tau-\tilde{\tau})_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\tau,\tilde{\tau}\}} + \overline{\check{C}(\sigma-\tilde{\sigma})}_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\sigma,\tilde{\sigma}\}}\Big].$$

将前一个和的第一项记为 $A$，第二项记为 $B$，写作 $B:=\sum_{m=1}^{M} B_m$。另外，设

$$C_{i,j}^{\tilde{u}} := C(\tau-\sigma)_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\tau,\sigma\}} + \check{C}(\tau-\tilde{\tau})_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\tau,\tilde{\tau}\}} + \overline{\check{C}(\sigma-\tilde{\sigma})}_{\mathbb{I}\{i,j\}=\{\sigma,\tilde{\sigma}\}}.$$

于是我们有

$$A - B_M = \sum_{\tilde{u}\in\mathscr{P}_{N,M}} \prod_{\{i,j\}\in\tilde{u}} C_{i,j}^{\tilde{u}} - C(t_{N+M}-s_{N+M}) \sum_{\tilde{u}'\in\mathscr{P}_{N,M,-M}} \prod_{\{i,j\}\in\tilde{u}'} C_{i,j}^{\tilde{u}'}$$

$$= \sum_{\substack{\tilde{u}\in\mathscr{P}_{N,M}:\\ \{t_{N+M},s_{N+M}\}\notin\tilde{u}}} \prod_{\{i,j\}\in\tilde{u}} C_{i,j}^{\tilde{u}}.$$

同理

$$A - B_M - B_{M-1} = \sum_{\substack{\tilde{u}\in\mathscr{P}_{N,M}:\\ \cup_{i=M-1}^{M}\{\{t_{N+i},s_{N+i}\}\}\cap\tilde{u}=\emptyset}} \prod_{\{i,j\}\in\tilde{u}} C_{i,j}^{\tilde{u}}.$$

C对所有项 $B_j,\ j=1,\dots,M$依此类推，证明便完成了。

□

S.6. 第8节的证明. 与第 8节一样， $\mathbb{H}_n$表示由 $\{R(u,\cdot)\ u\in D_n\}$ 张成的空间，而 $\Pi_n$ 是到 $\mathbb{H}_n$上的投影算子。尽管下面的结果是标准结论，我们仍将其列出，以求完整。

命题 S.6.1. 假设矩阵 $\boldsymbol{R}_n=\{R(u_{n,i},u_{n,j})\}_{i,j=1}^{m_n}$ 是可逆的。令$g\in\mathbb{H}$和 $\boldsymbol{g}=(g(u_{n,1})\dots,g(u_{n,m_n}))^\top$。则有以下结论。
(i) 投影 $\tilde g=\Pi_n g=\sum_i c_iR(u_{n,i},\cdot)$，其中 $\boldsymbol{c}:=(c_1,\dots,c_{m_n})^\top=\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{g}$，并且对于所有 $u_{n,i}\in D_n$，$\tilde g(u_{n,i})=g(u_{n,i})$。此外，$\|g-\tilde g\|_{\mathbb{H}}^2=\|g\|_{\mathbb{H}}^2-\boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{g}$。(ii) $|\tilde g(u)-g(u)|\le\|g\|_{\mathbb{H}}\inf_{u'\in D_n}\sqrt{R(u,u)-2R(u,u')+R(u',u')}$。

证明。
(i) 根据投影的性质，

$$\tilde g=\operatorname*{argmin}_{h\in\mathbb{H}_n}\|g-h\|_{\mathbb{H}}.$$

对于 $h=\sum_i c_iR(u_{n,i},\cdot)$，再生性质意味着

$$\|g-h\|_{\mathbb{H}}^2=\|g\|_{\mathbb{H}}^2-2\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{g}+\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{c},$$

由此我们得出极小化子 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{g}$。于是可得

$$\tilde{\boldsymbol{g}}:=(\tilde g(u_{n,1}),\dots,\tilde g(u_{n,m_n}))^\top=\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{c}=\boldsymbol{g}.$$

(ii) 再次应用对所有 $u'\in D_n$ 均有 $g-\tilde g\perp R(u',\cdot)$ 这一事实，可得对任意 $u\in E$,

$$\tilde g(u)-g(u)=\langle\tilde g-g,R(u,\cdot)\rangle_{\mathbb{H}}=\langle\tilde g-g,R(u,\cdot)-R(u',\cdot)\rangle_{\mathbb{H}},\ u'\in D_n.$$

由 (i) 和柯西-施瓦茨不等式,

$$|\tilde g(u)-g(u)|\le\|g\|_{\mathbb{H}}\inf_{u'\in D_n}\|R(u,\cdot)-R(u',\cdot)\|_{\mathbb{H}},$$

其中

$$\|R(u,\cdot)-R(u',\cdot)\|_{\mathbb{H}}^2=R(u,u)-2R(u,u')+R(u',u').$$

□

定理的证明8.2：首先,

$$\begin{aligned}\|\tilde f(\theta)-f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}&=\|\Pi_nf(\theta)\Pi_n-f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}\\&\le\|\Pi_nf(\theta)\Pi_n-\Pi_nf(\theta)\|_{\mathrm{HS}}+\|\Pi_nf(\theta)-f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}\\&\le\|f(\theta)(\Pi_n-\mathrm{I})\|_{\mathrm{HS}}+\|(\Pi_n-\mathrm{I})f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}\\&=2\|(\Pi_n-\mathrm{I})f(\theta)\|_{\mathrm{HS}}\\&=2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j^2\|(\Pi_n-\mathrm{I})\phi_j\|_{\mathbb{H}}^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

接下来，对于导数利普希茨连续的函数 $g\in\mathbb{H}$，我们考虑 $\|(\Pi_n-\mathrm{I})g\|_{\mathbb{H}}^2=\|\tilde g-g\|_{\mathbb{H}}^2$。对此的推导几乎不取决于 $g(0)$ 的取值。为简化记号，我们不妨假设索об列夫空间包含满足 $g(0)=0$ 的函数 $g$。因此,

我们将核取为 $R(s,t) = s \wedge t$，即标准布朗运动的协方差核。于是，矩阵 $\boldsymbol{R}_n$ 在（8.2）中确实可逆。根据命题 S.6.1，

$$\|\tilde{g} - g\|_{\mathbb{H}}^2 = \|g\|_{\mathbb{H}}^2 - \boldsymbol{g}^\top \boldsymbol{R}_n^{-1} \boldsymbol{g} \tag{S.6.1}$$

其中 $\boldsymbol{g} = (g(u_{n,i}))_{i=1}^{m_n}$ 包含 $g$ 在 $u_{n,i}$处的取值。因此， $\boldsymbol{R}_n$ 具有乔列斯基分解

$$\boldsymbol{R}_n = m_n^{-1} \boldsymbol{L}_n \boldsymbol{L}_n^\top, \tag{S.6.2}$$

其中 $\boldsymbol{L}_n$ 是一个元素均为1的下三角矩阵，且其逆矩阵为

$$\boldsymbol{L}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

事实上，由于标准布朗运动 $B$ 的增量具有独立性和平稳性，我们有 $\boldsymbol{Z} = \sqrt{m_n}(\boldsymbol{L}_n^{-1})^\top \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B} = \left(B(i/m_n) - B((i-1)/m_n)\right)_{i=1}^{m_n}$且 $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{I}_{m_n})$ 是一个标准正态随机向量。由于 $\boldsymbol{R}_n = \mathbb{E}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top]$，我们得到$\boldsymbol{I}_{m_n} = m_n(\boldsymbol{L}_n^{-1})^\top \boldsymbol{R}_n \boldsymbol{L}_n^{-1}$，由此得到（S.6.2）。因此，

$$\boldsymbol{g}^\top \boldsymbol{R}_n^{-1} \boldsymbol{g} = m_n \boldsymbol{g}^\top (\boldsymbol{L}_n^{-1})^\top \boldsymbol{L}_n^{-1} \boldsymbol{g} = m_n \sum_{i=1}^{m_n} (g(i/m_n) - g((i-1)/m_n))^2, \tag{S.6.3}$$

这是 $\|g\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_0^1 (g'(t))^2 dt$ 的黎曼近似（回忆 $g(0) = 0$）。由于 $|g'(s) - g'(t)| \le C|s-t|$，由（S.6.1）和（S.6.3）可得

$$\|\tilde{g} - g\|_{\mathbb{H}}^2 \le C m_n^{-1}.$$

事实上，根据中值定理，我们有 $g(i/m_n) - g((i-1)/m_n) = g'(\xi_{n,i}) m_n^{-1}$，其中某个 $\xi_{n,i} \in [(i-1)/m_n, i/m_n]$，因此

$$\begin{aligned} \|g - \widetilde{g}\|_{\mathbb{H}}^2 &= \int_0^1 (g'(t))^2 dt - \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} (g'(\xi_{n,i}))^2 \\ &\le \sum_{i=1}^{m_n} \int_{(i-1)/m_n}^{i/m_n} |g'(t) - g'(\xi_{n,i})| \cdot |g'(t) + g'(\xi_{n,i})| dt \\ &\le \frac{C}{m_n} \left( \int_0^1 |g'(t)| dt + \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} |g'(\xi_{n,i})| \right) = \mathcal{O}\left(m_n^{-1}\right), \end{aligned}$$

其中，在最后一个关系中，我们利用了黎曼和收敛到积分$\int_0^1 |g'(t)| dt < \infty$这一事实，且 $m_n \to \infty$。应用此界并结合关于 $\phi_j$ 的假设，我们得到

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^2 \|(\Pi_n - \mathrm{I})\phi_j\|_{\mathbb{H}}^2 \le m_n^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \nu_j^2.$$

证明至此完成。 □

S.7. 迹范数的一些性质。我们在以下引理中汇总迹范数的一些基本事实。

引理 S.7.1. 设 $\mathscr{A}$ 是希尔伯特空间 $\mathbb{H}$ 上的迹类算子。那么

(i) $\|\mathscr{A}\|_{\mathrm{tr}} = $ 上确界$_{\mathscr{W}:\ \text{酉}} |\langle \mathscr{A},\ \mathscr{W}\rangle_{\mathrm{HS}}|$; (ii) $\sum_i |\langle \mathscr{A} f_i,\ g_i\rangle| \le \|\mathscr{A}\|_{\mathrm{tr}}$ 对任意完全正交规范系 $\{f_i\}$ 和 $\{g_i\}$ 均成立; (iii) $\sum_i |\langle \mathscr{A} e_i, e_i\rangle| \le \|\mathscr{A}\|_{\mathrm{tr}}$ 对任意完全正交规范系 $\{e_i\}$ 均成立。

证明。(i) 设 $A$ 的奇异值分解为

$$\mathscr{A} = \sum_j \lambda_j v_j \otimes w_j, \tag{S.7.1}$$

其中 $\lambda_j \ge 0$ 和 $\{v_j\}$, $\{w_j\}$ 是 $\mathbb{H}$ 的完全正交规范系。那么，我们可以写成

$$\mathscr{A} = \left(\sum_j \lambda_j v_j \otimes v_j\right)\left(\sum_k v_k \otimes w_k\right) =: \mathscr{P}\mathscr{U},$$

这是 $\mathscr{A}$ 的极分解。因此

$$\|\mathscr{A}\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{trace}(\mathscr{P}) = \mathrm{trace}(\mathscr{A}\mathscr{U}^*) = \langle \mathscr{A}, \mathscr{U}\rangle_{\mathrm{HS}}.$$

假设 $\mathscr{W}$ 是酉矩阵，其奇异值分解为 $\mathscr{W} = \sum_k a_k \otimes b_k$。则

$$\begin{aligned}
|\langle \mathscr{A}, \mathscr{W}\rangle_{\mathrm{HS}}| &= \left|\sum_k \langle \mathscr{A} b_k, \mathscr{W} b_k\rangle\right| \\
&= \left|\sum_j \sum_k \lambda_j \langle (v_j \otimes w_j) b_k, a_k\rangle\right| \\
&= \left|\sum_j \lambda_j \sum_k \langle v_j, a_k\rangle\langle b_k, w_j\rangle\right| \le \sum_j \lambda_j
\end{aligned}$$

根据柯西-施瓦茨不等式。

（ii）根据（S.7.1），

$$\begin{aligned}
\sum_i |\langle \mathscr{A} f_i, g_i\rangle| &= \sum_i |\sum_j \lambda_j \langle v_j, g_i\rangle\langle w_j, f_i\rangle| \\
&\le \sum_j \lambda_j \sum_i |\langle v_j, g_i\rangle\langle w_j, f_i\rangle|,
\end{aligned}$$

结果再次由柯西-施瓦茨不等式得出。

(iii) 这是 (ii) 在 $f_i = g_i$ 情况下的特例。

□

S.8. 示例。本节讨论几个具体示例，以说明本文各项结果中所施加条件的广度和范围。

S.8.1. 函数类 $\mathscr{P}_D(\beta, L)$ 的一个示例。本节通过一个协方差结构函数类的示例进行讨论，该函数类的一致性速率几乎达到 $\mathscr{P}_D(\beta, L)$ 的最优速率。该函数类由如下正则变动协方差结构组成。

例 S.8.1. 考虑 $d=1$ 以及标量值情形 $\mathbb{H}=\mathbb{C}$。令

$$C(k)=|k|^{-\beta-1}S(|h|), \beta>0, k\in\mathbb{Z}$$

其中 $S$ 是无穷远处的缓变函数。不难看出，对于任意 $\epsilon>0$，相应的谱密度 $f\in\mathscr{P}_D(\beta+\epsilon, L)$ 取决于 $L$的值。此外，假设核函数具有如下形式

$$K(h)=[1-|h|^{\lambda+1}]_+, h\in\mathbb{R}$$

ˆ对于某个 $\lambda>0.$，我们采用离散时间设定，因此使用估计量 $f_n(\theta)$。于是，

$$(2\pi)[f(\theta)-\mathbb{E}\hat{f}_n(\theta)]=\sum_{|k|\geq\Delta_n} e_{\mathbb{I}}^{k\theta}C(k)+\sum_{|k|<\Delta_n} e_{\mathbb{I}}^{k\theta}C(k)\left[1-K\left(\frac{k}{\Delta_n}\right)\right]$$

考虑 $\theta=0.$。那么，前一个表达式等于

$$2\sum_{k\geq\Delta_n} k^{-\beta-1}S(k)+2\sum_{k<\Delta_n} k^{-\beta-1}S(k)\cdot\frac{k^{\lambda+1}}{\Delta_n^{\lambda+1}}$$

利用如下事实：对于 $p>-1$,

$$\int_\alpha^x t^pS(t)dt\sim(p+1)^{-1}x^{p+1}S(x),\ as\ x\to\infty$$

且对于 $p<-1$,

$$\int_x^\infty t^pS(t)dt\sim|p+1|^{-1}x^{p+1}S(x),\ as\ x\to\infty$$

我们得到，对于 $0<\beta<\min\{1,\lambda+1\}$:

$$(2\pi)[f(0)-\mathbb{E}\hat{f}_n(0)]\sim\frac{\Delta_n^{-\beta}S(\Delta_n)}{\beta}+\frac{\Delta_n^{-\beta}S(\Delta_n)}{\lambda+1-\beta}=\mathscr{O}\left(\Delta_n^{-\beta}\cdot S(\Delta_n)\right)$$

此外，对于 $\beta>1$，同一表达式可计算得其阶相同

$$\mathscr{O}\left(\Delta_n^{-\beta}\cdot S(\Delta_n)\right).$$

将此与命题 5.2 中针对 $0<\beta\neq1$的结果比较。

现在我们将关注点转向方差。首先，用 $T$和 $\Delta$ 分别替代 $T_n$和 $\Delta_n$，可得

$$\begin{aligned}\hat{f}_n(0)-\mathbb{E}\hat{f}_n(0)&=\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{t=0}^{T}\sum_{s=0}^{T}K\left(\frac{t-s}{\Delta}\right)\frac{X(t)\cdot X(s)-C(t-s)}{|T-(t-s)|}\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{v=0}^{T}\sum_{h=-\Delta}^{\Delta}K\left(\frac{h}{\Delta}\right)\frac{X(v+h)\cdot X(v)-C(h)}{|T-h|}\cdot\mathbb{I}(0\leq h+v\leq T),\end{aligned}$$

通过变量替换 $h=t-s$， $v=s$。因此，

$$(2\pi)^2\mathbb{E}\left|\hat{f}_n(0)-\mathbb{E}\hat{f}_n(0)\right|^2=\sum_{v=0}^{T}\sum_{w=0}^{T}\sum_{|h|\le\Delta}\sum_{|\tilde{h}|\le\Delta}K\left(\frac{h}{\Delta}\right)K\left(\frac{\tilde{h}}{\Delta}\right)$$
$$\frac{\mathbb{E}\left\{[X(v+h)\cdot X(v)-C(h)]\left[X\left(w+\tilde{h}\right)\cdot X(w)-C\left(\tilde{h}\right)\right]\right\}}{|T-h|\left|T-\tilde{h}\right|}$$
$$\cdot\,\mathbb{I}(0\le h+v\le T)\cdot\mathbb{I}\left(0\le\tilde{h}+w\le T\right)$$

对中间的期望应用伊瑟利斯引理后，我们最终得到

$$(2\pi)^2\mathbb{E}\left|\hat{f}_n(0)-\mathbb{E}\hat{f}_n(0)\right|^2=\frac{1}{T^2}\cdot\sum_{v=0}^{T}\sum_{w=0}^{T}\sum_{|h|\le\Delta}\sum_{|\tilde{h}|\le\Delta}K\left(\frac{h}{\Delta}\right)K\left(\frac{\tilde{h}}{\Delta}\right)$$
$$\frac{C\left(v-w+h-\tilde{h}\right)C(v-w)+C(v-w+h)C\left(w-v+\tilde{h}\right)}{|T-h|\left|T-\tilde{h}\right|}$$
$$\cdot\,\mathbb{I}(0\le h+v\le T)\cdot\mathbb{I}\left(0\le\tilde{h}+w\le T\right).$$

我们已经证明，这两项的绝对阶均为 $\mathscr{O}\left(\frac{\Delta}{T}\right)$。因此，只需证明其中一个积分与阶为 $\Delta/T$的项渐近等价，即可说明方差整体也具有相同的阶。我们聚焦于第一˜ ˜求和项，并通过变量替换 $x=v-w$，$y=w$，$z=h-h$，$u=h$，得到

$$\sum_{v=0}^{T}\sum_{w=0}^{T}\sum_{|h|\le\Delta}\sum_{|\tilde{h}|\le\Delta}K\left(\frac{h}{\Delta}\right)K\left(\frac{\tilde{h}}{\Delta}\right)\frac{C\left(v-w+h-\tilde{h}\right)C(v-w)}{|T-h|\left|T-\tilde{h}\right|}$$
$$\cdot\,\mathbb{I}(0\le h+v\le T)\cdot\mathbb{I}\left(0\le\tilde{h}+w\le T\right)$$
$$=\sum_{x=-T}^{T}\sum_{z=-2\Delta}^{2\Delta}C(x+z)C(z)\cdot\sum_{u=-\Delta\vee(-\Delta-z)}^{\Delta\wedge(\Delta-z)}K\left(\frac{z+u}{\Delta}\right)K\left(\frac{u}{\Delta}\right)$$
$$\cdot\frac{|T-x|}{|T-(z+u)||T-u|}\sum_{y=0\vee(-x)}^{T\wedge(T-x)}\mathbb{I}(x+y+z+u\in[0,T])\,\mathbb{I}(u+y\in[0,T]).$$

注意到

$$\frac{1}{T}\sum_{y=0\vee(-x)}^{T\wedge(T-x)}\mathbb{I}(x+y+z+u\in[0,T])\,\mathbb{I}(u+y\in[0,T])\le1-\frac{|x|}{T}$$
$$\frac{1}{2\Delta}\sum_{u=-\Delta\vee(-\Delta-z)}^{\Delta\wedge(\Delta-z)}K\left(\frac{z+u}{\Delta}\right)K\left(\frac{u}{\Delta}\right)\le1-\frac{|z|}{2\Delta}$$
$$\frac{|T-x|}{|T-(z+u)||T-u|}\le\frac{1}{|T|}$$

以及这一事实 $-T \le x \le T$和 $-2\Delta \le z \le 2\Delta$，我们可知上述项均以 1 为界。此外，由假设*C′*，可得

$$\sum_{x=-T}^{T} \sum_{z=-2\Delta}^{2\Delta} C(x+z)C(z)dzdx < \infty.$$

利用控制收敛定理可得，四重求和除以 $2\Delta/T$ 后收敛到一个常数。因此，如所需，它渐近等价于 $\Delta/T$。

对于 $\lambda + 1 > \beta > 0$，这给出一致性速率

$$\mathscr{O}\left(\sqrt{\frac{\Delta_n}{|T_n|}} + \Delta_n^{-\beta} \cdot S(\Delta_n)\right).$$

考虑到 $0 < \beta \neq 1$，我们看到，此情形下的最优一致性速率基本与定理5.2中的一致性速率相同。

请注意，正则变差仅在证明偏差消失速率的渐近等价性时发挥了作用。事实上，对于方差的速率，我们只需要协方差算子的可积性，并未用到正则变差。另外，回想一下，此处的谱密度为 $f \in \mathscr{P}_D(\beta + \epsilon,\ L)$。因此，我们应当与之比较的速率是

$$|T_n|^{-\frac{\beta+\epsilon}{2(\beta+\epsilon)+1}}.$$

S.8.2. 关于假设 *V* 和 *V′* 的例子。我们给出一些满足假设 V 和 V′的非平凡过程的例子，以说明这些假设并非空洞。我们首先考虑一个满足假设 V的例子。

示例 S.8.2. 考虑过程

$$X(t) = Z(t)^2 - 1,$$

其中 $Z := \{Z(t)\ t \in \mathbb{R}^d\}$ 是一个零均值、取实值且边缘分布为标准正态分布的平稳高斯过程。将 $Z$ 的平稳协方差记为 $C_Z(\cdot)$，我们假设它满足 $\int_{u\in\mathbb{R}^d} \sup_{\lambda\in B(0,2\delta)} |C_Z(\lambda + u)|du < \infty$，其中 $\delta > 0$ 足够小。这个条件相当宽松，协方差可积且尾部足够光滑时即可满足。我们验证假设 *V* 对 $X$ 成立。我们先考虑 $\widetilde{X}(t) = Z(t)^2$。由此可得

$$\widetilde{}\text{(a)}\ \ \mathbb{E}[X(t)] = 1\text{(b)}\,\mathbb{E}[\widetilde{X}(t_1)\ \widetilde{X}(t_2)] = 1 + 2C_Z(t_1 - t_2)^2\text{(c)}\,\mathbb{E}[\widetilde{X}(t_1)\ \widetilde{X}(t_2)\ \widetilde{X}(t_3)\ ] = 15a_2^2a_3^2 + 3a_2^2b_3^2 + 3a_2^2c_3^2 + 3b_2^2a_3^2 + 3b_2^2b_3^2 + b_2^2c_3^2 + 6a_3b_3a_2b_2\text{, (d)}\,\mathbb{E}[\widetilde{X}(t_1)\ \widetilde{X}(t_2)\ \widetilde{X}(t_3)\ \widetilde{X}(t_4)] = 105a_2^2a_3^2a_4^2 + 15a_2^2a_3^2b_4^2 + 15a_2^2a_3^2c_4^2 + 15a_2^2a_3^2d_4^2$$

$$\begin{aligned}
&+ 15a_2^2b_3^2a_4^2 + 9a_2^2b_3^2b_4^2 + 3a_2^2b_3^2c_4^2 + 3a_2^2b_3^2d_4^2\\
&+ 15a_2^2c_3^2a_4^2 + 3a_2^2c_3^2b_4^2 + 9a_2^2c_3^2c_4^2 + 3a_2^2c_3^2d_4^2\\
&+ 30a_2^2a_3b_3a_4b_4 + 30a_2^2a_3c_3a_4c_4 + 6a_2^2b_3c_3b_4c_4\\
&+ 15b_2^2a_3^2a_4^2 + 9b_2^2a_3^2b_4^2 + 3b_2^2a_3^2c_4^2 + 3b_2^2a_3^2d_4^2\\
&+ 9b_2^2b_3^2a_4^2 + 15b_2^2b_3^2b_4^2 + 3b_2^2b_3^2c_4^2 + 3b_2^2b_3^2d_4^2\\
&+ 3b_2^2c_3^2a_4^2 + 3b_2^2c_3^2b_4^2 + 3b_2^2c_3^2c_4^2 + b_2^2c_3^2d_4^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+36b_2^2a_3b_3a_4b_4+12b_2^2a_3c_3a_4c_4+12b_2^2b_3c_3b_4c_4\\
&+60a_2b_2a_3^2a_4b_4+36a_2b_2a_4b_4b_3^2+12a_2b_2c_3^2a_4b_4\\
&+60a_2b_2a_3b_3a_4^2+36a_2b_2a_3b_3b_4^2+12a_2b_2a_3b_3c_4^2\\
&+12a_2b_2a_3b_3d_4^2+24a_2b_2a_3b_3d_4^2+24a_2b_2a_3c_3b_4c_4+24a_2b_2b_3c_3a_4c_4,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_2&=C_Z(t_1-t_2)\\
a_3&=C_Z(t_1-t_3)\\
b_2&=\sqrt{1-C_Z(t_1-t_2)^2}\\
b_3&=\frac{C_Z(t_2-t_3)-C_Z(t_1-t_2)\cdot C_Z(t_1-t_3)}{\sqrt{1-C_Z(t_1-t_2)^2}}\\
c_3&=\sqrt{1-C_Z(t_1-t_3)^2-\frac{\left[C_Z(t_2-t_3)-C_Z(t_1-t_2)\cdot C_Z(t_1-t_3)\right]^2}{1-C_Z(t_1-t_2)^2}}\\
a_4&=C_Z(t_1-t_4)\\
b_4&=\frac{C_Z(t_2-t_4)-C_Z(t_1-t_2)C_Z(t_1-t_4)}{\sqrt{1-C_Z(t_1-t_2)^2}}\\
c_4&=\frac{C_Z(t_3-t_4)-C_Z(t_1-t_3)C_Z(t_1-t_4)-b_3b_4}{c_3}\\
d_4&=\sqrt{1-a_4^2-b_4^2-c_4^2}.
\end{aligned}
$$

~将过程按 $X(t)=X(t)-1$ 中心化并简化上述表达式后，我们得到以下各阶矩：

(a) $\mathbb{E}[X(t)]=0$(b) $\mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]=2C_Z(t_1-t_2)^2$(c) $\mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)X(t_3)]=8C_Z(t_1-t_2)C_Z(t_1-t_3)C_Z(t_2-t_3)$,(d) $\mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4)]=4C_Z(t_1-t_2)^2C_Z(t_3-t_4)^2$

$$
\begin{aligned}
&+4C_Z(t_1-t_3)^2C_Z(t_2-t_4)^2+4C_Z(t_1-t_4)^2C_Z(t_2-t_3)^2\\
&+16C_Z(t_1-t_3)C_Z(t_1-t_4)C_Z(t_2-t_3)C_Z(t_2-t_4)\\
&+16C_Z(t_1-t_2)C_Z(t_1-t_4)C_Z(t_2-t_3)C_Z(t_3-t_4)\\
&+16C_Z(t_1-t_2)C_Z(t_1-t_3)C_Z(t_2-t_4)C_Z(t_3-t_4)\qquad .
\end{aligned}
$$

利用上面的 (d)，我们得到

$$\mathbb{E}|X(t)|^4=60C_Z(0)^4=60<\infty,$$

这表明条件*V* 成立。

根据定义 *S.5.1* 中累积量的定义，我们得到

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cum}(X(t_1),X(t_2),X(t_3),X(t_4))&=16C_Z(t_1-t_3)C_Z(t_1-t_4)C_Z(t_2-t_3)C_Z(t_2-t_4)\\
&+16C_Z(t_1-t_2)C_Z(t_1-t_4)C_Z(t_2-t_3)C_Z(t_3-t_4)\\
&+16C_Z(t_1-t_2)C_Z(t_1-t_3)C_Z(t_2-t_4)C_Z(t_3-t_4).
\end{aligned}
$$

于是，假设 V(b) 也满足，因为

$$\begin{aligned}
&\sup_{w\in\mathbb{R}^d}\int_{u\in\mathbb{R}^d}\int_{v\in\mathbb{R}^d}\sup_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in B(0,\delta)}|\mathrm{cum}(X(\lambda_1+u),X(\lambda_2+v),X(\lambda_3+w),X(0))|dvdu\\
&\quad\le 16\sup_{w\in\mathbb{R}^d}\int_{u\in\mathbb{R}^d}\int_{v\in\mathbb{R}^d}\sup_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in B(0,\delta)}\\
&\qquad\Big\{|C_Z(\lambda_1-\lambda_3+u-w)C_Z(\lambda_1+u)C_Z(\lambda_2-\lambda_3+v-w)C_Z(\lambda_2+v)|\\
&\qquad+|C_Z(\lambda_1-\lambda_2+u-v)C_Z(\lambda_1+u)C_Z(\lambda_2-\lambda_3+v-w)C_Z(\lambda_3+w)|\\
&\qquad+|C_Z(\lambda_1-\lambda_2+u-v)C_Z(\lambda_1-\lambda_3+u-w)C_Z(\lambda_2+v)C_Z(\lambda_3+w)|\Big\}dvdu\\
&\quad\le 16|C_Z(0)|^2\int_{u\in\mathbb{R}^d}\int_{v\in\mathbb{R}^d}\sup_{\lambda_1,\lambda_2\in B(0,\delta)}\Big\{|C_Z(\lambda_1+u)C_Z(\lambda_2+v)|\\
&\qquad\qquad+|C_Z(\lambda_1-\lambda_2+u-v)C_Z(\lambda_1+u)|\\
&\qquad\qquad+|C_Z(\lambda_1-\lambda_2+u-v)C_Z(\lambda_2+v)|\Big\}dvdu\\
&\quad\le 48|C_Z(0)|^2\left(\int_{u\in\mathbb{R}^d}\sup_{\lambda\in B(0,2\delta)}|C_Z(\lambda+u)|du\right)^2<\infty.
\end{aligned}$$

□

接下来，我们给出一个受 Panare- tos 和 Tavakoli（2013年）命题 4.1 中线性过程启发的例子。假设 $\mathbb{H}$ 是一个可分（通常为无限维）希尔伯特空间。设 $\epsilon_t,\ t\in\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{H}$ 中的独立同分布随机元素，使得 $\mathbb{E}\|\epsilon_0\|^4<\infty$，并考虑一列有界线性算子 $A_s\colon\mathbb{H}\to\mathbb{H},\ s\in\mathbb{Z}$。定义

$$X(t)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}A_s\epsilon_{t-s},\ t\in\mathbb{Z}. \tag{S.8.1}$$

在下面的引理中，我们将证明，在系数的算子范数满足一个较弱的平方可和条件时，实值过程 $X(t)$ 定义良好。为此，令 $\mathscr{L}^2(\mathbb{H})$ 表示由内积 $\langle A,B\rangle_{\mathscr{L}^2}=\mathbb{E}\langle A,B\rangle$ 赋范的 $\mathbb{H}$ 值随机元素希尔伯特空间，其中对所有满足 $\mathbb{E}[\|A\|^2+\|B\|^2]<\infty$ 的 $\mathbb{H}$ 值随机元素 $A$ 和 $B$，该内积均有定义。$\mathscr{L}^2(\mathbb{H})$ 上的相应范数记为 $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{H})}$。

引理 S.8.1. 假设 $\{A_s,\ s\in\mathbb{Z}\}$ 的算子范数平方可和，即

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}}\|A_s\|_{\mathrm{op}}^2<\infty. \tag{S.8.2}$$

*T*则，（S.8.1）中的级数在 $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{H})}$ 中收敛，并且过程 $\{X(t)\ \ t\in\mathbb{Z}\}$ 定义 *d.*

证明。令 $\Sigma_\epsilon=\mathbb{E}[\epsilon_0\otimes\epsilon_0]$ 为每个 $\epsilon_t,\ \ t\in\mathbb{Z}$ 的协方差算子。我们首先定义

$$X^{(N)}(t)=\sum_{|s|\le N}A_s\epsilon_{t-s}\qquad\text{and}\qquad X^{-(N)}(t)=\sum_{|s|>N}A_s\epsilon_{t-s}. \tag{S.8.3}$$

我们有

$$\mathbb{E}\langle X^{(N)}(t), X^{(N)}(t)\rangle = \sum_{|s_1|\le N}\sum_{|s_2|\le N}\mathbb{E}\langle A_{s_1}\epsilon_{t-s_1}, A_{s_2}\epsilon_{t-s_2}\rangle$$
$$= \sum_{|s|\le N}\mathbb{E}\langle A_s\epsilon_{t-s}, A_s\epsilon_{t-s}\rangle = \sum_{|s|\le N}\mathbb{E}\langle \epsilon_{t-s}, A_s^\star A_s\epsilon_{t-s}\rangle,$$

第二个等式由 $\epsilon$' 的独立性得出。现在令 $\{e_j\}$ 为 $\mathbb{H}$ 的完全正交规范系，并使其对角化 $\Sigma_\epsilon$。于是，我们可以将 $\epsilon$ 表示为

$$\epsilon_{t-s} = \sum_{j=1}^{\infty} Z_{t-s,j}e_j,$$

其中 $Z_{s,\ j} := \langle \epsilon_s,\ e_j\rangle$，在 $s$ 中相互独立，因为 $\epsilon_s$' 是独立同分布的。此外，由于选取 $\{e_j\}$ 作为协方差算子 $\Sigma_\epsilon$ 的特征向量，我们有，对于每个固定的 $s$，$Z_{s,\ j}$' 在 $j$ 中不相关：

$$\mathbb{E}\left[Z_{s,i}\overline{Z_{s,j}}\right] = \lambda_i\cdot\delta_{i-j}.$$

利用这些结果，我们得到

$$\mathbb{E}\left\langle X^{(N)}(t), X^{(N)}(t)\right\rangle = \sum_{|s|\le N}\mathbb{E}\left\langle \sum_k e_k Z_{t-s,k}, A_s^\star A_s\sum_\ell e_\ell Z_{t-s,\ell}\right\rangle$$
$$= \sum_{|s|\le N}\sum_k\sum_\ell \mathbb{E}\left[Z_{t-s,k}\overline{Z_{t-s,\ell}}\right]\cdot\langle e_k, A_s^\star A_s e_\ell\rangle$$
$$= \sum_{|s|\le N}\sum_k \lambda_k\cdot\langle e_k, A_s^\star A_s e_k\rangle \le \sum_k \lambda_k \sum_{|s|\le N}\langle e_k, A_s^\star A_s e_k\rangle \tag{S.8.4}$$
$$\le \mathrm{tr}(\Sigma_\epsilon)\cdot\sum_{|s|\le N}\|A_s^\star A_s\|_{\mathrm{op}} \le \mathrm{tr}(\Sigma_\epsilon)\cdot\sum_{|s|\le N}\|A_s\|_{\mathrm{op}}^2 < \infty.$$

通过与（S.8.4）类似的论证，可得对于 $M < N$

$$\mathbb{E}\|X^{(N)}(t) - X^{(M)}(t)\|^2 \le \mathrm{tr}(\Sigma_\epsilon)\sum_{M<|s|\le N}\|A_s\|_{\mathrm{op}}^2 \to 0,$$

如 $N$，$M\to\infty$。这表明序列 $\{X^{(N)}(t)\}_{N\in\mathbb{N}}$ 是希尔伯特空间 $(\mathscr{L}^2(\mathbb{H})\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathscr{L}^2})$中的柯西序列，其中 $\langle A,\ B\rangle_{\mathscr{L}^2} = \mathbb{E}\langle A,\ B\rangle$ 对于 $A$，$B$ 是$\mathbb{H}$的随机元素。因此，该序列的极限存在，且

$$X^{(N)}(t)\to X(t)\in\mathscr{L}^2(\mathbb{H}),$$

由此完成证明。 □

命题 S.8.2. 设 $X(t)$ 按（S.8.1）中的定义。假设 $\{A_s,\ s\in\mathbb{Z}\}$ 是希尔伯特–施密特算子，且满足 $\sum_{s\in\mathbb{Z}}\|A_s\|_{\mathrm{HS}} < \infty$。此外，令 $Z_{s,\ j} = \langle\epsilon_s,\ e_j\rangle$，其中$\{e_j\}$ 是对角化 $\Sigma_\epsilon := \mathbb{E}[\epsilon_0\otimes\epsilon_0]$的完全正交规范系，假设

$$\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4}\mathrm{cum}(Z_{0,\ell_1}, Z_{0,\ell_2}, Z_{0,\ell_3}, Z_{0,\ell_4})^2 \le B < \infty.$$

那么，过程 $\{X\ (t)\quad t\in\mathbb{Z}\}$ 满足假设 *V′*。

证明。令回顾那部分和 $X^{(N)}(t)$ 假设如（S.8.3）中给定具有有限四阶矩，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $\mathbb{E}\|\epsilon_t\|^k < \infty$的情形，我们有

(S.8.5)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|X^{-(N)}(t)\right\|^k &\leq \sum_{|s_1|,\ldots,|s_k|>N} \|A_{s_1}\|_{\mathrm{op}} \ldots \|A_{s_k}\|_{\mathrm{op}} \mathbb{E}\left(\|\epsilon_{t-s_1}\| \ldots \|\epsilon_{t-s_k}\|\right) \\
&\leq \sum_{|s_1|,\ldots,|s_k|>N} \|A_{s_1}\|_{\mathrm{op}} \ldots \|A_{s_k}\|_{\mathrm{op}} \mathbb{E}\left(\|\epsilon_{t-s_1}\|^k\right)^{1/k} \ldots \mathbb{E}\left(\|\epsilon_{t-s_k}\|^k\right)^{1/k} \\
&= \mathbb{E}\|\epsilon_0\|^k \cdot \sum_{|s_1|,\ldots,|s_k|>N} \|A_{s_1}\|_{\mathrm{op}} \ldots \|A_{s_k}\|_{\mathrm{op}} \\
&= \mathbb{E}\|\epsilon_0\|^k \cdot \left(\sum_{|s|>N} \|A_s\|_{\mathrm{op}}\right)^k \to 0, \text{ as } N \to \infty,
\end{aligned}$$

其中，第二行中的不等式由广义 Hölder 不等式推出（参见Hardy 等人（1952）的定理 11），并且我们利用了 $\|A_s\|_{\mathrm{op}} \leq \|A_s\|_{\mathrm{HS}}$。因此，我们有$\mathscr{L}^k(\mathbb{H})$-收敛， $X_t^{(N)}$ 收敛到 $X_t$，其含义是

$$\lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{E}\left\|X(t) - X^{(N)}(t)\right\|_{\mathbb{H}}^k\right)^{1/k} = 0.$$

上述计算还直接表明 $\mathbb{E}\|X_t\|^k < \infty$. 具体而言，对于 $k = 4$，第$(a)$ 部分得证。

现在，对于$(b)$部分，与引理S.8.1的证明中一样，令 $\{e_j\}$ 为一个将$\Sigma_\epsilon = \mathbb{E}[\epsilon_0 \otimes \epsilon_0]$对角化的完全正交规范系，我们写作

$$A_s = \sum_{i,j} a_{ij}(s) e_i \otimes e_j \quad \text{and} \quad \epsilon_{t-s} = \sum_k Z_{t-s,k} e_k,$$

其中 $Z_{s,\ k} := \langle \epsilon_s,\ e_k \rangle$。注意， $\{e_i \otimes e_j\}$是希尔伯特空间 $\mathbb{X}$中的一个完全正交规范系，该空间由定义在 $\mathbb{H}$ 上、配备 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle_{\mathrm{HS}}$ 的希尔伯特–施密特算子构成，并且 $A_s$ 的上述表达式在 $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$中收敛。另令

$$\begin{aligned}
A_{s,i\cdot} &:= \sum_j a_{ij}(s) e_i \otimes e_j \\
X_i(t) &:= \langle X(t), e_i \rangle = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_j a_{ij}(s) Z_{t-s,j} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} A_{s,i\cdot} \epsilon_{t-s},
\end{aligned}$$

使得 $X(t) = \sum_i X_i(t) e_i$。回顾命题 S.5.2 中的表示（另见主论文中的（4.9））。为简化符号，假设过程 $X(t)$ 相对于完全正交规范系 $\{e_i\}$是实的，即所有的 $X_i(t)$ 都是实随机变量。

我们首先利用累积量的多重线性性质，以及 $\epsilon_t$ 是独立同分布这一事实。根据命题 S.5.2，有 $\mathrm{cum}(X(u)\ X(v)\ X(w)\ X(0))$ 等于：

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_i \sum_j \mathrm{cum}\left(X_i(u), X_j(v), X_i(w), X_j(0)\right)\right| \\
&= \left|\sum_i \sum_j \mathrm{cum}\left(\sum_{s_1\in\mathbb{Z}} A_{s_1,i\cdot} \epsilon_{u-s_1}, \sum_{s_2\in\mathbb{Z}} A_{s_2,j\cdot} \epsilon_{v-s_2}, \sum_{s_3\in\mathbb{Z}} A_{s_3,i\cdot} \epsilon_{w-s_3}, \sum_{s_4\in\mathbb{Z}} A_{s_4,j\cdot} \epsilon_{-s_4}\right)\right|
\end{aligned}$$

$$= \left| \sum_i \sum_j \operatorname{cum} \left( \sum_{s_1 \in \mathbb{Z}} A_{u-s_1,i} . \epsilon_{s_1}, \sum_{s_2 \in \mathbb{Z}} A_{v-s_2,j} . \epsilon_{s_2}, \sum_{s_3 \in \mathbb{Z}} A_{w-s_3,i} . \epsilon_{s_3}, \sum_{s_4 \in \mathbb{Z}} A_{-s_4,j} . \epsilon_{s_4} \right) \right|$$

(S.8.6)

$$= \left| \sum_i \sum_j \sum_{s_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{s_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{s_3 \in \mathbb{Z}} \sum_{s_4 \in \mathbb{Z}} \operatorname{cum} \left( A_{u-s_1,i} . \epsilon_{s_1}, A_{v-s_2,j} . \epsilon_{s_2}, A_{w-s_3,i} . \epsilon_{s_3}, A_{-s_4,j} . \epsilon_{s_4} \right) \right|$$

(S.8.7)

$$= \left| \sum_i \sum_j \sum_{s \in \mathbb{Z}} \operatorname{cum} \left( A_{u-s,i} . \epsilon_s, A_{v-s,j} . \epsilon_s, A_{w-s,i} . \epsilon_s, A_{-s,j} . \epsilon_s \right) \right|,$$

其中，(S.8.7) 是由 $\epsilon_t$ 是独立同分布这一事实得出的，而 (S.8.6) 将在本证明末尾予以说明。

继续，(S.8.7) 等于

(S.8.8)

$$\left| \sum_i \sum_j \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4} a_{i\ell_1}(u-s) a_{j\ell_2}(v-s) a_{i\ell_3}(w-s) a_{j\ell_4}(-s) \operatorname{cum} \left( Z_{s,\ell_1}, Z_{s,\ell_2}, Z_{s,\ell_3}, Z_{s,\ell_4} \right) \right|$$

$$= \left| \sum_i \sum_j \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4} a_{i\ell_1}(u-s) a_{j\ell_2}(v-s) a_{i\ell_3}(w-s) a_{j\ell_4}(-s) \operatorname{cum} \left( Z_{0,\ell_1}, Z_{0,\ell_2}, Z_{0,\ell_3}, Z_{0,\ell_4} \right) \right|.$$

交换求和顺序，并对$\sum_{\ell_1、\cdots、\ell_4}$应用柯西-施瓦茨不等式，可得 (S.8.8) 的上界为

$$\begin{aligned}
&\Big| \sum_s \sqrt{\sum_{\ell_1, \cdots, \ell_4} \operatorname{cum}(Z_{0,\ell_1}, Z_{0,\ell_2}, Z_{0,\ell_3}, Z_{0,\ell_4})^2} \\
&\qquad \cdot \sqrt{\sum_{\ell_1, \cdots, \ell_4} \Big( \sum_{i,j} \Big[ a_{i\ell_1}(u-s) a_{j\ell_2}(v-s) a_{i\ell_3}(w-s) a_{j\ell_4}(-s) \Big] \Big)^2} \\
&\leq B \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{\ell_1, \cdots, \ell_4} \Big( \sum_i a_{i\ell_1}(u-s)^2 \Big) \Big( \sum_i a_{i\ell_3}(w-s)^2 \Big) \Big( \sum_j a_{j\ell_2}(v-s)^2 \Big) \Big( \sum_j a_{j\ell_4}(-s)^2 \Big) \right)^{1/2}, \\
&= B \sum_{s \in \mathbb{Z}} \|A_{u-s}\|_{\mathrm{HS}} \|A_{v-s}\|_{\mathrm{HS}} \|A_{w-s}\|_{\mathrm{HS}} \|A_{-s}\|_{\mathrm{HS}},
\end{aligned}$$

上式不等式是通过两次应用柯西-施瓦茨不等式得出的——一次针对 $\sum_i$，一次针对 $\sum_j$。最后一个关系源于以下事实：$\|A_t\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{\ell,\ i} a_{i\ell}(t)^2$。

因此，我们最终得到：

$$\begin{aligned}
&\sup_{w \in \mathbb{Z}} \sum_{u \in \mathbb{Z}} \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left| \sum_i \sum_j \operatorname{cum} \left( X_i(u), X_j(v), X_i(w), X_j(0) \right) \right| \\
&\qquad \leq \sup_{w \in \mathbb{Z}} \sum_{u \in \mathbb{Z}} \sum_{v \in \mathbb{Z}} B \sum_{s \in \mathbb{Z}} \|A_{u-s}\|_{\mathrm{HS}} \|A_{v-s}\|_{\mathrm{HS}} \|A_{w-s}\|_{\mathrm{HS}} \|A_{-s}\|_{\mathrm{HS}}
\end{aligned}$$

$$\leq B \sup_{w\in\mathbb{Z}} \|A_w\|_{\mathrm{HS}} \cdot \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}} \|A_{u-s}\|_{\mathrm{HS}}\right)^3 < \infty.$$

现在，只需证明等式（S.8.6）。我们将再次使用 $X^{(N)}(t)$ 和 $X^{-(N)}(t)$。(S.8.5) 中的计算再次结合广义 Hölder 不等式和控制收敛定理可得

$$\mathbb{E}\left[\lim_{N\to\infty} X_i^{(N)}(u)X_j^{(N)}(v)X_i^{(N)}(w)X_j^{(N)}(0)\right] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[X_i^{(N)}(u)X_j^{(N)}(v)X_i^{(N)}(w)X_j^{(N)}(0)\right].$$

为此，我们引入一些记号。对于每一对 $m=(m_1,m_2) \in \{(u,i),(v,j),(w,i),(0,j)\}$，我们用 $X_m^N$ 表示 $X_{m_2}^N(m_1)$。例如，对于 $m=(u,i)$，我们有 $X_m^{(N)} = X_i^{(N)}(u)$。因此，根据累积量的定义，我们得到

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cum}\left(X_i(u),X_j(v),X_i(w),X_j(0)\right)\\
&= \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_q)} (-1)^{q-1}(q-1)!\prod_{l=1}^{q}\mathbb{E}\left[\prod_{m\in\nu_l}\lim_{N\to\infty} X_m^{(N)}\right]\\
&= \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_q)} (-1)^{q-1}(q-1)!\prod_{l=1}^{q}\mathbb{E}\left[\lim_{N\to\infty}\prod_{m\in\nu_l} X_m^{(N)}\right]\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_q)} (-1)^{q-1}(q-1)!\prod_{l=1}^{q}\mathbb{E}\left[\prod_{m\in\nu_l} X_m^{(N)}\right]\\
&= \lim_{N\to\infty}\operatorname{cum}\Bigg(\sum_{|s_1|\leq|N|} A_{s_1,i}.\epsilon_{u-s_1}, \sum_{|s_2|\leq|N|} A_{s_2,j}.\epsilon_{v-s_2},\\
&\qquad\qquad \sum_{|s_3|\leq|N|} A_{s_3,i}.\epsilon_{w-s_3}, \sum_{|s_4|\leq|N|} A_{s_4,i}.\epsilon_{-s_4}\Bigg)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{|s_1|,|s_2|,|s_3|,|s_4|\leq|N|} \operatorname{cum}\left(A_{s_1,i}.\epsilon_{u-s_1}, A_{s_2,j}.\epsilon_{v-s_2}, A_{s_3,i}.\epsilon_{w-s_3}, A_{s_4,i}.\epsilon_{-s_4}\right)\\
&= \sum_{|s_1|,|s_2|,|s_3|,|s_4|\in\mathbb{Z}} \operatorname{cum}\left(A_{s_1,i}.\epsilon_{u-s_1}, A_{s_2,j}.\epsilon_{v-s_2}, A_{s_3,i}.\epsilon_{w-s_3}, A_{s_4,i}.\epsilon_{-s_4}\right),
\end{aligned}$$

其中，求和遍历 $\{(u,i),(v,j),(w,i),(0,j)\}$的所有无序划分。证明完毕。

□