arXiv:2302.02256v1 [math.PR] 4 Feb 2023

受噪声激励的自参数振动吸收器单模态解的几乎必然稳定性

Peter H. Baxendale　N. Sri Namachchivaya

2023年2月7日

摘要

对于一个悬挂在受白噪声激励的振动块下方的摆，摆保持竖直的解称为单模态解。当该解变得不稳定时，能量会从振动块传递到摆，从而有助于吸收振动块的振动。我们研究沿单模态解线性化的过程的李雅普诺夫指数 λ，该指数决定其几乎必然稳定性。线性化方程受到白噪声过程与有色噪声过程组合的激励，因此 λ 的求值并非易事。对于强度为 $\varepsilon\nu$ 的白噪声激励，我们证明，当 $\varepsilon \to 0$时，$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_2 + O(\varepsilon^4)$，其中 λ_0和 λ_2 以系统参数的形式显式给出。

关键词：自参数系统、李雅普诺夫指数、稳定性边界、共振。2020年数学主题分类：37H15、60H10（主要分类）、70K20（次要分类）

1 引言

自参数系统是由两个子系统组成的振动系统。主系统是一个受到某种外部激励直接作用的振子，而次系统与该振子非线性耦合，因此在振子振动时，次系统可以保持静止。

本文考虑图1所示的二自由度系统。主系统由质量为 m_1 的滑块、刚度为 k_1的线性弹簧以及阻尼系数为 c_1的黏性阻尼器组成。滑块直接受到向下的强迫 $\Xi(t)$。次系统由一根长度为 ℓ的单摆组成，该摆连接在滑块上。摆锤的质量为 m_2，摆的运动受到系数为 c_2的黏性阻尼器的阻尼。该系统见 Hatwal、Mallik 和 Ghosh [12]。另见 [4, 6]，以及 [32] 中采用非线性弹簧和复摆的类似模型。Haxton 和 Barr [13] 研究了一个密切相关的系统，其中垂直安装的悬臂梁带有端部质量。

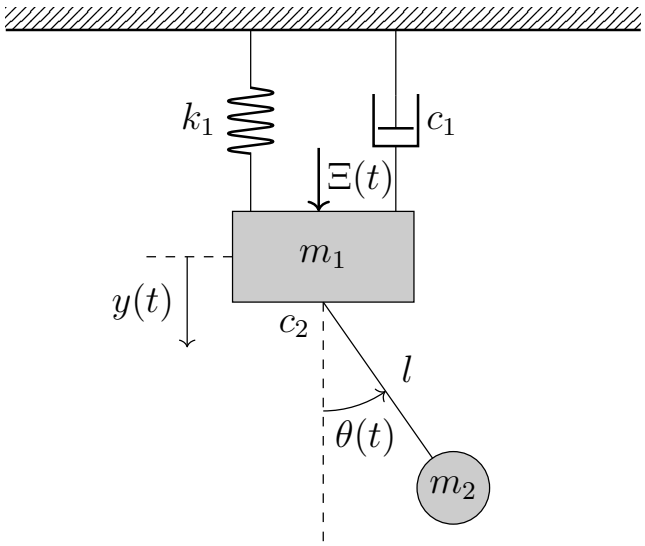

图1：方块与摆

自参数系统的一个典型特征是存在这样一种解：主系统作受迫运动，而次系统保持静止。这里对应的是“单模态”解，即摆始终保持在振动块的正下方。随着系统参数变化，单模态解可能变得不稳定，摆也可能开始运动。在这种情况下，主系统的运动会激励次系统，并使能量从振动块传递到摆。实际上，摆起到了振动吸收器的作用。我们主要关注当激励函数 $\Xi(t)$为白噪声的倍数时，单模态解的几乎必然稳定性分析。

除了上文提到的方块与摆、方块与梁示例外，自参数系统还用于模拟结构与机械系统的动力学，例如初始偏转浅拱的振动 [29], 、悬索的面内和面外运动 [8], 以及船舶的纵摇与横摇运动[24, 26]。专著 [30]中给出了更多示例。

周期激励自参数系统已得到广泛研究；例如参见 [13, 25, 12, 9, 4, 6]。这些都是确定性系统，最有趣的情况出现在主系统（受激模态）与次级系统（未受激）固有频率呈2:1共振时。此时会涉及分岔理论问题，数值计算也经常显示出混沌行为。

也有研究探讨了受随机激励的自参数系统。在 [15, 27, 14, 10, 20] 中，研究者采用高斯和非高斯闭合技术，近似求解相关福克-普朗克方程的解的各阶矩。在 [1]中，研究者得出了单模态解几乎必然稳定性的充分条件。随机平均

技术被用于 [23]。

图1所示的滑块-摆系统的运动方程为

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\ddot{y}(t)+c_1\dot{y}(t)+k_1y(t)-m_1\ell(\ddot{\theta}(t)\sin\theta(t)+\dot{\theta}^2(t)\cos\theta(t))=\Xi(t)\\ m_2\ell^2\ddot{\theta}(t)+c_2\dot{\theta}(t)+m_2\ell(g-\ddot{y}(t))\sin\theta(t)=0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中， y 表示滑块相对于其静止（无强迫）位置向下的位移， θ 为摆的角度，见 [12]。我们专门考虑白噪声强迫的情形，即 $\Xi(t)=\hat{\nu}W(t)$，其中 W 为标准维纳过程，$\hat{\nu}$ 表示噪声强度。

令 $\eta=y/\ell$ 表示滑块的无量纲位置，则运动方程(1.1)可改写为

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}(t)+2\zeta_1\dot{\eta}(t)+\chi^2\eta(t)-R\big(\ddot{\theta}(t)\sin\theta(t)+\dot{\theta}^2(t)\cos\theta(t)\big)=\nu\dot{W}(t)\\ \ddot{\theta}(t)+2\zeta_2\dot{\theta}(t)+\big(\kappa^2-\ddot{\eta}(t)\big)\sin\theta(t)=0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

其中，常数 ζ_1 和 ζ_2 为经缩放的阻尼系数， $\chi^2=k_1/(m_1+m_2)$，且 $\kappa=\sqrt{g/\ell}$ 为无阻尼摆的频率。参数 $R=m_2/(m_1+m_2)$，$0<R<1$表示质量比，而 $\nu=\hat{\nu}/[\ell(m_1+m_2)]$ 为经缩放的噪声强度。

式 (1.2) 作为一个四维随机微分方程（SDE）的严格解释将在第2节中给出。定理 2.1 保证了对于任意初始条件，解的存在唯一性以及指数矩。系统 (1.2) 的单模态解形式如下：

$$\big(\eta(t),\dot{\eta}(t)\big)=\big(\bar{\eta}(t),\dot{\bar{\eta}}(t)\big)\quad\text{and}\quad\big(\theta(t),\dot{\theta}(t)\big)=\big(0,0\big),\tag{1.3}$$

其中，滑块的运动 $\{(\bar{\eta}(t)\ \dot{\bar{\eta}}(t)):t\geq0\}$ 由下式描述：

$$\ddot{\bar{\eta}}(t)+2\zeta_1\dot{\bar{\eta}}(t)+\chi^2\bar{\eta}(t)=\nu\dot{W}(t).\tag{1.4}$$

单模态解 (1.4) 存在平稳解 $\{(\bar{\eta}(t)\ \dot{\bar{\eta}}(t)):t\geq0\}$，其平稳概率测度为高斯分布，均值为 (0,0)，协方差矩阵为 $R=\dfrac{\nu^2}{4\zeta_1}\begin{pmatrix}1/\chi^2&0\\0&1\end{pmatrix}$。 —

单模态解的稳定性或不稳定性由沿单模态解 $(\bar{\eta}(t)\ \dot{\bar{\eta}}(t),0,0)$ 对四维随机微分方程进行线性化后所得过程的长期行为决定。具体而言，它由李雅普诺夫指数的符号决定：

$$\lambda:=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|\,(\varphi(t),\dot{\varphi}(t))\,\|\tag{1.5}$$

与线性随机微分方程相关

$$\ddot{\varphi}(t)+2\zeta_2\dot{\varphi}(t)+\big(\kappa^2+2\zeta_1\dot{\bar{\eta}}(t)+\chi^2\bar{\eta}(t)\big)\varphi(t)=\nu\varphi(t)\dot{W}(t)\tag{1.6}$$

其中，$(\bar{\eta}(t)\ \dot{\bar{\eta}}(t)$由式（1.4）给出，见第2.1节。

线性随机微分方程（1.6）的新颖之处在于，它受到有色噪声过程 $\bar{\eta}(t)$ 和 $\dot{\bar{\eta}}(t)$ 的参数激励，同时也受到在式（1.4）中驱动这些过程的白噪声（广义）过程 $\dot{W}(t)$ 的激励。本文提出的技术和结果适用于更广泛的一类式（1.6）的激励形式，包括高斯有色噪声过程与白噪声过程的组合。这一更广泛的类别将在第3节中介绍。

第 4 节证明了，对于所有初始值 $(\bar{\eta},\ \dot{\bar{\eta}},\ \varphi,\ \dot{\varphi})$，其中 $(\varphi,\ \dot{\varphi}) \neq (0,\ 0)$，式 *(1.5)* 右侧的几乎必然极限存在，且由 *Khas'minskii*积分公式 *(4.8)* 给出。尽管式 *(4.8)* 中的被积函数 $(\cdot,\ \psi)$ 有明确表达式，但测度m 仅被刻画为相关扩散过程的唯一不变概率测度，因此很难计算该积分并得到李雅普诺夫指数的精确公式。然而，假设摆处于欠阻尼状态，即阻尼频率 $\kappa_d = \sqrt{\kappa^2 - \zeta_2^2}$ 为实数且为正，则对 Q 的一个简单估计给出了李雅普诺夫指数的如下上界，

$$\lambda \leq -\zeta_2 + \frac{\nu}{2\kappa_d}\sqrt{\frac{\chi^2 + 4\zeta_1^2}{4\zeta_1}} + \frac{\nu^2}{2\kappa_d^2}. \tag{1.7}$$

见命题 4.2。这表明，当噪声强度ν足够小时，系统几乎必然稳定。

本文的主要结果见第5节。定理 5.1和命题5.1和5.2给出了当噪声强度按 $\nu \rightsquigarrow \varepsilon\nu$重新缩放时所得系统的李雅普诺夫指数 $\lambda(\varepsilon)$的严格渐近估计。对于滑块-摆系统，我们证明

$$\lambda(\varepsilon) = -\zeta_2 + \varepsilon^2 \frac{2\kappa_d^2\nu^2}{(\chi^2 - 4\kappa_d^2)^2 + 16\zeta_1^2\kappa_d^2} + O(\varepsilon^4) \tag{1.8}$$

当 $\varepsilon \to 0$时成立。第 6 节给出了噪声强度和摆的阻尼均按比例缩放的情形下的结果：$\nu \rightsquigarrow \varepsilon\nu$ 和 $\zeta_2 \rightsquigarrow \varepsilon^2\zeta_2$。文中简要讨论了白噪声和周期性强迫下2:1共振效应的相似之处与差异。最后三节给出证明。

2 非线性系统的适定性

由于 $0 < R < 1$，方程 (1.2) 可重新排列为

$$\begin{aligned}
&\ddot{\eta}(t) + \frac{2\zeta_1\dot{\eta}(t) + \chi^2\eta(t) - R\dot{\theta}^2(t)\cos\theta(t) + 2R\zeta_2\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + \kappa^2 R\sin^2\theta(t)}{(1 - R\sin^2\theta(t))} \\
&\qquad\qquad = \frac{\nu}{(1 - R\sin^2\theta(t))}\dot{W}(t) \\
&\ddot{\theta}(t) + \frac{2\zeta_2\dot{\theta}(t) + \kappa^2\sin\theta(t) + 2\zeta_1\dot{\eta}(t)\sin\theta(t) + \chi^2\eta\sin\theta(t) - R\dot{\theta}^2(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t)}{(1 - R\sin^2\theta(t))} \\
&\qquad\qquad = \frac{\nu\sin\theta(t)}{(1 - R\sin^2\theta(t))}\dot{W}(t).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

现在，可以将关于 $(\eta,\ \theta)$ 的这个二阶系统转化为随机微分方程的一阶系统，该过程 $(\eta,\ \dot{\eta},\ \theta,\ \theta)$ 取值于空间 $N = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$。记

$$(v_1, v_2, u_1, u_2) = (\eta, \dot{\eta}, \theta, \dot{\theta}).$$

于是 (2.1) 得到

$$\begin{aligned}
dv_1 &= v_2\, dt \\
dv_2 &= \frac{-2\zeta_1 v_2 - \chi^2 v_1 + R u_2^2 \cos u_1 - 2R\zeta_2 u_2 \sin u_1 - R\kappa^2 \sin^2 u_1}{(1 - R\sin^2 u_1)} dt \\
&\qquad + \frac{\nu}{(1 - R\sin^2 u_1)} dW(t) \\
du_1 &= u_2\, dt \\
du_2 &= \frac{-2\zeta_2 u_2 - \kappa^2 \sin u_1 - 2\zeta_1 v_2 \sin u_1 - \chi^2 v_1 \sin u_1 + R u_2^2 \sin u_1 \cos u_1}{(1 - R\sin^2 u_1)} dt \\
&\qquad + \frac{\nu \sin u_1}{(1 - R\sin^2 u_1)} dW(t).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

我们看到 $du_1(t)dW(t) = 0$，因此 (2.2) 的 Itˆo 和 Stratonovich 解释相同。

令 $\mathcal{L}$ 表示由 (2.2) 给出的扩散过程 $\{(v_1(t)\ v_2(t)\ u_1(t)\ u_2(t)) :\ t \geq 0\}$ 的生成元。为简化记号，记 $U(t) = (v_1(t)\ v_2(t)\ u_1(t)\ u_2(t)) \in N$。注意到$|u_1(t)| \leq 1$，我们滥用记号，写作 $\|U(t)\| = \sqrt{v_1^2(t) + v_2^2(t) + u_2^2(t)}$。

定理 2.1. *(i)* 对于每个初始条件 $U(0) \in N$，系统 (2.2) 都有一个唯一解 $\{U(t) :\ t \geq 0\}$，且对所有 $t \geq 0$均有效。

(ii) 存在 $b > 0$，使得对于每个初始 $U(0)$，过程 $\{U(t) :\ t \geq 0\}$对无穷多个 t（当 $t \to \infty$ 时）满足条件 $\|U(t)\| \leq b$。

(iii) 存在 $\beta > 0$ 和 K，使得 (2.2) 的每个不变概率测度 π 都满足

$$\int_N \exp\bigl(\beta\|U\|^2\bigr) d\pi(U) \leq K.$$

(iv) 定理 存在 $0 < \beta \leq \beta_1$ 和 K_1，并且对于每个 $\gamma > 0$，都存在 K_2，使得 t

$$\mathbb{E}\exp\bigl(\beta\|U(t)\|^2\bigr) \leq K_1 e^{-\gamma t} \exp\left(\beta_1\|U(0)\|^2\right) + K_2$$

对于所有初始条件 $U(0) \in N$ 以及所有 $t \geq 0$。

定理 2.1 的证明见第 7 节。

注 2.1. 对 $[15, 27, 20]$ 中所讨论的梁模型进行白噪声激励的相应计算会失败，因为其中需要除以形如 $1 - R\theta^2$ 的项，而不是 $1 - R$正弦$^2\,\theta$。无法保证完整非线性系统（例如*[15,* 方程 *(4,5)],* ）存在对所有时间 $t \geq 0$ 都有效的解。

注 2.2. 假设将单摆替换为复摆，其质量为 m_2，相对于支点的转动惯量为 I，且质心到支点的距离为 d。此时运动方程为

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\ddot{y}(t)+c_1\dot{y}(t)+k_1y(t)-m_2d\big(\ddot{\theta}(t)\sin\theta(t)+\dot{\theta}^2(t)\cos\theta(t)\big)&=\Xi(t)\\ I\ddot{\theta}(t)+c_2\dot{\theta}(t)+m_2d(g-\ddot{y}(t))\sin\theta(t)&=0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

令 $\eta=y/L$ 其中 $L=I/(m_2d)$ 为复摆的有效长度，运动方程 (2.3) 可写成形式 (1.2)，其中现在 $\kappa=\sqrt{g/L}$ 是复摆的频率，而 $R:=(d/L)\cdot m_2/(m_1+m_2)<1$ 因为 $L\geq d$。

至少存在一个平稳解，即上文 (1.3,1.4) 中描述的单模态解。此外，还存在一个“非稳定单模态”解，此时摆静止在滑块正上方。该解由 (1.4) 以及 $(\theta(t),\dot{\theta}(t))=(\pi,0)$ 描述。可能存在也可能不存在其他平稳解。我们推测，其他“非线性”解是否存在取决于单模态解的稳定性。

2.1 单模态解的稳定性

为了确定单模态解的稳定性，我们研究系统沿单模态解 (1.3,1.4) 线性化后的长期行为。在 (1.2) 中令 $\eta(t)=\bar{\eta}(t)+\delta x(t)$ 且 $\theta(t)=0+\delta\varphi(t)$，并令 $\delta\to 0$，得到如下变分方程:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t)+2\zeta_1\dot{x}(t)+\chi^2x(t)&=0\\ \ddot{\varphi}(t)+2\zeta_2\dot{\varphi}(t)+\big(\kappa^2-\ddot{\bar{\eta}}(t)\big)\varphi(t)&=0,\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中 $\bar{\eta}_t$ 由 (1.4) 给出。更严格地说，沿解 $(\bar{\eta},\ \dot{\bar{\eta}},\ 0,\ 0)$ 对系统 (2.2) 进行线性化，得到关于 $(x,\ \dot{x},\ \varphi,\ \dot{\varphi})$ 的一阶系统，它等价于

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t)+2\zeta_1\dot{x}(t)+\chi^2x(t)&=0\\ \ddot{\varphi}(t)+2\zeta_2\dot{\varphi}(t)+\big(\kappa^2+2\zeta_1\dot{\bar{\eta}}(t)+\chi^2\bar{\eta}(t)\big)\varphi(t)&=\nu\varphi(t)\dot{W}(t).\end{aligned}\tag{2.5}$$

我们看到，(2.4) 中的第二行连同 (1.4) 中关于 $\bar{\eta}(t)$ 的信息，可严格解释为 (2.5) 中的第二行。

单模态解的稳定性由线性化过程 $\{(x(t),\ \dot{x}(t),\ \varphi(t),\ \dot{\varphi}(t)):\ t\geq 0\}$ 的长期行为决定。(2.5)中的顶层方程是有阻尼且无外激励的，因此 $(x(t),\ \dot{x}t))\to(0,0)$ 当 $t\to\infty$。因此，只需考虑由单模态振动 $\bar{\eta}$ 引起的 $\{(\varphi(t),\ \dot{\varphi}(t)):\ t\geq 0\}$ 的参数激励。为简化记号，我们用 η 替换 $\bar{\eta}$，并考虑过程 $\{(\varphi(t),\ \dot{\varphi}(t)):t\geq 0\}$ 的长期增长或衰减率，该过程由下式给出

$$\ddot{\eta}(t)+2\zeta_1\dot{\eta}(t)+\chi^2\eta(t)=\nu\dot{W}(t)\tag{2.6}$$

$$\ddot{\varphi}(t)+2\zeta_2\dot{\varphi}(t)+\big(\kappa^2+2\zeta_1\dot{\eta}(t)+\chi^2\eta(t)\big)\varphi(t)=\nu\varphi(t)\dot{W}(t),\tag{2.7}$$

单模态解的稳定性由(2.7)的几乎处处指数增长率决定，确切地说，该增长率表示为李雅普诺夫指数

$$\lambda := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \| (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \|. \tag{2.8}$$

我们将在推论 4.1 中看到，式 (2.8) 中的几乎必然极限存在，并且对于所有满足 (φ(0) $\dot{\varphi}$(0)) $\neq$ (0,0) 的初始条件 (η(0) $\dot{\eta}$(0) φ(0) $\dot{\varphi}$(0))，该极限都取相同的值。

注 *2.3*。本文重点讨论 λ 的适定性与求值。对 λ 的解释，尤其是对 λ 符号的解释，应结合原非线性系统 *(1.2)* 的行为来加以说明。我们猜想，如果 $\lambda < 0$，那么所有满足 *(φ(0) $\dot{\varphi}$(0))* $\neq$ *(π, 0)* 的解都会收敛到单模态解；而如果 $\lambda > 0$，那么所有满足 *(φ(0) $\dot{\varphi}$(0))* $\notin$ {*(0, 0)*，*(π, 0)*} 的解都会收敛到一个取值于 $\mathbb{R}^2 \times \big((\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}) \setminus \{$*(0, 0)*，*($\pi$, 0)*$\}\big)$ 的平稳解。特别地，如果 $\lambda < 0$，那么单模态解和不稳定单模态解是系统 *(1.2)* 的唯一平稳解；而如果 $\lambda > 0$，那么还存在一个平稳解，对所有 $t \geq 0$，它都满足 *(φ(t) $\dot{\varphi}$(t))* $\notin$ {*(0, 0)*，*(π, 0)*} 。

3 更一般的线性系统

我们对李雅普诺夫指数 (2.8) 的大部分分析和计算在更一般的情形下仍然成立。注意，(2.7) 可以改写为

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\zeta_2 \dot{\varphi}(t) + \big(\kappa^2 - \ddot{\eta}(t)\big)\varphi(t) = 0. \tag{3.1}$$

其中 η(t) 由 (2.6) 给出。我们将用更一般的ξ(t)替换广义过程 $\ddot{\eta}$(t)。

令 $\{v(t) : t \geq 0\}$ 为由下式给出的 $\mathbb{R}^d$ 值奥恩斯坦-乌伦贝克过程

$$dv(t) = Av(t)dt + BdW(t) \tag{3.2}$$

其中 A为 $d \times d$矩阵， B为 $d \times m$矩阵， $W(t)$ 是标准的 m维布朗运动。示例参见 Gardiner [11, 第 4.4] 节，或 Liberzon 和 Brockett [21]。我们将始终假设 A的特征值实部严格为负，并且 (A， B) 是一个可控对，即

$$\operatorname{rank}\{B, AB, \ldots, A^{d-1}B\} = d. \tag{3.3}$$

由于 A 的特征值实部严格为负，方程 (3.2) 存在一个平稳解

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} B dW(s)$$

具有平稳概率测度 μ，例如，该测度是均值为零的高斯分布，其协方差矩阵 R 由下式给出：

$$R_{jk} = \sum_{\ell=1}^{m} \int_{-\infty}^{0} \big(e^{-sA}Be_\ell\big)_j \big(e^{-sA}Be_\ell\big)_k ds = \int_0^\infty \big(e^{tA}BB^*e^{tA^*}\big)_{jk} dt. \tag{3.4}$$

可控对假设等价于假设 R 可逆，而这又等价于假设 $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{R}^d$。

选取 $a \in \mathbb{R}^d$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}^m$，并定义

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j v_j(t) + \sum_{\ell=1}^{m} \gamma_\ell \dot{W}_\ell(t) = \langle a, v(t) \rangle + \langle \gamma, \dot{W}(t) \rangle. \tag{3.5}$$

只需将 m 替换为 $m+1$，并在矩阵 B中添加一列零，就可以将这种情况纳入考虑： $\xi(t)$中包含一些与驱动 $v(t)$的白噪声相互独立的白噪声。采用这样的 $\xi(t)$，该方程

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\zeta_2 \dot{\varphi}(t) + \big(\kappa^2 - \xi(t)\big)\varphi(t) = 0 \tag{3.6}$$

具有明确的含义，即二阶随机微分方程

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\zeta_2 \dot{\varphi}(t) + \big(\kappa^2 - \langle a, v(t) \big)\varphi(t) = \sum_{\ell=1}^{m} \gamma_\ell \varphi(t) \dot{W}_\ell(t). \tag{3.7}$$

我们将考察李雅普诺夫指数

$$\lambda := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \| \, (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \, \|. \tag{3.8}$$

对于由 (3.2,3.7) 给出的一般系统。

Since $v(t) = \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{pmatrix}$ satisfies

$$dv(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi^2 & -2\zeta_1 \end{pmatrix} v(t)dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} dW(t). \tag{3.9}$$

and

$$\ddot{\eta}(t) = -\chi^2 \eta(t) - 2\zeta_1 \dot{\eta}(t) + \nu \dot{W}(t)$$

我们看到，系统 (2.6,2.7) 是 (3.2,3.7) 的一个特例。

4 Khas'minskii 的积分公式

定义 $u(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$，则 (3.7) 可写为二维线性随机微分方程

$$du(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa^2 + \langle a, v(t) \rangle & -2\zeta_2 \end{pmatrix} u(t)dt + \sum_{\ell=1}^{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_\ell & 0 \end{pmatrix} u(t) dW_\ell(t). \tag{4.1}$$

注意，(4.1) 的 Stratonovich 解释与 Itˆo 解释相同。遵循 Khas'minskii [18], , 令 $u(t) = \|u(t)\| \begin{pmatrix} \cos\psi(t) \\ \sin\psi(t) \end{pmatrix}$。对 (4.1) 应用 Itˆo 公式可得

$$d(\log\|u(t)\|) = Q(v(t),\psi(t))dt + \sum_{\ell=1}^{m} \gamma_\ell \sin\psi(t)\cos\psi(t) dW_\ell(t)$$

and

$$d\psi(t) = h(v(t),\psi(t))dt + \sum_{\ell=1}^{m} \gamma_\ell \cos^2\psi(t) dW_\ell(t) \tag{4.2}$$

其中

$$Q(v,\psi) = \big(1-\kappa^2+\langle a,v\rangle\big)\sin\psi\cos\psi - 2\zeta_2\sin^2\psi + \frac{\|\gamma\|^2}{2}\cos^2\psi\cos 2\psi \tag{4.3}$$

and

$$h(v,\psi) = -1 + \big(1-\kappa^2+\langle a,v\rangle\big)\cos^2\psi - 2\zeta_2\sin\psi\cos\psi - \|\gamma\|^2\sin\psi\cos^3\psi.$$

由（3.2，4.2）给出的过程 $\{(v(t)\ \psi(t)) : t \geq 0\}$ 是定义在 $M := \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 上、生成元为 $\mathcal{A}$ 的扩散过程。对于 $(\varphi(0)\ \dot\varphi(0)) \neq (0,0)$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sqrt{\varphi^2(t)+\dot\varphi^2(t)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|u(t)\| \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left[\int_0^t Q(v(s),\psi(s))ds + \sum_{\ell=1}^{m}\int_0^t \frac{\gamma_\ell}{2}\sin 2\psi(s)\, dW_\ell(s)\right]\end{aligned} \tag{4.4}$$

其含义是：在初始条件为 $(v,\varphi,\dot\varphi)$ 且 $(\varphi,\dot\varphi) \neq (0,0)$ 时，左侧极限几乎必然存在且其值确定，当且仅当在初始条件为 (v,ψ) 时，右侧极限几乎必然存在且其值确定。

由于

$$N(t) = \sum_{\ell=1}^{m}\int_0^t \frac{\gamma_\ell}{2}\sin 2\psi(s)\, dW_\ell(s)$$

是一个连续鞅，其二次变差为 $\langle N\rangle_t \leq \|\gamma\|^2 t/4$，因此可得

$$\mathbb{P}^{(v,\psi)}\left(\frac{1}{t}N(t)\to 0 \text{ as } t\to\infty\right) = 1 \tag{4.5}$$

对所有 $(v,\psi) \in M$，均成立。

命题 4.1. 假设 A 的特征值实部均严格为负，且(A, B) 是一个可控对。还假设(3.5) 中的系数 $a \in \mathbb{R}^d$ 和$\gamma \in \mathbb{R}^m$ 不同时为零。那么，扩散过程 $\{(v(t)\ \psi(t)) : t \geq 0\}$ 在 M 上具有

唯一的平稳概率测度 m，记为此，其光滑密度为 $\rho(v,\psi)$。此外，如果$F\colon M\to\mathbb{R}$ 可积，则

$$\mathbb{P}^{(v,\psi)}\left(\frac{1}{t}\int_0^t F(v(s),\psi(s))ds\to\int_M F\,dm\ \ as\ t\to\infty\right)=1 \tag{4.6}$$

对每个$(v,\psi)\in M$.

命题 4.1 的证明见第 8 节。v 关于 m 的边缘分布是 $\mathbb{R}^d$ 上的平稳概率测度 μ，它是均值为零的高斯分布，均值为零，协方差矩阵 R 由（3.4）给出。存在常数 k_0 和 k_1，使得 $|Q(v,\psi)|\le k_0+k_1\|v\|$，因此

$$\int_M|Q(v,\psi)|dm(v,\psi)\le\int_{\mathbb{R}^d}\big(k_0+k_1\|v\|\big)d\mu(v)<\infty.$$

由（4.4）和（4.5），并利用命题 4.1，可得

推论 4.1。*(i)* 在命题 *4.1* 的假设下，我们有

$$\mathbb{P}^{(v,\varphi,\dot\varphi)}\left(\frac{1}{t}\log\|(\varphi(t),\dot\varphi(t))\|\to\int_M Q\,dm\ \ as\ t\to\infty\right)=1 \tag{4.7}$$

对每个$(v,\varphi,\dot\varphi)$，其中$(\varphi,\dot\varphi)\neq(0,0)$。

(ii) 在(3.8) 中定义的李雅普诺夫指数 λ，对于所有满足$(\varphi,\dot\varphi)\neq(0,0)$ 的初始条件$(v,\varphi,\dot\varphi)$，都作为几乎必然极限存在，并且

$$\lambda=\int_M Q(v,\psi)\,dm(v,\psi). \tag{4.8}$$

4.1 求值

直接计算 (4.8) 很困难，因为我们需要先求解 $\mathcal{A}^*m=0$。当 $a=0$时，有一种简单情形，因为此时 $v(t)$ 会从 (4.1) 中消失，问题便简化为关于 $\mathbb{R}^2$ 的常系数线性随机微分方程。在这种情况下，Imkeller 和 Lederer 的精确公式 [17] 将适用。但这排除了原始的滑块-摆模型。滑块-摆情形很有意思，因为 (2.7) 中存在不同类型的噪声：白噪声 $W(t)$，以及有色噪声 $\eta(t)$ 和 $\dot\eta(t)$。

在讨论小噪声估计之前，我们先给出李雅普诺夫指数 λ的一个简单上界。

命题 4.2。假设 $\zeta_2<\kappa$，并令 $\kappa_d=\sqrt{\kappa^2-\zeta_2^2}$ 表示摆的阻尼频率。则

$$\lambda\le-\zeta_2+\frac{\sqrt{\langle a,Ra\rangle}}{2\kappa_d}+\frac{\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2}, \tag{4.9}$$

其中 R 是 协方差矩阵 (3.4)。对于原始的块与摆的设定

$$\lambda\le-\zeta_2+\frac{\nu}{2\kappa_d}\sqrt{\frac{\chi^2+4\zeta_1^2}{4\zeta_1}}+\frac{\nu^2}{2\kappa_d^2}. \tag{4.10}$$

命题 4.2 的证明使用了函数 $Q(v,\ \psi)$ 的一个略有不同的版本，详见第 9.1 节。该结果的提出受到 Ariaratnam [1] 中一个估计的启发。

5 小强迫

本节考察滑块受到小强迫的影响。具体而言，我们将$\nu \rightsquigarrow \varepsilon\nu$ 替换为较小的 ε。线性化系统 (2.6,2.7) 变为

$$\ddot{\eta}(t) + 2\zeta_1\dot{\eta}(t) + \chi^2\eta(t) = \varepsilon\nu\dot{W}(t),$$
$$\ddot{\varphi}(t) + 2\zeta_2\dot{\varphi}(t) + \big(\kappa^2 + 2\zeta_1\dot{\eta}(t) + \chi^2\eta(t)\big)\varphi(t) = \varepsilon\nu\varphi(t)\dot{W}(t).$$

等价地，记 $\eta(t)$ 为 $= \varepsilon\tilde{\eta}(t)$，然后省略波浪号

$$\ddot{\eta}(t) + 2\zeta_1\dot{\eta}(t) + \chi^2\eta(t) = \nu\dot{W}(t), \tag{5.1}$$
$$\ddot{\varphi}(t) + 2\zeta_2\dot{\varphi}(t) + \big(\kappa^2 + 2\varepsilon\zeta_1\dot{\eta}(t) + \varepsilon\chi^2\eta(t)\big)\varphi(t) = \varepsilon\nu\varphi(t)\dot{W}(t). \tag{5.2}$$

对于第3节中的更一般问题，我们将 (3.6) 中的 $\xi(t) \rightsquigarrow \varepsilon\xi(t)$，即 $a \rightsquigarrow \varepsilon a$和 $\gamma \rightsquigarrow \varepsilon\gamma$，替换为，从而得到方程

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\zeta_2\dot{\varphi}(t) + \big(\kappa^2 - \varepsilon\langle a, v(t)\rangle\big)\varphi(t) = \sum_{\ell=1}^{m} \varepsilon\gamma_\ell\varphi(t)\dot{W}_\ell(t) \tag{5.3}$$

其中，$\{v(t)\colon\ t \geq 0\}$ 仍由 (3.2) 给出。现在定义李雅普诺夫指数

$$\lambda(\varepsilon) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \| \, (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \, \|. \tag{5.4}$$

其中，$\{\varphi(t)\colon\ t \geq 0\}$ 由 (5.3) 给出。

将 A 的矩阵值余弦变换定义为

$$\widehat{S}_A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{tA}\cos\omega t \, dt, \tag{5.5}$$

并回顾一下，R 表示平稳概率测度 μ的协方差矩阵，其中 $\{v(t) : t \geq 0\}$。

定理 5.1。*(i)* 假设 A 的特征值实部严格为负，且 (A, B) 是一个可控对。假设 $\zeta_2 < \kappa$，并令 $\kappa_d = \sqrt{\kappa^2 - \zeta_2^2}$ 表示摆的阻尼频率。对于 $\{\varphi(t) : t \geq 0\}$，由 (5.3) 给出，我们有

$$\lambda(\varepsilon) = -\zeta_2 + \varepsilon^2\lambda_2(2\kappa_d) + O(\varepsilon^4) \qquad as\ \varepsilon \to 0. \tag{5.6}$$

其中

$$\lambda_2(\omega) = \frac{\pi}{\omega^2}\Big(\langle a, \widehat{S}_A(\omega)Ra\rangle + \langle a, \widehat{S}_A(\omega)B\gamma\rangle + \frac{\|\gamma\|^2}{2\pi}\Big). \tag{5.7}$$

(ii) 此外，给定矩阵 A 和 B 以及向量 a 和 γ，当 κ_d 远离 *0* 且 ∞时，渐近式 (5.6) 是一致的。也就是说，给定 A、B、a、γ 和 $0 < c_1 < c_2 <\infty$，存在 K 使得

$$\Big|\lambda(\varepsilon) + \zeta_2 - \varepsilon^2\lambda_2(2\kappa_d)\Big| \leq K\varepsilon^4 \tag{5.8}$$

当 $0 < \varepsilon \leq 1$ 和 $c_1 \leq \kappa_d \leq c_2$ 时。

定理 5.1 的证明见第 9 节。

注意到，当阻尼频率 κ_d 使函数 $\lambda_2(2\omega)$ 取得最大值时，噪声的失稳效应最强。我们将在第 6 节进一步阐述这一观察结果。

5.1 $\lambda_2(\omega)$的求值

在特殊情况下，当 $a = 0$ 时，有 $\lambda_2(\omega) = \|\gamma\|^2/(2\omega^2)$，从而得到 Auslender 和 Milstein [3] 的结果，即

$$\lambda(\varepsilon) = -\zeta_2 + \frac{\varepsilon^2\|\gamma\|^2}{8\kappa_d^2} + O(\varepsilon^4) \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

但是，当 $a \neq 0$ 时，我们需要进行一些处理，以化简 $\lambda_2(\omega)$ 的公式 (5.7)。$\widehat{}$协方差矩阵 R 由 (3.4) 确定。式 (5.5) 中定义的余弦变换 $S_A(\omega)$ 满足

$$\widehat{S}_A(\omega) = \frac{1}{\pi}\Re\Big(\int_0^\infty e^{tA}e^{-i\omega t}\,dt\Big) = -\frac{1}{\pi}\Re\Big((A - i\omega I_d)^{-1}\Big). \tag{5.9}$$

因此，给定矩阵 A 和 B 以及向量 a 和 γ 后，(5.7) 中的所有项都可以计算出来。

我们将用功率谱密度给出 $\lambda_2(\omega)$ 的公式。回顾一下，对于任意L^2 平稳零均值标量过程 $X(t)$，其功率谱密度函数 S_X 定义为

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{E}[X(t)X(0)]e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathbb{E}[X(t)X(0)]\cos\omega t\,dt. \tag{5.10}$$

我们注意到，许多作者省略了因子 $1/2\pi$。

块与摆的设定包含 $\xi(t) = \ddot{\eta}(t)$，其中 $\dot{\eta}(t)$ 是一个定义良好的平稳过程。第一个结果将这一情形扩展到第3节的一般系统。

固定 $\alpha \in \mathbb{R}^d$，并定义 $\xi(t) = \dot{V}(t)$，其中 $V(t) = \langle\alpha, v(t)\rangle$。由于

$$\xi(t) = \langle\alpha, \dot{v}(t)\rangle = \langle\alpha, Av(t)\rangle + \langle\alpha, B\dot{W}(t)\rangle = \langle A^*\alpha, v(t)\rangle + \langle B^*\alpha, \dot{W}(t)\rangle, \tag{5.11}$$

我们有式 (3.5)，其中 $a = A^*\alpha$ 和 $\gamma = B^*\alpha$。注意，$V(t)$ 是一个定义良好的平稳过程，因此它具有定义良好的自协方差函数 $\mathbb{E}[V(t)V(0)]$，进而根据公式 (5.10) 得到定义良好的功率谱密度 $S_V(\omega)$。

命题 5.1. 对于由 *5.11* 给出的 ξ，我们有

$$\lambda_2(\omega) = \pi S_V(\omega). \tag{5.12}$$

对于原始的方块与摆情形，取特定参数后，我们有 $\xi(t) = \ddot{\eta}(t) = \dot{v}_2(t)$，其中 $v(t) = \begin{pmatrix}\eta(t)\\ \dot{\eta}(t)\end{pmatrix}$ 如式 (3.9) 所示。因此，我们可以应用命题 5.1，其中 $V(t) = v_2(t) = \dot{\eta}(t)$。对于系统 (3.9)，其功率谱密度 $S_{\dot{\eta}}(w)$ 是众所周知的，参见例如 [11, 第 4 节4]。

推论 5.1. 对于由 *2.6* 给出的 $\xi = \ddot{\eta}$，我们有

$$\lambda_2(\omega) = \pi S_{\dot{\eta}}(\omega) = \frac{\omega^2\nu^2}{2[(\chi^2-\omega)^2 + 4\zeta_1^2\omega^2]}. \tag{5.13}$$

在一般情形（3.5）下，当 $\xi(t) = \langle a, v(t)\rangle + \langle \gamma, W(t)\rangle$ 且 $\gamma \neq 0$ 时，ξ不是定义良好的 L^2 过程。它没有自协方差函数，因此功率谱密度的公式（5.10）不适用。然而，我们可以考虑 ξ的光滑化版本 ξ_δ 的功率谱密度 $S_{\xi_\delta}(\omega)$。

设 $\psi\colon\ \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 在 $[-1,1]$ 中具有支撑集，且 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt = 1$。定义 $\psi_\delta(t) = (1/\delta)\psi(t/\delta)$。对于任意连续函数 f，我们有

$$f_\delta(t) := f * \psi_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\psi_\delta(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\delta u)\psi(u)du \to f(t) \tag{5.14}$$

当 $\delta \to 0$ 时，因此函数 $\psi_\delta(t-\cdot)$ 收敛于 t 处的狄拉克δ分布。于是，将 ξ_δ 非正式地定义为 $\xi * \psi_\delta$，并严格定义为

$$\xi_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle a, v(s)\rangle\psi_\delta(t-s)ds + \left\langle \gamma, \int_{-\infty}^{\infty}\psi_\delta(t-s)dW(s)\right\rangle \tag{5.15}$$

定义良好的 L^2 过程，并且它在弱意义下收敛于广义过程 ξ。

命题 5.2。 对于 $\xi(t) = \langle a, v(t)\rangle + \langle \gamma, W(t)\rangle$ 和 $\xi_\delta(t)$ 由 (5.15) 给出的极限

$$\lim_{\delta\to 0} S_{\xi_\delta}(\omega) = \langle a, \widehat{S}_A(\omega)Ra\rangle + \langle a, \widehat{S}_A(\omega)B\gamma\rangle + \frac{\|\gamma\|^2}{2\pi} \tag{5.16}$$

存在且不　依赖于 ψ 的选择。定义 $S_\xi(\omega)\colon = \text{极限}_{\delta\to 0}\, S_{\xi_\delta}(\omega)$ 我们有　e

$$\lambda_2(\omega) = \frac{\pi}{\omega^2}S_\xi(\omega). \tag{5.17}$$

命题5.1和5.2的证明见第 9 节。

6 小强迫和小摆的阻尼

本节考虑滑块的小强迫与摆的小阻尼的联合作用。具体而言，我们将

$$\nu \rightsquigarrow \varepsilon\nu \quad \text{and} \quad \zeta_2 \rightsquigarrow \varepsilon^2\zeta_2$$

对于较小的 ε。φ 的方程现在为

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\varepsilon^2\zeta_2\dot{\varphi}(t) + \big(\kappa^2 + 2\varepsilon\zeta_1\dot{\eta}(t) + \varepsilon\chi^2\eta(t)\big)\varphi(t) = \varepsilon\nu\varphi(t)\dot{W}(t) \tag{6.1}$$

对于原始的块与摆的设定，以及

$$\ddot{\varphi}(t)+2\varepsilon^{2}\zeta_{2}\dot{\varphi}(t)+\big(\kappa^{2}-\varepsilon\langle a,v(t)\rangle\big)\varphi(t)=\sum_{\ell=1}^{m}\varepsilon\gamma_{\ell}\varphi(t)\dot{W}_{\ell}(t) \tag{6.2}$$

在一般情形下。为了将这种尺度与第5节中的前一种区分开来，我们写作

$$\widehat{\lambda}(\varepsilon):=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|\,(\varphi(t),\dot{\varphi}(t))\,\|. \tag{6.3}$$

对于李雅普诺夫指数，其中 $\{\varphi(t):t\geq 0\}$ 由 (6.2) 给出。

定理6.1。 假设 A 的特征值实部严格为负，且 (A,B) 是一个可控对。对于由 (6.2) 给出的过程 $\big\{\big(\varphi(t)\ \dot{\varphi}(t)\big):\ t\geq 0\big\}$，我们有

$$\widehat{\lambda}(\varepsilon)=\varepsilon^{2}\big(-\zeta_{2}+\lambda_{2}(2\kappa)\big)+O(\varepsilon^{4})\qquad as\ \varepsilon\to 0. \tag{6.4}$$

其中 $\lambda_{2}(\omega)$ 由 (5.7) 给出。

证明。 (6.2) 的阻尼频率为 $\kappa_{d}=\sqrt{\kappa^{2}-\varepsilon^{4}\zeta_{2}^{4}}=\kappa+\overline{O(\varepsilon^{4})}$，因此 $\lambda_{2}(2\kappa_{d})=\lambda_{2}(2\kappa)+O(\varepsilon^{4})$。结论现在可直接由定理5.1(ii)得出。 □

回到原始的方块与摆情形，并使用 (5.13)，可得

$$\widehat{\lambda}(\varepsilon)=\varepsilon^{2}\left(-\zeta_{2}+\frac{2\nu^{2}\kappa^{2}}{(\chi^{2}-4\kappa^{2})^{2}+16\zeta_{1}^{2}\kappa^{2}}\right)+O(\varepsilon^{4})\qquad \text{as } \varepsilon\to 0. \tag{6.5}$$

回顾一下，过程 $\big\{\big(\varphi(t)\ \dot{\varphi}(t)\big):t\geq 0\big\}$ 的长期指数增长或衰减率由李雅普诺夫指数 $\widehat{\lambda}(\varepsilon)$ 给出。将 $\widehat{\lambda}(\varepsilon)=0$ 代入 (6.5)，即可得到以激励强度 ν 表示的几乎必然稳定性边界。因此，几乎必然稳定边界的二阶近似为

$$\nu_{c}^{2}=\frac{\zeta_{2}\big[(\chi^{2}-4\kappa^{2})^{2}+16\zeta_{1}^{2}\kappa^{2}\big]}{2\kappa^{2}}=\zeta_{2}\left(\frac{(\chi^{2}-4\kappa^{2})^{2}}{2\kappa^{2}}+8\zeta_{1}^{2}\right). \tag{6.6}$$

显然，主系统（ζ_{1}）和次系统（ζ_{2}）中的耗散均对单模态解具有稳定作用。虽然在线性化系统的分析中并未特别关注 1:2共振，但稳定性边界 (6.6) 表明，内共振 $\chi\approx 2\kappa$ 对确定（κ，ν）参数空间中的不稳定区域具有重要意义，这在应用中尤为重要。对于固定的 χ、ζ_{1} 和 ζ_{2}，临界噪声强度 ν_{c} 是 κ 的函数，其最小值为 $\sqrt{8\zeta_{1}^{2}\zeta_{2}}$，在 $\kappa=\chi/2$ 时取得。图2展示了在 $\chi=1$ 和 $\zeta_{2}=1$ 条件下，ν_{c} 随 κ 的变化，其中 $\zeta_{1}=0.02$ 为 0.2、0.4 和 0.7。

图2中展示的行为类似于马蒂厄方程在具有线性黏性阻尼和余弦周期激励时，其稳定性图中的不稳定舌和转迁曲线。更具体地说，该方程

$$\ddot{\varphi}(t)+2\varepsilon\zeta_{2}\dot{\varphi}(t)+(\kappa^{2}-\varepsilon\nu\cos\omega t)\varphi(t)=0 \tag{6.7}$$

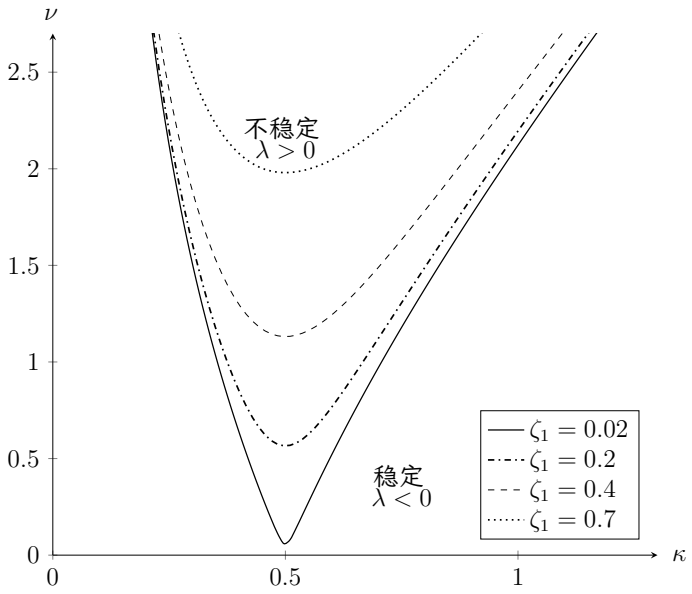

图2： $\chi = 1$ 和 $\zeta_2 = 1$ 以及 $\zeta_1 = 0.02$分别为 0.2、0.4 和 0.7 时的几乎必然稳定性边界。

在周期性强迫 $\varepsilon\nu$ 较小、耗散 $\varepsilon\zeta_2$ 较小时，其稳定性边界的一阶近似（当$\varepsilon \to 0$时）为

$$\varepsilon^2(\nu_c^2 - 16\zeta_2^2) = \omega^2 \left(\frac{4\kappa^2}{\omega^2} - 1 \right)^2 . \tag{6.8}$$

参见 Verhulst [31, 第 241] 页中关于 $\omega = 2$的情形。注意，在确定性情形下，阻尼与强迫处于同一阶 ε 。图 3 展示了 ν_c 作为 κ 的函数，并取$\omega = 1$、 $\zeta_2 = 0.1$ 和 $\varepsilon = 0.2$ 分别为 0.1 和 0.05。注意，在该模型中，随着 ε 减小，不稳定区域的“宽度”也会减小。

将自参数系统中的白噪声激励替换为周期性（确定性）强迫，可以得到更直接相关的比较。考虑系统

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}(t) + 2\zeta_1\dot{\eta}(t) + \chi^2\eta(t) - R\big(\ddot{\theta}(t)\sin\theta(t) + \dot{\theta}^2(t)\cos\theta(t)\big) &= \varepsilon\nu\cos\omega t \\ \ddot{\theta}(t) + 2\varepsilon\zeta_2\dot{\theta}(t) + \big(\kappa^2 - \ddot{\eta}(t)\big)\sin\theta(t) &= 0, \end{aligned} \tag{6.9}$$

在频率为 ω 且强度较小 $\varepsilon\nu$的强迫，以及摆的阻尼较小 $\varepsilon\zeta_2$的情况下，沿着单模态解 $\theta(t) \equiv 0$ 进行线性化，我们得到

$$\ddot{\eta}(t) + 2\zeta_1\dot{\eta}(t) + \chi^2\eta(t) = \varepsilon\nu\cos\omega t \tag{6.10}$$

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\varepsilon\zeta_2\dot{\varphi}(t) + \big(\kappa^2 - \ddot{\eta}(t)\big)\varphi(t) = 0. \tag{6.11}$$

(6.10) 的平稳解为

$$\eta(t) = \frac{\varepsilon\nu}{\sqrt{(\chi^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\omega^2}} \cos(\omega t + \alpha)$$

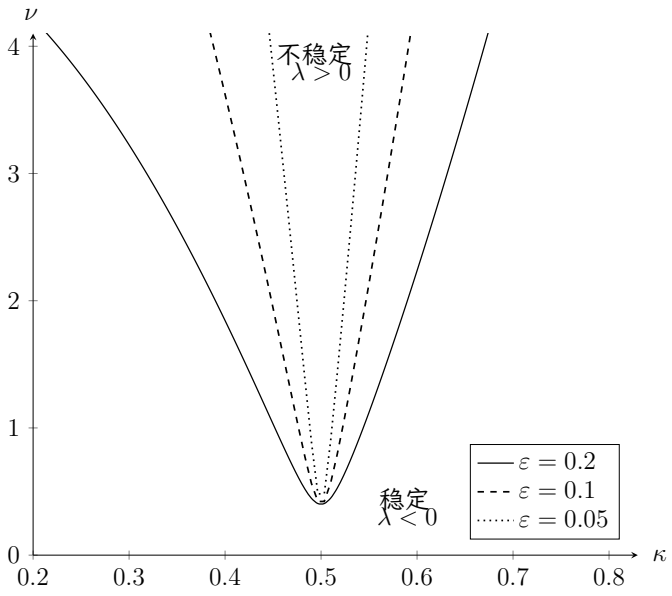

图 3：当 $\omega = 1$、$\zeta_2 = 0.1$ 和 $\varepsilon = 0.2$、0.1 及 0.05 时，马蒂厄方程 (6.7) 的几乎必然稳定性边界。

其中 $\alpha = \arg(\chi^2 - \omega^2 + 2i\zeta_1\omega)$，因此

$$\ddot{\eta}(t) = \frac{\varepsilon\omega^2\nu}{\sqrt{(\chi^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\omega^2}}\cos(\omega t + \alpha + \pi).$$

因此，(6.11) 具有马蒂厄方程 (6.7) 的形式，其中以 $\dfrac{\omega^2\nu}{\sqrt{(\chi^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\omega^2}}$ 替换 ν。

相位变化 $\pi+\alpha$ 不影响稳定性，而（一阶）稳定性边界为

$$\varepsilon^2\left(\frac{\omega^4\nu_c^2}{(\chi^2-\omega^2)^2 + 4\zeta_1^2\omega^2} - 16\zeta_2^2\right) = \omega^2\left(\frac{4\kappa^2}{\omega^2} - 1\right)^2. \tag{6.12}$$

对纵坐标作乘法变换，可将图 3 所示马蒂厄方程 (6.7) 的稳定区域转换为周期受迫自参数系统 (6.10,6.11) 的相应区域。

注 6.1。对于周期性强迫系统 *(6.10,6.11)*，函数 $\eta(t)$ 与 $\ddot{\eta}(t)$之间只差一个简单的乘法因子。将 $\nu\cos\omega t$ 作为作用于滑块的强迫，还是假定它描述支点的运动，在理论上几乎没有区别。随机激励的情形则截然不同。对于白噪声激励 $\{\eta(t) : t \geq 0\}$ 是一个具有连续样本路径的 L^2 过程，而 $\{\ddot{\eta}(t) : t \geq 0\}$ 仅作为广义过程存在，必须通过随机积分来解释。

7 定理 2.1 的证明

7.1 Lyapunov 函数的构造

归一化后，滑块-摆系统的能量为

$$E(v_1,v_1,u_1,u_2)=\frac{1}{2}v_2^2+\frac{1}{2}Ru_2^2-Rv_2u_2\sin u_1+\frac{1}{2}\chi^2v_1^2+R\kappa^2(1-\cos u_1). \tag{7.1}$$

引理 7.1。

$$\mathcal{L}E(v_1,v_1,u_1,u_2)=-2\zeta_1v_2^2-2R\zeta_2u_2^2+\frac{\nu^2}{2(1-R\sin^2u_1)}.$$

$$\mathcal{L}\Big(v_1(v_2-Ru_2\sin u_1)\Big)=v_2^2-Rv_2u_2\sin u_1-2\zeta_1v_1v_2-\chi^2v_1^2.$$

证明。 这是直接计算所得。 □

对于稍后选取的 α，定义

$$F(v_1,v_2,u_1,u_2)=E(v_1,v_1,u_1,u_2)+\alpha\Big(v_1(v_2-Ru_2\sin u_1)\Big). \tag{7.2}$$

命题 7.1。 *(i)* 存在 $\alpha>0$ 和正常数 c_1、...、c_5，使得

$$c_1\|(v_1,v_2,u_2)\|^2\le F(v_1,v_2,u_1,u_2)\le c_2+c_3\|(v_1,v_2,u_2)\|^2 \tag{7.3}$$

and

$$\mathcal{L}F(v_1,v_2,u_1,u_2)\le c_4-c_5\|(v_1,v_2,u_2)\|^2. \tag{7.4}$$

(ii) 对于 *(i)* 中的 $\alpha>0$，存在 $\beta_0>0$，使得对于所有 $\gamma>0$，都存在 c_6，使得

$$\mathcal{L}(e^{\beta_0F(v_1,v_2,u_1,u_2)})\le-\gamma e^{\beta_0F(v_1,v_2,u_1,u_2)}+c_6. \tag{7.5}$$

证明。 (i) 多次应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{R}}{2}(v_2^2+Ru_2^2)+\frac{1}{2}\chi^2v_1^2-\alpha\Big(v_1^2+\frac{1}{2}v_2^2+\frac{1}{2}R^2u_2^2\Big)\\ \le F(v_1,v_2,u_1,u_2)\\ \le R\kappa^2+\frac{1+\sqrt{R}}{2}(v_2^2+Ru_2^2)+\frac{1}{2}\chi^2v_1^2+\alpha\Big(v_1^2+\frac{1}{2}v_2^2+\frac{1}{2}R^2u_2^2\Big).\end{aligned}$$

因此，当 $0<\alpha<\min(1-\sqrt{R},\chi^2/2)$ 时，F 的上下界均成立。类似地，利用引理 7.1，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}F(v_1,v_2,u_1,u_2)&\le\frac{\nu^2}{2(1-R)}-2\zeta_1v_2^2-2R\zeta_2u_2^2+\alpha\Big(v_2^2+R|v_2u_2|+2\zeta_1|v_1v_2|-\chi^2v_1^2\Big)\\ &\le\frac{\nu^2}{2(1-R)}-2\zeta_1v_2^2-2R\zeta_2u_2^2+\frac{\alpha}{2}\Big((2+R+\frac{4\zeta_1^2}{\chi^2})v_2^2+Ru_2^2-\chi^2v_1^2\Big).\end{aligned}$$

现在只需选择足够小的 α，即可得到 $\mathcal{L}F$ 的上界。

(ii) 令 Γ 表示与 $\mathcal{L}$相关联的 carr´e du champ 算子，参见例如 [5]。由于 $\partial F/dv_2$ 和 $\partial F/du_2$ 关于 ‖的增长至多为线性（v_1， v_2， u_2），且式（2.2）中 dW（t）的系数有界，因此存在 c_7 使得 Γ（F， F） $\leq c_7\|$（v_1， v_2， u_2）$\|^2$。于是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(e^{\beta_0 F}\right) &= \Big(\beta_0\mathcal{L}F + \beta_0^2\Gamma(F,F)\Big)e^{\beta_0 F}\\ &\leq \Big(\beta_0(c_4 - c_5\|(v_1,v_2,u_2)\|^2) + \beta_0^2 c_7\|(v_1,v_2,u_2)\|^2\Big)e^{\beta_0 F}\\ &= \Big(\beta_0 c_4 - \beta_0(c_5 - \beta_0 c_7)\|(v_1,v_2,u_2)\|^2\Big)e^{\beta_0 F}.\end{aligned}$$

选择 $\beta_0 > 0$ 使得 $\beta_0 c_7 < c_5$。对于每个 $\gamma > 0$，存在一个半径 r，使得若 ‖（v_1， v_2， u_2）‖ $\geq r$，则 $\mathcal{L}$（$e^{\beta_0 F}$） $\leq -\gamma e^{\beta_0 F}$；当然， $\mathcal{L}$（$e^{\beta_0 F}$）在集合 ‖（v_1， v_2， u_2）‖ $\leq r$中有界。 □

7.2 Lyapunov 函数的推论

回顾记号 $(v_1, v_2, u_1, u_2) = U \in N$ 以及记号的滥用 $\|(v_1, v_2, u_2)\| = \|U\|$。固定 α 和 β，使得命题 7.1 对函数 F 的结论成立。

定理 *2.1(i)* 的证明。(2.2) 的系数局部 Lipschitz 连续，因此存在良定义的局部解。命题 7.1 表明 $F(U) \to \infty$ 当 $\|U\| \to \infty$ 时成立，并且存在c，使得对所有 U， $\mathcal{L}(1+F)(U) \leq c(1+F)(U)$。Khas'minskii 的结果 [19, 定理 3.5] 表明，良定义的局部解对所有时间均存在，且是一个 Feller 过程。定理 *2.1(ii)* 的证明。注意，如果 $0 < c < c_5$ 和 $d = c_4 + c$ 且 $b^2 = (c_4)/(c_5 - c)$，那么

$$\mathcal{L}F(U) \leq c_4 - c_5\|U\|^2 \leq -c(1 + \|U\|^2) + d1_{\|U\|\leq b}$$

这给出了 Meyn 和 Tweedie 的条件 (CD2) [22]。由 [22, 定理 4.3(i)] 可知， $\mathbb{P}(\|U_t\| \leq b$ 对某个 $t \geq \delta) = 1$ 对所有初始条件 $U(0)$ 及所有 $\delta > 0$均成立。定理 *2.1(iii)* 的证明。(7.5) 中的不等式表明， $e^{\beta_0 F}$ 满足 [22]的条件 (CD2)。取 $\beta = c_1\beta_0$，并在第一个不等式中使用 (7.3)，再对第二个不等式使用 [22, 定理 4.3(ii)]，可得

$$\int_N \exp\big(\beta\|U\|^2\big)d\pi(U) \leq \int_N \exp\big(\beta_0 F(U)\big)d\pi(U) \leq \frac{c_6}{\gamma}$$

对于 (2.2) 的每个不变概率测度 π。

定理 *2.1(iv)* 的证明。函数 $e^{\beta_0 F}$ 也满足 [22], 的条件 (CD3)，因此根据 [22, 定理 6.1]证明中的计算，可得

$$\mathbb{E}[e^{\beta_0 F(U_t)}] \leq e^{-\gamma t}e^{\beta_0 F(U)} + \frac{c_6}{\gamma}.$$

只需使用 (7.3) 中给出的 $F(U)$ 的上下界即可。我们有$\beta = c_1\beta_0$ 和 $\beta_1 = c_3\beta_0$ 和 $K_1 = e^{c_2\beta_0}$。 □

8 命题4.1的证明

由 (3.2,4.2) 给出的过程 $\{(v(t)\ \psi(t))$ 在 $M := \mathbb{R}^d \times R/(2\pi\mathbb{Z})$ 上的生成元 $\mathcal{A}:\ t \in \mathbb{R}\}$ 可写成 H¨ormander 形式

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{m} V_\ell^2 + V_0$$

其中，向量场 V_0，V_1，$\dots V_m$ 由下式给出

$$V_0(v,\psi) = \begin{pmatrix} Av \\ -1 + (1-\kappa^2 + \langle a, v\rangle)\cos^2\psi - \zeta_2 \sin 2\psi \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad V_\ell(\theta, v) = \begin{pmatrix} Be_\ell \\ \gamma_\ell \cos^2\psi \end{pmatrix}$$

对于 $1 \le \ell \le m$。

8.1 次椭圆性

设 $L = L(V_0,\ V_1,\ \dots,\ V_m)$ 为由向量场 $V_0,\ V_1,\ \dots,\ V_m$生成的李代数，并设 $L_0 = L_0(V_0;$ $V_1,\ \dots,\ V_m)$ 为 L 中由 $V_1,\ \dots,\ V_m$生成的理想。

对于 M 上的任意光滑向量场 V，记 $\mathcal{M}(V)$ 为李括号

$$\mathcal{M}(V) = [V, V_0],$$

因此，$-\mathcal{M}$ 表示关于V_0对向量场取李导数的运算。

引理 8.1。*(i)* 对所有的 $k \ge 0$ 和 $1 \le \ell \le m$

$$\mathcal{M}^k(V_\ell)(v,\psi) = \begin{pmatrix} A^k B e_\ell \\ f_{kl}(v,\psi) \end{pmatrix}$$

对于某个光滑函数 $f_{kl}: M \to \mathbb{R}$。

(ii) 对于形如 $V(v,\psi) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$的向量场，我们有

$$\mathcal{M}(V)(v,\psi) = \begin{pmatrix} Av_0 \\ \langle a, v_0\rangle \cos^2\psi \end{pmatrix}.$$

（*iii*）对于形式为 $V(v,\psi) = \begin{pmatrix} v_0 \\ \alpha \end{pmatrix}\cos^2\psi$ 的向量场，我们有

$$[\mathcal{M}(V), V](v,\psi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha^2\cos^2\psi \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad [\mathcal{M}^2(V), \mathcal{M}(V)](v, \pm\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

证明。（i）和（ii）的计算简单直接。（iii）的计算较长，但仍然简单直接。细节从略。 □

命题 8.1。 假设 $a \in \mathbb{R}^d$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}^m$ 不同时为 0。另假设 (A, B)是一个可控对。那么，对于所有 $(v, \psi) \in M$， $\mathcal{L}_0(v, \psi) = T_{(v,\psi)}M$。

证明。 若 $\gamma \neq 0$，则选择 ℓ_0 使得 $\gamma_{\ell_0} \neq 0$，并考虑有限子集

$$\{\mathcal{M}^k(V_\ell) : 0 \le k \le d-1, 1 \le \ell \le m\} \cup \{[\mathcal{M}(V_{\ell_0}), V_{\ell_0}],\, [\mathcal{M}^2(V_{\ell_0}), \mathcal{M}(V_{\ell_0})]\} \equiv \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2,$$

例如，取自 $\mathcal{L}_0$。根据引理 8.1(i)，在每个 (v, ψ) 处，向量场 $\mathcal{N}_1$ 的 v 分量构成集合 $\{A^k B e_\ell : 0 \le k \le d-1, 1 \le \ell \le m\}$；由于满足可控对条件，该集合张成 $\mathbb{R}^d$。根据引理 8.1(iii)，取 $V = V_{\ell_0}$，在每个 (v, ψ) 处，向量场 $\mathcal{N}_2$ 张成 $\{0\} \times \mathbb{R}$。集合 $(\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)(v, \psi)$ 合在一起张成 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = T_{(v,\psi)}M$。

若 $\gamma = 0$和 $a \neq 0$，可控对条件意味着存在 $k_0 \ge 0$ 和$1 \le \ell_0 \le m$，使得 $\langle a, A^k B e_{\ell_0} \rangle = 0$ 对 $0 \le k < k_0$和 $\langle a, A^{k_0} B e_{\ell_0} \rangle \neq 0$成立。根据引理 8.1(ii)，我们有 $\mathcal{M}^k(V_{\ell_0})(v, \psi) = \begin{pmatrix} A^k B e_{\ell_0} \\ 0 \end{pmatrix}$ 对 $k \le k_0$ 和

$$\mathcal{M}^{k_0+1}(V_{\ell_0})(v, \psi) = \begin{pmatrix} A^{k_0+1} B e_{\ell_0} \\ \langle a, A^{k_0} B e_{\ell_0} \rangle \cos^2 \psi \end{pmatrix}.$$

由于 $\langle a, A^{k_0} B e_{\ell_0} \rangle \neq 0$，我们可以在上文的 $\mathcal{N}_2$ 中用 $\mathcal{M}^{k_0+1}(V_{\ell_0})$ 替换 V_{ℓ_0}。我们可以对 $V = \mathcal{M}^{k_0+1}(V_{\ell_0})$ 应用引理 8.1(iii)，这样新 $\mathcal{N}_2$ 中的向量场张成 $\{0\} \times \mathbb{R}$，证明过程与前面相同，至此得证。 □

8.2 可控性

引理 8.2. 固定 $t > 0$ 和分段连续的 $c : [0, t] \to \mathbb{R}$，其中 c 不恒等于零。对于所有 ψ_0 和 ψ_1，存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得由下式给出的路径 $\psi : [0, t] \to \mathbb{R}$

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = -1 + \big(1 - \kappa^2 + \alpha c(s)\big) \cos^2 \psi(s) - \zeta_2 \sin 2\psi(s), \quad 0 \le s \le t \tag{8.1}$$

满足 $\psi(0) = \psi_0$ 等于 $\psi(t) = \psi_1$ 模 2π。

证明. 通过改变 c 和 α的符号，我们可以假设存在一个子区间 $[t_0, t_1] \subset [0, t]$ 和 $\delta > 0$，使得对于 $t_0 \le s \le t_1$， $c(s) \le -\delta$。如果 $\beta > \zeta_2^2 - 1$，那么.....的右侧

$$\frac{d\tilde{\psi}(s)}{ds} = -1 - \beta \cos^2 \tilde{\psi}(s) - \zeta_2 \sin 2\tilde{\psi}(s), \quad t_0 \le s \le t_1 \tag{8.2}$$

永远不会为零。分离变量并积分，得到

$$\arctan\left(\frac{\tan \tilde{\psi}(s) + \zeta_2}{\sqrt{\beta + 1 - \zeta_2^2}}\right) = -\big(\sqrt{\beta + 1 - \zeta_2^2}\big) s + \text{ constant}.$$

~ ~从 $\psi = \pi/2$ 到 $\psi = -\pi/2$（或反向）会使左侧改变 π，因此 $\tilde{\psi}$ 移动距离 π 所需的时间为 $\pi/\sqrt{\beta + 1 - \zeta_2^2}$。因此，当 $\beta \to \infty$时，$\tilde{\psi}(t_1) - \tilde{\psi}(t_0) \to -\infty$；进而通过比较可得，当 $\alpha \to \infty$ 时，$\psi(t_1) - \psi(t_0) \to -\infty$。

由于只要 $\psi(s) \equiv \pi/2 \mod \pi$，(8.1) 的右侧就为负，因此在任意子区间 $[t_2, t_3]$ 上，我们有 $\psi(t_3) - \psi(t_2) \leq \pi$。因此

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \psi_0 + \Big(\psi(t_0) - \psi(0)\Big) + \Big(\psi(t_1) - \psi(t_0)\Big) + \Big(\psi(t) - \psi(t_1)\Big) \\ &\leq \psi_0 + 2\pi + \Big(\psi(t_1) - \psi(t_0)\Big) \to -\infty\end{aligned}$$

当 $\alpha \to \infty$时。由于 $\psi(t)$ 关于 α连续，根据介值定理可知，$\psi(t)$ 对无穷多个 α 取形如 $2\pi n + \psi_1$ 的值，当 $\alpha \to \infty$时，结论得证。

□

命题 8.2。假设 $a \in \mathbb{R}^d$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}^m$ 不同时为 0。还假设 (A, B)是一个可控对。给定 M 中的 (v_0, ψ_0) 和 $t > 0$ 中的 (v_1, ψ_1)，存在一个分段连续函数：$[0, t] \to \mathbb{R}^m$，使得由下式定义的路径 p: $[0, t] \to M$

$$\frac{dp(s)}{ds} = V_0(p(s)) + \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell(s) V_\ell(p(s)), \quad 0 \leq s \leq t \tag{8.3}$$

满足 $p(0) = (v_0, \psi_0)$ 具有 $p(t) = (v_1, \psi_1)$。

证明。可控对条件使我们能够控制路径的 v 分量。存在一条控制路径 p_1，例如，它在时间区间 $[0, t/3]$ 内将 v_0 送至 0。对于某个 $\psi_2 \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$，它将 (v_0, ψ_0) 送至 $(0, \psi_2)$。此外还存在一条控制路径 p_2，例如，它在时间区间 $[2t/3, t]$ 内将 0 送至 v_1。它在 $\mathbb{R}^2$ 上诱导一个可逆线性映射，因此存在 $\psi_3 \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$，使得 p_2 将 $(0, \psi_3)$ 送至 (v_1, ψ_1)。只需再找到一条在中间区间 $[t/3, 2t/3]$ 内将 $(0, \psi_2)$ 送至 $(0, \psi_3)$ 的路径。等价地，我们看到，只需证明特殊情形 $v_0 = v_1 = 0$ 下的命题 8.2。

首先假设 $\gamma = 0$ 和 $a \neq 0$。可控对条件意味着存在$1 \leq \ell \leq m$ 和 $0 < t_0 < t$，使得 $\langle a, e^{sA} B e_\ell \rangle \neq 0$ 对于 $0 < s \leq t_0$成立。对于分段连续的 b：$[0, t] \to \mathbb{R}$，选取控制函数 $s \mapsto b(s) e_\ell$。式 (8.3) 的 v 分量为

$$\frac{dv(s)}{ds} = Av(s) + b(s) B e_\ell, \quad v(0) = 0$$

其解为

$$v(t) = \int_0^t b(s) \Big(e^{(t-s)A} B e_\ell \Big) ds.$$

为了满足 $v(t) = 0$，我们要求

$$\int_0^t b(s) \Big(e^{(t-s)A} B e_\ell \Big)_i ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, d. \tag{8.4}$$

(8.3) 的 ψ 分量为

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = -1 + (1 - \kappa^2 + \langle a, v(s)\rangle)\cos^2\psi(s) - \zeta_2 \sin 2\psi(s).$$

由于

$$\langle a, v(s)\rangle = \int_0^s b(r)\langle a, e^{(s-r)A}Be_\ell\rangle dr$$

且 $\langle a, e^{sA}Be_\ell\rangle \neq 0$ 对于 $0 < s \leq t_0$，存在一个分段连续的 $b\colon [0, t_0] \to \mathbb{R}$，使得 $\langle a, v(s)\rangle \neq 0$。现在以满足 (8.4) 的方式将 b 扩展到整个区间 $[0, t]$，并应用引理 8.2。只需将函数 b 替换为 αb，其中 α 取适当的值即可。这就完成了 $\gamma = 0$ 且 $a \neq 0$ 时的证明。

现在反过来假设 $\gamma \neq 0$。存在一个线性映射 $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$，使得 $T\gamma = a$。定义函数 $f_\ell(v) = \langle Te_\ell, v\rangle$。于是

$$\sum_{\ell=1}^m f_\ell(v)V_\ell(v, \psi) = \begin{pmatrix} BT^*v \\ \langle a, v\rangle \cos^2\psi \end{pmatrix}.$$

因此

$$V_0(v, \psi) - \sum_{\ell=1}^m f_\ell(v)V_\ell(v, \psi) = \begin{pmatrix} (A - BT^*)v \\ -1 + (1 - \kappa^2)\cos^2\psi - \zeta_2 \sin 2\psi \end{pmatrix}.$$

固定 $1 \leq k \leq m$ 使得 $\gamma_k \neq 0$。考虑一个分段连续函数 $b\colon [0, t] \to \mathbb{R}$，其具体形式稍后确定，并考虑沿着时变向量场的受控路径

$$V_0(v, \psi) - \sum_{\ell=1}^m f_\ell(v)V_\ell(v, \psi) + b(s)V_k(v, \psi).$$

(8.3) 的 v 分量现在为

$$\frac{dv(s)}{ds} = (A - BT^*)v(s) + b(s)Be_k, \quad v(0) = 0$$

其解为

$$v(t) = \int_0^t b(s)\Big(e^{(t-s)(A-BT^*)}Be_k\Big)ds.$$

为了满足 $v(t) = 0$，我们要求

$$\int_0^t b(s)\Big(e^{(t-s)(A-BT^*)}Be_k\Big)_i ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, d. \tag{8.5}$$

(8.3) 的 ψ 分量现在为

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = -1 + (1 - \kappa^2 + b(s)\gamma_k)\cos^2\psi(s) - \zeta_2 \sin 2\psi(s).$$

为了应用引理 8.2，只需选取一个不恒为零的函数 b，使其满足 (8.5)，证明便可像之前一样完成。 □

8.3 转移概率和不变测度

我们利用前两节的结果，推导出关于扩散过程$\{(v(t)\ \psi(t)):\ t\geq 0\}$在 $M=\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$上的结果。

命题 4.1 的证明。为方便记号，记 $(v,\psi)\ =\ x$，并令 $P_t(x,U)\ =\mathbb{P}^x(x(t)\ \in U)$ 表示该扩散过程的转移概率。命题 8.1 中的李代数结果蕴含 Ichihara 和 Kunita $[16]$ 的条件 (E)。根据 $[16,\ 定理\ 3]$，存在光滑的 $p:(0,\infty)\times M\times M\to[0,\infty)$，使得 $P_t(x,U)=\int_U p(t,x,y)dy$。 A 的稳定性（特征值条件）蕴含平稳概率测度 μ 的存在，其中 $\{v(t):\ t\geq 0\}$，因此至少存在一个 $\mathcal{A}$ 的平稳概率测度 m。于是 $[16,\ 定理\ 4]$ 蕴含 m 具有光滑密度 $\rho(x)$。

固定一个开集 $U\subset M$，并令 $t>0$。 m 的平稳性蕴含

$$m(U)=\int_M P_t(x,U)\rho(x)dx.$$

Stroock 和 Varadhan 的支撑定理 $[28]$ 与命题 8.2 一起蕴含$P_t(x,\ U)\ >0$对所有 $x\in M$均成立，因此 $m(U)\ >0$。这表明 m是唯一的，且 $\mathrm{supp}(m)\ =M$。由此可得（见 $[16,$命题 5.1$]$），$P_t(x,\ \cdot)$ 对所有 $t>0$ 和所有 $x\in M$均关于 m 绝对连续。

伯克霍夫遍历定理蕴含

$$\mathbb{P}^x\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F(x(s))ds=\int_M Fdm\right)=1$$

对于 m-几乎所有 $x\in M$均成立。最后，固定 $x\in M$，通过对时刻 1 的行为进行条件化，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^x\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F(x(s))ds=\int_M Fdm\right)\\&\qquad=\int\mathbb{P}^y\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F(x(s))ds=\int_M Fdm\right)P_1(x,dy)\\&\qquad=1\end{aligned}$$

因为 $P_1(x,\ \cdot)$ 关于 m 绝对连续，并且

$$\mathbb{P}^y\left(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F(x(s))ds=\int_M Fdm\right)=1$$

对于 m-几乎所有 $y\in M$均成立。 □

第 9 节的证明

在证明中，我们假设 $a\in\mathbb{R}^d$ 和 $\gamma\in\mathbb{R}^m$ 不同时为零。当a 和 γ 均为零时，这等价于令 $\varepsilon=0$。此时，(5.3) 具有非随机常系数，通过初等特征值计算可得 $\lambda(\varepsilon)\equiv-\zeta_2$。

9.1 重新审视 Khas'minskii 公式

回忆一下，$\kappa_d = \sqrt{\kappa^2 - \zeta_2^2}$表示摆的阻尼频率。为了进行 $\varepsilon \to 0$时的渐近分析，方便起见，将 $u(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$ 替换为 $\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \kappa_d \varphi(t) \\ \zeta_2 \varphi(t) + \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$，使得 $\varphi(t) = \tilde{u}_1(t)/\kappa_d$ 且 $\dot{\varphi}(t) = \tilde{u}_2(t) - (\zeta_2/\kappa_d)\tilde{u}_1(t)$。于是得到二维线性随机微分方程

$$d\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} -\zeta_2 & \kappa_d \\ -\kappa_d + \dfrac{\varepsilon}{\kappa_d}\langle a, v(t)\rangle & -\zeta_2 \end{pmatrix} \tilde{u}(t)dt + \frac{\varepsilon}{\kappa_d}\sum_{\ell=1}^{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_\ell & 0 \end{pmatrix} \tilde{u}(t)dW_\ell(t). \tag{9.1}$$

令 $\tilde{u}(t) = \|\tilde{u}(t)\| \begin{pmatrix} \cos\tilde{\psi}(t) \\ \sin\tilde{\psi}(t) \end{pmatrix}$。变换 $\psi(t) \mapsto \tilde{\psi}(t)$ 是 $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 的一个微分同胚，因此，遍历性结果命题 4.1 同样适用于扩散过程 $\{(v(t), \tilde{\psi}(t)) : t \geq 0\}$。此外，$|\log \|u(t)\| - \log \|\tilde{u}(t)\||$ 有界。因此，用于推导推论 4.1 中 λ 的公式 (4.8) 的方法，同样适用于过程 $\{\tilde{u}(t) : t \geq 0\}$。

对（9.1）应用 Itˆo 公式可得

$$d\log\|\tilde{u}(t)\| = \widetilde{Q}^\varepsilon(v(t), \tilde{\psi}(t))dt + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\varepsilon\gamma_\ell}{\kappa_d} \sin\tilde{\psi}(t)\cos\tilde{\psi}(t)\, dW_\ell(t)$$

and

$$d\tilde{\psi}(t) = \tilde{h}^\varepsilon(v(t), \tilde{\psi}(t))dt + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\varepsilon\gamma_\ell}{\kappa_d} \cos^2\tilde{\psi}(t)\, dW_\ell(t) \tag{9.2}$$

其中

$$\widetilde{Q}^\varepsilon(v, \psi) = -\zeta_2 + \frac{\varepsilon}{\kappa_d}\langle a, v\rangle \sin\psi\cos\psi + \frac{\varepsilon^2\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2}\cos^2\psi\cos 2\psi$$

and

$$\tilde{h}^\varepsilon(v, \psi) = -\kappa_d + \frac{\varepsilon}{\kappa_d}\langle a, v\rangle\cos^2\psi - \frac{\varepsilon^2\|\gamma\|^2}{\kappa_d^2}\sin\psi\cos^3\psi.$$

重复第 4 节中推导推论 4.1 时所用的论证，可得

$$\lambda(\varepsilon) = \int_M \widetilde{Q}^\varepsilon(v, \psi)d\tilde{m}^\varepsilon(v, \psi). \tag{9.3}$$

˜其中 $\tilde{m}^\varepsilon$ 是扩散过程 $\{(v(t), \psi(t)) : t \in \mathbb{R}\}$˜在 M 上的唯一不变概率测度，其生成元 $\mathcal{A}^\varepsilon$ 由（3.2,9.2）给出。为方便记号，在本节余下部分我们省略波浪号。

命题 *4.2* 的证明。在此证明中，我们取 $\varepsilon = 1$。于是有

$$\begin{aligned} Q(v, \psi) &= -\zeta_2 + \frac{1}{\kappa_d}\langle a, v\rangle \sin\psi\cos\psi + \frac{\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2}\cos^2\psi\cos 2\psi \\ &\leq -\zeta_2 + \frac{1}{2\kappa_d}|\langle a, v\rangle| + \frac{\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda = \int_M Q(v,\psi)dm(v,\psi) &\le -\zeta_2 + \frac{1}{2\kappa_d}\int_{\mathbb{R}^d} |\langle a, v\rangle| d\mu(v) + \frac{\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2} \\ &\le -\zeta_2 + \frac{1}{2\kappa_d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle a, v\rangle^2 d\mu(v)\right)^{1/2} + \frac{\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2} \\ &= -\zeta_2 + \frac{\sqrt{\langle a, Ra\rangle}}{2\kappa_d} + \frac{\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2}.\end{aligned}$$

对于滑块与摆，我们有 $R = \dfrac{\nu^2}{4\zeta_1}\begin{pmatrix} 1/\chi^2 & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$ 和 $a = \begin{pmatrix} -\chi^2 \\ -2\zeta_1 \end{pmatrix}$ 和 $\gamma = \nu_\circ$

□

9.2 伴随展开

我们不直接计算 (9.3) 的右侧，而是采用 Arnold、Papanicolaou 和 Wihstutz 提出的渐近展开法，来考察伴随方程$\mathcal{A}^\varepsilon F^\varepsilon = Q^\varepsilon - \lambda(\varepsilon)$ [2]。(9.3) 中的被积函数 Q^ε可写为 $Q^\varepsilon = -\zeta_2 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$，其中

$$Q_1(v,\psi) = \frac{1}{\kappa_d}\langle a, v\rangle \sin\psi\cos\psi \qquad \text{and} \qquad Q_2(v,\psi) = \frac{\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2}\cos^2\psi\cos 2\psi.$$

T由 (3.2) 给出的扩散过程 $\{v(t)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$ 的生成元 $\mathcal{G}$ 为

$$\mathcal{G}f(v) = \sum_{j=1}^d (Av)_j \frac{\partial f}{\partial v_j}(v) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^d (BB^*)_{jk}\frac{\partial^2 f}{\partial v_j \partial v_k}. \tag{9.4}$$

对于 $j = 1, \dots, d$，我们有

$$dv_j(t)d\psi(t) = \sum_{\ell=1}^m (Be_\ell)_j \left(\frac{\varepsilon\gamma_\ell}{\kappa_d}\cos^2\psi(t)\right) = \frac{\varepsilon}{\kappa_d}\cos^2\psi(t)(B\gamma)_j. \tag{9.5}$$

因此，扩散过程 $\{(v(t)\ \psi(t))\colon\ t \in \mathbb{R}\}$ 的生成元 $\mathcal{A}^\varepsilon$ 可写为 $\mathcal{A}^\varepsilon = \mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{A}_1 + \varepsilon^2\mathcal{A}_2$，其中

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{G} - \kappa_d\frac{\partial}{\partial\psi}$$

and

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\kappa_d}\cos^2\psi\left(\langle a, v\rangle\frac{\partial}{\partial\psi} + \sum_{j=1}^d (B\gamma)_j\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial v_j}\right)$$

and

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\|\gamma\|^2}{\kappa_d^2}\left(-\sin\psi\cos^3\psi\frac{\partial}{\partial\psi} + \cos^4\psi\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right).$$

将伴随方程 $\mathcal{A}^\varepsilon F^\varepsilon = Q^\varepsilon - \lambda(\varepsilon)$ 展开为

$$(\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{A}_1 + \varepsilon^2\mathcal{A}_2)(\varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots) = (-\zeta_2 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2) - (\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \cdots)$$

并比较 ε 的各次幂，得到 $\lambda_0 = -\zeta_2$ 和

$$\mathcal{A}_0 F_1 = Q_1 - \lambda_1 \tag{9.6}$$

$$\mathcal{A}_0 F_2 + \mathcal{A}_1 F_1 = Q_2 - \lambda_2 \tag{9.7}$$

$$\mathcal{A}_0 F_3 + \mathcal{A}_1 F_2 + \mathcal{A}_2 F_1 = -\lambda_3, \tag{9.8}$$

依此类推。在接下来的三节中，我们将求解这些方程，找出 λ_1、λ_2 和 λ_3 的显式值。我们将推导出 F_1 的显式公式，并对函数 F_2 和 F_3 给出足够精确的刻画，以便在第 9.3 节中进行严格的渐近估计。

注9.1。递归求解该系统，所有方程都具有以下形式

$$\mathcal{A}_0 F(v,\psi) = G(v,\psi) - \lambda$$

其中 G 已知，λ 和 F 待求。对于生成元为 $\mathcal{L}$、半群为 $\{P_t : t \geq 0\}$、不变概率测度为 m 的指数遍历马尔可夫过程，有 $P_t G \to \int G dm$ 随 $t \to \infty$ 指数趋近。于是取 $\lambda = \int G dm$ 并

$$F = -\int_0^\infty (P_t G - \lambda) dt \tag{9.9}$$

满足 $\mathcal{L}F = G - \lambda$。但 $\mathcal{A}_0$ 并非如此；例如，$G(v,\psi) = $余弦 ψ 有 $\lambda = \int G dm = 0$，但 $P_t G(v,\psi) = $余弦$(\psi - \kappa_d t)$，因此 F 的积分不收敛。这带来了一些额外工作，尤其是在求解第二和第三个方程时。引理*9.1*和引理*9.2*中 D_n 的构造与(9.9)中的构造有关，但又有明显区别。

9.2.1 第一方程

我们需要求出 λ_1 和 $F_1(v,\psi)$，使得

$$\mathcal{A}_0 F_1(v,\psi) = Q_1(v,\psi) - \lambda_1$$

其中

$$Q_1(v,\psi) = \frac{1}{2\kappa_d}\langle a, v\rangle \sin 2\psi = -\frac{1}{2\kappa_d}\Re\Big(i\langle a, v\rangle e^{i2\psi}\Big).$$

定义

$$F_1(v,\psi) = \frac{1}{2\kappa_d}\Re\left(ie^{i2\psi}\int_0^\infty \langle a, e^{tA}v\rangle e^{-i2\kappa_d t}dt\right) \tag{9.10}$$

这里，$\Re$ 表示括号内复值表达式的实部。由于 A 的特征值实部均为负，积分被积函数会随.....迅速指数衰减

t，因此 $F_1(v,\ \psi)$是良定义的。此外，它关于 v 是线性的，我们可以在积分号内对 v 求导。得到

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0F_1(v,\psi) &= \frac{1}{2\kappa_d}\Re\Big(ie^{i2\psi}\int_0^\infty\Big(\langle a,e^{tA}Av\rangle - i2\kappa_d\langle a,e^{tA}v\rangle\Big)e^{-i2\kappa_dt}dt\Big)\\ &= \frac{1}{2\kappa_d}\Re\Big(ie^{i2\psi}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}\Big(\langle a,e^{tA}v\rangle e^{-i2\kappa_dt}\Big)dt\Big)\\ &= -\frac{1}{2\kappa_d}\Re\Big(ie^{i2\psi}\langle a,v\rangle\Big)\\ &= Q_1(v,\psi).\end{aligned} \tag{9.11}$$

因此 $\lambda_1 = 0$。为简化记号，我们写作

$$b = \Big(\int_0^\infty e^{tA^*}e^{-i2\kappa_dt}dt\Big)a \in \mathbb{C}^d. \tag{9.12}$$

使得

$$F_1(v,\psi) = \frac{1}{2\kappa_d}\Re\Big(ie^{i2\psi}\int_0^\infty\langle e^{tA^*}a,v\rangle e^{-i2\kappa_dt}dt\Big) = \frac{1}{2\kappa_d}\Re\Big(ie^{i2\psi}\langle b,v\rangle\Big). \tag{9.13}$$

9.2.2 第二个方程

我们需要求出 λ_2 和 $F_2(v,\psi)$，使得

$$\mathcal{A}_0F_2(v,\psi) = -\mathcal{A}_1F_1(v,\psi) + Q_2(v,\psi) - \lambda_2.$$

利用（9.13），我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1F_1(v,\psi) &= \frac{1}{\kappa_d}\cos^2\psi\Big(\langle a,v\rangle + \sum_{j=1}^d(B\gamma)_j\frac{\partial}{\partial v_j}\Big)\frac{\partial F_1}{\partial\psi}\\ &= -\frac{1}{\kappa_d^2}\cos^2\psi\,\Re\Big(e^{i2\psi}\big(\langle a,v\rangle\langle b,v\rangle + \langle b,B\gamma\rangle\big)\Big)\\ &= -\frac{1}{4\kappa_d^2}\Re\Big(\big(1+2e^{i2\psi}+e^{i4\psi}\big)\big(\langle a,v\rangle\langle b,v\rangle + \langle b,B\gamma\rangle\big)\Big).\end{aligned}$$

Also

$$Q_2(v,\psi) = \frac{\|\gamma\|^2}{2\kappa_d^2}\cos^2\psi\cos 2\psi = \frac{\|\gamma\|^2}{8\kappa_d^2}\Re\big(1+2e^{i2\psi}+e^{i4\psi}\big).$$

因此我们需要求解

$$\mathcal{A}_0F_2(v,\psi) = \frac{1}{4\kappa_d^2}\Re\Big(\big(1+2e^{i2\psi}+e^{i4\psi}\big)\big(\langle a,v\rangle\langle b,v\rangle + \langle b,B\gamma\rangle + \frac{\|\gamma\|^2}{2}\big)\Big) - \lambda_2. \tag{9.14}$$

令 $\mathcal{F}_2$ 表示由形如 $e^{in\psi}C(v,\ v)$ 和 $e^{in\psi}$ 的函数的复线性组合构成的函数空间 $M\to\mathbb{C}$，其中 C 是双线性的，且 $n = 0,\ 2,\ 4$。

上述公式表明，$-\mathcal{A}_1F_1(v,\ \psi)+Q_2(v,\ \psi)\in\mathcal{F}_2$。因此，我们可以将求解 (9.14) 的问题分解为一组如下形式的（复值）问题

$$\mathcal{A}_0F(v,\psi)=e^{in\psi}C(v,v)-\lambda \tag{9.15}$$

and

$$\mathcal{A}_0F(v,\psi)=e^{in\psi}-\lambda \tag{9.16}$$

问题 (9.16) 很简单：若 $n\neq 0$ 取 $F(v,\psi)=(i/n\kappa_d)e^{in\psi}$ 且 $\lambda=0$，而若 $n=0$ 取 $F(v,\psi)=0$ 且 $\lambda=1$。问题 (9.15) 则更有意思。下面的引理将 (9.11) 中的计算推广到双线性情形，将会很有用。

引理 9.1. 设 $C\colon\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 是双线性的。对于 $n\geq 0$，定义

$$D_n(v^{(1)},v^{(2)})=-\int_0^\infty C(e^{tA}v^{(1)},e^{tA}v^{(2)})e^{-in\kappa_d t}dt. \tag{9.17}$$

那么 D_n 定义良好且为双线性，并且存在 $E_n\in\mathbb{C}$ 使得

$$\mathcal{A}_0\big(e^{in\psi}D_n(v,v)\big)=e^{in\psi}C(v,v)+e^{in\psi}E_n.$$

此外

$$E_0=-\sum_{\ell=1}^m\int_0^\infty C(e^{tA}Be_\ell,e^{tA}Be_\ell)dt=-\sum_{j,k=1}^d C(e_j,e_k)R_{jk}=-\int_{\mathbb{R}^d}C(v,v)d\mu(v) \tag{9.18}$$

其中 R 是对应于不变概率测度 μ 的方差矩阵。

证明。D_n 定义良好，因为 A 的特征值实部均为负。我们将把 $\mathcal{A}_0\big(e^{in\psi}D_n(v,v)\big)$ 的计算分解为一阶和二阶导数。我们有

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{j=1}^d(Av)_j\frac{\partial}{\partial v_j}-\kappa_d\frac{\partial}{\partial\psi}\Big)\big(e^{in\psi}D_n(v,v)\big)\\
&\quad=e^{in\psi}\Big(D_n(Av,v)+D_n(v,Av)-in\kappa_dD_n(v,v)\Big)\\
&\quad=-e^{in\psi}\int_0^\infty\Big(C(Ae^{tA}v,e^{tA}v)+C(e^{tA}v,Ae^{tA}v)-in\kappa_dC(e^{tA}v,e^{tA}v)\Big)e^{-in\kappa_dt}dt\\
&\quad=-e^{in\psi}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}\Big(C(e^{tA}v,e^{tA}v)e^{-in\kappa_dt}\Big)dt\\
&\quad=e^{in\psi}C(v,v),
\end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^d(BB^*)_{jk}\frac{\partial^2D_n}{\partial v_j\partial v_k}(v,v)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^d(BB^*)_{jk}\Big(D_n(e_j,e_k)+D_n(e_k,e_j)\Big):=E_n$$

其中， e_j 和 e_k 分别表示 $\mathbb{R}^d$中的第 j个和第 k个标准单位向量。综上可得

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0\big(e^{in\psi}D_n(v,v)\big) &= \Big(\sum_{j=1}^{d}(Av)_j\frac{\partial}{\partial v_j} - \kappa_d\frac{\partial}{\partial\psi}\Big)\big(e^{in\psi}D_n(v,v)\big) + \frac{e^{in\psi}}{2}\sum_{j,k=1}^{d}(BB^*)_{jk}\frac{\partial^2 D_n}{\partial v_j\partial v_k}(v,v)\\ &= e^{in\psi}C(v,v) + e^{in\psi}E_n.\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}E_0 &= -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d}(BB^*)_{jk}\int_0^\infty\Big(C(e^{tA}e_j,e^{tA}e_k)+C(e^{tA}e_k,e^{tA}e_j)\Big)dt\\ &= -\sum_{\ell=1}^{m}\int_0^\infty C(e^{tA}Be_\ell,e^{tA}Be_\ell)dt\\ &= -\sum_{j,k=1}^{d}C(e_j,e_k)\sum_{\ell=1}^{m}\int_0^\infty\big(e^{tA}Be_\ell\big)_j\big(e^{tA}Be_\ell\big)_k dt,\end{aligned}$$

而（9.18）的其余部分可由（3.4）立即得到。 □

该引理表明，只需将函数 F 平移 $\mathcal{F}_2$中的一个元素，就可以将（9.15）形式的问题化简为（9.16）形式的问题。对于 $n\neq 0$，我们可以用 $F\in\mathcal{F}_2$ 和 $\lambda=0$求解（9.15）。值得关注的剩余情形是$n=0$时的（9.15），此时可用 $F\in\mathcal{F}_2$ 和 $\lambda=-E_0$求得一个解。由于（9.14）右侧含有一个带有 $C(v,\ v)=\langle a,v\rangle\langle b,v\rangle$ 的双线性项，我们注意到（9.18）中对应的 $-E_0$ 值为

$$-E_0=\sum_{j,k=1}^{d}\langle a,e_j\rangle\langle b,e_j\rangle R_{jk}=\sum_{j,k=1}^{d}a_jb_kR_{jk}=\langle b,Ra\rangle.$$

综合所有计算，并逐项考察（9.14）的右侧，可得以下结果。

命题 9.1. 方程 (9.14) 有一个解，其中 $F_2=\Re(F_2)$ 适用于某个 $F_2\in\mathcal{F}_2$ 且

$$\lambda_2=\frac{1}{4\kappa_d^2}\Big(\langle\Re(b),Ra\rangle+\langle\Re(b),B\gamma\rangle+\frac{\|\gamma\|^2}{2}\Big). \tag{9.19}$$

最后，利用 (9.12) 和 (5.5)，我们得到

$$\langle\Re(b),Ra\rangle=\Re\left\langle a,\int_0^\infty e^{tA}e^{-i2\kappa_d t}Ra\right\rangle=\pi\langle a,\widehat{S}_A(2\kappa_d)Ra\rangle$$

类似地

$$\langle\Re(b),B\gamma\rangle=\pi\langle a,\widehat{S}_A(2\kappa_d)B\gamma\rangle,$$

以便

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{4\kappa_d^2}\Big(\langle a, \widehat{S}_A(2\kappa_d)Ra\rangle + \langle a, \widehat{S}_A(2\kappa_d)B\gamma\rangle + \frac{\|\gamma\|^2}{2\pi}\Big). \tag{9.20}$$

这是定理 5.1 中 $\lambda_2(2\kappa_d)$ 的公式，但 $\lambda(\varepsilon)$ 的渐近行为尚未得到证明。

9.2.3 第三个方程

接下来我们考虑

$$\mathcal{A}_0 F_3 = -\mathcal{A}_1 F_2 - \mathcal{A}_2 F_1 - \lambda_3 \tag{9.21}$$

令 $\mathcal{F}_3$ 表示函数空间 $M \to \mathbb{C}$，其元素由以下形式的函数的复线性组合构成：$e^{in\psi}C(v,\ v,\ v)$ 以及 $e^{in\psi}D(v)$，其中 C 是三线性的，D 是线性的，并且 $n = 0$，2，4，6。F_1 的精确公式 (9.13) 以及命题 9.1 中对 F_2 的刻画共同表明，$-\mathcal{A}_1F_2 - \mathcal{A}_2F_1$ 是 $\mathcal{F}_3$ 中某个函数的实部。

引理 9.2。设 $C : (\mathbb{R}^d)^3 \to \mathbb{C}$ 是三线性的。对于 $n \geq 0$，定义

$$D_n(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}) = -\int_0^\infty C(e^{tA}v^{(1)}, e^{tA}v^{(2)}, e^{tA}v^{(3)})e^{-in\kappa_d t}dt.$$

那么 D_n 是良定义的三线性函数，并且存在一个线性映射 E_n：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$，使得

$$\mathcal{A}_0\big(e^{in\psi}D_n(v,v,v)\big) = e^{in\psi}C(v,v,v) + e^{in\psi}E_n(v).$$

证明。证明方法与引理 9.1 相同，细节从略。 □

该引理表明，只需将函数 F 平移 $\mathcal{F}_3$中的一个元素，就可以将如下形式的问题化简为

$$\mathcal{A}_0 F(v,\psi) = e^{in\psi}C(v,v,v) \tag{9.22}$$

对于 $n = 0$,2,4,6，将其化为如下形式的问题

$$\mathcal{A}_0 F(v,\psi) = e^{in\psi}E_n(v). \tag{9.23}$$

这里也可以采用第 9.2.1 节中用于求得（9.6）显式解的方法，求得（9.23）的显式解，其中 $F \in \mathcal{F}_3$。重复上一节采用的逐项方法，可得以下结果。

命题 9.2. 方程 (9.21) 存在一个解，使得 $F_3 = \Re(F_3)$ 对某些 $F_3 \in \mathcal{F}_3$ 和 $\lambda_3 = 0$成立。

9.3 定理 5.1 的证明

在非紧空间上应用伴随方法时，例如 M，Baxendale 和 Goukasian 的以下结果 [7, 命题 3] 十分重要。

命题 *9.3.* 设 $\{X(t): t \geq 0\}$ 是定义在 σ-紧流形 M上的一个扩散过程，其不变概率测度为 m。设 $\mathcal{B}$ 是作用于 $C^2(M)$ 函数的算子，并且在紧支撑函数上与 $\{X(t): t \geq 0\}$ 的生成元一致。设 $f \in C^2(M)$，并假设 f 和 $\mathcal{B}f$ 可积。假设存在一个正的$G \in C^2(M)$ 和 $k < \infty$，满足对所有 $x \in M$均有 $\mathcal{B}G(x) \leq kG(x)$，且 $\mathcal{B}f(x) \leq G(x)$，并且$f(x)/G(x) \to 0$当 $x \to \infty$时成立。那么 $\int_M \mathcal{B}f(x)dm(x) = 0$。

备注 9.2. 关于为何需要类似命题 *9.3* 的条件，可以考虑以下例子

$$dX_t = \left(-aX_t^3 + \frac{\sigma^2}{2X_t}\right)dt + \sigma dW_t$$

在 $M = (0, \infty)$，其中 $f(x) =$对数 x。我们得到 $\mathcal{B}f(x) = -ax^2$，但显然 $\int_0^\infty (-ax^2)dm(x) \neq 0$.

定理 *5.1(i)* 的证明。到目前为止，我们已经证明存在满足 (9.6,9.7,9.8) 的函数 F_1、F_2 和 F_3，其中 $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ 和 λ_2 由公式 (9.20) 给出。由于 F_1、F_2和 F_3 是 (v, ψ) 的光滑函数，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^\varepsilon(\varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^3 F_3) &= (\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{A}_1 + \varepsilon^2\mathcal{A}_2)(\varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^3 F_3) \\
&= \varepsilon\mathcal{A}_0 F_1 + \varepsilon^2(\mathcal{A}_0 F_2 + \mathcal{A}_1 F_1) + \varepsilon^3(\mathcal{A}_0 F_3 + \mathcal{A}_1 F_2 + \mathcal{A}_2 F_1) \\
&\quad + \varepsilon^4(\mathcal{A}_1 F_3 + \mathcal{A}_2 F_2) + \varepsilon^5 \mathcal{A}_2 F_3 \\
&= \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2(Q_2 - \lambda_2) + \varepsilon^4(\mathcal{A}_1 F_3 + \mathcal{A}_2 F_2) + \varepsilon^5 \mathcal{A}_2 F_3 \\
&= Q^\varepsilon + \zeta_2 - \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^4(\mathcal{A}_1 F_3 + \mathcal{A}_2 F_2) + \varepsilon^5 \mathcal{A}_2 F_3. \qquad (9.24)
\end{aligned}$$

暂且固定 $\varepsilon > 0$。根据 F_1 的显式公式 (9.10)，以及命题 9.1 和命题 9.2 对 F_2 和 F_3 的刻画，我们知道 $\varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^3 F_3$ 的增长至多为 $\|v\|^3$，$\mathcal{A}_1 F_3$ 的增长至多为 $\|v\|^4$，$\mathcal{A}_2 F_2$ 的增长至多为$\|v\|^2$，且 $\mathcal{A}_2 F_3$ 的增长至多为 $\|v\|^3$。我们还知道，m^ε 的 v 边缘分布是均值为 0、方差矩阵为 R 的高斯测度 μ，因此

$$\int_M \|v\|^k dm^\varepsilon(v, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \|v\|^k d\mu(v) < \infty \qquad (9.25)$$

对所有 $k \geq 0$ 均成立。由于

$$\mathcal{A}^\varepsilon(\|v\|^4) = \mathcal{G}(\|v\|^4) = 4\langle Av, v\rangle\|v\|^2 + 2\mathrm{tr}(BB^*)\|v\|^2 + 4\|B^*v\|^2$$

对于适当的正常数 c_1 和 c_2，我们可以应用命题 9.3，并取 $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\varepsilon$、$f = \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^3 F_3$ 和 $G = c_1 + c_2\|v\|^4$。对不变概率测度 m^ε 积分 (9.24)，得到

$$0 = \int Q^\varepsilon dm^\varepsilon + \zeta_2 - \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^4 \int_M (\mathcal{A}_1 F_3 + \mathcal{A}_2 F_2)dm^\varepsilon + \varepsilon^5 \int_M \mathcal{A}_2 F_3 dm^\varepsilon. \qquad (9.26)$$

利用 Khas'minskii 公式 (9.3)，可得

$$\lambda(\varepsilon) = -\zeta_2 + \varepsilon^2\lambda_2 - \varepsilon^4 \int_M (\mathcal{A}_1 F_3 + \mathcal{A}_2 F_2) dm^\varepsilon - \varepsilon^5 \int_M \mathcal{A}_2 F_3 dm^\varepsilon. \tag{9.27}$$

最后，关于 $\mathcal{A}_1 F_3$ 、 $\mathcal{A}_2 F_2$ 和 $\mathcal{A}_2 F_3$ 的上述增长估计，加上.....，意味着这些积分 (9.25)

$$\int_M (\mathcal{A}_1 F_3 + \mathcal{A}_2 F_2) dm^\varepsilon \quad \text{and} \quad \int_M \mathcal{A}_2 F_3 dm^\varepsilon$$

a在 ε 中一致有界。此时，我们令 $\varepsilon \to 0$ 取自 (9.27)，并得到 n

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon^2\lambda_2 + O(\varepsilon^4)$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时。由此完成了定理 5.1 的证明。 □

定理*5.1(ii)*的证明。由 (9.14) 可知， $\mathcal{A}_0 F_2$ 是有限个形如 $\Re\left(e^{in\psi}c\right)$ 或 $\Re\left(e^{in\psi}C(v,v)\right)$ 的项之和，其中常数 c 以及双线性映射 C 的系数都是关于 κ_d 的连续函数（ $0 < \kappa_d < \infty$）。第 9.2.2 节中的构造表明， F_2 也具有同样的性质，进而 $\mathcal{A}_2 F_2$ 也如此。因此，给定 $0 < c_1 < c_2 < \infty$，存在 K_1，使得只要 $c_1 \le \kappa_d \le c_2$，就有 $|\mathcal{A}_2 F_2(\psi, v)| \le K_1(1 + \|v\|^2)$。

同样，由 (9.21) 可知， $\mathcal{A}_0 F_3$ 是形如 $\Re\left(e^{in\psi}D(v)\right)$ 或 $\Re\left(e^{in\psi}C(v,\ v,\ v)\right)$ 的项的有限和，其中线性映射 D 和三线性映射 C 中的系数关于 κ_d 在 $0 < \kappa_d < \infty$ 上是连续函数。第9.2.3节中的构造表明， F_2 也具有同样的性质。因此，给定 $0 < c_1 < c_2 < \infty$，存在 K_2 和 K_3，使得当 $c_1 \le \kappa_d \le c_2$ 时， $|\mathcal{A}_1 F_3(\psi,\ v)| \le K_2(1+\|v\|^4)$ 且 $|\mathcal{A}_2 F_3(\psi,\ v)| \le K_3(1+\|v\|^3)$。

现在可以将这些估计代入（9.27），得到一致估计（5.8）。 □

9.4 命题 5.1 的证明

将 $a = A^*\alpha$ 和 $\gamma = B^*\alpha$ 代入（5.7），得到

$$\begin{aligned}\lambda_2(\omega) &= \frac{\pi}{\omega^2}\Big(\langle A^*\alpha, \widehat{S}_A(\omega) R A^*\alpha\rangle + \langle A^*\alpha, \widehat{S}_A(\omega) B B^*\alpha\rangle + \frac{\|B^*\alpha\|^2}{2\pi}\Big) \\ &= \frac{\pi}{\omega^2}\Big(\langle \alpha, A\widehat{S}_A(\omega) R A^*\alpha\rangle + \langle \alpha, A\widehat{S}_A(\omega) B B^*\alpha\rangle + \frac{\langle \alpha, BB^*\alpha\rangle}{2\pi}\Big).\end{aligned}$$

3.4 中的协方差矩阵 R 满足

$$AR + RA^* = -BB^*, \tag{9.28}$$

参见 Gardiner [11, 第 4.4] 节。代入 BB^* 并注意到 $\langle \alpha, BB^*\alpha\rangle = -\langle \alpha, AR\alpha\rangle - \langle \alpha, RA^*\alpha\rangle = -2\langle \alpha, AR\alpha\rangle$，得到

$$\lambda_2(\omega) = \frac{\pi}{\omega^2}\Big(-\langle \alpha, A\widehat{S}_A(\omega) AR\alpha\rangle - \frac{\langle \alpha, AR\alpha\rangle}{\pi}\Big). \tag{9.29}$$

分部积分两次可得

$$A\widehat{S}_A(\omega)A = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Ae^{tA}A\cos\omega t\,dt = -\frac{1}{\pi}A - \frac{\omega^2}{\pi}\int_0^\infty e^{tA}\cos\omega t\,dt = -\frac{1}{\pi}A - \omega^2\widehat{S}_A(\omega).$$

将 $AS_A(\omega)A$ 代入式 (9.29)，得到

$$\lambda_2(\omega) = \pi\langle\alpha, \widehat{S}_A(\omega)R\alpha\rangle. \tag{9.30}$$

令 $R(t)$ 表示 $\{v(t)$ 的自协方差矩阵：$t \in \mathbb{R}\}$。则 $R(0)$ 是平稳版本的协方差矩阵 R，且对于 $t \geq 0$，有 $R(t) = e^{tA}R$。V 的自协方差函数为

$$R_V(t) = \mathbb{E}[V(t)V(0)] = \langle\alpha, R(t)\alpha\rangle = \langle\alpha, e^{tA}R\alpha\rangle$$

对于 $t \geq 0$。V 的功率谱密度为

$$S_V(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R_V(t)\cos\omega t\,dt = \langle\alpha, \widehat{S}_A(\omega)R\alpha\rangle,$$

因此

$$\lambda_2(\omega) = \pi\langle\alpha, \widehat{S}_A(\omega)R\alpha\rangle = \pi S_V(\omega),$$

符合要求。 □

9.5 命题 5.2 的证明

我们使用 v 的平稳版本，其定义为

$$v(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}BdW(s) = \sum_{\ell=1}^m \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A}Be_\ell dW_\ell(s),$$

其中 e_1，……，e_m 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的标准基向量。于是

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \langle a, v(u)\rangle\psi_\delta(t-u)du &= \sum_{\ell=1}^m \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^u \left\langle a, e^{(u-s)A}Be_\ell\right\rangle dW_\ell(s)\right)\psi_\delta(t-u)du \\ &= \sum_{\ell=1}^m \int_{-\infty}^\infty \left(\int_s^\infty \left\langle a, e^{(u-s)A}Be_\ell\right\rangle \psi_\delta(t-u)du\right)dW_\ell(s),\end{aligned}$$

因此

$$\xi_\delta(t) = \sum_{\ell=1}^m \int_{-\infty}^\infty \left(\int_s^\infty \langle a, e^{(u-s)A}Be_\ell\rangle\,\psi_\delta(t-u)du + \gamma_\ell\psi_\delta(t-s)\right)dW_\ell(s) \equiv \sum_{\ell=1}^m \xi_{\delta,\ell}(t),$$

也就是说，由于 $\{W_\ell : 1 \leq \ell \leq m\}$ 彼此独立，因此 $\{\xi_{\delta,\ell} : 1 \leq \ell \leq m\}$ 彼此独立，而 ξ_δ 的自协方差函数是各个自协方差

函数之和，分别对应$\xi_{\delta、\ell}$。每个 $E[\xi_{\delta,\ell}(t)\xi_{\delta、\ell}(0)]$ 的计算可分解为 4 项。因此

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\xi_\delta(t)\xi_\delta(0)] \\
&\quad= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_{\delta,\ell}(t)\xi_{\delta,\ell}(0)] \\
&\quad= \sum_{\ell=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \langle a, e^{(u-s)A} B e_\ell \rangle \, \psi_\delta(t-u) du \right) \left(\int_s^{\infty} \langle a, e^{(w-s)A} B e_\ell \rangle \, \psi_\delta(-w) dw \right) ds \\
&\qquad + \sum_{\ell=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \langle a, e^{(u-s)A} B e_\ell \rangle \, \psi_\delta(t-u) du \right) \gamma_\ell \psi_\delta(-s) ds \\
&\qquad + \sum_{\ell=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \langle a, e^{(u-s)A} B e_\ell \rangle \, \psi_\delta(-u) du \right) \gamma_\ell \psi_\delta(t-s) ds \\
&\qquad + \sum_{\ell=1}^{m} \gamma_\ell^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t-s)\psi_\delta(-s) \, ds \\
&\quad= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \int_s^{\infty} \langle a, e^{(u-s)A} B B^* e^{(w-s)A^*} a \rangle \psi_\delta(t-u)\psi_\delta(-w) du dw \right) ds \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \langle a, e^{(u-s)A} B \gamma \rangle \, \psi_\delta(t-u) du \right) \psi_\delta(-s) ds \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \langle a, e^{(u-s)A} B \gamma \rangle \, \psi_\delta(-u) du \right) \psi_\delta(t-s) ds \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} \|\gamma\|^2 \psi_\delta(t-s)\psi_\delta(-s) \, ds \\
&\quad= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(I_\delta^{(1)}(s,t) + I_\delta^{(2)}(s,t) + I_\delta^{(3)}(s,t) + I_\delta^{(4)}(s,t) \Big) ds,
\end{aligned}
$$

也就是说。接
下来

$$
S_{\xi_\delta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbb{E}[\xi_\delta(t)\xi_\delta(0)] \cos \omega t \, dt = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(i)}(s,t) \, ds \right) \cos \omega t \, dt.
$$

我们分别考虑这四项在 $\delta \to 0$ 时的极限。

$i = 1$**:**

$$
I_\delta^{(1)}(s,t) = \int_s^{\infty} \int_s^{\infty} \left\langle a, e^{(u-s)A} B B^* e^{(w-s)A^*} a \right\rangle \psi_\delta(t-u)\psi_\delta(-w) \, du dw.
$$

回顾 $t \geq 0$，我们有

$$
I_\delta^{(1)}(s,t) \to \begin{cases} \langle a, e^{(t-s)A} B B^* e^{-sA^*} a \rangle & \text{if } s < 0 \\ 0 & \text{if } s > 0 \end{cases}
$$

当 $\delta \to 0$ 时。此外， $I_\delta^{(1)}(s,t) = 0$ ，如果 $s > \delta$ 且

$$\begin{aligned}\left|I_\delta^{(1)}(s,t)\right| &\le \sup_{-\delta\le r_1,r_2\le\delta} \left|\left\langle a, e^{(t+r_1-s)A} BB^* e^{(r_2-s)A^*} a\right\rangle\right| \\ &\le \left(\sup_{|r|\le\delta} \|e^{rA^*}a\|\right)^2 \|e^{(t-s)A} BB^* e^{-sA^*}\|.\end{aligned}$$

因此，由控制收敛定理可得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty I_\delta^{(1)}(s,t)\,ds\right)\cos\omega t\,dt \to \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^0 \langle a, e^{(t-s)A}BB^*e^{-sA^*}a\rangle\,ds\right)\cos\omega t\,dt$$

当 $\delta \to 0$ 时。由于

$$\int_{-\infty}^0 \langle a, e^{(t-s)A}BB^*e^{-sA^*}a\rangle\,ds = \left\langle a, e^{tA}\left(\int_{-\infty}^0 e^{-sA}BB^*e^{-sA^*}\,ds\right)a\right\rangle = \langle a, e^{tA}Ra\rangle$$

其中 R 是 $v(t)$ 的不变概率测度的协方差矩阵，见 (3.4)，因此我们有

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty I_\delta^{(1)}(s,t)\,ds\right)\cos\omega t\,dt = \int_0^\infty \langle a, e^{tA}Ra\rangle\cos\omega t\,dt = \langle a, \widehat{S}_A(\omega)Ra\rangle.$$

$i = 2$:

$$\int_{-\infty}^\infty I_\delta^{(2)}(s,t)\,ds = \int_{-\infty}^\infty \left(\int_s^\infty \langle a, e^{(u-s)A}B\gamma\rangle\psi(t-u)\,du\right)\psi(-s)\,ds.$$

对于 $t > 0$ ，我们有

$$\int_{-\infty}^\infty I_\delta^{(2)}(s,t)\,ds \to \langle a, e^{tA}B\gamma\rangle$$

当 $\delta \to 0$ 时。此外

$$\left|\int_{-\infty}^\infty I_\delta^{(2)}(s,t)\,ds\right| \le \sup_{|r|\le 2\delta}\left|\langle a, e^{(t+r)A}B\gamma\rangle\right| \le \left(\sup_{|r|\le 2\delta}\|e^{rA^*}a\|\right)\|e^{tA}B\gamma\|.$$

因此，根据控制收敛定理，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty I_\delta^{(2)}(s,t)\,ds\right)\cos\omega t\,dt \to \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \langle a, e^{tA}B\gamma\rangle\cos\omega t\,dt = \langle a, \widehat{S}_A(\omega)B\gamma\rangle$$

作为 $\delta \to 0$。

$i = 3$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(3)}(s,t)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \langle a, e^{(u-s)A} B\gamma \rangle\, \psi_\delta(-u) du \right) \psi_\delta(t-s) ds.$$

注意，$\left| \int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(3)}(s,t)\,ds \right| \le \sup_{r \ge 0} |\langle a, e^{rA} B\gamma \rangle| < \infty$。此外，若 $0 < 2\delta < t$，则 $\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(3)}(s,t)\,ds = 0$。因此，根据控制收敛定理，我们有

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(3)}(s,t)\,ds \right) \cos \omega t\, dt \to 0$$

当 $\delta \to 0$ 时。

$i = 4$：代换 $u = s - t$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(4)}(s,t)\,ds = \|\gamma\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\delta(t-s)\psi_\delta(-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(4)}(s,-t)\,ds,$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(4)}(s,t)\,ds \right) \cos \omega t\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(4)}(s,t)\,ds \right) \cos \omega t\, dt \\ &= \frac{\|\gamma\|^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t-s)\psi_\delta(-s) \cos \omega t\, ds dt \end{aligned}$$

注意，$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t-s)\psi_\delta(-s) ds = 0$，若 $|t| > 2\delta$。此外

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t-s)\psi_\delta(-s)\, ds dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(-s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t-s)\, dt \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(-s)\, ds = 1. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{\|\gamma\|^2}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(4)}(s,t)\,ds \right) \cos \omega t\, dt \\ &= \frac{\|\gamma\|^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(t-s)\psi_\delta(-s) \big(1 - \cos \omega t\big)\, ds dt \\ &\le \frac{\|\gamma\|^2}{2\pi} \sup_{|t| \le 2\delta} \big|1 - \cos \omega t\big| \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_\delta^{(4)}(s,t)\,ds \right) \cos \omega t\, dt \to \frac{\|\gamma\|^2}{2\pi}$$

如 $\delta \to 0$。

这四个极限合在一起给出式 (5.16)，命题 5.2 的其余部分可直接由定义 (5.7) 得出。□

致谢

第二作者的研究工作部分得到加拿大自然科学与工程研究理事会发现基金 50503-10802 的资助。

参考文献

[1] S. T. Ariaratnam. 随机激励非线性振子静止模态的稳定性。国际非线性力学杂志, 26(6):819–825, 1991.[2] Ludwig Arnold、George Papanicolaou 和 Volker Wihstutz. 随机振子的李雅普诺夫指数与旋转数的渐近分析及其应用。*SIAM*应用数学杂志, 46(3):427–450, 1986.[3] E. I. Auslender 和 G. N. Mil'shtein. 小噪声下线性随机系统李雅普诺夫指标的渐近展开。《应用数学与力学杂志》, 46:277–283, 1982.[4] A. K. Bajaj、S. I. Chang 和 J. M. Johnson. 共振激励的自参数双自由度系统的调幅动力学。非线性动力学, 5(4):433–457, 1994.[5] D. Bakry 和 Michel ´Emery. 双曲收缩扩散。在*S´*概率研讨会´，第十九辑，*1983/84*中，数学讲义第1123卷，页码177–206。施普林格，柏林，1985年。[6] Bappaditya Banerjee、Anil K. Bajaj 和 Patricia Davies. 自参数系统的共振动力学：高阶平均法研究。国际非线性力学杂志, 31(1):21–39, 1996.[7] Peter H. Baxendale 和 Levon Goukasian. 随机系数幂零 Itˆo 系统的李雅普诺夫指数。随机过程及其应用, 95(2):219–233, 2001.[8] Francesco Benedettini、Giuseppe Rega 和 Fabrizio Vestroni. 弹性缆索自由非平面有限运动中的模态耦合。力学, 21:38–46, 1986.[9] M.P. Cartmell 和 J.W. Roberts. 自参数共振系统中的同时组合共振。《声学与振动学报》, 123(1):81–101, 1988.[10] W.K. Chang 和 R.A. Ibrahim. 随机面内载荷作用下悬索中的多重内共振。非线性动力学, 12:275—303, 1997.[11] C. W. Gardiner. 物理、化学和自然科学随机方法手册，施普林格协同学丛书第13卷。施普林格出版社，柏林，第三版，2004年。

[12] H. Hatwal、A. K. Mallik 和 A. Ghosh. 自参数系统的受迫非线性振荡。第一部分：周期响应；第二部分：混沌响应。*ASME*《应用力学汇刊》, 50(3):657–668, 1983.[13] R. S. Haxton 和 A. D. S. Barr. 自参数振动吸振器。*ASME*《工程工业汇刊》, 94(1):119–125, 1972.[14] R. A. Ibrahim 和 H. Heo. 随机支撑运动下耦合梁的自参数振动。*ASME*《振动、声学、应力与可靠性学报》, 108(4):421–426, 1986.[15] R. A. Ibrahim 和 J. W. Roberts. 具有自参数耦合系统稳态响应的随机稳定性。《应用数学与力学杂志》, 57(11):643–649, 1977.[16] Kanji Ichihara 和 Hiroshi Kunita. 二阶退化椭圆算子的分类及其概率刻画。《概率论与相关领域》, 30:235–254, 1974.[17] Peter Imkeller 和 Christian Lederer. 含噪阻尼谐振子李雅普诺夫指数的显式描述。《动力学与稳定系统》, 14(4):385–405, 1999.[18] R. Z. Khas'minskii. 线性随机系统渐近稳定的必要充分条件。《概率论及其应用》, 12:144–147, 1967.[19]Rafail Khasminskii. 微分方程的随机稳定性，随机建模与应用概率第66卷。施普林格，海德堡，第二版，2012年。G. N. Milstein 和 M. B. Nevelson 参与撰写。[20] W.K. Lee 和 D.S. Cho. 随机激励自参数系统的阻尼效应。《声学与振动学报》, 236(1):23–31, 2000.[21] Daniel Liberzon 和 Roger W. Brockett. 线性随机微分方程产生的 Fokker-Planck 算子及相关算子的谱分析。《*SIAM*控制与优化杂志》, 38(5):1453–1467, 2000.[22] Sean P. Meyn 和 R. L. Tweedie. 马尔可夫过程的稳定性。III. 连续时间过程的 Foster-Lyapunov 判据。《应用概率进展》, 25(3):518–548, 1993.[23] N. Sri Namachchivaya、David Kok 和 S. T. Ariaratnam. 含噪非线性自参数系统的稳定性。《非线性动力学》, 47(1-3):143–165, 2007.[24] Ali H. Nayfeh、Dean T. Mook 和 Larry R. Marshall. 船舶运动中纵摇与横摇模态的非线性耦合。《水动力学杂志》, 7(4):145–152, 1973.

[25] Ali Hasan Nayfeh 和 Dean T. Mook。《非线性振荡》。纯粹与应用数学。Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 纽约，1979 年。[26] Marcelo A. S. Neves 和 Claudio A. Rodr´ıguez。迎浪条件下船舶参数共振的耦合非线性数学模型。《应用数学建模》，33(6):2630– 2645，2009 年。[27] J.W. Roberts。自参数相互作用振动系统的随机激励。《声学与振动学报》，69(1):101–116，1980 年。[28] Daniel W. Stroock 和 S. R. S. Varadhan。关于扩散过程的支撑集及其在强最大值原理中的应用。载于《第六届伯克利数理统计与概率研讨会论文集（加利福尼亚大学伯克利分校，1970/1971），第三卷：概率论》，第 333–359 页，1972 年。[29] Win-Min Tien、N.Sri Namachchivaya 和 Anil K. Bajaj。周期激励下浅拱的非线性动力学 I.1:2 内共振。《国际非线性力学杂志》，29(3):349–366，1994 年。[30] Aleˇs Tondl、Thijs Ruijgrok、Ferdinand Verhulst 和 Radoslav Nabergoj。《机械系统中的自参数共振》。剑桥大学出版社，剑桥，2000 年。[31] Ferdinand Verhulst。参数共振与自参数共振。《应用数学学报》，70(1-3):231–264，2002 年。对称性与摄动理论。[32] J. Warminski 和 K. Kecik。含摆非线性系统的自参数振动。《工程数学问题》，（非线性动力学及其在工程科学中的应用）：1–19，2006 年。

Peter H. Baxendale. Department of Mathematics, University of Southern California, CA 90089, USA.电子邮箱地址：baxendal@usc.edu

N. Sri Namachchivaya. Department of Applied Mathematics, University of Waterloo, ON N2L3G1, Canada. 电子邮箱地址：navam@uwaterloo.ca