arXiv:2302.02248v1 [math.LO] 4 Feb 2023

决定性公理与大基数*

Sandra M¨uller[1][0000−0002−7224−187X]

离散数学与几何研究所¨，维也纳工业大学，维德纳大街 8-10/104，1040 维也纳，奥地利
sandra.mueller@tuwien.ac.athttps://dmg.tuwien.ac.at/sandramueller/

摘要。对内模型的研究始于 G¨odel 对可构造宇宙的分析。此后，Jensen、Mitchell、Steel 等人开创了对带有大基数（例如可测基数、强基数或伍丁基数）的典范内模型的研究。大约在同一时期，Martin 证明了由可测基数推出解析确定性、由 ZFC 推出 Borel 确定性，而马丁和斯蒂尔则证明了由带有顶层可测基数的伍丁基数推出若干层级的射影确定性，从而推动了对无限双人博弈的研究。Woodin 首先改进了射影层级中的这一结果，随后 Neeman 进一步推进，证明只要存在一个具有伍丁基数和顶层测度的可数可迭代模型（即一只鼠），便足以证明射影层级中的确定性。这为取得最优结果开辟了可能性，即证明局部确定性假设与射影层级中鼠的存在等价。本文概述了将确定性假设与具有大基数的鼠的存在联系起来的主要概念和结果，以及该领域近期的进展。

关键词：确定性 · 无限博弈 · 大基数。

1 引言

集合论的标准公理——带选择公理的策梅洛–弗兰克尔集合论（ZFC）——不足以回答数学中的所有问题。尽管这一点可以从库尔特·哥德尔著名的不完备定理中抽象地推出，如今我们已经知道许多关于此类问题的具体例子。集合论中的大量问题，例如勒贝格可测性和贝尔性质等正则性性质，对于 ZFC 而言都是未决的，即使对象是相当简单的实数集（例如射影集）也是如此。集合论之外的许多问题也已被证明无法判定，这意味着既不能从 ZFC 证明它们为真，也不能证明

* 本项目得到欧莱雅奥地利的支持，并与奥地利联合国教科文组织委员会合作，同时与奥地利科学院合作；此外，还获得埃莉泽·里希特项目资助（编号 V844）、国际项目资助（编号 I6087）以及奥地利科学基金（FWF）的 START 项目资助（编号 Y1498）。

它们为假。ZFC无法解决这些问题。这包括怀特海问题（群论， [49]）、博雷尔猜想（测度论， [22]）、关于巴拿赫代数的卡普兰斯基猜想（分析学， [8]）以及布朗–道格拉斯–菲尔莫尔问题（算子代数，[11]）。集合论的一个重要部分致力于通过研究ZFC 的各种扩展及其性质来攻克这一问题。当代集合论研究的主要目标之一，是找出能够解决这些问题的数学的“恰当”公理。这个在一定程度上属于哲学范畴的问题，是通过分析ZFC 的各种扩展及其性质，运用数学技术方法来研究的。确定性假设是ZFC 的典范扩展，它们断言自然的双人博弈中存在获胜策略。已知这类假设蕴含正则性性质，并赋予实数集大量典范结构。其他自然且受到深入研究的ZFC 扩展，则由大基数公理的层级给出。确定性假设、大基数公理及其推论被广泛运用，并在集合论乃至代数拓扑等其他数学领域产生了许多有益的结果 [7],拓扑学 [38,13,6], 代数 [10], 和算子代数 [11]。许多应用，尤其是一致性强度下界的证明，都利用了大基数与决定性公理之间的相互作用。因此，理解确定性假设与大基数层级之间的联系，对于回答ZFC 本身留下的未决问题至关重要。本文概述的结果与这一总体目标密切相关。

为探究大基数与更高层次确定性之间的联系，研究其他层级（例如具有更复杂内模型的层级，这些内模型称为混合鼠）已卓有成效。我们需要翻译程序，将这些混合模型（其力量源自描述集合论特征）转换回标准内模型，同时利用其混合性质，在转换后的模型中获得更强的大基数。因此，它们是连接描述集合论与内模型理论的一种关键方法。本文综述的成果之一，是一种新的翻译程序，它扩展了 Sargsyan [41], Steel [53], 和 Zhu [61]的工作。这种新的翻译程序构造出一个可数可迭代内模型，其中含有一个基数λ，既是伍丁基数的极限，也是强基数的极限 [30]。因此，它从两个方面改进了 Sargsyan 在 [41] 中的构造：它可用于获得无穷多个而非有限多个强基数，而且它所构造的模型是可数可迭代的——这是鼠的一项关键性质。这种翻译程序可用于证明 Sargsyan 关于确定性公理在所有集合均为普适Baire[30], 时的一致性强度猜想；普适 Baire 是实数集的一项核心且广泛使用的性质，它在[47] 中被隐含地引入，并在 [12] 中被明确提出。事实上，这种新的翻译程序可应用于范围更广的背景。此外，它还为产生更复杂强基数模式的翻译程序奠定了基础，例如，一个本身是强基数极限的强基数。

Sargsyan 和 Trang 的近期重要成果 [46,45,44], 另请参阅相关评论[29], 以及 Larson 和 Sargsyan 的成果 [20,42] 表明，我们正处于一个转折点

在寻找具有 Woodin 基数的 Woodin 极限的典范模型的自然构造，以及由此证明自然集合论假设更强下界的研究中。

2 长度为 ω 的博弈的确定性与大基数

1953年，Gale 和 Stewart [14] 发展了无限博弈的基础理论。为简化记号，我们将实数视为 $\mathbb{R}$ 中的 ω自然数的序列 ${}^{\omega}\omega$。对于每个实数集 A，Gale 和 Stewart 考虑了一个双人博弈$G(A)$，长度为 ω，玩家 I 和玩家 II 轮流出自然数 n_0，n_1，.....，具体如下：

I	n_0	n_2	$\ldots$
II	n_1	n_3	$\ldots$

他们定义，若一局博弈 $G(A)$进行过程中产生的自然数序列$x = (n_0, n_1, \ldots)$ 属于 A，则玩家 I 赢得该博弈 $G(A)$；否则，玩家 II 获胜。我们称 A $G(A)$的得分集为得分集。博弈 $G(A)$（或集合 A 本身）称为确定的，当且仅当两位玩家中有一方拥有获胜策略，也就是说，无论对手如何行动，都有一种方法能使该玩家赢得上述博弈。确定性公理（AD）断言，所有实数集都是确定的。

早在 [14], 中，作者们就证明了，在 ZFC 下，每个实数开集和闭集都是确定的。但他们也证明，对所有实数集而言，确定性与选择公理相矛盾。这自然引出了一个问题：对于比开集和闭集更复杂的可定义实数集，情况会是怎样的? 在 Wolfe[59] 和 Davis [9], 取得一些部分结果之后，Martin 在 1975 [24] 中证明了每个博雷尔实数集都是确定的（同样使用 ZFC）。

与此同时，集合论中所谓的大基数公理也在不断发展。Solovay 得以证明：在假设存在可测基数、而非采用决定性公理的情况下，某个特定点类具有正则性性质，而这是确定性的一个已知推论。最后，Martin 得以证明大基数与决定性公理之间存在直接联系：他于 1970 年证明，存在可测基数意味着每个解析实数集都具有确定性 [23]。八年后，Harrington 证明了这一结果在某种意义上是最优的：他证明，对所有解析实数集都具有确定性，意味着 $0^{\#}$——一个可由可测基数得到的可数活动典范内模型——存在 [15]。这里，可迭代的典范内模型（或称鼠）是一种精细结构模型，在某种意义上是可迭代的。这一概念可追溯至 Jensen [16]。结合上文提到的 Martin 的论证，便可得到这两个命题等价。此类典范内模型的构造及其与确定性的联系，后来在 Dodd、Jensen、Martin、Mitchell、Neeman、Schimmerling、Schindler、Solovay、Steel、Woodin、Zeman 等人的研究中得到拓展（例如参见 [25,26,48,55,60]; 另见 [32] 的序言或 Larson 撰写的历史综述，关于

确定性 [19] 的更详细概述）。在射影层级中，这导出了以下基本定理。这里，$M_0^{\#}(x)$ 表示 $x^{\#}$，即 $0^{\#}$ 相对于实数 x 的一个版本，而 $M_n^{\#}(x)$ 表示一个具有上述构造的 n 伍丁基数的极小可数活动鼠 x。

定理 1（Harrington、Martin、Neeman、Woodin [**15,23,33,36,32**]）。设 n 是一个自然数。则以下命题等价：

1. 所有 $\boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}$ 集合都是确定的；2. 对所有 $x \in {}^{\omega}\omega$，
存在 $M_n^{\#}(x)$，且它是 ω_1-可迭代的。

关于射影层级中集合的确定性蕴含存在具有有限多个 Woodin 基数的鼠，且二者在各层级上精确对应，这一证明最早发表于 [27,32]，最初归功于 Woodin。正如 [27], 所示，相关方法可用于在 $L(\mathbb{R})$-层级中获得某些混合鼠的类似结果。这些紧密联系起初令人十分惊讶，因为它们表明，来自集合论不同领域的两个表面上截然不同的概念——描述集合论中的确定性，以及内模型理论中带有大基数的内模型——实际上是同一回事。

3 长于 ω的博弈的确定性

事实证明，确定性与具有大基数的内模型之间的对应关系并不止于长度为 ω的博弈。对于每个序数 α 和集合 $A \subseteq {}^{\alpha}\omega$，我们都可以如下定义一个长度为 α、收益集合为 A的博弈 $G(A)$：

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & n_0 & & n_2 & \dots & n_\omega & \dots \\ \hline \mathrm{II} & & n_1 & & n_3 \dots & & n_{\omega+1} \dots \end{array}$$

双方轮流在 $i < \alpha$期间出自然数 n_i，我们再次规定，当且仅当他们产生的长度为 α 的序列 $x = (n_0, n_1, \dots)$属于 A时，玩家 I 赢得博弈；否则，玩家 II 获胜。在里程碑式结果中，Neeman [37] 发展了强有力的技巧，用大基数证明长于 ω 的射影博弈具有确定性。例如，朝这一方向迈出的第一步是以下结果：

定理 2（Neeman，[**37**]）。设 $n \in \omega$，并假设对所有实数 $x \in {}^{\omega}\omega$，$M^{\#}_{\omega+n}(x)$ 都存在。那么所有长度为 ω^2 且收益为 $\boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}$ 的博弈都是确定的。

事实上，对于所有可数序数α，长度固定为 α的博弈都满足这一结果，而不只是长度为 ω^2的博弈。下述定理补充了 Neeman 关于长度为 ω^2的射影博弈的结果：

定理 3（Aguilera、M¨uller、[**2,28**]）。设 n 是一个自然数，并假设所有长度为 ω^2 、收益集为 $\boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}$ 的博弈都是确定的。那么，对于每个 $x \in {}^{\omega}\omega$，都存在一个 ZFC 模型 $\mathcal{M}$，其中有 $\omega + n$ 个 Woodin 基数，且满足 $x \in \mathcal{M}$。

在这个层次上，确定性与大基数之间的相互作用已经得到了相当深入的理解（另见 [1,3]）。对于长度为 ω^α 、收益集为解析集的博弈，当 α为可数序数时，Trang [57], 基于 Woodin 未发表的结果，利用带有广义 Solovay 测度的决定性典范模型，先前已证明了类似结果。Solovay 测度也称为 关于 ω_1 的超紧测度， ω_1因为它体现了 ω_1具有一定程度的超紧性。

谈到强得多的确定性概念时，情况就不那么明朗了。例如，Mycielski 在1964年就已证明，所有长度为 ω_1 的博弈都具有确定性，这与策梅洛–弗兰克尔集合论（ZF）不相容。尽管如此，在大基数假设下，某些长度为 ω_1 的博弈子类仍已知具有确定性。

一个中间步骤是考虑那些没有固定可数长度、但仍在可数轮内结束的博弈。2004年，Neeman 在开创性工作中从大基数出发证明，某些没有固定可数长度的博弈仍具有确定性。这些所谓的连续编码长度博弈可追溯至 Steel [50], ，定义如下：对于任意集合$A \subset ({}^\omega\omega)^{<\omega_1}$ 和偏函数 ν：${}^\omega\omega \rightharpoonup \omega$，博弈 $G_{\mathrm{cont}}(\nu, A)$ 按照以下规则进行：

I	$y_0(0)$		$y_0(2)$	$\dots$	$y_\alpha(0)$	$y_\alpha(2)$	$\dots$
II		$y_0(1)$	$y_0(3)\dots$		$y_\alpha(1)$	$y_\alpha(3)\dots$	

我们将长度为 ω 的博弈的各个片段规范地视为超回合，并令 y_α 表示两位玩家在超回合α中共同产生的实数。若 $\nu(y_\alpha)$ 未定义，则博弈结束，且当且仅当 $\langle y_\xi \mid \xi \leq \alpha\rangle \in A$ 时玩家 I 获胜。否则，令 $n_\alpha = \nu(y_\alpha)$。若 $n_\alpha \in \{n_\xi \mid \xi < \alpha\}$，则博弈结束，并且同样地，当且仅当 $\langle y_\xi \mid \xi \leq \alpha\rangle \in A$时玩家 I 获胜。若这两种情形均不成立，则博弈继续。

定理 4（Neeman，[**37**]）。设存在一个可迭代真类模型M，其中有一个 Woodin 基数 δ 和一个基数 $\kappa < \delta$，后者在 M 中是 $(\delta+1)$-强的，并且 $V^M_{\delta+1}$ 在 V中是可数的。则对于类 $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ 中的每个 ν 以及在编码中为 $<\omega^2 - \boldsymbol{\Pi}^1_1$ 的每个 A，博弈 $G_{\mathrm{cont}}(\nu, A)$ 都是确定的。

这里，属于 Γ 点类 Γ 和集合 $A \subset ({}^\omega\omega)^{<\omega_1}$ 是通过将 A 的元素自然编码为实数来定义的； A 属于 Γ 这些编码，是指 A 的元素的编码所构成的集合 Γ属于 Γ。目前尚不清楚定理 4是否是最优的，但 Neeman 和 Steel 的结果 [34] 表明，它不会离最优差得太远。我猜想，在以下意义下它确实是最优的：

猜想 1. 假设对于类 $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ 中的每个 ν 以及每个属于编码的 A，博弈 $G_{\mathrm{cont}}(\nu, A)$ 都是确定的。那么存在一个 ZFC 模型，其中有一个 Woodin 基数 δ 和一个 $(\delta+1)$-强基数 $\kappa < \delta$。

更高层次上的一个类似猜想，正朝着当前内模型理论的圣杯迈进。更确切地说，它关乎证明以下对象存在的目标：

一个具有 Woodin 基数且该基数是 Woodin 基数极限的内模型，其存在性可由某些长博弈的确定性推出。在这一层次上值得考虑的自然博弈，其长度为 ω_1，且其获胜方集合可用实数作为参数进行序数可定义。Woodin 利用 Neeman 的结果证明了逆命题 [37]，并采用了可追溯至 Kechris 和 Solovay 的思想 [18]。

定理 5（Neeman、Woodin、 [**37**]）。假设存在一个带有 Woodin 基数的可迭代真类模型，其中该 Woodin 基数是 Woodin 基数的极限，且在 V 中可数。那么存在一个 ZFC 模型，在该模型中，所有带有实数参数、长度为 ω_1 的自然数上的序数可定义博弈都是确定的。

事实上，Woodin 证明了，这些长度为 ω_1 的博弈的确定性与一个看似较弱的陈述等一致：某些在博弈过程中于构造意义下不可数的博弈具有确定性。这些博弈定义如下：对于得分集 $A \subset (^{\omega}\omega)^{<\omega_1}$，玩家 I 和 II 交替出自然数，以产生实数 y_α。

$$\begin{array}{c|ccccccccc} \mathrm{I} & y_0(0) & & y_0(2) & & \dots & y_\alpha(0) & & y_\alpha(2) & \dots \\ \hline \mathrm{II} & & y_0(1) & & y_0(3) \dots & & & y_\alpha(1) & & y_\alpha(3) \dots \end{array}$$

当博弈长度达到第一个 γ 在 $L[y_\alpha \mid \alpha < \gamma]$中不可数的序数时，博弈结束；当且仅当 $\langle y_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle \in A$时，玩家 I 获胜。这里$L[y_\alpha \mid \alpha < \gamma]$ 表示相对于（$y_\alpha \mid \alpha < \gamma$）的哥德尔可构造宇宙 L。在这种情况下 $\gamma = \omega_1^{L[y_\alpha \mid \alpha < \gamma]}$，因此说博弈在 ω_1的 L 第轮结束是有意义的 ω_1（在 V中）。不过，我们在技术上定义：如果博弈持续 γ轮，则 II 获胜；但温和的大基数假设可以给出一个序数 V，如上所述，该序数在 A中可数。Neeman 证明，对于足够可定义的得分集4，这些博弈是确定的；其方法是对定理 4 的证明中所使用方法的精妙推广。

定理 6（Neeman， [**37**]）。假设存在一个具有 Woodin 基数的可迭代真类模型，该基数是 Woodin 基数的极限，并且在 V 中可数。那么，所有在 ω_1 结束、其对局的 L 中得分集在编码中为 $\partial(<\omega^2 - \Pi^1_1)$ 的博弈都是确定的。

此处， ∂ 表示长度为 ω 的博弈的博弈量词。在 [35], Neeman 证明了定理 5 和 6 的假设与大基数的一致性。鉴于定理 6，定理 5 是 Woodin 以下结果的推论：

定理 7（Woodin， [**37**]）。以下理论等一致：

1. ZFC + 所有长度为 ω_1 、在自然数上进行且带有实数参数的序数可定义游戏都是确定的。 2. ZFC + 所有在 ω_1 结束、其对局的 L 中得分集在编码中为 $\partial(<\omega^2 - \Pi^1_1)$ 的博弈都是确定的。

我猜想定理5 在以下意义上是最优的：

猜想2. 假设所有以自然数为对象、长度为 ω_1 且带有实数参数的序数可定义游戏都是确定的。那么存在一个 ZFC 模型，其中有一个 Woodin 基数，它是伍丁基数的极限。

这将是自然的确定性概念与处于伍丁基数层级的大基数之间的首个对应关系，其中该伍丁基数是伍丁基数的极限。利用当前的方法无法实现这一点，例如 Woodin 提出的核心模型归纳技术（例如参见评论 [29]）；Sargsyanand Trang [46,44,45] 最近指出，这种技术在达到这一层级之前就会遇到严重问题。此外，根据 Larson 和 Sargsyan 最近的研究成果 [20,42]，著名的宽松 K^c 构造 [4,17] 也可能失效，只要存在一个作为伍丁基数极限的伍丁基数。

因此，理解此类不可数博弈的确定性所具有的大基数强度，或许有助于阐明如何规范地构造具有一个作为伍丁基数极限的伍丁基数的内模型。

4 长度为 ω 的博弈的确定性强模型

加强确定性还有另一种方法：继续研究长度为ω 的博弈，并对模型施加额外的结构性质。这类结构性质的例子包括“$\theta_0 < \Theta$”、“Θ 是正则的”，或最大Suslin公理，参见例如 [53,40,44]。这里，Θ 定义为

$$\Theta = \sup\{\alpha \mid \text{there is a surjection } f\colon \mathbb{R} \to \alpha\}$$

并且我们将 θ_0 记为满足以下条件的最小序数 α：不存在从 $\mathbb{R}$ 到α 的满射，且该满射可由一个实数作序数定义。在选择公理的模型中，Θ 只是等于$(2^{\aleph_0})^+$，但它在确定性公理的模型中表现得非常有趣。

其他可用于获得强决定性模型的性质还包括“所有实数集都是Suslin集”或“所有实数集都是普适Baire集”。Suslin性是解析性的一种推广。更准确地说，若一个实数集是某个序数 κ对应的 $\omega \times \kappa$ 上的树的投影，则称它为Suslin集。Woodin和Steel确定了理论“AD $+$ 所有实数集都是Suslin集”的确切大基数强度 [54,52]:

定理 8（Steel、Woodin、 [**54,52**]）。以下理论（在 ZF 上）等一致：

1. AD $+$ 所有实数集都是 Suslin 集；2. ZFC $+$ 存在一个基数 λ，它是 Woodin 基数和 $<\lambda$-强基数的极限。

根据 Martin 和 Woodin 的结果，参见 [54, 定理 9.1 和 9.2], ，假设 AD，则“所有实数集都是 Suslin”这一陈述等价于实数上游戏的决定性公理（$\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$）。普适Baire性是 Suslin 性的一种强化，这一概念由 [47] 隐含地引入，并由 Feng、Magidor 和 Woodin [12]明确提出。

定义 1（Feng、Magidor、Woodin [**12**]）。拓扑空间 A 的子集 Y是 普适Baire 的，$f^{-1}(A)$在任意拓扑空间 X中都具有 Baire 性质，其中 $f\colon\ X \to Y$是连续的。

在确定性假设下，所有实数集都是普适Baire的这一命题的确切一致性强度，是 Sargsyan 于 2014年提出的猜想。2014年，他与 Larson 和 Wilson 通过扩展 Woodin 著名的导出模型定理，得到了一个上界。使他们的论证尤为有趣的一点是，形如 $L(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 的模型都不是“AD+ 所有实数集都是普适Baire”这一命题的模型。普适Baire性不仅在集合论中得到广泛应用，也是内模型理论中的一项关键性质：普遍贝尔迭代策略（以实数集的形式规范编码）可以从可数迭代扩展到不可数迭代（例如，参见 [39]）。以下定理通过证明 Larson、Sargsyan 和 Wilson 得到的上界是最优的，证实了 Sargsyan猜想：

定理 9（Larson、Sargsyan、Wilson、[**21**], M¨uller、 [**30**]）。以下理论（在 ZF 上）等一致：

1. AD $+$ 所有实数集都是普适Baire，2. ZFC $+$ 存在一个基数，它既是伍丁基数的极限，也是强基数的极限。

为了构造并分析相关模型，以证明该定理中的方向 Con(1.) $\Rightarrow Con$(2.)，这里不只是考虑两个层级——决定性公理和带有大基数的内模型——而是引入第三个层级，以达到另外两个层级中的更高层次。Steel 将这三个层级共同构成的体系称为内模型理论的三重螺旋。这个新层级可追溯至 Woodin 和 Sargsyan，由称为混合鼠或 HOD 鼠的典范模型构成。这些模型不仅通过其序列上的扩张子所见证的大基数得到增强，还配备了针对自身的部分迭代策略，见 [40]。直观而言，这些模型的强度来自这些部分迭代策略在描述集合论上的复杂性。

hod鼠这一名称源于这样一个事实：在各种确定性模型中，对 HOD（遗传序数可定义集）进行分析后，自然会得到这些鼠。Steel 和 Woodin 首创了这类分析，研究对象包括模型 [51,56]中的 $L(\mathbb{R})$，以及 $L[x][g]$ 中实数锥 x，其中 g 是泛型，来自 L´evy 塌缩 $L[x]$ 中的最小不可达基数（两者都基于确定性假设）。Sargsyan、Trang 等人 [40,58,5,43]将这类分析扩展到了更大的确定性模型。在 [31] 中，我们展示了如何分析 $M_n(x)[g]$中的 HOD，适用于实数锥 x，其中 g 是泛型，来自 L´evy 塌缩 $M_n(x)$中的最小不可达基数（基于确定性假设）。

这一方向背后的技术创新 $Con(1.) \Rightarrow Con(2.$在定理9 中，是一种新的翻译程序，可将混合鼠翻译为具有 Woodin 极限和强基数的鼠 [30]。这需要对通过一种新颖的背景化构造所得到的模型进行可迭代性证明。在 [30] 文中证明了

所得模型是可数可迭代的，也就是说，可数子结构是可迭代的；事实上，性质还稍强一些。不过，以下这个自然的问题仍未解决：

问题 1. 是否存在一种翻译程序，应用于适当的混合鼠时，能够生成具有 Woodin 基数和强基数极限的完全可迭代鼠？

参考文献

1. Aguilera, J.P., M¨uller, S.：《实数上的射影博弈》。Notre Dame Journal of Formal Logic **61**, 573 589 2020 10 1215 00294527 2020 0027 – ( )。2 https://doi.org/ . / - - 。Aguilera, J.P., Muller, S.：长射影确定性的相容性强度。《符号逻辑杂志》 **85** 1 338 366 2020 10 1017 2019 78 ( )，– ( )。3 https://doi.org/ . /jsl. . . Aguilera, J.P., Muller, S., Schlicht, P.：长博弈与 -射影集。《纯粹与应用逻辑年刊》172，102939 102939 4 2021 10 1016 2020 ( )。https://doi.org/ . / j.apal. . . Andretta, A., Neeman, I., Steel, J.R.：K^c 的国内层级是可迭代的。《以色列数学杂志》125，157–201 (01 2001)。https://doi.org/10 02773379 5 1007. /BF . Atmai, R., Sargsyan, G.：截至 $AD_{\mathbb{R}} + \Theta$ 的 HOD 是可测的。《纯粹与应用逻辑年刊》 **170** 1 95 108 2019 10 1016 2018 08 013 ( )，– ( )。6 https://doi.org/ . /j.apal. . . . Carroy, R., Medini, A., Muller, S.：在确定性假设下，每个零维齐性空间都是强齐性的。《数学逻辑杂志》20，2050015 (2020)。https://doi.org/10 0219061320500154 7 1142. /S . Casacuberta, C., Scevenels, D., Smith, J.H.：大基数原理在同伦局部化中的含义。Adv. Math. 197(1)，120–139 (2005)。https://doi.org/10 001 8 1016 2004 10 . /j.aim. . . . Dales, H.G., Woodin, W.H.：《分析学家的独立性导论》。伦敦数学学会讲义系列，剑桥大学出版社 (1987)。https://doi.org/10 9780511662256 9 1017. / CBO . Davis, M.：完全信息无限博弈。载于：Dresher, M., Shapley, L.S., Tucker, A.W. (编)，《博弈论进展》，第52卷，第85–101页 (1964) 10. Eklof, P.C., Mekler, A.H.：《几乎自由模》，北荷兰数学图书馆，第65卷。北荷兰出版公司 (2002) 11. Farah, I.：Calkin 代数的所有自同构都是内的。《数学年刊》173(2)，619 1 12 661 2011 10 4007 2011 173 2 – ( )。https://doi.org/ . /annals. . . . . Feng, Q., Magidor, M., Woodin, W.H.：《实数的普遍贝尔集》。载于：Judah, H., Just, W., Woodin, W.H. (编)，《连续统集合论》。数学科学研究所出版物，施普林格 (1992)。https://doi.org/10 0 15 13 1007 978 1 4613 9754 . / - - - - . Fleissner, W.G.：如果所有正规穆尔空间都可度量化，那么就存在一个含有可测基数的内模型。美国数学会汇刊 273，365–373 (1982)。https://doi.org/10 8 14 1090 0002 9947 1982 0664048 . /S - - - - . Gale, D., Stewart, F.M.：完全信息无限博弈。载于：Kuhn, H.W., Tucker, A.W. (编)，《博弈论文集》，第2卷，第245–266页 (1953) 15. Harrington, L.：解析确定性与 $0^{\#}$。《符号逻辑杂志》43，685–693 (1978)。https://doi.org/10 2273508 16 2307. / . Jensen, R.B.：可构造层级的精细结构。《数学逻辑年刊》4，229–308 (1972)。https://doi.org/10.1016/0003-4843(72)90001-0

17. Jensen, R.B., Schimmerling, E., Schindler, R., Steel, J.R.：堆叠鼠。《符号逻辑杂志》74 1231082314 18 1 315 335 2009 10 2178 ( )，– ( )。https://doi.org/ . /jsl/ . Kechris, A., Solovay, R.：确定性假设的相对一致性强度。美国数学会汇刊 290(1)，179–211 (1985)。https://doi.org/10 2 19 1090 0002 9947 1985 0787961 . /S - - - - . Larson, P.B.：确定性的简史。载于：Kechris, A.S., L¨owe, B., Steel, J.R. (编)，《大基数、确定性及其他主题》，第3–60页 (2020)。https://doi.org/10 002 20 1017 9781316863534 . / . . Larson, P.B., Sargsyan, G.：Chang 模型的 $\mathbb{P}_{\max}$ 扩展中平方的失败 (2021) 21. Larson, P.B., Sargsyan, G., Wilson, T.M.：一个满足确定性公理的模型，其中每个实数集都是普遍贝尔集 (2018) 22. Laver, R.：论 Borel 猜想的一致性。《数学学报》137，151–169 (1976 02392416 23 10 1007)。https://doi.org/ . /BF . Martin, D.A.：可测基数与解析博弈。Fundamenta Mathematicae 66，287 291 24 291 1970 10 4064 66 3 287 102 2 – ( )。https://doi.org/ . /fm- - - - . Martin, D.A.：Borel 确定性。《数学年刊》( )，363–371 (1975)。https://doi.org/10 1971035 25 2307. / . Martin, D.A., Steel, J.R.：射影确定性的一个证明。《美国数学会杂志》2 1990913 26 1 71 125 1989 10 2307 ( )，– ( )。https://doi.org/ . / . Mitchell, W.J., Steel, J.R.：精细结构与迭代树，《逻辑讲义》，第3卷。施普林格出版社，柏林、纽约 (1994) 27. Uhlenbrock (现名 M¨uller), S.：《由确定性层级推出的有限多个 Woodin 基数的纯鼠与混合鼠》。博士论文，明斯特大学 (2016) 28. M¨uller, S.：确定性公理蕴含鼠中的依赖选择。数学逻辑季刊 65(3)，370–375 (2019)。https://doi.org/ 10 1002 201800077 . /malq. . Muller, S.：通过核心模型归纳 29 ¨ 得到的 PFA 大基数强度的四篇论文。《符号逻辑通报》 **26** 1 89 92 2020 10 1017 2020 6 30 ¨ ( )，– ( )。https://doi.org/ . /bsl. . . Muller, S.：当所有集合均为普遍贝尔集时确定性的相容性强度 (2021)，已投稿 31. M¨uller, S., Sargsyan, G.：含 Woodin 基数内模型中的 HOD。《符号逻辑杂志》(2021 10 1017 2021 61)。 32 ¨ https://doi.org/ . /jsl. . . Muller, S., Schindler, R., Woodin, W.：由最优确定性假设推出的有限多个 Woodin 基数的鼠。《数学逻辑杂志》20 (2020)。https://doi.org/10 0219061319500132 33 1142. /S . Neeman, I.：确定性的最优证明。《符号逻辑通报》1 09 1995 3 327 339 10 2307 ( )，– ( )。https://doi.org/ . /421159 34. Neeman, I.：可数长度博弈。载于：Cooper, S.B., Truss, J.K. (编)，《集合与证明》，第159–196页。伦敦数学学会讲义系列 (1999)。https://doi.org/10 009 35 1017 9781107325944 . /CBO . . Neeman, I.：Woodin 基数的 Woodin 极限区域中的内模型。《纯粹与应用逻辑年刊》116(1)，67–155 (2002)。https://doi.org/10 8 36 1016 0168 0072 01 00103 . /S - ( ) - . Neeman, I.：确定性的最优证明 II。《数学逻辑杂志》2 11 2002 2 227 258 10 1142 ( )，– ( )。https://doi.org/ . /S0219061302000175 37. Neeman, I.：《长博弈的确定性》，De Gruyter 逻辑及其应用系列，第7卷 9783110200065 38 2004 10 1515。De Gruyter ( )。https://doi.org/ . / . Nyikos, P.J.：正规穆尔空间问题的一个暂定解。《美国数学会会刊》78，429–435 (1980)。https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1980-0553389-4

39. Sargsyan, G.：描述性内模型理论。《符号逻辑通报》19 1901010 40 1 1 55 2013 10 2178 ( )，– ( )。https://doi.org/ . /bsl. . Sargsyan, G.：HOD 鼠与鼠集合猜想，美国数学会回忆录，第 236 卷 1111 41 2015 10 1090 ( )。https://doi.org/ . /memo/ . Sargsyan, G.：描述性内模型理论中的翻译程序。载于：数学基础，第 690 卷，第 205–223 页。美国数学会（2017）。https://doi.org/10 13869 42 1090 690 . /conm/ / . Sargsyan, G.：描述性内模型理论近期成果公告（2021）43. Sargsyan, G., Trang, N.D.：最大苏斯林公理（2016）44. Sargsyan, G., Trang, N.D.：普遍贝尔集的泛型绝对性的精确一致性强度（2019）45. Sargsyan, G., Trang, N.D.：由可迭代性得到的封印。美国数学会汇刊 B 辑 8, 229 65 46 248 2021 10 1090 – ( )。https://doi.org/ . /btran/ . Sargsyan, G., Trang, N.D.：普遍贝尔集的封印。《符号逻辑通报》（2021 29 47 10 1017 2021）。https://doi.org/ . /bsl. . . Schilling, K., Vaught, R.：博雷尔博弈与贝尔性质。美国数学会汇刊 279 1999393 48 1 411 428 1983 10 2307 ( )，– ( )。https://doi.org/ . / . Schindler, R., Steel, J.R., Zeman, M.：解构内模型理论。《符号逻辑杂志》67, 721 1190150106 49 736 2002 10 2178 – ( )。https://doi.org/ . /jsl/ . Shelah, S.：无限阿贝尔群、怀特海问题及若干构造。《以色列数学杂志》18, 243 02757281 50 256 1974 10 1007 81 85, 56 97 – ( )。https://doi.org/ . /BF . Steel, J.R.：长博弈。载于：Cabal Seminar - pp. – . 数学讲义 1333, 1988 10 1007 0084970 施普林格出版社 ( )。https://doi.org/ . /BFb . Steel, J.R.：HOD 是低于 的核心模型。《符号逻辑通报》（），– (1995)。https://doi.org/10 420947 52 2307. / . Steel, J.R.：$AD_{\mathbb{R}}$ 的最优一致性强度下界（2008）53. Steel, J.R.：与鼠相关的导出模型。载于：无穷的计算前景——第一部分：教程，第 14 卷，第 105–193 页。世界科学出版社（2008）。https://doi.org/10 9789812794055 0003 54 1142. / . Steel, J.R.：导出模型定理。载于：Cooper, S.B., Geuvers, H., Pillay, A., V¨a¨an¨anen, J.（编），2006年逻辑研讨会，第 280–327 页（2009）。https://doi.org/10 014 55 1017 9780511605321 . /CBO . . Steel, J.R.：内模型理论纲要，第 1595–1684 页。施普林格（2010）。https://doi.org/10 9 20 56 1007 978 1 4020 5764 . / - - - - . Steel, J.R., Woodin, W.H.：HOD 作为核心模型。载于：Kechris, A.S., L¨owe, B., Steel, J.R.（编），序数可定义性与递归论，第 257–346 页（2016）。https://doi.org/10 010 57 1017 9781139519694 . /CBO . . Trang, N.D.：广义 Solovay 测度、HOD 分析与核心模型归纳。博士论文，加州大学伯克利分校（2013）58. Trang, N.D.：AD^+ 的自然模型中的 HOD。《纯粹与应用逻辑年刊》165(10), 1533 – 1556 006 59 2014 10 1016 2014 04 ( )。https://doi.org/ . /j.apal. . . . Wolfe, P.：某些无限博弈的严格决定性。《太平洋数学杂志》5, 841 841 60 847 1955 10 2140 1955 5 – ( )。https://doi.org/ . /pjm. . . . Zeman, M.：内模型与大基数，De Gruyter 逻辑及其应用丛书，第 5 2002 10 1515 9783110857818 卷。De Gruyter ( )。https://doi.org/ . / . Zhu, Y.：将一个 AD 模型实现为前鼠的导出模型。《纯粹与应用逻辑年刊》166, 1275–1364 (2015)。https://doi.org/10.1016/j.apal.2015.05.002