arXiv:2302.02258v1 [math.LO] 4 Feb 2023

具有全集的度量集合论

JAMES HANSON

Abstract. 受度量结构模型论思想的启发，我们引入一种度量集合论 MSE，它将有界量化作为原始概念，并由一个自然的度量外延公理（两个集合之间的距离是其延拓之间的豪斯多夫距离）和一种全概括的近似非确定形式组成（对于任意实值公式 $\varphi(x,y)$、参数元组 a 和 $r<s$，存在一个集合，它包含类 $\{x:\varphi(x,a)\leq r\}$，并且包含于类 $\{x:\varphi(x,a)<s\}$）。我们证明，加入适当的无穷公理后，MSE 足以发展经典数学。接着，我们构造良序类型的规范代表，并证明 MSE 的超度量模型总是包含外部非良基的序数，同时猜想这一结论对所有模型都成立。为确立若干独立性结果，尤其是一致性，我们构造了多种模型，包括伪有限模型以及包含任意大标准序数的模型。最后，我们讨论如何在连续逻辑或卢卡西维奇逻辑中形式化 MSE。

Introduction

自上世纪之交发现全概括原则不一致以来，人们一直在尝试挽救这一思想，并构造能够将整个论域有意义地表示为论域自身元素的系统。

新朴素集合论通常采用两种方法之一来修补全概括。一种是在保持完整经典逻辑的同时，弱化概括原则；另一种是在保持完整概括原则的同时，弱化底层逻辑。外延性往往会被弱化，甚至完全放弃。尽管人们对这类理论进行了大量研究，但其中有三种理论尤其值得一提，我们偶尔会将它们与本文的理论进行比较：蒯因的新基础 NF，以及 Jensen 对其所作的“微小（？）修改”NFU；Esser 最为深入研究的正拓扑集合论 GPK；以及 Cantor–Lukasiewicz 集合论，该理论最初由 Skolem 提出，后由 Hájek 命名，其内容仅仅是将完整概括模式解释于 $[0,1]$ 值卢卡西维奇谓词逻辑中。NF(U) 和 GPK 属于上述第一种方法，而 Cantor–Lukasiewicz 集合论（Hájek 将其简称为 CL）则属于第二种方法。NF 和 GPK 具有完整外延性，但 CL 与外延性完全不相容；NFU 则通过允许原子来弱化外延性。为使本引言简短，我们请读者参阅 [11]，了解 NF(U) 和 GPK；并参阅 [15, 第 4 章，了解 Cantor–Lukasiewicz 集合论。特别是，Hájek 的结果——定理 4.17]，即 CL 没有 ω-模型——与本文相关，因为我们将在自己的理论中发现类似的实值归纳失效，不过在我们的理论中，这种失效可能发生在任意大的序数处（定理 6.15），而不一定发生在 ω。

Date:2023年2月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 03 E70, 03B50, 03C66。*Key words and phrases.* 度量集合论。

本文介绍一种新的集合论 MSE，它采用综合方法来修补概括：我们弱化概括模式，同时通过采用实值逻辑来弱化（或者更宽容地说，推广）底层逻辑。为便于阐述，我们将采用一种略为定制的形式系统，该系统主要基于一阶连续逻辑，并充分利用这样一个事实：我们的理论研究的是由元素构成的集合，而不是定义域上的任意 $[0,1]$ 值谓词。特别是，我们将把有界量化作为原始概念；而在连续逻辑中无法这样做。连续逻辑以其现代形式于 [1] 年提出。

MSE 的模型是三元组（M，d，$\Subset$），其中（M，d）是完备度量空间，而 $\Subset \subseteq M^2$ 是一个闭二元关系。如果满足外延性的强度量形式和概括的弱近似形式，则这样的结构就是 MSE 的模型。外延性的强形式称为 H-外延性，它要求对于任意 a，$b \in M$，d（a，b），都有 $=d_{\mathrm{H}}$（$\{x : x \Subset a\}$，$\{x : x \Subset b\}$），其中 d_{H} 是集合上的豪斯多夫度量（定义 1.2）。我们将 H-外延结构（M，d，$\Subset$）称为度量集合结构。

概括的弱形式是以下原则：对于任意实值公式φ（x，$\bar{y}$）、任意实数 $r < s$ 以及任意参数元组 $\bar{a} \in M$，存在一个集合 $b \in M$，使得对于任意 c，若 φ（c，$\bar{a}$）$\leq r$，则 $c \Subset b$；若 $c \Subset b$，则 φ（c，$\bar{a}$）$< s$（定义 1.7）。重要的是，对于那些 c，若 φ（c，$\bar{a}$）落在 r 与 s 之间的间隙中，我们不对其成员资格作任何保证，因此从这个意义上说，该原则是不确定的。

我们认为，最能准确概括这一原则的词是“切除”，其含义是我们只能以相当粗略的方式切出所需的集合。由此，我们得到了缩写 MSE，即“带切除的度量集合”（Metric Sets with Excision）。当然，这一原则的性质完全取决于“实值公式”的含义，而该术语将在第 1.2 节中形式化定义；但关键在于，这些公式相对于度量自动是一致连续的。具体而言，我们无法直接使用关系 $\Subset$ 作为 $\{0,1\}$值谓词，而只能在有界量化的实例中使用它，例如 $\inf_{y \Subset z} \varphi(x,y)$。

在定义 MSE 并发展出一些构造特定集合的技术后，我们将通过证明 MSE（加上无穷公理）能够解释经典的 TSTI[1]（或者等价地，完整的 ω阶算术，或带有自然数对象的布尔托扑斯理论），来确立 MSE 具有足够的强度和表达能力；众所周知，这已远远足以应付日常数学。具体而言，我们将考察一致离散集，因为在 MSE 的模型中，它们比任意集合具有更好的性质。随后，我们将在 MSE 的模型中构造内部良序类型的典范代表元（称之为序数）。我们将证明，MSE 不具有超度量 β-模型（即在良基性问题上正确的模型），方法是证明任何此类模型的序数类 M都具有一个外部映射 s 到 $0,1]$，该映射不增且具有稠密像（这意味着 s 下 (0, 1) 的原像没有最小元素）。最终，当我们使用标准 GPK$^+$模型构造的非标准修改来构造 MSE 的模型时，我们将证明这些模型可以具有任意大的标准序数（定理 6.15）。这当然类似于 NFU 的情形：NFU 没有真正的 β-模型，却可以具有任意大的良基部分；但其失效方式在概念上更接近于阻止 C L_0 具有 ω-模型的机制，因为其中涉及难以稳健地形式化实值谓词归纳。我们还构造了一个理论的伪有限模型（不含无穷）。这表明，不含无穷的 MSE 具有极低的一致性强度，低于罗宾逊算术；这与 NFU

[1]参见 [5,第 1.1 节。2]以了解 TSTI 的定义。

和不含无穷的 GPK$^+$ 形成对比。[2] 我们还证明，任何直径至多为 1 的完备度量空间，都可以嵌入为某个 MSE 模型中的蒯因原子内部集合；这尤其表明，并非所有 MSE 的模型都是超度量的。尽管如此，我们能够构造的所有模型都承认如前所述的映射 s，因此我们猜想事实总是如此。

最后，我们说明如何在连续逻辑或卢卡西维奇谓词逻辑中形式化我们的理论。在这些语境中，我们考虑形如 (M, e) 的结构（不指定度量），其中 e 是定义在 M 上的二元 $[0,1]$ 值谓词。$e(x,y)$ 的预期解释是量 $\inf_{z \sqsubseteq y} d(x,z)$。我们所采用的强形式外延性确保，可以通过公式 $d_e(x,y) := \inf_z |e(z,x) - e(z,y)|$，从 $e(x,y)$ 恢复度量 $d(x,y)$。此时，H-外延性公理的形式为

$$\sup_{xy} |e(x,y) - \inf_z \min(d_e(x,z) + 2e(z,y), 1)| = 0,$$

而切除公理模式由以下内容构成

$$\sup_{\bar{y}} \inf_z \sup_x \max(\min(e(x,z), -\varphi(x,\bar{y})), \min(\varepsilon_\varphi - e(x,z), \varphi(x,\bar{y}) - 1)) \leq 0$$

对于每个受限的 $\mathcal{L}_e$ 公式 $\varphi(x,\bar{y})$，其中 ε_φ 是一个可由 φ 直接计算得到的特定有理数。我们证明，上述理论的模型恰好是 MSE 的预模型，因为相对于 d_e 的完备化会得到一个 MSE 的模型（取 $x \sqsubseteq y$ 为关系 $e(x,y) = 0$）。此外，所有 MSE 的模型都可以由此方式得到。

在卢卡西维奇逻辑中，我们使用谓词[3] $x \mathbin{\hat{\in}} y$ 来代替 $e(x,y)$，其预期含义是 $(x \mathbin{\hat{\in}} y) = 1 - e(x,y)$。H-外延性公理可直接翻译为

$$\forall x \forall y (x \mathbin{\hat{\in}} y \leftrightarrow \exists z (x =_e z \,\&\, z \mathbin{\hat{\in}} y \,\&\, z \mathbin{\hat{\in}} y)),$$

其中，$x =_e y$ 是公式 $\forall z (z \mathbin{\hat{\in}} x \leftrightarrow z \mathbin{\hat{\in}} y)$（这与 $1 - d_e(x,y)$相同），而切除公理模式被证明等价于模式

$$\forall \bar{y} \exists z \forall x (x \mathbin{\hat{\in}} z \vee (\neg\varphi \,\&\, \neg\varphi \,\&\, \neg\varphi)) \wedge (\underbrace{(\neg x \mathbin{\hat{\in}} z \,\&\, \cdots \,\&\, \neg x \mathbin{\hat{\in}} z)}_{6 \cdot \#\varphi \text{ times}} \vee (\varphi \,\&\, \varphi \,\&\, \varphi))$$

对于每个卢卡西维奇公式 $\varphi(x,\bar{y})$，其中 $\#\varphi$ 是 φ中$\hat{\in}$ 的实例数 .

1. Specification ofMSE

1.1. H-外延性与度量集合结构。我们将考虑的结构具有 $(M, d, \sqsubseteq)$的形式，其中 (M,d)是一个完备度量空间，而 $\sqsubseteq \subseteq M^2$ 是一个闭二元关系。正如记号所暗示的，$\sqsubseteq$ 旨在解释为集合隶属关系，因此我们希望它具有外延性。显然，我们可以直接按照标准意义要求 $\sqsubseteq$ 作为二元关系具有外延性，但出于若干不同原因，我们将选择对 $\sqsubseteq$施加一个更强的条件。为了定义这一条件，回顾度量空间子集之间豪斯多夫距离的诸多等价定义之一：

定义 1.1。A 与 B之间的豪斯多夫距离，记作 $d_{\mathrm{H}}(A,B)$，是 $[0,\infty]$ 中唯一的最小元素，使得对于任意 $r > d_{\mathrm{H}}(A,B)$,

[2]NFU 的一致性强度严格介于罗宾逊算术与皮亚诺算术之间。GPK$^+$ 与完整二阶算术等一致。[3]符号$\hat{\in}$ 上的帽号仅用于在视觉上将其与本文中另外四个类似希腊字母 epsilon 的符号区分开来：$\in$、$\sqsubseteq$、e和 ε。我们从不使用符号 ϵ，而$\hat{\in}$ 仅在本文最后一节中使用。$\in$ 始终表示标准的集合论隶属关系，ε 始终表示一个实数。

- 对于每个 $a \in A$，都存在一个 $b \in B$，使得 $d(a,b) < r$，并且
- 对于每个 $b \in B$，都存在一个 $a \in A$ 使得 $d(a,b) < r$。

在 M的整个幂集上，d_{H} 是扩展伪度量；但在 M的近子集族上，它是扩展度量。我们将只讨论 $[0,1]$值度量。在此语境下，将上述定义稍作修改，使 d_{H}也取 $[0,1]$值，是合理的。这只会改变空集与非空集之间的距离。特别地，对于任何非空 A，都有 $d_{\mathrm{H}}(\varnothing, A) = 1$。这就是我们实际采用的豪斯多夫距离定义。

上述定义 1.1 的形式清楚地表明，d_{H} 是集合外延相等的一种直接度量推广。$A = B$ 当且仅当对于每个 $a \in A$，都存在一个 $b \in B$ 使得 $a = b$，并且对于每个 $b \in B$，都存在一个 $a \in A$ 使得 $a = b$。因此，我们将“$A = B$ 当且仅当 A 与B 共外延”这一陈述的直接翻译作为外延性公理。

定义 1.2. 给定一个度量空间 (M,d) 和一个二元关系 $\in \subseteq M^2$，若对任意 $a,b \in M$, $d(a,b) = d_{\mathrm{H}}(\{x : x \in a\}, \{x : x \in b\})$，都有$\in$，则称其为 H-外延的。

若 (M,d) 是完备度量空间，d是$[0,1]$值的，且 $\in \subseteq M^2$ 是闭的并且是 H-外延的，则称 $(M,d,\in)$ 为度量集合结构。

度量集合结构是外延有向图（即外延性公理的离散模型）的直接推广。若 δ是定义在 V上的 $\{0,1\}$值度量，则 (V,δ,E) 是度量集合结构，当且仅当 (V,E) 是外延有向图。

我们应当注意到，H-外延性的定义包含一个多少有些任意的选择。毕竟，我们完全也可以要求 $d(a,b) = (d_{\mathrm{H}}(\{x : x \in a\},\{x : x \in b\}))^{1/2}$。尽管如此，我们所作的选择是合理的，而且似乎效果良好，因此本文没有探讨其他可能性。此外，作者此前的一篇论文中也出现过这一外延性概念 [9, 定义 6.4]。

外延性常被提及的一项优点是，它使人们能够只将 $\in$ 作为原始概念，而把 $x = y$ 定义为 $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$。我们似乎不太可能对 $\in$做到类似的事，但可以对 $x \in Y$ 的自然的 $[0,1]$ 值版本做类似处理；它表示从 x 到 Y 中各元素的距离，通常记作 $\mathrm{dist}(x,Y)$ 或 $d(x,Y)$。在集合论的语境中，$d(x,Y)$ 完全不可接受，因为这等同于写 $x = Y$ 来表示 $x \in Y$。$\mathrm{dist}(x,Y)$ 太长，不便频繁使用，因此我们将引入以下记号。

定义 1.3。我们用 $e(x,y)$ 表示 $\inf\{d(x,z) : z \in y\}$。

豪斯多夫度量的另一个有用刻画如下：$d_{\mathrm{H}}(A,B) = \sup_z |\mathrm{dist}(z,A) - \mathrm{dist}(z,B)|$。这意味着，若 $(M,d,\in)$ 是一个度量集合结构，则有 $d(x,y) = \sup_z |e(z,x) - e(z,y)|$。由于 $x \in y$ 当且仅当 $e(x,y) = 0$，因此我们应该可以将 $e(x,y)$ 作为唯一的原始概念。这正是我们将在 MSE 的“官方”连续逻辑表述中采用的方法，我们将在第 5 节讨论这一表述。

1.2. 公式。我们的形式系统将对一阶连续逻辑作少许修改；这种逻辑以现代形式首次出现于 [1]。我们唯一的谓词符号将是度量 $d(x,y)$，但我们将把形如 $\sup_{x \in y}$ 的有界量词作为原始概念。不过请注意，我们无法直接将 $x \in y$ 作为公式使用。

定义 1.4。我们的公式集合，记作 $\mathcal{L}_{\in}$，是满足以下条件的最小非空表达式集合：对于任意 φ、$\psi \in \mathcal{L}_{\in}$、变量 x 和 y，以及 $r \in \mathbb{R}$、$\mathcal{L}_{\in}$，包含表达式

- 1,
- $d(x,y)$,
- $\varphi+\psi$,
- $\max(\varphi,\psi)$,
- 分钟(φ,ψ),
- $r\cdot\varphi$,
- $\sup_x\varphi$,
- $\inf_x\varphi$,
- $\sup^{x\Subset y}\varphi$,
- $\inf_{x\Subset y}\varphi$。

需要更具体时，我们将 $\mathcal{L}_{\Subset}$ 的元素称为 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式。

我们将形如 $\sup^{x\Subset y}$ 或 $\inf^{x\Subset y}$ 的量词称为有界量词。公式 φ 的自由变量按显然的方式定义。我们用 $\varphi(\bar{x})$ 表示公式 φ 的自由变量包含在 $\bar{x}$ 中。

为便于记账，我们需要以下归纳定义的量：

- $v(1)=v(d(x,y))=1$,
- $v(\varphi+\psi)=v(\varphi)+v(\psi)$,
- $v(\max(\varphi,\psi))=v(\min(\varphi,\psi))=\max(v(\varphi)\ v(\psi))$,
- $v(r\cdot\varphi)=|r|v(\varphi)$,
- $v($上确界$_x\varphi)=v($下确界$_x\varphi)=v($上确界$^{x\Subset y}\varphi)=v($下确界$_{x\Subset y}\varphi)=v(\varphi)$。

在定义 1.4 中，我们允许任意实数，这是因为这样在若干地方会比较方便。不过，这种便利在第 5 节中会付出代价。

给定公式的预期解释是清楚的，不过我们确实需要规定空集上有界量词的行为。这是我们定义量 $v(\varphi)$ 的两个原因中的第一个。

定义 1.5。给定一个度量集合结构 $(M,d,\Subset)$，我们归纳地定义实值函数 φ^M，其定义域为 $\varphi\in\mathcal{L}_{\Subset}$：

- $1^M=1$。

对所有 a、$b\in M$，

- $(d(a,b))^M=d(a,b)$。
- $(\varphi+\psi)^M=\varphi^M+\psi^M$。我们定义 $(\max(\varphi,\psi))^M$、$(\min(\varphi,\psi))^M$，并类似地定义 $(r\cdot\varphi)^M$。
- $(\sup_x\varphi(x,\bar{a}))^M=\sup\{\varphi^M(b,\bar{a}):\ b\in M\}$。我们类似地定义 $(\inf_x\varphi(x,\bar{a}))^M$。
- $(\sup^{x\Subset a}\varphi(x,a,\bar{b}))^M=\sup\{\varphi^M(c,a,\bar{b}):\ c\Subset a\}$，若存在某个 $c\in M$ 使得 $c\Subset a$。若存在某个 $c\in M$ 使得 $c\Subset a$，则类似地定义 $(\inf_{x\Subset a}\varphi(x,a,\bar{b}))^M$。
- $(\sup_{x\Subset}\varphi(x,a,\bar{b}))^M=-v(\varphi)$ 若 $c\not\Subset a$ 对所有 $c\in M$ 成立。
- $(\inf_{x\Subset a}\varphi(x,a,\bar{b}))^M=v(\varphi)$ 若 $c\not\Subset a$ 对所有 $c\in M$ 成立。

我们用 $M\models\varphi(\bar{a})\le\psi(\bar{b})$ 这样的表达式表示 $\varphi^M(\bar{a})\le\psi^M(\bar{b})$。我们也可以写成 $M\models\varphi(\bar{a})=r$ 这样的表达式。

关于空集的上确界和下确界的约定经过选择，使公式始终为实值（而不是取 $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 中的值），并使 sup 和 inf 关于集合包含关系单调，不过我们还需要证明这一点确实成立。

我们经常会使用一些符合常理的简写，例如用 $\varphi+\psi+\theta$ 代替 $\varphi+(\psi+\theta)$，用 $\varphi-\psi$ 代替 $\varphi+(-1)\cdot\psi$，以及用 $|\varphi|$ 代替 $\max(\varphi,-\varphi)$。我们会用 $\sup^{xy}$ 这样的表达式来简写连续的量词。作为符号滥用，我们也会将 $e(x,y)$ 简写为公式 $\inf_{z\Subset y}d(x,z)$。

在度量集合结构 M 的语境中，我们常常会将带有参数的公式（例如对于某个 $\bar{a}\in M$ 的 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$）称为公式，并在书写时省略参数。

连续逻辑中公式的两个重要性质是：它们的取值仅落在某个有界区间内，并且始终是一致连续的。相关区间和一致连续模可以仅由公式本身确定。我们在这里也需要类似的事实。

引理 1.6. 对于任意度量集合结构 $(M, d, \Subset)$ 和公式 $\varphi(\bar{x})$，

(1) $\varphi^M(\bar{a}) \in [-v(\varphi)\ v(\varphi)]$ 对所有 $\bar{a} \in M$ 成立；并且 (2) $\varphi^M\colon M^{|\bar{x}|} \to \mathbb{R}$ 是 $2v(\varphi)$-利普希茨的，意思是对于任意 $\bar{a}, \bar{b} \in M$，$|\varphi^M(\bar{a}) - \varphi^M(\bar{b})| \leq 2v(\varphi)d(\bar{a}, \bar{b})$（其中 $d(\bar{a}, \bar{b})$ 是元组上的最大度量）。

证明. 1 由一个简单的归纳论证以及 d 是 $[0, 1]$ 值的这一事实得出。2 类似地由 $(x, y) \mapsto d(x, y)$ 是 2-利普希茨这一事实得出。□

1.3. 剔除。我们的概括模式最好通过其重要推论来界定，而不是直接定义，因为要证明这一性质甚至是可公理化的，需要一个证明。这个原理可以非正式地这样说明：

假设我们经营一家粉笔厂，并且根据合同有义务生产长度不超过 7.62 厘米的粉笔。（粉笔会由另一家公司装盒，必须能放进他们的盒子里。）当然，我们的机器很便宜，实际生产出的粉笔长度大约在 7.4 厘米到 7.8 厘米之间。为了解决这个问题，我们加装第二台测量长度的机器，并剔除过长的粉笔。为了尽可能提高产量，我们或许会说，只有粉笔长度严格超过 7.62 厘米时才剔除，但受物理测量的现实限制，这实际上不可能做到。由于违反合同的处罚相当严厉，我们需要留出一定余地；但同时也希望确保不会丢弃太多合格的粉笔。因此，我们将机器设定为：测量结果不超过 7.6 厘米时就接受粉笔。我们知道机器的误差不超过 0.01 厘米，因此可以保证接受长度至多为 7.58 厘米的粉笔，并拒收长度达到或超过 7.62 厘米的粉笔；但对于介于这两个界限之间的粉笔，我们不对机器的处理结果作任何保证。[4]

这就是我们近似概括的方式。给定一个公式 $\varphi(x, \bar{y})$（即一个“可测量量”）、界 $r < s$ 和参数 $\bar{a}$，我们保证能够给出一个集合 b，使得对于任意 c，如果 $\varphi(c, \bar{a}) \leq r$，那么 $c \Subset b$；如果 $\varphi(c, \bar{a}) \geq s$，那么 $c \not\Subset b$；但对于那些 c，若 $r < \varphi(c, \bar{a}) < s$，我们不作任何承诺。

定义 1.7。$(M, d, \Subset)$ 满足切除条件，当且仅当对于任意公式 $\varphi(x, \bar{y})$、实数 $r < s$ 和 $\bar{a} \in M$，存在一个 $b \in M$，使得对于任意 $c \in M$，如果 $\varphi(c, \bar{a}) \leq r$，那么 $c \Subset b$；如果 $c \Subset b$，那么 $\varphi(c, \bar{a}) < s$。

不难看出这一原则如何避免罗素悖论，而且这样做也颇有价值。我们可以考虑一个集合 a_r，满足：若 $1 - e(b, b) \leq r$，则 $b \Subset a_r$；若 $b \Subset a_r$，则 $1 - e(b, b) < 1$。随着我们选取的 r 越来越接近 1，我们就能越来越准确地逼近罗素类；但对于每个 r，我们始终有 $r < e(a_r, a_r) < 1$。因此我们可以看到，严格来说，尽管我们的理论是像 $\mathsf{C}\,\mathsf{L}_0$，那样的 $[0, 1]$ 值集合论，但它在

[4]撇开现实不谈，在可计算分析中也会发生类似的事情：我们可以编写一个程序，以与粉笔厂相同的方式离散地排序可计算实数，但只有在允许它在某个间隙中表现出非确定性行为时才能做到这一点。无论如何，这对于某些目的来说已经足够了。

避免罗素悖论方面存在一种性质上的差异。C L_0 或许能够凭借布劳威尔不动点定理避免罗素悖论，而我们的理论则是借助 r 与 s 之间必需的间隙来避免它（尽管这两种现象并非毫无关联）。

现在，我们终于可以在定义理论本身之前，直接定义该理论的模型类。

定义 1.8. 我们称 $(M, d, \in)$ 是 MSE 的一个模型，记作 $(M, d, \in) \models$ MSE 或$M \models$MSE，若它是一个满足切除的度量集合结构。

MSE 代表带切除的度量集合。

以下记号将会很有用。

De定义 1.9. 给定一个度量集合结构 M、一个公式 $\varphi(x, \bar{y})$、元组 $\bar{a} \in M$，以及实数 s $r < s$，我们写作

$$b = [x : \varphi(x, \bar{a}) < r \sim s]$$

表示对于任意 c，若 $\varphi^M(c, \bar{a}) \leq r$，则 $c \in b$；若 $c \in b$，则 $\varphi^M(c, \bar{a}) < s$。

当然要注意，$[x : \varphi(x) < r \sim s]$ 并不是一个唯一确定的对象，但如果 M 满足切除条件，它总是存在的。

立即可以证明，MSE 的模型包含一些在带有普遍集合的集合论中人们所期望看到的熟悉集合。

命题 1.10。对于任意 $M \models$ MSE，都存在 a、$b \in M$，使得对于所有 $c \in M$、$c \notin a$和 $c \in b$。

证明。令 $a = \left[x : 1 < 0 \sim \frac{1}{2}\right]$，以及 $b = \left[x : 0 < \frac{1}{2} \sim 1\right]$。 □

由于这些集合由 H-外延性唯一确定，我们将 $\varnothing^M$ 写作 $\left[x : 1 < 0 \sim \frac{1}{2}\right]$，并将$V^M$ 写作 $\left[x : 0 < \frac{1}{2} \sim 1\right]$。若不会引起混淆，我们可以省略上标 M。

2. Derived forms of comprehension

本节将说明，MSE 的模型会自动满足某些精确概括的实例。

2.1. 相对切除。集合论中一种重要且常见的构造是分离，即相对于给定集合进行概括。通常，分离是概括的一个简单推论——$\{x \in A : \varphi(x)\}$ 与集合 $\{x : x \in A \wedge \varphi(x)\}$相同——但鉴于切除只不过是概括的一种近似形式，人们可能会担心我们只能找到近似地包含于其他给定集合中的集合。换言之，若 B 是 $\{x : x \in A \wedge \varphi(x)\}$的粗略近似，那么对于某个很小但为正的 r，也只能有 $x \in B \Rightarrow e(x, A) < r$。幸运的是，我们能够构造给定集合的精确子集，从而进行相对切除。

定义 2.1。对于任意 a、$b \in M$，在度量集合结构中，我们用 $a \sqsubseteq b$ 表示：对于所有 $c \in M$，若 $c \in a$，则 $c \in b$。

以下是相对切除的一个特例，但我们先陈述它，因为这是我们实际会用到的唯一一种相对切除形式，而且证明起来要容易得多。

[5]20 世纪 50 年代和 60 年代，少数几位作者证明了该理论的若干片段是一致的 [3, 4, 16]。White 声称给出了完整的一致性证明，见 1979 [20], ，但 Terui 在 2010 [18] 发现了一个看似致命的漏洞，而一致性问题至今仍未解决。

命题 2.2（离散分离）。固定 $M \models \mathrm{MSE}$ 和 $\bar{a}$ 及 b 于 M。对于任意公式$\varphi(x,\bar{a})$ 及 $r<s$，若对所有 $c \in b$，$\varphi^M(c,\bar{a}) \leq r$ 或 $\varphi^M(c,\bar{a}) \geq s$，则存在一个 $f \sqsubseteq b$，使得 $c \in f \Leftrightarrow \varphi^M(c,\bar{a}) \leq r$。

证明。若对每个 $n \in \mathbb{N}$，$f_n = [x : \max(\varphi(x,\bar{a}) - r, e(x,a)) < 0 \sim 2^{-n}]$，则 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个柯西序列，其极限为所需集合。□

引理 2.3。固定 $M \models \mathrm{MSE}$。对于任意 a、$b \in M$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个 $c \sqsubseteq a$，使得 t

$$d(b,c) \leq \sup_{f\in b} \inf_{g\in a} d(f,g) + \varepsilon.$$

证明。固定 $\varepsilon > 0$。令 $c_0 = b$。对于任意 n，令 $t_n := \sup_{f\in c_n} \inf_{g\in a} d(f,g)$。在第 n 阶段，给定c_n，令

$$c_{n+1} = \left[x : \max(e(x,a), e(x,b) - t_n) < 2^{-n-4}\varepsilon \sim 2^{-n-3}\varepsilon\right].$$

注意，对于任意 $f \in M$，若 $f \in a$ 且 $e(f,c_n) < t_n + 2^{-n-4}\varepsilon$，则 $f \in c_{n+1}$；若$f \in c_{n+1}$，则 $e(f,a) < 2^{-n-4}\varepsilon$ 且 $e(f,c_n) < t_n + 2^{-n-3}\varepsilon$。特别地，$t_{n+1} \leq 2^{-n-3}\varepsilon$。另请注意，根据 t_n 的定义，对于任意 $g \in c_n$，存在一个 $f \in a$，使得 $d(f,g) < t_n + 2^{-n-4}\varepsilon$。这样的 g 必须是 c_{n+1}的一个元素。由于对任意 $f \in c_n$ 都可以这样做，因此有 $d(c_n, c_{n+1}) \leq \max(t_n + 2^{-n-4}\varepsilon, t_n + 2^{-n-3}\varepsilon) = t_n + 2^{-n-3}\varepsilon$。因此，对于任意 $n > 0$，有 $d(c_n, c_{n+1}) \leq 2^{-n-2}\varepsilon + 2^{-n-3}\varepsilon < 2^{-n-1}\varepsilon$。所以 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个柯西序列。令 $c = \lim_{n\to\infty} c_n$。

由于 $t_n \to 0$ as $n \to \infty$，我们有 $c \sqsubseteq a$。现在只需验证 $d(b,c) \leq t_0 + \varepsilon$。我们的估计表明

$$d(b,c) \leq d(c_0,c_1) + d(c_1,c) \leq t_0 + 2^{-4}\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1}\varepsilon < t_0 + \varepsilon,$$

如所需。 □

命题 2.4（相对切除）。若 $M \models \mathrm{MSE}$，则对于任意实值公式$\varphi(x,\bar{y})$、$\bar{a}$、$b \in M$以及实数 $r<s$，存在一个 $c \in M$，满足 $c \sqsubseteq b$，使得对于任意 $f \in b$，若$\varphi(f,\bar{a}) \leq r$，则 $f \in c$；且若 $f \in c$，则 $\varphi(c,\bar{a}) < s$。

证明。固定 $\varphi(x,\bar{y}) \in \mathcal{L}_{\in}$、$\bar{a}$以及 M 中的 b，并取 $\delta > 0$，使得 $\delta < {}_{4v}{}^{1}(\varphi)$。

令 $c = [x : \max(\varphi(x,\bar{a}) - e(x,b)) < 0 \sim \delta]$。注意，$\sup_{x\in c} \inf_{y\in b} d(x,y) \leq \frac{1}{2}\delta$。应用引理 2.3 于 c，得到一个 $f \sqsubseteq b$，使得 $d(c,f) < \delta$。现在，对于任意 g，若 $g \in b$ 且 $\varphi(g,\bar{a}) \leq 0$，则 $e(g,f) < \delta$；若 $e(g,f) \leq {}_{6v}{}^{1}(\varphi)$，则 $e(g,c) \leq {}_{4v}{}^{1}(\varphi) + \delta < {}_{2v}{}^{1}(\varphi)$，因此 $\varphi(g,\bar{a}) < {}_{2v}{}^{1}(\varphi)$。

由于对于任意 $\varphi(x,\bar{y})$ 和 $\bar{a} \in M$，我们都可以这样做，因此 M 满足相对于集合 b 的定义 5.5。然后，只需将引理 5.6 和命题 5.7 的证明相对于集合 b 重复一遍，即可得到该命题。□

根据命题 2.2 和命题 2.4，我们将记作

$$c = [x \in b : \varphi(x,\bar{a}) < r \sim s]$$

表示，对于任意 $f \in M$，若 $f \in b$和 $\varphi^M(f,\bar{a}) \leq r$，则 $f \in c$；并且若 $f \in c$，则 $f \in b$ 和 $\varphi^M(f,\bar{a}) < s$。

2.2. 可定义类的概括公理。鉴于命题 2.4，人们或许会想问，我们能否直接证明 MSE 的模型满足一种更传统形式的概括公理。假设有公式 $\varphi(x)$，并且我们希望构造集合$\{x \in M: \varphi^M(x) = 0\}$。难道我们不能直接构造序列 $a_n = [x: |\varphi(x)| < 0 \sim 2^{-n}]$，再取其极限序数吗？虽然我们完全能够在外部构造这个序列，但困难在于，它通常不会是柯西序列。

无论如何，有时这样一个逼近序列确实会在豪斯多夫度量下收敛，从而得到精确概括的一个实例。当且仅当 $\{x \in M: \varphi^M(x) = 0\}$ 是连续逻辑意义下的可定义集合时，才会发生这种情况；不过在集合论的语境中，将这些称为可定义类会更合适。就本文而言，我们不需要可定义集的完整一般性。

定义 2.5. 若闭子集 $D \subseteq M^n$ 满足函数 $\bar{x} \mapsto \inf_{\bar{a}\in D} d(\bar{x}, \bar{a})$ 是形如 $\varphi^M(\bar{x}, \bar{b})$ 的函数的一致收敛极限，其中 $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{L}_{\sqsubseteq}$ 且 $\bar{b} \in M$，则称其为可定义类。若无需参数即可见证其可定义性，则称 D 为无参数可定义。

D 是显式可定义类[6]，当且仅当存在一个 $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{L}_{\sqsubseteq}$ 以及一个元组 $\bar{b}$使得 $\inf_{\bar{a}\in D} d(\bar{x}, \bar{a}) = \varphi^M(\bar{x}, \bar{b})$。

$\bar{x} \mapsto \inf_{\bar{a}\in D} d(\bar{x}, \bar{a})$ 称为 D的距离谓词，也可以写作$e(\bar{x}, D)$。

这个定义最有力的依据或许是，可定义类
恰好是那些允许相对量化的类。

引理 2.6. 对任意度量集合结构 M和 $\bar{a} \in M$，若 $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$是可定义类 $D \subseteq M^n$的距离谓词，则对任意 $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$和 $\bar{c} \in M$，

$$\left(\inf_{\bar{x}} \min(\psi(\bar{x}, \bar{c}, \bar{b}) + 2v(\psi)\varphi(\bar{x}, \bar{a}), v(\psi))\right)^M = \inf\{\psi^M(\bar{f}, \bar{c}, \bar{b}) : \bar{f} \in D\},$$

其中，$\inf \varnothing$ 理解为 $v(\psi)$。

证明。令 $r = \inf_{\bar{x}} \min(\psi(\bar{x}, \bar{c}, \bar{b}) + 2v(\psi)\varphi(\bar{x}, \bar{a}), v(\psi))$且 $s = \inf\{\psi^M(\bar{f}, \bar{c}, \bar{b}) : \bar{f} \in D\}$.

若 D 为空，则 $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) = 1$，结论成立。

若 D 非空，则显然有 $r \leq s$，因为 $\psi(\bar{x}, \bar{c}, b) \in [-v(\psi), v(\psi)]$ 由引理 1.6 得出。对于另一个方向，固定 $\bar{g} \in M$。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $f \in D$，使得 $d(f, \bar{g}) < e(\bar{g}, D) + \varepsilon$。由引理 1.6，$\bar{x} \mapsto \psi(\bar{x}, \bar{c}, b)$是 $2v(\psi)$-利普希茨的，因此 $\psi(\bar{g}, \bar{c}, b) + 2v(\psi)\varphi(\bar{g}, \bar{a}) \geq \psi(f, \bar{c}, b)$，从而$\min(\psi(\bar{g}, \bar{c}, b) + 2v(\psi)\varphi(\bar{g}, \bar{a}), v(\psi)) \geq \psi(f, \bar{c}, b)$。由于对任意 $\bar{g} \in M$都可以这样做，因此有 $r \geq s$，证明完毕。□

一般而言，在连续逻辑中，可定义类可以刻画为那些能够像引理 2.6 中那样进行相对量化的集合。此外，在 MSE 的模型中，单元组的可定义类与集合恰好一一对应。特别地，每个可定义类都可以由某个 a 显式定义为 $e(x, a)$。

命题 2.7。设 $M \models \mathrm{MSE}$。闭集 $D \subseteq M$ 是可定义类，当且仅当存在一个 $a \in M$ 使得 $D = \{b \in M: b \sqsubseteq a\}$。

证明。$\Leftarrow$ 方向显然。为证明 $\Rightarrow$ 方向，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 找出一个公式 $\varphi_n(x, \bar{a}_n)$，使得 $\sup_x |\varphi_n(x, \bar{a}_n) - e(x, D)| < 2^{-n}$。令 $b_n = \left[x: \varphi_n(x, \bar{a}_n) < 2^{-n} \sim 2^{-n+1}\right]$。

[6]在连续逻辑中，显式可定义性没有标准术语，因为这并不是一个完全自然的概念。

注意，若 $c \in D$，则 $c \sqsubset b_n$；若 $c \sqsubset b_n$，则 $e(c, D) < 2^{-n+1} + 2^{-n} < 2^{-n+1}$。这意味着 $d_{\mathrm{H}}(\{x \in M : x \sqsubset b_n\}, D) \leq 2^{-n+1}$，因此序列$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$是一个柯西序列，并且 $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ 具有这样的性质：$c \sqsubset b$ 当且仅当 $c \in D$。□

命题 2.7 让我们能够回答一些此前尚未解决的非常基本的问题。

推论 2.8。固定 $M \models$MSE。

(1)（单元素集）对于任意 $a \in M$，存在一个 $b \in M$，使得 $c \sqsubset b$ 当且仅当 $c = a$。(2)（有限并）对于任意 a、$b \in M$，存在一个 $c \in M$，使得 $f \sqsubset c$ 当且仅当 $f \sqsubset a$ 或 $f \sqsubset b$。(3)（有限集）对于任意 a_0、……、$a_{n-1} \in M$，存在一个 $b \in M$，使得 $c \sqsubset b$ 当且仅当对于某个 $i < n$，$c = a_i$。(4)（并集的闭包）对于任意 $a \in M$，存在一个 $b \in M$，使得 $c \sqsubset b$ 当且仅当 b 属于 $\{f \in M$ 的度量闭包：$(\exists g \sqsubset a) f \sqsubset g\}$。

证明。（1）这由公式 $d(x, a)$ 见证。（2）这由公式 $\min(e(x, a)\ e(x, b))$ 见证。（3）这由 1 和 2 通过归纳得出。（4）这由公式 $\inf_{y\sqsubset a} e(x, y)$ 见证。□

然而，遗憾的是，通常无法根据到 X 和 Y 的距离，计算到两个集合 X 和 Y 的交集的距离。因此，我们无法一般性地证明交集的存在。不过，我们确实可以得到一种近似交集，其形式为 $[x \sqsubset a : e(x, b) < 0 \sim \varepsilon]$。

推论 2.8 的一个小推论是，MSE 的模型满足 $d(x, y) = \sup_z |e(x, z) - e(y, z)|$，其见证是单元素集合 $\{x\}$。在 $[0, 1]$ 值集合论中，量 $1 - \sup_z |e(x, z) - e(y, z)|$ 通常称为莱布尼茨等同，因为它表示 x 和 y 彼此无法区分的程度。

鉴于推论 2.8，我们将用 $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ 表示包含a_0、a_1、……、a_{n-1}的有限集，用 $a \sqcup b$ 表示 a 与 b的并集，并用 $\overline{\bigsqcup a}$ 表示 a中各元素之并集的闭包。

既然根据推论 2.8，我们已经能够构造有限集，就可以自由地对有序对进行编码。虽然我们当然可以使用标准的库拉托夫斯基有序对，但出于技术上的原因，Wiener 早先给出的定义对我们来说其实更可取。[7] 因此，我们将把$\langle a, b\rangle$记作 $\{\{\{a\}, \varnothing\}, \{\{b\}\}\}$。回想一下，$d(ab, cf) := \max(d(a, c)\ d(b, f))$。

引理 2.9。设 $M \models$MSE。对于任意 a、b、c、$f \in M$，

$$d(\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle) = d(ab, cf).$$

证明。设 $A = \{\{a\}, \varnothing\}$、$B = \{\{b\}\}$、$C = \{\{c\}, \varnothing\}$ 和 $F = \{\{f\}\}$。我们有

$$d(\{A, B\}, \{C, F\}) = \max(e(A, \{C, F\}), e(B, \{C, F\}), e(C, \{A, B\}), e(F, \{A, B\})).$$

对于任意 x、$d(\{x\}, \varnothing) = 1$。这也意味着，对于任意 x 和 y，$d(\{\{x\}, \varnothing\}, \{\{y\}\}) = 1$。例如，这意味着

$$e(A, \{C, F\}) = \min(d(A, C), d(A, F)) = \min(d(A, C), 1) = d(A, C).$$

[7] 若 $\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$，则经过直接但繁琐的计算可得 $d(\langle a, b\rangle, \langle c, f\rangle) = \max(d(a, c), \min(d(b, f), \max(d(a, f)\ d(b, c))))$，因此 $d(\langle a, b\rangle, \langle c, f\rangle) \leq d(ab, cf) \leq 3d(\langle a, b\rangle, \langle c, f\rangle)$。令 $\langle a, b\rangle = \langle 2, 0\rangle$ 和 $\langle c, f\rangle = \langle 1, 3\rangle$ 取 $\mathbb{R}$ 中的值，可知这是最优的。不过，如果 d 是超度量，我们确实有 $d(\langle a, b\rangle, \langle c, f\rangle) = d(ab, cf)$。

这一点与其他三个项的类似事实共同意味着

$$\begin{aligned} d(\{A,B\},\{C,F\}) &= \max(d(A,C),d(B,F),d(C,A),d(F,B)) \\ &= \max(d(A,C),d(B,F)). \end{aligned}$$

最后，对于任意 x 和 y， $d(\{\{x\}\},\{\{y\}\}) = d(x,y)$ 且 $d(\{\{x\},\varnothing\},\{\{y\},\varnothing\}) = d(x,y)$，因此我们得到 $d(\langle a,b\rangle,\langle c,f\rangle) = d(\{A,B\},\{C,F\}) = d(ab,cf)$，如所需。□

引理 2.9 意味着，有序对序列只能收敛到一个有序对，而且有序对序列的收敛具有预期的性质。特别地，有序对类是闭的。

再多做一些工作，我们就能证明幂集的存在性。

命题 2.10（幂集）。对于任意 $a \in M$，存在一个 $b \in M$，使得 $c \sqsubseteq b$ 当且仅当 $c \sqsubseteq a$。

证明。首先注意，根据豪斯多夫度量的基本性质，类 $\mathcal{P}(a) := \{c \in M : c \sqsubseteq a\}$ 必然是闭的。由引理 2.3 可知，对于任意 $f \in M$，

$$\inf_{g\in\mathcal{P}(a)} d(f,g) \leq \sup_{y\sqsubseteq f}\inf_{z\sqsubseteq a} d(y,z).$$

另一方面，对于任意的 $g \in \mathcal{P}(a)$，我们必有

$$\sup_{y\sqsubseteq f}\inf_{z\sqsubseteq a} d(y,z) \leq \sup_{y\sqsubseteq f}\inf_{z\sqsubseteq g} d(y,z) \leq d(f,g),$$

由 Inf 的单调性可知。因此，

$$\sup_{y\sqsubseteq f}\inf_{z\sqsubseteq a} d(y,z) \leq \inf_{g\in\mathcal{P}(a)} d(f,g),$$

所以这两个量实际上相等。因此，根据命题 2.7， $\mathcal{P}(a)$ 是一个可定义类，并且与某个元素 $b \in M$ 相外延。□

我们用 $\mathcal{P}(a)$ 表示 a 的幂集。

2.3. 可定义函数与替代。既然我们确信有序对存在，接下来很自然要考虑的就是笛卡尔积。为了证明类 $a \times b := \{\langle c,f\rangle : c \sqsubseteq a,\ f \sqsubseteq b\}$ 可定义，因而是一个集合，我们希望能够写出如下的实值公式：

$$\varphi(x) = \inf_{y\sqsubseteq a}\inf_{z\sqsubseteq b} d(x,\{\{\{a\},\varnothing\},\{\{b\}\}\}).$$

如果确实有这个公式，那么 $\varphi(x)$ 当然就是 x 到类 $a \times b$的点集距离。问题在于，函数 $x \mapsto \{x\}$ 和 $(x,y) \mapsto \{x,y\}$ 以及常元 $\varnothing$并非形式上属于我们的逻辑。

不过，在实践中，离散逻辑领域通常认为，可以放心地假定某些函数——即可定义函数——在形式上属于语言，含义如下：给定一个离散结构 M，函数 $f : M^n \to M$可定义，当且仅当对于每个公式 $\varphi(\bar{x},y,\bar{z})$，都存在一个公式 $\psi(\bar{x},\bar{z})$，使得

对于任意 $\bar{a},b \in M$, $M \models \varphi(\bar{a},f(\bar{a})\ b)$ 当且仅当 $M \models \psi(\bar{a},b)$。容易证明，这等价于 f 的图是 M^{n+1}的可定义子集。

在连续逻辑中，也可以做类似的事：

定义 2.11. 给定一个集合 $X \subseteq M^n$，函数 $f\colon X \to M$ 是可定义的，如果对于每个$\varepsilon > 0$，都存在一个 $\varphi(\bar{x}, y, \bar{z}) \in \mathcal{L}_{\in}$和一个 $\bar{c} \in M$，使得对于任意 $\bar{a} \in X$和 $b \in M$，$|d(f(\bar{a})\ b) - \varphi^M(\bar{a}, b, \bar{c})| < \varepsilon$。

f是显式可定义的，如果存在一个 $\varphi(\bar{x}, y, \bar{z}) \in \mathcal{L}_{\in}$和一个元组 $\bar{c}$，使得对于每个 $\bar{a} \in X$和 $b \in M^{n+1}$，$d(f(\bar{a})\ b) = \varphi^M(\bar{a}, b, \bar{c})$。

如果 $X = M^n$，我们称 f 是一个（显式）可定义全函数。否则，它是一个（显式）可定义偏函数。[8]

给定一个函数 $g\colon M^n \to M$，如果 $g{\restriction}X$是（显式）可定义的，我们就称 g在 X上是（显式）可定义的。

当 X 本身可定义时，不难证明，f 可定义，当且仅当它一致连续且其图可定义（按照定义 2.5 中相对于元组上的最大度量的意义）。

同样，虽然可以给出更一般的陈述（见 [1, 第 9] 节），但我们实际上只需要显式可定义函数。[9]

引理 2.12. 对于任意度量集合结构 M、公式 $\varphi(\bar{x}, y, \bar{z})$，以及定义域为 $X \subseteq M^n$ 的显式可定义函数 $f(\bar{x})$，存在一个公式 $\psi(\bar{x}, \bar{z})$（可能带有参数），使得对于所有 $\bar{a} \in X$和 $\bar{b} \in M$, $\psi^M(\bar{a}, \bar{b}) = \varphi^M(\bar{a}, f(\bar{a})\ \bar{b})$。

证明. 设 $f(\bar{x})$ 在 X 上由 $\chi(\bar{x}, y)$ 定义（可能带有参数）。按照引理 2.6 的证明中相同的论证，公式 $\inf_y \varphi(\bar{x}, y, \bar{z}) + 2v(\varphi)\chi(\bar{x}, y)$ 就是所需的 $\psi(\bar{x}, \bar{z})$。□

引理 2.12 的一个推论是，显式可定义函数的复合仍是显式可定义的。（可定义函数也有此性质，但我们不会用到。）

I很容易看出，我们在第 2.2 节中确立的运算实际上都是可定义的 :

命题2.13。设 $M \models$MSE。以下函数都是显式可定义的。

(1) $() \mapsto \varnothing^M$。(2) $() \mapsto V^M$。(3) $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$。(4) $(x, y) \mapsto x \sqcup y$。(5) $x \mapsto \overline{\bigsqcup x}$。(6) $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$。(7) $x \mapsto \mathcal{P}(x)$。

证明。这些函数的可定义性由以下公式见证。

(1) $d(y, \varnothing) = 1 - \mathrm{Inf}_{z \in y}\, d(z, z)$. (2) $d(y, V) =$上确界$_z\, e(z, y)$. (3) $d(y, \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}) =$上确界$_z\, |e(z, y) -$最小值$(d(z, x_0) \ldots, d(z, x_{n-1}))|$. (4) $d(z, x \sqcup y) =$上确界$_w\, |e(w, z) -$最小值$(e(w, x)\ e(w, y))|$. (5) $d\left(y, \overline{\bigsqcup x}\right) =$上确界$_z\, |e(z, y) - \mathrm{Inf}_{w \in x}\, e(z, w)|$. (7) $d(y, \mathcal{P}(x)) =$上确界$_z\, \left|e(z, y) -$上确界$\mathrm{Inf}_{v \in x}\, d(u, v)\right|$.

6 可由以下事实推出：$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ 是其他显式可定义函数的复合。□

[8]请注意，与离散一阶逻辑不同，在连续逻辑中，可定义偏函数并不总能扩展为可定义全函数 [8, C.1.2].[9]不过请注意，在可定义集合方面，对于 MSE 的模型这一特殊情形，所有可定义集最终都是显式可定义的。非利普希茨可定义函数似乎不太可能也具有这一性质。

现在，最后我们可以回到如何构造两个集合的笛卡尔积这一问题。相关事实如下:

命题 2.14（可定义函数的像）。设 $M \models \mathrm{MSE}$。对于任意可定义$^-$ $^-$函数 f: $X \to M$ 以及任意 $a_0, \dots, a_{n-1} \in M$，若 $b \in X$ 对任意满足条件 $b_i \in a_i$ 且对每个 $i < n$ 的元组 b都成立，则 $\{f(b_0, \dots, b_{n-1}) : b_0 \in a_0, \dots, b_{n-1} \in a_{n-1}\}$ 的度量闭包是一个可定义类。

证明。$\inf_{x_0 \in a_0} \cdots \inf_{x_{n-1} \in a_{n-1}} d(x, f(x_0, \dots, x_{n-1}))$显然是所讨论类的距离谓词。根据引理 2.12，这等价于一个公式。□

推论 2.15（笛卡尔积）。设 $M \models \mathrm{MSE}$。对于任意 $a, b \in M$，存在一个 $c \in M$，使得 $f \in c$ 当且仅当 $f = \langle g, h \rangle$ 对于某个 $g \in a$ 和 $h \in b$成立。

证明。根据命题 2.14，$a \times b := \{\langle x, y \rangle : x \in a, y \in b\}$ 的度量闭包是一个可定义类。根据第 2.2 节末尾的讨论，$a \times b$ 已经是度量闭合的，因此它是一个可定义类。根据命题 2.7，我们得到所需的c存在。□

我们用 $a \times b$ 表示推论 2.15 中确立其存在的集合。

值得注意的是，推论 2.15 的证明实际上确立了函数 $(x, y) \mapsto x \times y$ 是显式可定义的，其见证公式为 $\inf_{w \in x} \inf_{u \in y} d(z, \langle w, u \rangle)$。

有时，我们需要将有序对的集合投影到其坐标上。由于投影函数 $\pi_0(\langle x, y \rangle) = x$ 只是部分定义的，这是我们第一次需要运用可谈论可定义偏函数这一更一般的能力。

命题 2.16。设 $M \models$MSE。设 π_0 和 π_1 是定义在有序对类上的函数，由 $\pi_0(\langle x, y \rangle) = x$ 和 $\pi_1(\langle x, y \rangle) = y$ 定义。π_0 和 π_1 是显式可定义的。

证明。这可由公式 $\inf_z d(\langle y, z \rangle, x)$ 和 $\inf_z d(\langle z, y \rangle, x)$ 见证。□

以下事实也将会有用。

引理 2.17。固定闭集 $X \subseteq M^n$ 和 $Y \subseteq M^{n+1}$。假设存在公式$\varphi(\bar{x}, y)$，使得对任意 $\bar{a} \in X$ 和 $b \in M$，$\varphi^M(\bar{a}, b) = e(b, \{y : (\bar{a}, y) \in Y\})$。那么存在显式可定义函数 $f : X \to M$，使得对任意 $\bar{a} \in X$，$f(\bar{a})$ 与 $\{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$ 共外延。

证明。公式 $\psi(\bar{x}, z) = \inf_y |e(y, z) - \varphi(\bar{x}, y)|$ 证明所需函数是显式可定义的。□

引理 2.18. 若 $f : a \to M$ 是在某个集合 a 上的显式可定义偏函数，则映射 $x \mapsto \{f(y) : y \in x\}$ 是在集合 $\mathcal{P}(a)$ 上的显式可定义偏函数。

证明。设 $\varphi(y, z)$ 是一个公式（可能含有参数），使得对所有 $b \in a$ 和 $c \in M$，都有 $\varphi^M(b, c) = d(b, f(c))$。现在，对于任意 $g \subseteq a$，$\inf_{z \in g} \varphi(y, z)$ 是 $\{f(y) : y \in g\}$ 的距离谓词。因此，根据引理 2.17，所需函数是可定义的。□

2.4. 离散等价关系的商集。一种常见的技巧是从等价关系转向其等价类构成的集合。对于离散等价关系，我们可以这样做。

定义 2.19. 固定一个度量集合结构 M。给定一个集合 $a \in M$，公式 $\varphi(x, y)$ 是 a上的离散等价关系，当且仅当对于所有 $b, c \in a$，$\varphi^M(b, c)$ 的值为 0 或 1，并且 $\varphi^M(x, y) = 1$是 $\{b \in M$ 上的等价关系: $b \in a\}$。

首先，我们需要做一个小小的观察。

引理 2.20。设 $M \models \mathrm{MSE}$。若 $\varphi(x,y)$ 是 $a \in M$ 上的离散等价关系，则对于任意 $b \Subset a$，

$$\psi(x,b) \coloneqq \inf_{y \Subset a} \max(\varphi(y,b), d(x,y))$$

是 φ-等价类 b 的距离谓词。 □

命题 2.21。设 $M \models \mathrm{MSE}$。若 $\varphi(x,y)$ 是 $a \in M$ 上的离散等价关系，则存在一个 $b \in M$，恰好包含 a 的 φ-等价类。

此外，若 c 是一个集合，使得对于每个 $a \Subset c$，$\varphi(x,y)$ 都是其上的离散等价关系，则将 a 映射到 a 的 φ-等价类集合的映射，是 c 上的显式可定义偏函数。

证明。引理 2.20 中的公式在 a 上定义了一个偏函数，将元素映射到其 φ-等价类。因此，根据命题 2.14，a 的 φ-等价类的类的闭包是 M 中的一个集合。根据引理 2.20，φ-等价类的类是闭集，故得证。

“此外”的陈述由引理 2.17 得出。 □

3. Uniformly discrete sets and ordinary mathematics

实现某种近乎不受限制的概括的集合论模型，通常都有一类驯良集，在其中不受限制的分离是一致的。在 NFU 中，强坎托尔集在这方面表现良好；在 GPK^+_∞ 中，孤立点闭集也同样表现良好。在 MSE 的语境下，与之类似、表现良好的一类集合似乎是一致离散集。

定义 3.1。在度量集合结构 M 中，元素 $a \in M$ 是 ε-离散的，如果对于任意 b、$c \Subset a$，要么 $b = c$，要么 $d(b, c) \geq \varepsilon$。a 是一致离散的，如果它对某个 $\varepsilon > 0$ 是 ε-离散的。

定义 3.2. 对任意 a 和 b，a 和 b 的不交并，记作 $a \uplus b$，是 $(a \times \{\varnothing\}) \sqcup (b \times \{\{\varnothing\}\})$。

注意到，$(x,y) \mapsto x \uplus y$ 是一个显式可定义函数，这一点显而易见。

引理 3.3. 设 $M \models \mathrm{MSE}$。若 $a, b \in M$ 是 ε-离散的，则 $a \uplus b$, $a \times b$，且 $\mathcal{P}(a)$ 是 ε-离散的。

证明。若 a 为空，则引理中的结论显然成立；若 b 为空，则关于 $a \uplus b$ 和 $a \times b$ 的结论显然成立。因此，假设 a 和 b 均非空。固定 $c, f \Subset a$ 和 $g, f \Subset b$。

对于不交并，我们有 $d(\langle c, \varnothing\rangle, \langle g, \{\varnothing\}\rangle) = d(\varnothing, \{\varnothing\}) = 1$。此外，$d(\langle c, \varnothing\rangle, \langle f, \varnothing\rangle) = d(c, f)$，且 $d(\langle g, \{\varnothing\}\rangle, \langle f, \{\varnothing\}\rangle) = d(g, f)$，因此 $a \uplus b$ 是 ε-离散的。

对于笛卡尔积，如果 $\langle c、g\rangle \neq \langle f、h\rangle$，那么要么 $c \neq f$，要么 $g \neq h$。无论哪种情况，我们都有 $d(\langle c、g\rangle、\langle f、h\rangle) \geq \varepsilon$。

对于幂集，如果 $c \neq f$，那么我们不失一般性地可以假设存在一个 g，使得 $g \Subset c$，但 $g \notin f$。由于对所有 $h \Subset f$，都有 $g \neq h$，我们有 $e(g、h) \geq \varepsilon$（因为 a 是 ε-离散的）。因此 $d(c、f) \geq \varepsilon$。□

请注意，引理 3.3 依赖于我们使用维纳序对而非库拉托夫斯基序对。虽然这看起来只是一个表面问题，但最终它会在引理 3.3 中产生影响。

在一致离散集中，我们通常能够以熟悉的离散方式进行推理。为区分离散公式与实值公式，我们通常用大写希腊字母表示离散公式。

定义 3.4。给定一个由形式类型变量组成的元组 $\bar{a}$，我们将包含 $\{a_0, a_1, \dots\}$ 且包含（形式表达式）$b \times c$ 和 $\mathcal{P}(b)$（对任意 b、$c \in A^*$ 均成立）的最小表达式集合记为 $\bar{a}^*$。

我们用 $\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$ 表示满足以下条件的最小公式集（其中 $b$and c 是 $\bar{a}^*$ 的元素）：

- 对于任意 $x{:}b$ 和 $y{:}c$，$x = y$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$。
- 对于任意 $x{:}b$、$y{:}c$ 和 $z{:}b \times c$，$\langle x, y\rangle = z$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$。
- 对于任意 $x{:}b$ 和 $y{:}\mathcal{P}(b)$，$x \sqsubseteq y$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$。
- 对于 Φ，$\Psi \in \mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$、$\Phi \wedge \Psi$、$\Phi \vee \Psi$、$\Phi \to \Psi$ 和 $\neg\Phi$ 均属于 $\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$。
- 对于 $\Phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$ 和 $x{:}b$，$(\exists x{:}b)\Phi$ 以及 $(\forall x{:}b)\Phi$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$。

如果我们希望指定公式 $\Phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$ 的变量和形式类型变量，就记作 $\Phi(\bar{x}; \bar{a})$（其中 Φ 的自由变量都属于 $\bar{x}$）。

MSE 公式 $\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$ 中的形式类型变量，意在解释为模型中的一致离散集合；在这种情况下，类型为 a 的变量可以取 a中的值。于是，公式的解释就很明确了：

定义 3.5。固定 $M \models \mathsf{MSE}$。给定公式 $\Phi(\bar{x}; \bar{a}) \in \mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$、一个与 $\bar{a}$长度相同的元组 $b \in M$，以及一个与 $\bar{x}$长度相同的元组 $\bar{c}$，若对每个 $c_i \in \bar{c}$，当 x_i 是类型为 $t(\bar{a})$ 的变量（其中 $t(\bar{a})$ 是一个形式类型表达式）时，满足$c_i \sqsubseteq t(b)$（其中 t 现在被解释为涉及 M 中的函数 $\times$ 和 $\mathcal{P}$的字面表达式），则称 $\Phi(\bar{c}; b)$ 是类型良好的。

如果 $\Phi(\bar{c}; b)$ 类型良好，我们就写作 $M \models \Phi(\bar{c}; b)$，表示 $(M, \sqsubseteq)$ 在作为离散结构时满足 $\Phi(\bar{c}; b)$（其中诸如 $\exists x{:}t(b)$ 的量词解释为 $\exists x \sqsubseteq t(b)$）。

现在我们将看到，只要 b 中的集合是 ε-离散的，就可以用一种大体统一的方式，将这类离散公式表示为实值公式。

定义 3.6. 给定一个形式类型变量元组 $\bar{a}$、一个公式 $\Phi(\bar{x}) \in \mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$ 以及$\varepsilon > 0$，我们将由以下归纳过程定义的实值公式记作 $[\![\Phi]\!]_\varepsilon(\bar{x}; \bar{a})$：

- $[\![x = y]\!]_\varepsilon = \max\left(1 - \frac{1}{\varepsilon} d(x, y),\ 0\right)$。
- $[\![\langle x, y\rangle = z]\!]_\varepsilon =$最大 $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon} d(\langle x, y\rangle, z),\ 0\right)$。
- $[\![x \sqsubseteq y]\!]_\varepsilon = \max\left(1 - \frac{1}{\varepsilon} e(x, y),\ 0\right)$。
- $[\![\Phi \wedge \Psi]\!]_\varepsilon = \min\left([\![\Phi]\!]_\varepsilon, [\![\Psi]\!]_\varepsilon\right)$。
- $[\![\neg\Phi]\!]_\varepsilon = 1 - [\![\Phi]\!]_\varepsilon$。
- $[\![(\exists x{:}a)\Phi]\!]_\varepsilon = \sup_{x \sqsubseteq a} [\![\Phi]\!]_\varepsilon$。

其他布尔联结词和全称量词以通常的方式由上述内容定义。

命题 3.7。固定 $M \models$MSE。对于任意类型为变量的形式元组 $\bar{a}$ 以及任意公式 $\Phi(\bar{x}; \bar{a}) \in \mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$，对于任意 ε-离散集合 $b \in M$ 以及满足 $\Phi(b; \bar{c})$ 类型良好的任意 $\bar{c} \in M$，我们有：$M \models \Phi(\bar{b}; \bar{c})$ 当且仅当 $([\![\Phi]\!]_\varepsilon(\bar{b}; \bar{c}))^M = 1$，并且 $M \models \neg\Phi(\bar{b}; \bar{c})$ 当且仅当 $([\![\Phi]\!]_\varepsilon(\bar{b}; \bar{c}))^M = 0$。

证明。由对 $\mathcal{L}_{\mathrm{dis}}(\bar{a})$ 中公式构造的归纳，立即可得。 □

根据命题 3.7，我们现在可以在一致离散集的语境中，放心地讨论熟悉的离散概念。特别是，我们可以进一步发展基数的概念。

定义 3.8。给定一致离散集 a、$b \in M \models \mathsf{MSE}$，我们记 $M \models a \approx b$，表示存在一个 $c \sqsubseteq a \times b$，它是 a 与 b 之间双射的图。

显然，存在一个 $\mathcal{L}_{\text{dis}}(a,b)$-公式 $\eta(x,y)$，具有如下性质：若 a 和 b 是 ε-离散的，$c \sqsubseteq a$，且 $f \sqsubseteq b$，则 $M \models [\![\eta(c,f)]\!]_\varepsilon$ 当且仅当 $M \models c \approx f$。对于这个公式，我们记作 $x \approx_{a,\ b} y$。我们将 $\approx_a$ 记作 $\approx_{a,\ a}$。显然，只要 a 是 ε-离散的，$[\![x \approx_a y]\!]_\varepsilon$ 就是 $\mathcal{P}(a)$ 上的等价关系。

定义 3.9. 给定一个 ε-离散集 a，a 的一个基数是一个 $[\![x \approx_a y]\!]_\varepsilon$-等价类。我们将 $_a$ 记作 a的基数的集合。

给定 $b \sqsubseteq a$，我们将 $|b|_a$ 记作 b的 $[\![x \approx_a y]\!]_\varepsilon$-等价类。

由上述讨论和命题 2.21 可立即推出，对于任意一致离散 $a \in M \models \text{MSE}$，$\text{Card}_a$ 是一个集合。此外，$x \mapsto |x|_a$ 是定义在 $\mathcal{P}(a)$上的可定义函数。

定义 3.10. 给定一个一致离散集 a 和一个集合 $b \sqsubseteq \mathcal{P}(a)$，我们将 $\text{succ}_a(b)$记作集合 $\{c \sqsubset \mathcal{P}(a) : (\exists f \sqsubset b)[f \sqsubseteq c \wedge \exists! g(g \sqsubset f \wedge c \not\sqsubset f)]\}$。

由命题 2.2 可知，对于任意一致离散的 a and$b \sqsubseteq a$，$\text{succ}_a(b)$ 都是一个集合。注意，根据引理 2.17，succ_a 是一个显式可定义函数。此外，如果 $b \in \text{Card}_a$，那么 $\text{succ}_a(b) \in \text{Card}_a$ 或 $\text{succ}_a(b) = \varnothing$。

定义 3.11。我们用 0 表示集合 $\{\varnothing\}$。（注意，0 始终是 Card_a 的一个元素。）我们用 $\text{ind}_a(x)$ 表示 $\mathcal{L}_{\text{dis}}(a)$-公式 $0 \sqsubset x \wedge (\forall y \sqsubset x)\ \text{succ}_a(y) \in x \vee \text{succ}_a(y) = \varnothing$。如果 $\text{ind}_a(x)$ 成立，则称 x 是一个归纳集。

我们用 $\mathbb{N}_a$ 表示集合 $\{x \in \mathcal{P}^2(a) : (\forall y \in \mathcal{P}^3(a))\ \text{ind}_a(y) \rightarrow x \sqsubset y\}$。

显然，$\text{ind}_a(\text{Card}_a)$ 总是成立，因此对于任意一致离散a，$\mathbb{N}_a \sqsubset \text{Card}_a$。

现在我们终于可以陈述无穷公理的局部版本了。

定义 3.12。我们用 $\text{Inf}(a)$ 表示 $\mathcal{L}_{\text{dis}}(a)$-句子 $|a|_a \notin \mathbb{N}_a$。

容易证明，$\text{Inf}(a)$ 成立当且仅当 $\mathbb{N}_a \neq \text{Card}_a$。

现在，只要能找到一个一致离散的 $a \in M \models \text{MSE}$，使得 $M \models \text{Inf}(a)$，那么 $(\mathbb{N}_a, \mathcal{P}(\mathbb{N}_a)\ \mathcal{P}^2(\mathbb{N}_a) \ldots)$ 就是完整 ω阶算术的一个模型，这足以发展普通数学。

鉴于我们在此所作发展的局部性质，或许有人会担心，可能存在一致离散的 a，$b \in M \models \text{MSE}$，使得 $\text{Inf}(a)$ 和 $\text{Inf}(b)$ 均成立，但 $\mathbb{N}_a$ 和 $\mathbb{N}_b$ 在内部并不同构。幸运的是，由于我们的理论完全是非预定的，这种情况不可能发生。

命题3.13. 固定 $M \models \text{MSE}$和一致离散的 $a \sqsubseteq b \in M$。

(1) 等价关系 $\approx_a$ 是等价关系 $\approx_b$ 在 $\mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a)$上的限制。记 ι 为从Card_a 到Card_b的诱导映射。(2) 若 $M \models \text{Inf}(a)$，则 $M \models \text{Inf}(b)$，且 $\mathbb{N}_b$ 是 $\mathbb{N}_a$ 在 ι下的像。(3) 对任意一致离散的 c，若 $M \models \text{Inf}(a) \wedge \text{Inf}(c)$，则 $\mathbb{N}_a \approx \mathbb{N}_c$。

证明. 1 由以下事实得出：a 的子集之间任何作为 $b \times b$ 子集存在的双射，本身已经是 $a \times a$的子集。2 和 3 由 1 得出。□

4. Global structure of models of MSE

虽然第3节围绕某些一致离散集给出了MSE模型局部结构的令人满意的图景，但无穷公理是一条全局陈述，因为它表明在某处存在某个无穷集合。

显然，对于MSE模型中的一致离散集，我们可以从更宏观的角度看待基数。 $\approx$ 在外部是一个定义良好的等价关系，将其等价类称为基数是合理的，但我们无法将其写成一个公式。虽然 $0=\{\varnothing\}$ 和所有单元素集组成的类1都是集合，但MSE模型中的双元素集类从不闭合，因此不能将其作为集合。[10]

此外，假设存在一个1_{2}-离散集 a，使得 $M\models \mathsf{Inf}(a)$。这是否必然意味着存在一个1-离散集 b，使得 $M\models\mathsf{Inf}(a)$？我们能否以这种方式将一个集合放大？我们将在定理4.10中看到，答案是否定的。因此，为了以全局方式陈述无穷公理，我们需要指定无穷首次出现的尺度。

4.1. 收集 ε-离散集与“the”无穷公理。不过，在将其形式化之前，我们还需要处理另一个此前一直忽略的微妙问题。我们怎么知道一定能找到一致离散集？显然，$\varnothing$ 是一致离散的，所有遗传有限集也同样如此，但遗传有限集这一类是否本身就是一个集合，并不清楚。

我们希望能够构造一个公式 $\varphi(x)$，使其返回 $\mathsf{dis}(x):=\sup\{r>0: x \text{ 是 } r\text{-离散}\}$，但 dis 不是连续函数，因此不可能是一个公式。若 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛到 a 的柯西序列，且对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $a_n\neq a$，那么对于每个 n，$(\{a_n,a\})_{n\in\mathbb{N}}$ 都是 $d(a_n,a)$-离散的，但不会更好；然而其极限序数 $\{a\}$ 将是 1-离散的。（这再次说明，双元素集的类不是闭的。）

这似乎表明，我们甚至不太可能将 r-离散集近似地收集成一个类。尽管如此，我们还是能够做到几乎同样好的事情。

固定 $r>0$，并考虑公式

$$\varphi_r(x)=\sup_{z,y\in x}\min(d(y,z),r-d(y,z)).$$

注意，$\varphi_r^M(a)\leq\varepsilon$ 当且仅当对每个 $b,c\in a$，要么 $d(y,z)\leq\varepsilon$，要么 $d(y,z)\geq r-\varepsilon$。此外，若 $\varepsilon<\frac{1}{3}r$，这意味着公式

$$E_r(x)=\max(\min(\tfrac{1}{r}(2r-3d(x,y)),1),0)$$

在 a 的元素上定义一个离散等价关系。若 a 已经是 r-离散的，则该等价关系就是等号。对于任意满足 $\varepsilon<\frac{1}{3}r$ 的 $\varepsilon>0$，令

$$X_r=\left\{x\in M:\varphi_r^M(x)<\tfrac{1}{3}r\right\}$$

并令 $f_r: X_r\to M$ 为函数，它将 a 映射到 E_r-等价类的集合 a。由引理 2.17 和命题 2.21，f_r 是一个显式可定义的偏函数。令 $\psi_r(x,y)$ 为定义它的公式（即，对于任意 $a\in X_r$ 和 $b\in M$，$\psi_r^M(a,b)=d(f_r(a),b)$）。（注意，$\psi_r(x,y)$ 不需要任何参数。）注意，对于任意 $a\in X_r$，$f_r(a)$ 都是$\frac{1}{3}r$-离散的。

定义 4.1. 对于任意满足$\varepsilon<\frac{1}{3}r$ 的 $r,\varepsilon>0$，我们令 $\mathsf{Inf}_{r,\varepsilon}$ 表示条件

$$\sup_x\min\left(1+\varepsilon-\varphi_e(x),[\![\mathsf{Inf}(f_r(x))]\!]_{\frac{1}{3}r}\right)\geq 1,$$

其中，$[\![\mathsf{Inf}(f_r(x))]\!]_{\frac{1}{3}r}$表示 $\inf_z[\![\mathsf{Inf}(z)]\!]_{\frac{1}{3}r}+2v([\![\mathsf{Inf}(-)]\!]_{\frac{1}{3}r})\psi_r(x,z)$。

我们用 Inf 表示条件的集合 $\{\mathsf{Inf}_{1,\varepsilon}:\ 0<\varepsilon<\frac{1}{3}\}$。

命题 4.2. 固定 $M\models$MSE。

[10]GPK 模型中也能观察到这一现象[+]。

(1) 对于任意 $r, \varepsilon > 0$，满足 $\varepsilon < \frac{1}{3}r$, $M \models \text{Inf}_{r,\varepsilon}$ 当且仅当对于每个 $s \in (0, r-\varepsilon)$，存在一个 s-离散集合 $a \in M$，使得 $M \models \text{Inf}(a)$。(2) $M \models \text{Inf}$ 当且仅当对于每个 $r \in (0, 1)$，存在一个 r-离散集合 $a \in M$，使得 $M \models \text{Inf}(a)$。

证明。由 1 立即可得 2。对于 1 的 $\Rightarrow$ 方向，假设 $M \models \text{Inf}_{r,\varepsilon}$。这意味着，对于任意 $\delta > 0$，都存在一个 $b \in M$，使得 $M \models 1 + \varepsilon - \varphi_r(b) > 1 - \delta$并且 $M \models \inf_z [\![\text{Inf}(z)]\!]_{\frac{1}{3}r} + 2v([\![\text{Inf}(-)]\!]_{\frac{1}{3}r})\psi_r(b, z) > 1 - \delta$。第一个条件意味着$\varphi_r^M(b) < \varepsilon + \delta$。对于 $\delta < \frac{1}{3}r - \varepsilon$，这意味着 b 属于 X_r，因此 $f_r(b)$ 是 $(r - \varepsilon - \delta)$-离散的。由于 $b \in X_r$，第二个条件等价于 $M \models [\![\text{Inf}(f_r(b))]\!]_{\frac{1}{3}r} \geq 1$，这又等价于 $M \models \text{Inf}(f_r(b))$，因此我们可以取 $f_r(b)$ 作为所需的 a。由于对任意 $\delta > 0$ 我们都可以这样做（并且任意 $t < s$ 离散集合都是 t 离散的），故得到所需结论。

对于 $\Leftarrow$ 方向，固定 $s \in (\frac{2}{3}r, r-\varepsilon)$，并令 a 为一个 s-离散集合，使得 $M \models \text{Inf}(a)$。现在显然有 $\varphi_r(a) \leq r - s < \frac{1}{3}r$。因此，$f_r(a)$ 有定义（且等于$\{\{x\} : x \in a\}$）。由于 $M \models \text{Inf}(a)$, $M \models \text{Inf}(f_r(a))$ 也成立。（a 与 $f_r(a)$之间显然存在一个可定义的双射。它作为 $\mathcal{P}(a \times f_r(a))$ 的一个元素存在。）由于对任意足够大的 $s < r - \varepsilon$，我们都可以这样做，因此证明完成。□

根据第3节中的讨论，$\text{Inf}_{r,\varepsilon}$ 中的任一公理，都是在发展标准数学时足够使用的无穷公理形式。尽管如此，我们仍建议将公理模式 Inf 作为 MSE 语境下“无穷公理”的规范选择。有人可能会反对这一提议，认为它是一个公理模式，而非单条公理；但正如 [10, 第6节1], 所讨论的，在连续逻辑中，有限公理化这一概念并不明确。

对于我们在第6节构造的大多数模型，都存在一个 1-离散集 a，使得 $\text{Inf}(a)$ 成立。这显然是一个比 $M \models \text{Inf}$ 更令人满意的条件，但尚不清楚它是否确实可公理化。我们可以通过添加一个常元来实现这一点，取某个这样的 a，但这并不令人满意。因此，我们提出以下问题。

问题 4.3. 类 $\{M \models \text{MSE} : (\exists a \in M) a$ 是 1-离散的，$M \models \text{Inf}(a)\}$，在连续逻辑的意义下是初等类吗?

一般的悲观情绪使我们相信答案是否定的，但我们尚未找到解决这一问题的方法。

4.2. 序数。我们不打算探讨 MSE 的模型中基数的全局结构，而将专注于序数。这样做有几个原因。基数和序数的许多技术细节相似，但又不够相似，无法以高效的方式同时加以处理。此外，在不假设某种形式的选择公理的情况下，关于序数结构能够说得比关于基数结构更多。

定义 4.4. 固定 $M \models \text{MSE}$。M 中的链是满足以下条件的集合 a：对于任意 b、$c \in a$，要么$b \sqsubseteq c$，要么 $c \sqsubseteq b$。

两个一致离散链 a 和 b 是序同构的，如果存在一个双射 $f \in \mathcal{P}(a \times b)$，使得对于任意 g、$h \Subset a$，$g \sqsubseteq h$ 当且仅当 $f(g) \sqsubseteq f(h)$。我们用$a \cong b$ 表示 a 和 b 是序同构的。a 的序型是 a的 $\cong$-类，记作 $\text{otp}(a)$。

一致离散链 a 是良序的，当且仅当对于任意非空的 $b \sqsubseteq a$，其中都存在一个 $\sqsubseteq$-最小元素 b。

M 中一致离散良序链的序型称为 M的序数，这类序型的集合记作 Ord^M。

请注意，我们通常用“良序”一词表示内部良序。如果想强调某事物是外部良序的，我们会使用“外部”一词。

给定一种更一般的线序，即一个满足 a 一致离散且 $b \sqsubseteq a \times a$ 为线性序的图的有序对 (a, b)，我们可以找到一个一致离散链 c，使得 (a, b) 与 $(c, \sqsubseteq \restriction c \times c)$ 内部序同构。只需将 a 中的每个元素 f 映射到集合 $\{x \sqsubset a\colon \langle x, f\rangle \sqsubset c\}$（即最大的元素为 f 的 c-初始段）。由此可见，在 MSE 的模型中，一致离散链足以表示所有一致离散线性序型。

我们用靠近字母表开头的小写希腊字母表示一致离散良序链的序型，例如 α 和 β。我们写作 $\alpha \leq \beta$，表示对于任意满足 $\mathrm{otp}(a) = \alpha$ 的 a，以及任意满足 $\mathrm{otp}(b) = \beta$ 的 b，a 都序同构于 b 的某个初始段。我们写作 $\alpha < \beta$，表示 $\alpha \leq \beta$ 且 $\alpha \neq \beta$。通过一个完全标准的论证可知，对于任意序数 $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}^M$，必有 $\alpha < \beta$、$\beta < \alpha$ 或 $\alpha = \beta$。

我们能在多大程度上用一个集合来近似良序一致离散链类？与带有全集的集合论中通常的情况一样，关于序数类必须出现某种蹊跷之处，否则就会导致布拉利-福蒂悖论。具体来说，显然不存在一个一致离散集，其中包含 M 的所有序数的代表元。

运用与第 4.1 节类似的技巧，我们能够收集某个尺度以下出现的所有良序类型的代表元。与该节中的情况一样，我们不容易构造出只由 r-离散链组成的集合，只能构造出某种意义上的“近似链”。不过，我们可以用类似的技巧将它们转化为序同构链。

定义 4.5。令 $\sigma(x, y) = \sup_{z \sqsubseteq x} e(z, y)$。令 $\mathrm{chn}(x) = \sup_{y,\ z \sqsubseteq x} \min(\sigma(y, z)\ \sigma(z, y))$。

注意，$\sigma(a, b) = 0$ 当且仅当 $a \sqsubseteq b$。另请注意，$d(a, b) = \max(\sigma(a, b)\ \sigma(b, a))$。此外，$\mathrm{chn}(a) = 0$ 当且仅当 a 是一个链。令 φ_r、E_r、X_r 和 f_r 按照第 4.1 节中的定义定义。

引理 4.6. 对任意 $r > 0$ 和 $a \in M \models \mathrm{MSE}$，若 $\varphi_r(a) < \frac{1}{3}r$ 且 $\mathrm{chn}(a) < \frac{1}{3}r$，那么对任意 b、$c \sqsubset a$，以下三者必且仅有其一成立：$d(a, b) < \frac{1}{3}r$，$\sigma(a, b) > \frac{2}{3}r$，或 $\sigma(b, a) > \frac{2}{3}$。

证明。由于 $\varphi_r(a) < \frac{1}{3}r$，我们得到，对任意 b、$c \sqsubset a$，要么 $d(b, c) < \frac{1}{3}r$，要么 $d(b, c) > \frac{2}{3}r$。由于 $\mathrm{chn}(a) < \frac{1}{3}r$，我们得到，对任意 b、$c \sqsubset a$，要么 $\sigma(b, c) < \frac{1}{3}r$，要么 $\sigma(c, b) < \frac{1}{3}r$。若 $d(b, c) \not< \frac{1}{3}r$，那么必有 $\sigma(b, c) \geq \frac{1}{3}r$ 或 $\sigma(c, b) \geq \frac{1}{3}r$，由此可得，要么 $\sigma(b, c) > \frac{2}{3}r$ 且 $\sigma(c, b) < \frac{1}{3}r$，要么 $\sigma(c, b) > \frac{2}{3}r$ 且 $\sigma(b, c) < \frac{1}{3}r$。□

定义公式

$$o(x, y) = \sup_{z \sqsubset x} \sup_{w \sqsubset y} \sigma(z, w).$$

引理 4.6 表明，如果 $\varphi_r(a) < \frac{1}{3}r$ 且 $\mathrm{chn}(a) < \frac{1}{3}$，那么对于 a 的任意 E_r-等价类b和 c，要么 $o(b, c) \leq \frac{1}{3}r$，要么 $o(b, c) \leq \frac{1}{3}r$。此外，如果这两者都成立，那么$b = c$。

令 C_r 为类 $\{x \in X_r : \mathrm{chn}(x) < \frac{1}{3}r\}$。根据上述观察，我们有函数 $g_r\colon C_r \to M$，其定义为

$$g_r(a) = \big\{\{x \sqsubset f_r(a) : o(x, y) \leq \tfrac{1}{3}r\} : y \in f_r(a)\big\}$$

是显式可定义的（不含参数）。（注意，由于$f_r(a)$是$\frac{1}{3}r$-离散的，我们无需取闭包。）此外，对于任意$a \in C_r$，显然 $g_r(a)$是一个 $\frac{1}{3}r$-离散链；若 $a \in C_r$ 是链，则 $g_r(a) = \{\{\{x\}: x \sqsubseteq a, x \sqsubseteq y\} : y \in a\}$，并且$a$ 与 $g_r(a)$作为链是序同构的。

借助这些工具，我们终于可以考察 MSE 的模型中序数的全局结构。特别是，我们将证明

定义 4.7。对于 MSE 的任意序数 α $M \models$，我们将 $s(\alpha)$ 记作以下量

$$\sup\{r > 0 : (\exists \text{ well-ordered } r\text{-discrete chain } x \in M) \operatorname{otp}(x) = \alpha\}.$$

容易看出，若 $\alpha \leq \beta$，则 $s(\alpha) \geq s(\beta)$，因此对于任意 MSE $M \models$， s 是从序数类 Ord^M 到 $(0,1]$ 的一个非递增映射。此外，总有 $s(0) = 1$。利用 Hartogs 数，很容易证明，对于任意序数 $\alpha \in \mathrm{Ord}^M$，都存在一个基数严格更大的序数 $\beta \in \mathrm{Ord}^M$，即 $\mathcal{P}(a)$ 的 Hartogs 数，其中 $\mathrm{otp}(a) = \alpha$。根据符号滥用，我们将其记作 $\aleph(\mathcal{P}(\alpha))$。注意，由引理 3.3 以及 X 的 Hartogs 数总能嵌入 $\mathcal{P}^3(X)$ 这一事实可知，$s(\alpha) = s(\aleph(\mathcal{P}(\alpha)))$。这意味着，若 $s(\beta) < s(\alpha)$，则 β 的基数远大于 α。

如果存在，我们将 ω^M记作 M中的第一个极限序数。$s(\omega^M)$ 的值与无穷公理直接相关。

命题 4.8. 固定 $M \models$MSE。对于任意 $r \in (0,1]$ 且 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}r)$，$M \models \mathrm{Inf}_{r,\,\varepsilon}$ 当且仅当 ω^M 存在且 $r \leq s(\omega^M)$。特别地，$M \models \mathrm{Inf}$ 当且仅当 ω^M 存在且$s(\omega^M) = 1$。

证明. 令 $\mathbb{N}_a^i$ 为某个一致离散 a的初始段 $\mathbb{N}_a$ 所构成的集合。显然，$\mathbb{N}_a^i$ 是良序链。如果 a 是 r-离散的，那么由引理 3.3 可知，$\mathbb{N}_a^i$ 也是 r-离散的。容易证明，$\mathrm{otp}(\mathbb{N}_a^i) = \omega^M$ 当且仅当 $M \models$Inf(a)。反过来，如果对于某个良序的一致离散链 b，$\mathrm{otp}(b) = \omega^M$，那么$M \models$Inf$(b)$。结论由命题 4.2 得出。□

引理4.9。设 a和 b是某个 $M \models$MSE 中的 r-离散链。若 $d(a,b) < \frac{1}{2}r$，则$a \cong b$。此外，若 (M,d) 是超度量空间，只需假设 $d(a,b) < r$。

证明。固定一个 s，使得 $d(a,b) < s < \frac{1}{2}r$。由于 a和 b是 r-离散的，我们有类$f = \{\langle x,y\rangle \sqsubseteq a \times b : d(x,y) \leq s\}$ 是一个集合，并且是 a 与 b之间某个双射的图。现在需要证明 f 实际上是 a 与 b之间的序同构。假设有 $c, c' \sqsubseteq a$满足 $c \sqsubseteq c'$，且有 $g, g' \sqsubseteq b$满足 $d(c,g) < s$和 $d(c',g') < s$。若 $c = c'$，则 $g = g'$，因此不妨设 $c \sqsubset c'$。由于 $d(c,c') \geq r$，我们可以找到一个 $h \sqsubseteq c'$，使得$e(h, c) > 2s$（因为 $2s < r$）。由于 $d(c',g') < s$，我们可以找到一个 $i \sqsubseteq g'$，使得 $d(h,i) < s$。由三角不等式可得 $e(i,g) \geq e(h,c) - d(h,i) - d(c,g) > 2s - s - s = 0$. 因此$i \not\sqsubseteq g$，并且必有 $g \sqsubset g'$，证毕。

超　　度量情形下的证明本质上是相　　ame. □

定理 4.10。固定 $M \models$ MSE 和 $r \in \{s(\gamma) : \gamma \in$ 序数类$^M\}$。令 $t = r$ 为超度量的情形，令 $t = \frac{1}{2}r$ 为其他情形。

对于任意 $s < t$，存在一个序数 $\alpha \in$ 序数类^M，使得 $s \leq s(\alpha) < r$；并且对于任意 $\beta \in$ 序数类^M，若 $s(\beta) \geq r$，则 $\beta < \alpha$。

特别地，如果 d 是超度量，那么 $\{s(\alpha) : \alpha \in$序数类$^M\}$ 在 $(0,1]$ 和 $\{\alpha \in$序数类$^M : s(\alpha) < 1\}$ 中稠密，且没有最小元素。

证明。固定正的 $s<t$，并令 $\delta=1-\frac{s}{t}$（这意味着 $s=t(1-\delta)$）。不失一般性，假设 $t\delta<\frac{1}{3}r$。令

$$a=[x:\max(\phi_r(x),\mathrm{chn}_r(x))<0\sim t\delta]\,.$$

注意， a 中的每个元素都是 C_r中的元素。令$b=\{g_r(x)\colon\ x\overline{\in a}\}$。注意，由于 M 中的链的集族是 $\{x\in M\colon\ \mathrm{chn}^M(x)=0\}$，它在度量意义下是闭的。因此， b 中的每个元素都是一条链。也容易看出， b 中的每个元素都是 $r(1-\delta)$-离散的（无论 d 是否为超度量）。

令 $c=\{x\in b\colon\ x$ 是良序的$\}$。注意， c 是 M中的一个集合。还要注意，对任意$\beta\in$ 序数类^M，如果 $s(\beta)\geq r$，那么 c 中的某个元素具有序型 β。等价关系$\cong$ 在 c上是离散可定义的，因此我们可以构造集合 $f=\{\{y\in c\colon x\cong y\}\colon\ x\in c\}$。根据引理4.9，集合 f 是 $t(1-\delta)$-离散的（无论 d 是否为超度量），换言之，是 s-离散的。我们可以找到一个公式 $\varphi(x,y)$，使得对任意$x,y\in f$， $\varphi(x,y)\in\{0,1\}$ 且 $\varphi(x,y)=0$ 当且仅当$(\forall z\in x)(\forall w\in y)\ \mathrm{otp}(z)\leq\mathrm{otp}(x)$。该公式在 f 上定义了一个线序，根据一个标准论证，它是良序。令

$$\alpha=\mathrm{otp}(\{\{y:y\in f,\ \varphi(x,y)=0\}:x\in f\}).$$

由于 f 包含所有序数 β 的代表元，并且 $s(\beta)\geq r$，因此我们必有 α 大于任何这样的 β。所以不可能有 $s(\alpha)\geq r$。另一方面，由于 f 是一致离散的，因此可推出 $s(\alpha)\geq s$，如所要求。

定理中的最后几项陈述显然可以由其余部分推出。 □

推论4.11。如果 $M\models$MSE 没有无限的一致离散集，那么 M 具有非标准自然数。

证明。根据推论 2.8 和归纳，任意 MSE 的模型都包含具有每个外部有限基数的遗传有限集。因此，对于任意标准自然数 n， $n\in$序数类^M 和$s(n)=1$。定理 4.10 蕴含存在 M 中的序数 α （它们必定是内部有限的），使得 $s(\alpha)<1$。□

定理 4.10 中 MSE 的超度量模型的行为，让人联想到 Cantor-Lukasiewicz 集合论的模型中 ω 的行为，这是 H´ajek 在 [15, 定理 4.17] 中发现的。特别是，它们都表现出堆悖论的一种体现：无法形式化如下形式的归纳原理

$$\frac{\varphi(0)=0\qquad\forall\alpha[(\forall\beta<\alpha)(\varphi(\beta)=0)\to\varphi(\alpha)=0]}{\forall\alpha(\varphi(\alpha)=0)}$$

对于某个序数类上的实值谓词 $\varphi(x)$。对于 C L_0, , 即便对 ω，这一归纳原理也不可能成立；不过，正如我们将在定理 6.15 中看到的，MSE 的模型可以具有任意大的标准序数。当然，定理 4.10 也类似于 NFU 不存在 β-模型这一结论，尽管 NFU 的模型之所以不良基，其机制有所不同。人们或许会随意猜想，如果将切除限制为分层公式，会发生什么。

目前尚不清楚的是 MSE 的非超度量模型的状况。定理 4.10 并未排除 β-MSE 模型存在的可能性（即 Ord^M 在外部是良基的模型），但这类模型似乎不太可能存在。我们所知道的每个构造 MSE 模型的方法，都会得到一个包含某个集合的模型，而该集合本身是 MSE 的超度量模型，因此定理 4.10 适用。由此引出以下问题。

问题 4.12. MSE 是否有任何 β-模型？对于任意 $M\models$MSE， $\{s(\alpha):\alpha\in$序数类$^M\}$ 在 $(0,1]$ 中稠密，这是否成立？

鉴于第6节中构造的模型的性质，我们猜想 MSE 没有 β-模型，并且 $\{s(\alpha) : \alpha \in \text{序数类}^M\}$ 在 $(0,1]$ 中总是稠密。

最后，尽管这多少只是锦上添花，我们还是想展示如何构造表示良序类型的规范“令牌”，也就是说，构造 M 中能够以某种规范方式表示良序类型 α 的元素。在 NFU 中，这是通过取 $\{x : \text{otp}(x) = \alpha\}$ 来实现的。在 ZF 和 GPK^+_∞ 中，则通过取该序型的冯·诺伊曼序数来实现。这两种方法都不适用于 MSE，因此我们必须另辟蹊径。

定义 4.13。给定一致离散集 a、集合 $b \subseteq a \times V^M$ 和元素 $c \in a$，我们用 $b[c]$ 表示类 $\{f : \langle c, f\rangle \in b\}$。对于任意链 $a \in M \models \text{MSE}$ 和任意集合 $b \subseteq a \times V^M$，b 的闭链并为

$$\chi(b) := \overline{\left\{\overline{\bigsqcup\{b[f] : f \in a,\ f \subseteq c\}} : c \in a\right\}}.$$

给定一致离散链 $a \in M \models \text{MSE}$，$a$ 的序令牌是类

$$\text{otok}(a) := \overline{\{\chi(b) : b \subseteq a \times V^M\}}.$$

定理4.14。固定 $M \models$MSE

(1) 对任意一致离散链 a，otok(a) 是一个集合。(2) 对任意 $r > 0$，映射 $x \mapsto$ otok(a) 在一致离散链类上是显式可定义的。(3) 若 a 和 b 是良序的一致离散链，则 otp(a) $\leq$ otp(b) 当且仅当 otok(a) $\subseteq$ otok(b)。

证明。1 和 2 由命题2.13和引理 2.18 得出。

对于 3，假设 otp(a) $\leq$ otp(b)。设此关系由一个序同构 $f : a \to b$ to b 的某个初始段见证。对于任意 $c \subseteq a \times V^M$，我们可以构造集合 $c = \{\langle f(x)\ y\rangle : \langle x, y\rangle \in c\}$（因为映射 $\langle x, y\rangle \mapsto \langle f(x)\ y\rangle$ 是可定义的），并立即得到 $\chi(c) = \chi(c_f)$。因此 otok(a) $\subseteq$ otok(b)。

反过来，假设 otok(a) $\subseteq$ otok(b)。取满足 a 且 b 是 r-离散的 r。求一个 $c \subseteq b \times V^M$，使得 $d(a, \chi(c)) < \frac{1}{2}r$。由引理4.9可知，$a$ 与 $\chi(c)$ 作为链是序同构的。令 $f : a \to \chi(c)$ 为见证此结论的映射。对于任意 $x \in a$，令 $g(x)$ 为 b 中~~满足 $f(x) \subseteq \bigcup\{c[z] : z \in b,\ z \subseteq g(x)\}$~~ 的最小元素。（根据命题 2.2 及 a 和 b 是 r-离散这一事实，这是一个集合。） g 是从 a 到 b 的单射保序映射，因此由一个标准论证可得 otp(a) $\leq$otp(b)。□

现在，当然，给定 otok(a)，我们可以构造一个与 a 具有相同序型的规范良序链，即

$$\text{ord}(a) := \{\text{otok}(z) : z \text{ 是一条良序的一致离散链，otp}(z) < \text{otp}(a)\}.$$

可以证明，对于任意 $r > 0$，$x \mapsto$ ord(x) 在 r-离散良序链类上是显式可定义的。

自然地，我们可以尝试对基数做类似于定义 4.13 的事情，但如果没有某种形式的选择公理，我们似乎只能构造表示 $\approx^*$ 关系的等价类的标记（其中 $x \leq^* y$ 当且仅当存在从 y 的某个子集到 x 的满射，且 $x \approx^* y$ 当且仅当 $x \leq^* y$ 且 $y \leq^* x$）。具体来说，如果我们定义 ctok*(a) ~~$:= \{\{\pi_1(x) : x \in y\} : y \subseteq a \times V^M\}$~~，那么对于任意一致离散的 a 和 b，都有 $a \approx^* b$ 当且仅当 ctok*(a) = ctok*(b)。这引出了一个显而易见的问题。

问题 4.15. 是否存在一个函数 ctok(x)，它对每个 $r > 0$ 都可在 r-离散集合类上定义，使得对于任意一致离散的 a 和 b，$a \approx b$ 当且仅当 ctok(a) = ctok(b)?

5. Formalizing MSE in continuous logic

给定一个度量集合结构（$M, d, \sqsubseteq$），我们可以通过将函数 $e\colon M^2 \to [0,1]$ 作为唯一的谓词，构造一个一般结构[11] (M, e)。完成后，只需取 $d(x,y) = \sup_z |e(z,x) - e(z,y)|$ 以及 $\sqsubseteq = \{(x,y) \in M^2\colon e(x,y) = 0\}$，即可还原原结构。本节的目标是刻画以这种方式得到的结构，并证明它们在连续逻辑意义下构成一个初等类。

令 $\mathcal{L}_e$ 为仅含一个取 $[0,1]$值的谓词符号 e的语言。给定任意一个 $\mathcal{L}_e$-结构（M, e），我们可以定义一个伪度量

$$d_e(x,y) \coloneqq \sup_z |e(z,x) - e(z,y)|.$$

由于这是连续逻辑意义下的一个公式，d_e 在任何 $\mathcal{L}_e$-结构上都是一个可定义谓词。注意，按构造，对于任意 $\mathcal{L}_e$-结构（M, e）和 $a \in M$，函数$y \mapsto e(a,y)$关于 d_e是 1-利普希茨的。

我们首先要做的是写出一个公理，保证对于任意选择的 b，$e(x,b)$ 都是相对于 d_e 的距离谓词。这在 [1,第 9], 章中已有隐含处理，但其中对距离谓词的刻画没有涵盖空可定义集的情形。手动补上这一点并不难，但我们将借此机会使论文更加自成一体，并给出一种更简洁的[12] 公理化，同时涵盖这两种情形。

定义 5.1。H-外延性公理是 $\mathcal{L}_e$-条件

$$\sup_{xy} |e(x,y) - \inf_z \min(d_e(x,z) + 2e(z,y), 1)| = 0.$$

We 称一个 $\mathcal{L}_e$-结构 M 是 H-外延的，若它满足 H-外延性公理。

请注意，H-外延性公理也可以更常规地写成

$$\forall x \forall y (e(x,y) = \inf_z \min(d_e(x,z) + 2e(z,y), 1)).$$

给定一个 $\mathcal{L}_e$-结构 (M, e)，我们用 M/e 表示 M 的 $d_e = 0$ 商集，并用$\overline{M/e}$ 表示它在 d_e下的完备化。给定 $a \in M$，我们用 $[a]_e$ 表示 M/e中的相应元素，并将其视为 $\overline{M/e}$的子集。

引理 5.2。固定一个 $\mathcal{L}_e$-结构 (M, e)。M 满足 H-外延性公理，当且仅当对于任意 $b \in M$，函数 $x \mapsto e(x,b)$ 关于 d_e是 1-利普希茨的；并且若 $f(x)$ 是 $e(x,b)$ 到 $\overline{M/e}$的延拓，那么对于任意 $a \in \overline{M/e}$，$f(a) = \inf\{d_e(a,c)\colon c \in \overline{M/e},\ f(c) = 0\}$，其中 $\inf \varnothing = 1$。

证明。对于 $\Rightarrow$ 方向，假设 M 满足 H-外延性公理，并固定$b \in M$。根据 H-外延性公理，对于所有 x，我们有 $e(x,b) = \inf_z \min(d_e(x,z) + 2e(z,b), 1)$。函数 $x \mapsto \min(d_e(x,z) + 2e(z,b), 1)$ 关于 d_e 是 1- 利普希茨函数

[11]如 [12]中所定义。这样的结构也可以描述为 *metric structures without a metric*。[12]引理 5.2 的证明隐含地包含了以下更一般的事实的证明：在任何具有 $[0,r]$-值度量的度量结构 M中，公式 $\varphi(x)$ 是某个（可能为空的）可定义集合的距离谓词，当且仅当 $M \models \sup_x |\varphi(x) - \inf_z \min(d(x,z) + 2\varphi(z),\ r)|$。这是对 $[1,$第 $9]$ 章中条件 E_2 的轻微修改，从而无需使用 E_1。

对任意 z，因此 $e(x,b)$ 也是如此（因为它是一个 1-利普希茨函数族的下确界）。令 $f(x)$ 为 $e(x,b)$ 到 $\overline{M/e}$ 的延拓。

固定 $a \in \overline{M/e}$，使得 $f(a) < 1$。再固定 $\varepsilon > 0$。由于 M/e 在 $\overline{M/e}$ 中稠密，我们可以找到 $c_0 \in M$，使得 $d_e(a,[c_0]_e) < \frac{1}{3}\varepsilon$ 且 $f([c_0]_e) = e(c_0,b) < 1$。注意，$f(a) < f([c_0]_e) = e(c_0,b) + \frac{1}{3}\varepsilon$。固定 $\delta > 0$，使得 $\delta < \frac{1}{4}\varepsilon$、$\delta < e(c_0,b)$，且 $e(c_0,b) + \delta < 1$。

假设给定了 $c_n \in M$，使得对于某个 $n \in \mathbb{N}$，$e(c_n,b) \leq e(c_0,b) < 1$。若 $e(c_n,b) = 0$，则停止构造，并令所有 $m > n$ 均满足 $c_m = c_n$；否则，我们可以找到 $c_{n+1} \in M$，使得

$$d_e(c_n,c_{n+1}) + 2e(c_{n+1},b) < e(c_n,b) + \min(4^{-n}\delta, \tfrac{1}{2}e(c_0,b))$$

根据 H-外延性公理。特别地，这意味着

$$\begin{aligned} e(c_{n+1},b) &< \frac{1}{2}e(c_n,b) + \frac{1}{2}e(c_0,b) \\ &\leq e(c_0,b) < 1. \end{aligned}$$

在每个 n 处，我们都有 $e(c_{n+1},b) < \frac{1}{2}e(c_n,b) + 4^{-n}\delta$。递归地应用这一界限可得

$$e(c_n,b) < 2^{-n}e(c_0,b) + \sum_{k=n-1}^{2n-2} 2^{-k}\delta.$$

对于任意满足 c_n 有定义的 $n > 0$ 都成立。这意味着我们即将处理的无穷级数都绝对收敛，并且 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个柯西序列。[13] 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (d_e(c_n,c_{n+1}) + 2e(c_{n+1},b)) &< \sum_{n=0}^{\infty} \left(e(c_n,b) + 4^{-n}\delta\right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} d_e(c_n,c_{n+1}) + 2\sum_{n=0}^{\infty} e(c_{n+1},b) &< \sum_{n=0}^{\infty} e(c_n,b) + \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}\delta, \\ \sum_{n=0}^{\infty} d_e(c_n,c_{n+1}) + \sum_{n=0}^{\infty} e(c_{n+1},b) + e(c_{\infty+1},b) &< e(c_0,b) + \frac{4}{3}\delta, \\ \sum_{n=0}^{\infty} d_e(c_n,c_{n+1}) &< e(c_0,b) + \frac{4}{3}\delta. \end{aligned}$$

令 $g = \lim_{n\to\infty}[c_n]_e$。注意，$e(g,[b]_e) = 0$。现在我们有

$$\begin{aligned} d_e(a,g) &\leq d_e(a,[c_0]_e) + d_e([c_0]_e,g) \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} d_e(c_n,c_{n+1}) \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + e(c_0,b) + \frac{4}{3}\frac{1}{4}\varepsilon \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + f(a) + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon \\ &= f(a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于我们可以对任意 $\varepsilon > 0$ 这样做，因此当 $f(a) < 1$ 时，我们有 $\inf\{d_e(a,x) : f(x) = 0\} \leq f(a)$。如果 $f(a) = 1$，那么该不等式无论如何都成立，因此该不等式在所有情况下均成立。

[13] 由于 $\sum_{k=n-1}^{2n-2} 2^{-k} = 2^{-n+2} - 2^{-2n+2} < 2^{-n+2}$，我们有 $e(c_n,b) < 2^{-n}(e(c_0,b) + 4\delta)$。进而，这意味着对于任意使 c_{n+1} 有定义的 n，$d_e(c_n,c_{n+1}) < 2^{-n}(e(c_0,b) + 4\delta) + 4^{-n}\delta$。

对于另一个不等式，首先假设 $\{x \in \overline{M/e} : f(x) = 0\}$ 为空。根据前一部分，这意味着对所有 $a \in \overline{M/e}$, $f(a) = 1$。因此，所要求的等号成立。现在假设 $\{x \in \overline{M/e} : f(x) = 0\}$ 非空。固定 $a \in \overline{M/e}$，并令$r = \inf\{d_e(a,x) : f(x) = 0\}$。固定 $\varepsilon > 0$，并找到某个 $a' \in M$，使得 $d_e(a,[a']_e) < \frac{1}{6}\varepsilon$。由于 f 是 1-利普希茨的，我们必有 $f(a) < f([a']_e) + \frac{1}{6}\varepsilon = e(a',b) + \frac{1}{6}\varepsilon$。

取某个 $c \in \overline{M/e}$，使得 $f(c) = 0$ 且 $d_e(a,c) < r + \frac{1}{3}\varepsilon$。取 $g \in M$，使得$d_e(c,[g]_e) < \frac{1}{3}\varepsilon$。由于 $f(x)$ 是 1-利普希茨的，我们有 $f([g]_e) = e(g,b) < \frac{1}{3}\varepsilon$。根据 H-外延性公理，$e(a',b) \le d_e(a',c') + 2e(c',b)$，因此我们有

$$\begin{aligned} f(a) &< e(a',b) + \frac{1}{6}\varepsilon \\ &\le d_e(a',c') + 2e(c',b) + \frac{1}{6}\varepsilon \\ &< d_e(a',c') + 2\frac{1}{6}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon \\ &\le d_e(a,c) + \frac{2}{6}\varepsilon + 2\frac{1}{6}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon \\ &< r + \frac{1}{6}\varepsilon + \frac{2}{6}\varepsilon + 2\frac{1}{6}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon \\ &= r + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于对任意 $\varepsilon > 0$ 都可以这样做，我们有 $f(a) \le r = \inf\{d_e(a,x) : f(x) = 0\}$。因此，不等式的两个方向都成立，并且对任意 $a \in \overline{M/e}$，我们有 $f(a) = \inf\{d_e(a,x) : f(x) = 0\}$。

对于 $\Leftarrow$ 方向，假设对于任意 $b \in M$，$e(x,b)$ 关于 d_e 是 1-利普希茨的，并且对于任意 $a \in \overline{M/e}$，$f(a) = \inf\{d_e(a,x) : f(x) = 0\}$，其中 $f(x)$ 是 $e(x,b)$ 到 $\overline{M/e}$上的唯一连续延拓。固定 $a \in M$，令 $r = e(a,b) = f([a]_e)$。固定$\varepsilon > 0$。求出满足 $f(c) = 0$ 且 $d([a]_e, c) < r + \frac{1}{4}\varepsilon$的 $c \in \overline{M/e}$。求出满足$d(c,[c']_e) < \frac{1}{4}\varepsilon$的 $c' \in M$。由于 $f(x)$ 是 1-利普希茨的，我们有 $f([c']_e) = e(c',b) < \frac{1}{4}\varepsilon$。另请注意，$d_e(a,c') < r + \frac{2}{4}\varepsilon$。现在我们有

$$\begin{aligned} \inf_z \min(d_e(a,z) + 2e(z,b), 1) &\le d_e(a,c') + 2e(c',b) \\ &\le r + \frac{2}{4}\varepsilon + 2e(c',b) \\ &\le r + \frac{2}{4}\varepsilon + 2\frac{1}{4}\varepsilon \\ &\le r + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于我们可以对任意 $\varepsilon > 0$ 进行此操作，因此有

$$\inf_z \min(d_e(a,z) + 2e(z,b), 1) \le \inf\{d_e(a,x) : f(x) = 0\} = e(a,b).$$

对于不等式的另一个方向，令 $s = \inf_z \min(d_e(a,z) + 2e(z,b), 1)$。若 $s = 1$，则由上式可知，对所有 $x \in \overline{M/e}$，$f(x) = 1$，因此 H-外延性公理成立。否则，假设 $s < 1$，并固定满足 $s + \varepsilon < 1$ 的 $\varepsilon > 0$。找出 $c \in M$，使得 $\min(d_e(a,c) + 2e(c,b), 1) < s + \varepsilon$。我们必有 $d_e(a,c) + 2e(c,b) < s + \varepsilon$。由

假设，$e(c,b) = f([c]_e) = \inf\{d_e([c]_e, x) : f(x) = 0\}$。因此

$$\begin{aligned} e(a,b) = \inf\{d_e([a]_e, x) : f(x) = 0\} &\leq d_e(a,c) + e(c,b) \\ &< d_e(a,c) + 2e(c,b) \\ &< s + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于对任意 $\varepsilon > 0$ 我们都可以这样做，因此有 $e(a,b) \leq s = \inf_z \min(d_e(a,z) + 2e(z,b), 1)$。因此，对任意 $a, b \in M$，$e(a,b) = \inf_z \min(d_e(a,z) + 2e(z,b)), 1$，且 H-外延性公理成立。□

注意，由于 $y \mapsto e(a,y)$ 关于 d_e 自动满足 1-利普希茨条件，H-外延性公理意味着 $(x, y) \mapsto e(x,y)$ 关于 d_e 满足 2-利普希茨条件。这意味着 $e(x,y)$ 可延拓为 $\overline{M/e}$ 上唯一的连续函数。为避免记号混淆，我们也将其记为 e。注意在此情形下，$(\overline{M/e}, e)$ 仍满足 H-外延性公理（事实上，它与作为 $\mathcal{L}_e$-结构的 (M,e) 初等等价）。特别地，将引理 5.2 应用于结构 $(\overline{M/e}, e)$，可得对任意 $b \in \overline{M/e}$，$x \mapsto e(x,b)$ 是一个距离谓词。

给定一个 $\mathcal{L}_e$-结构 M，若 $e(x,y)$ 可延拓到 $\overline{M/e}$，记 $\Subset_e$ 为关系 $\{(x,y) \in (\overline{M/e})^2 : e(x,y) = 0\}$。现在我们将考察 H-外延性公理刻画度量集合结构的方式。

命题 5.3。固定一个 $\mathcal{L}_e$-结构 (M,e)。(M,e) 满足 H-外延性公理，当且仅当 $(\overline{M/e}, d_e, \Subset_e)$ 存在且是一个度量集合结构。

证明。由引理 5.2 以及如下事实可得：对于所有 $a, b \in \overline{M/e}$，$(d_e)_{\mathrm{H}}(\{x : x \Subset_e a\}, \{x : x \Subset_e b\}) = \sup_z |e(z,a) - e(z,b)| = d_e(a,b)$。□

切除公理化会更加技术性。为方便起见，我们将受限 $\mathcal{L}_e$- 公式定义为 [8, Sec. 1.3] 中的定义：唯一的原子公式是形如$e(x,y)$的公式，并且我们采用 $\varphi + \psi$、$\max(\varphi, \psi)$、$\min(\varphi, \psi)$、常元 1，以及用于有理数的 $r \cdot \varphi$ r作为联结词。不过需要指出的是，无论受限公式采用何种定义，这里描述的方案都足以适用，例如 [1, Sec. 3] 中的定义。

给定一个受限 $\mathcal{L}_e$-公式 φ，我们可以通过将每个 $e(x,y)$ 替换为 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式 $\inf_{z \Subset y} d(x,z)$，构造出相应的 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式，其中 z 可取为任意一个不同于 x 和 y的变量。我们用 $\varphi_{\Subset}$ 表示这一翻译所得的公式。符号滥用一下，我们将用 $v(\varphi)$表示 $v(\varphi_{\Subset})$。

之后，我们还需要一种方法，将 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式转换回受限的 $\mathcal{L}_e$-公式。这里的困难在于，我们允许 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式使用实系数，而 $\mathcal{L}_e$-公式只能使用有理系数。考虑到这一点，若某个 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式中出现的所有系数都是有理数，就称它为有理的。我们归纳地定义与有理 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式 φ 对应的 $\mathcal{L}_e$-公式 φ_e 如下：

- $(d(x,y))_e = d_e(x,y)$,
- $(\inf_{x \Subset y} \varphi)_e = \inf_x \min(\varphi_e + 2v(\varphi)e(x,y)\ v(\varphi))$, 并且
- $(\sup_{x \Subset y} \varphi)_e = -$(下确界$_{x \Subset y} -\varphi)_e$,

其余转换部分均以显而易见的方式定义。以下事实要么是连续逻辑中的标准结果，要么很容易验证。

事实 5.4。固定一个 H-外延的 $\mathcal{L}_e$-结构 (M,e)，其中 (M, d_e) 是完备的。

(1) 对于任意 $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(\bar{x})$ 以及任意 $\bar{a} \in M$, $\varphi^{(M,e)}(\bar{a}) = \varphi_{\Subset}^{(M, d_e, \Subset_e)}(\bar{a})$。(2) 对于任意有理数 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式 $\varphi(\bar{x})$ 以及任意 $\bar{a} \in M$, $\varphi^{(M, d_e, \Subset_e)}(\bar{a}) = \varphi_e^{(M,e)}(\bar{a})$。

(3) 对于任意 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式 $\varphi(\bar{x})$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个有理数 $\mathcal{L}_{\Subset}$-公式 $\psi(\bar{x})$，使得 $|\varphi^{(M,d_e,\Subset_e)}(\bar{a}) - \psi^{(M,d_e,\Subset_e)}(\bar{a})| < \varepsilon$ 对于所有 $\bar{a} \in M$。

由引理 1.6 和事实 5.4 可知，若 (M,e) 是 H-外延的，且 (M,d_e) 是完备的，则对于任意受限的 $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(\bar{x})$，函数 $\bar{x} \mapsto \varphi^M(\bar{x})$ 关于由 d_e 诱导的元组上的最大度量是 $2v(\varphi)$-利普希茨的。通过取完备化 $(\overline{M/e}, d_e)$，可得对于任意 H-外延的 (M,e)，同样的结论也成立。

对于任意公式 $\varphi \in \mathcal{L}_e$，我们定义

$$\varepsilon_\varphi := \frac{1}{\max(6v(\varphi), 3)}.$$

注意，对于任意 H-外延的 (M,e)，若 $|\varphi^M(\bar{a}) - \varphi^M(\bar{b})| \geq \frac{1}{2}$，则 $d_e(\bar{a},\bar{b}) > \varepsilon_\varphi$。

定义 5.5。切除公理模式是由以下形式的 $\mathcal{L}_e$-条件组成的集合

$$\sup_{\bar{y}} \inf_{z} \sup_{x} \max(\min(e(x,z), -\varphi(x,\bar{y})), \min(\varepsilon_\varphi - e(x,z), \varphi(x,\bar{y}) - 1)) \leq 0$$

对每个受限的 $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(x,\bar{y})$（其中 z 不是自由变量）。

给定一个 H-外延的 $\mathcal{L}_e$-结构 M，我们称 M 满足 $\mathcal{L}_e$-切除，意指 M 满足切除公理模式。

切除公理模式更常见的表述如下：对于所有 $\bar{y}$、$\delta > 0$和 $\varphi(x,\bar{y}) \in \mathcal{L}_e$，存在一个 z，使得对于所有 x，

- 如果 $\varphi(x,\bar{y}) \leq -\delta$，那么 $e(x,z) < \delta$，并且
- 如果 $e(x,z) \leq \varepsilon_\varphi - \delta$，那么 $\varphi(x,\bar{y}) < 1 + \delta$。

只假设这一点对足够小的 $\delta > 0$成立，也足够了。这显然是 MSE 中切除原理某种情形的近似，但我们现在将证明，在 (M,d_e) 完备的 H-外延 M 中，切除公理模式足以推出完整的切除原理。

引理 5.6. 固定一个 H-外延的 $\mathcal{L}_e$-结构 M，使得 (M,d_e) 完备。假设 M满足 $\mathcal{L}_e$-切除。对于任意 $a \in M$和 r、$s \in [0,1]$（满足 $r < s$），存在一个 $b \in M$，使得对于任意 $c \in M$，若 $e(c,a) \leq r$，则 $c \Subset_e b$；若 $c \Subset_e b$，则 $e(c,a) < s$。

证明。为便于阅读，我们将用 d 表示 d_e，用 $\Subset$ 表示 $\Subset_e$。

令 $r_0 = \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s$、$s_0 = \frac{1}{3}r + \frac{2}{3}s$和 $b_0 = a$。对于任意 n，令 $\varphi_n(x,y) = {}^{e}\frac{x\ y\ -r_n}{(s_n - r_n\ ,}$）。

在阶段 n，假设给定了 b_n 以及满足 $0 < r_n < s_n$的有理数 r_n 和 s_n。由于 M sati满足 $\mathcal{L}_e$-切除性质，因此对于任意 $\gamma > 0$，存在一个 $f \in M$ 使得

$$\forall x(e(x,f) < \gamma \vee \varphi_n(x,b_n) > -\gamma) \wedge (\varepsilon_{\varphi_n} - e(x,b_n) < \gamma \vee \varphi_n(x,b_n) - 1 < \gamma).$$

令 b_{n+1} 为这样的 f，使得

$$\gamma = \delta_n := \min\left(\frac{2^{-n-2}}{27}(s-r), \frac{1}{2}r_n, \varepsilon_{\varphi_n}\right).$$

我们有，对于任意 $c \in M$，若 $\frac{e_{(c,\ b_n)}}{s_n - r_n}{}^{-r_n} \leq -\delta_n$（即，若 $e(c,b_n) \leq r_n - \delta_n(s_n - r_n)$），则$e(c,b_{n+1}) < \delta_n$。更进一步，这意味着若 $e(c,b_n) \leq r_n - \delta_n$，则 $e(c,b_{n+1}) < \delta_n$。

另一方面，若 $\varepsilon_{\varphi_n} - e(c,b_{n+1}) \geq \delta_n$（即，若 $e(c,b_{n+1}) \leq \varepsilon_{\varphi_n} - \delta_n$），则 ${}^{e_{(c,\ b_n)}s_n - r_n\ -r_n\ -}1 < \delta_n$，因此 $e(c,b_n) < r_n + (1+\delta_n)(s_n - r_n)$。由于 $\delta_n \leq \varepsilon_{\varphi_n}$，这意味着若 $c \Subset b_{n+1}$，则 $e(c,b_n) < r_n + 2s_n$。

最后，选取 r_{n+1} 和 s_{n+1}，使得 $2\delta_n < r_{n+1} < s_{n+1} < 3\delta_n$，然后进入构造的下一阶段。

断言。$(b_n)_{n<\omega}$ 是一个柯西序列。
该断言的证明。对于任意 $n>0$ 和 $c\in M$，若 $c\sqsubset b_n$，则有 $e(c,b_{n+1})<\delta_n\leq\frac{2^{-n-2}}{27}(s-r)$；并且，若 $c\sqsubset b_{n+1}$，则有 $e(c,b_n)<r_n+2s_n<9\delta_{n-1}\leq\frac{2^{-n-1}}{3}(s-r)$。因此，根据 H-外延性，$d(b_n,b_{n+1})\leq\frac{2^{-n-1}}{3}(s-r)$。由于对任意正的 n，我们都可以这样做，故该断言得证。$\square_{\text{claim}}$

令 $b=\lim_{n\to\infty}b_n$。由于 (M,d) 是完备的，b 是 M 的一个元素。
断言。对于任意 $c\in M$，若 $e(c,a)\leq r$，则 $c\sqsubset b$。
命题的证明。由于 $e(c,a)\leq r$，并且由于 $\delta_0\leq\frac{2^{-2}}{27}(s-r)<\frac{1}{3}(s-r)$，我们有 $e(c,b_0)=e(c,a)<r_0-\delta_0$。因此，$r(c,b_1)<\delta_0$。对于任意 n，假设我们知道 $e(c,b_{n+1})<\delta_n$。于是我们有

$$\begin{aligned}e(c,b_{n+1})&<\delta_n\\&<\tfrac{1}{2}r_{n+1}&&\text{（根据我们对 } r_{n+1}\text{ 的选择）}\\&\leq r_{n+1}-\delta_{n+1}&&\text{（由于 } \delta_{n+1}\leq\tfrac{1}{2}r_{n+1}\text{）。}\end{aligned}$$

因此，$e(c,b_{n+2})<\delta_{n+1}\leq\frac{2^{-n-1}}{27}(s-r)$。

因此，对于每个 n，根据归纳法，$e(c,b)<\frac{2^{-n-1}}{27}(s-r)+d(b_{n+2},b)$。由于 $b_n\to b$，我们有 $e(c,b)=0$，即 $c\sqsubset b$。$\square_{\text{claim}}$

最后，我们只需验证：如果 $c\sqsubset b$，那么 $e(c,a)<s$。根据上述估计，我们知道 $d(b_1,b)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n-1}}{3}(s-r)=\frac{1}{6}(s-r)$。我们有

$$\begin{aligned}d(a,b_1)=d(b_0,b_1)&\leq\max(\delta_0,r_0+(1+\delta_0)(s_0-r_0))\\&\leq\max\left(\tfrac{1}{2}r_0,r_0+\left(1+\tfrac{1}{108}\right)\tfrac{1}{3}(s-r)\right)\\&<\max\left(\tfrac{1}{2}r_0,r_0+\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{1}{3}(s-r)\right)=\tfrac{1}{4}r+\tfrac{3}{4}s.\end{aligned}$$

因此，

$$d(a,b)\leq d(a,b_1)+d(b_1,b)<\tfrac{1}{4}r+\tfrac{3}{4}s+\tfrac{1}{6}(s-r)=\tfrac{1}{12}r+\tfrac{11}{12}s<s.$$

所以，如果 $c\sqsubset b$，那么存在一个 $f\sqsubset a$，使得 $d(c,f)<s$，这意味着 $e(c,a)<s$，正如所需。$\square$

命题 5.7。设 (M,e) 是一个 H-外延的 $\mathcal{L}_e$-结构，且 (M,d_e) 完备。$(M,d_e,\sqsubset_e)\models\text{MSE}$，当且仅当 (M,e) 满足 $\mathcal{L}_e$- 切除。

此外，所有 MSE 的模型都以这种方式得到。

证明。令 $\chi(x,\bar{y},z)=\max(\min(e(x,z)-\varphi(x,\bar{y})),\min(\varepsilon_\varphi-e(x,z)\ \varphi(x,\bar{y})))$。假设 $(M,d_e,\sqsubset_e)\models\text{MSE}$。固定一个受限的 $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(x,\bar{y})$。固定一个参数元组 $\bar{a}$。令$b=\left[x\colon\varphi_{\sqsubset}(x,\bar{a})<0\sim\frac{1}{2}\right]$。现在，对任意 c，我们有：若 $\varphi(c,\bar{a})\leq0$，则 $e(c,b)=0$。因此 $\min(e(c,b)-\varphi(c,\bar{a}))\leq0$。此外，若 $\varphi(c,\bar{a})\geq1$，则对所有 $f\sqsubset_e b$ 都有 $d_e(c,f)>\varepsilon_\varphi$（因为它们都满足 $\varphi^M(f,\bar{a})<\frac{1}{2}$）。因此 $e(c,b)\geq\varepsilon_{\varphi^0}$ 所以 $\min(\varepsilon_\varphi-e(c,b)\ \varphi(c,\bar{a}))\leq0$。由于对任意 $c\in M$ 都可以这样做，我们有 $(M,e)\models\sup_x\chi(x,\bar{a},b)\leq0$，由此 $(M,e)\models\inf_z\sup_x\chi(x,\bar{a},z)\leq0$。由于对任意 $\bar{a}\in M$ 都可以这样做，我们有 $(M,e)\models\sup_{\bar{y}}\inf_z\sup_x\chi(x,\bar{y},z)$。最后，由于这对任意受限的 $\mathcal{L}_e$-公式都成立，我们有 (M,e) 满足 $\mathcal{L}_e$- 切除。

现在假设 (M,e) 满足 $\mathcal{L}_e$-切除。固定一个 $\mathcal{L}_{\sqsubset}$-公式 $\varphi(x,\bar{y})$、$\bar{a}\in M$ 和 $r<s$。如有必要，通过取 r' 和 s'，使其满足 $r<r'<s'<s$，我们可以假设 r 和 s 是有理数。由事实 5.4，我们可以固定一个有理的 $\mathcal{L}_{\sqsubset}$-公式 $\psi(x,\bar{y})$，使得

$\left|\psi(x,\bar{y}) - \frac{\varphi(x,\ \bar{y}-r}{s-r}\right| < \frac{1}{6}$) 对所有 x 和 $\bar{y}$ 均成立。固定满足 $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon_{3\psi-1}$ 的 $\delta > 0$。注意到 $\delta < \frac{1}{2}$。对受限的 $\mathcal{L}_e$-公式 $3\psi_e(x,\bar{a}) - 1$ 应用 $\mathcal{L}_e$-切除，得到满足下述条件的 $b \in M$：对所有 $c \in M$，若 $\psi_e(c,\bar{a}) \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta$，则 $e(c,b) < \delta$；若 $e(c,b) < \varepsilon_{3\psi-1} - \delta$，则 $\psi_e(c,\bar{a}) < \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\delta$。对 b 应用引理 5.6，得到一个集合 f，使得若 $e(c,b) \leq \delta$，则 $c \sqsubseteq f$；若 $c \sqsubseteq f$，则 $e(c,b) \leq \frac{1}{2}\varepsilon_{3\psi-1} < \varepsilon_{3\psi-1} - \delta$。

对于任意 $c \in M$，假设 $\varphi(c,\bar{a}) \leq r$。于是我们有 $\psi(c,\bar{a}) = \psi_e(c,\bar{a}) < \frac{1}{6} < \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta$. 因此，$e(c,b) < \delta$，所以 $c \sqsubset f$。另一方面，假设$c \sqsubset f$。于是我们有 $e(c,b) < \varepsilon_{3\psi-1} - \delta$。因此 $\psi_e(c,\bar{a}) < \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\delta$，这意味着 ${}_{\varphi(c,\bar{a})}{s-r}^{-r} < \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{6} < 1$，所以 $\varphi(c,\bar{a}) < s$。

由于对于任意 $\varphi(x,\bar{a})$ 和 $r < s$，我们都可以这样做，因此有 $(M, d_e, \sqsubset_e) \models \mathrm{MSE}$。

“此外”这一陈述源于以下事实：若 $(M,d,\sqsubset) \models \mathrm{MSE}$，则 (M,e)（其中 e 由 $\sqsubset$ 和 d定义）是 H-外延的，且满足 $\mathcal{L}_e$-切除。□

根据命题 5.7，我们也将用 MSE 表示由 H-外延性公理和切除公理模式组成的 $\mathcal{L}_e$-理论。

6. 构造 MSE 的模型

为了构造 MSE 的模型，我们需要借鉴构造 GPK 模型的技巧。这种构造也带有几分构造 NFU 模型的意味，因为它涉及另一种集合论的非标准模型。为了证明任意度量空间都可以成为 MSE 的某个模型中的一组蒯因原子[14]，我们将采用一种结合了 [19] 中的树结构要素和第 [6, 节 2]末尾所介绍构造的方法。我们在此给出的构造可以推广，以允许某些其他度量集合结构嵌入 MSE 的模型，其思路与第 [6, 节 2], 类似，但我们没有在此继续探讨。我们在 ZF 的框架下进行。

在下述定义中，Q 旨在表示我们最终构造的模型中的一组蒯因原子，尽管我们在此构造的模型总是恰好多包含一个蒯因原子。

定义 6.1. 固定一个集合 Q，以及定义在 Q 上、取值于 $[0,1]$ 的度量 d。假设 Q 不包含任何序数指标序列。对于任意序数 α，令 $\mathcal{T}_\alpha(Q)$ 表示所有满足下述条件的α序列 x 所组成的集合：

- for every $\beta < \alpha$, $x(\beta) \subseteq Q \cup \mathcal{T}_\beta(Q)$ and
- for every $\beta < \gamma < \alpha$, $x(\beta) \cap Q = x(\gamma) \cap Q$ and $x(\beta) \setminus Q = \{y{\restriction}\beta : y \in x(\gamma) \setminus Q\}$.

令 $\sqsubset \subseteq \mathcal{T}_\alpha(Q)^2$ 为满足下述条件的二元关系：

- 对于 $x \in \mathcal{T}_\alpha(Q)$ 和 $y \in Q$，当且仅当 $x = y$ 时，$x \sqsubset y$ 成立，
- 对于 $x \in Q$ 和 $y \sqsubset \mathcal{T}_\alpha(Q) \setminus Q$，当且仅当对每个 $b < \alpha$ 都有 $x \in y(\beta)$，且
- 对于 $x \in \mathcal{T}_\alpha(Q) \setminus Q$ 和 $y \in \mathcal{T}_\alpha(Q) \setminus Q$，当且仅当对每个$\beta < \alpha$都有 $x{\restriction}\beta \in y(\beta)$。

注意，$\mathcal{T}_\alpha(Q)$ 是定义良好的，因为 $\mathcal{T}_0(Q) = Q \cup \{\varnothing\}$。

[14]回想一下，*Quine atom*（有时称为 *self-singleton*）是一个满足 $x = \{x\}$ 的集合 x。

对于任意 $x \in \mathcal{T}_\alpha(Q)$，我们用 $\mathrm{tc}(x)$ 表示 $\mathcal{T}_\alpha(Q)$ 的最小子集，使得 $\{y : y \sqsubseteq x\} \subseteq \mathrm{tc}(x)$，并且若 $z \sqsubseteq y \in \mathrm{tc}(x)$，则 $z \in \mathrm{tc}(x)$。对于任意 $x, y \in \mathcal{T}_\alpha(Q)$，我们定义

$$\begin{aligned}
\rho_0^{Q,\alpha}(x,y) &\coloneqq d_{\mathrm{H}}(\mathrm{tc}(x) \cap Q, \mathrm{tc}(y) \cap Q), \\
e_\beta^{Q,\alpha}(z,y) &\coloneqq \inf_{w \sqsubseteq y} \rho_\beta^{Q,\alpha}(z,w), \\
\rho_{\beta+1}^{Q,\alpha}(x,y) &\coloneqq \max\left(\sup_{z \sqsubseteq x} e_\beta^{Q,\alpha}(z,y), \sup_{w \sqsubseteq y} e_\beta^{Q,\alpha}(w,x)\right), \\
\rho_\lambda^{Q,\alpha}(x,y) &\coloneqq \sup_{\beta<\lambda} \rho_\beta^{Q,\alpha}(x,y),
\end{aligned}$$

对所有的 β 和 λ 极限序数，满足 $\sup \varnothing = 0$ 和 $\inf \varnothing = 1$。

我们通常省略上标 $^{Q,\ \alpha}$。由于一族伪度量的上确界总是伪度量，简单的归纳论证表明，对每个 $\beta \in$ 序数类$\cup\{\infty\}$，ρ_β 都是伪度量。显然，对于任意 $x \in Q$，传递闭包$(x) = \{x\}$，因此对于 $x, y \in Q$, $\rho_\beta(x,y) = d(x,y)$，对每个 β都成立。最后可以证明，如果对所有 $\gamma \leq \beta$，$x(\gamma) = y(\gamma)$，那么 $\rho_\beta(x,y) = 0$。

此外，虽然我们不会用到这一点，但应当指出，$\mathcal{T}_\alpha(\varnothing)$恰好是 [19] 的高度为 α 的树结构；在这种情况下，当且仅当 $x{\restriction}\beta = y{\restriction}\beta$ 时，$\rho_\beta(x,y)$为0，否则为1。ρ_β 当然也与 [13]的$\sim_\beta$ 关系密切相关。

引理 6.2. 对任意 a，$b \in \mathcal{T}_\alpha(a,b)$ 和 $\beta \mapsto e_\beta(a,b)$ 都是关于 β 的非递减函数。

证明。对 β 作归纳。极限阶段显然，因此假设我们知道，对于区间 $[0,\beta]$ 上任意的 a、$b \in \mathcal{T}_\alpha$，$\gamma \mapsto \rho_\gamma(a,b)$ 和 $\gamma \mapsto e_\gamma(a,b)$ 都是递增函数，并考察 $\rho_{\beta+1}(x,y)$。

若 $\beta = 0$，那么我们只需证明 $\rho_1(a,b) \geq \rho_0(a,b) = d_{\mathrm{H}}$(传递闭包$(a) \cap Q$, 传递闭包$(b) \cap Q$)。假设 $\rho_0(a,b) > r$。不失一般性，这意味着存在一个 $c \in$ 传递闭包$(a) \cap Q$，使得 $\inf\{d(c,z) : z \in$ 传递闭包$(b) \cap Q\} > r$。由于 $c \in$ 传递闭包(a) 且 $c \sqsubseteq c$，存在一个 $f \sqsubseteq a$，使得 $c \in$ 传递闭包(f)。由于 $c \in$ 传递闭包$(f) \cap Q$，并且对于任意 $g \sqsubseteq b$，传递闭包$(g) \subseteq$ 传递闭包(b)，我们有 $\rho_0(f,g) > r$ 对任意 $g \sqsubseteq b$ 均成立。因此 $\rho_1(a,b) \geq r$。由于对任意 r 都可以这样做，我们有 $\rho_1(a,b) \geq \rho_0(a,b)$。

若 $\beta > 0$，则对任意 $\gamma \leq \beta$，由归纳假设可知 $e_\gamma(u,v) \leq e_\beta(u,v)$，因此

$$\max\left(\sup_{z \sqsubseteq a} e_\gamma(z,b), \sup_{w \sqsubseteq b} e_\gamma(w,a)\right) \leq \max\left(\sup_{z \sqsubseteq a} e_\beta(z,b), \sup_{w \sqsubseteq b} e_\beta(w,a)\right)$$

因此 $\rho_\gamma(a,b) \leq \rho_{\gamma+1}(a,b) \leq \rho_{\beta+1}(a,b)$，如所要求的。$e_{\beta+1}(a,b) \geq e_\beta(a,b)$ 这一事实是显然的。□

引理 6.3. 对任意 (Q,d) 和序数 $\alpha < \beta$，存在唯一的 $v_\alpha \in \mathcal{T}_\beta(Q)$，使得 $(v_\alpha, \sqsubseteq)$ 和 $(V_\alpha, \in)$ 同构，并且对任意 $\gamma \in (\alpha,\beta)$ 以及互异的 $a, b \sqsubseteq v_\alpha$，$\rho_\gamma(a,b) = 1$。

证明. 固定一个序数 β。我们将通过归纳证明此结论对所有 $\alpha < \beta$ 都成立。对于 $V_0 = \varnothing$，序列 $v_0(\gamma) = \varnothing$ in $\mathcal{T}_\beta(Q)$ 满足该陈述。

现在假设对于某个 $\alpha < \beta$，该命题对所有 $\delta < \alpha$ 都成立。若 α 是后继序数且等于 $\gamma + 1$，令 v_α 由 $v_\alpha(0) = \{\varnothing\}$, $v_\alpha(\sigma+1) = \mathcal{P}(v_\gamma(\sigma))$，以及$v_\alpha(\lambda) = \{x$ 定义：x 是一个 λ 序列，$(\forall \sigma < \lambda) x{\restriction}\sigma \in v_\alpha(\sigma)\}$ 对任意极限序数 λ都成立。由于该命题对 γ 成立，我们有 ρ_γ 在 v_γ 的 $\sqsubseteq$-元素上取值于 $\{0,1\}$，于是得到

$\rho_\alpha = \rho_{\gamma+1}$ 在 v_α 的 $\sqsubseteq$-元素上取值于 $\{0,1\}$。此外，由于 $(v_\gamma, \sqsubseteq)$ 与 $(V_\gamma, \in)$ 同构，因此立刻可得 $(v_\alpha, \sqsubseteq)$ 与 $(V_\alpha, \in)$ 同构。

如果 α 是极限序数，那么对每个 $\sigma < \beta$，令 $v_\alpha(\sigma) = \bigcup_{\gamma<\alpha} v_\gamma(\sigma)$。所需的陈述显而易见。□

定义 6.4. 对任意 Q 和 α，令 $\tau_{Q,\alpha}$ 为 $\mathcal{T}_\alpha(Q)$ 上由形如 $\{y \in \mathcal{T}_\alpha(Q) : \rho_\beta(x,y) < \varepsilon\}$ for $x \in \mathcal{T}_\alpha(Q)$, $\beta < \alpha$, and $\varepsilon > 0$ 的集合生成的拓扑。

根据基本拓扑事实可立即得出，对于任意 $X \subseteq \mathcal{T}_\alpha(Q)$，存在唯一的包含 X 的最小闭集 $\overline{X}$。更重要的是，我们有以下结论。

命题 6.5. 对任意 Q、极限序数 α 和闭 $F \subseteq \mathcal{T}_\alpha(Q)$，存在一个 $x \in \mathcal{T}_\alpha(Q)$，使得 $F = \{y \in \mathcal{T}_\alpha(Q) : y \sqsubseteq x\}$。

证明。对于任意 $\beta < \alpha$，令 $x(\beta) := \{y \in \mathcal{T}_\beta(Q) : y$ 扩展为 $F\}$ 中的一个元素。显然，x 是 $\mathcal{T}_\alpha(Q)$ 的一个元素。此外，显然，如果 $y \in F$，那么 $y \sqsubseteq x$。因此，现在我们只需证明反向结论。

假设 $y \sqsubseteq x$。我们要证明 y 属于 F 的闭包，因此也属于 F。为此，只需证明对于每个$\beta < F$，$\inf\{\rho_\beta(y,z) : z \in F\} = 0$。对于每个 $\beta < \alpha$，找出满足 y的 $z \in F$，使得 $\beta + 1$是 z的初始段。现在我们有 $\rho_\beta(y,z) = 0$。由于对于任意 $\beta < \alpha$我们都可以这样做，因此 y 属于 F的闭包。□

最终对我们有用的是，上述事实是结构 $(V_{\alpha+\omega}, \alpha, Q, d, \sqsubseteq, \mathcal{T}_\alpha(Q))$ 的一阶性质（假设 $\mathcal{T}_\alpha(Q)$ 是 $V_{\alpha+\omega}$ 的一个元素）。这也是定义 6.7 的动机之一。

我们还需要以下结果。

引理 6.6。固定一个度量空间 (Q,d) 和一个极限序数 α。令 $\overline{Q}$ 为 $\tau_{Q,\alpha}$-闭包 $Q \subset \mathcal{T}_\alpha(Q)$。对于任意 $z \in \overline{Q}$，存在一个 $x \in Q$，使得对于所有 $\beta < \alpha$，$\rho_\beta(x,z) = 0$。

证明。首先我们需要证明，若 $x \in \overline{Q}$，则 $|\mathrm{tc}(x) \cap Q| = 1$。假设 $\mathrm{tc}(x) \cap Q$ 有多个元素。令 y 和 z 为 $\mathrm{tc}(x) \cap Q$ 中两个不同的元素。假设 $d(y,z) > r$。我们立刻得到，对于任意 $w \in Q$，$\rho_0(x,w) > \frac{1}{2}r$。因此 $x \notin \overline{Q}$。另一方面，假设 $\mathrm{tc}(x) \cap Q = \varnothing$。同样，对于任意 $w \in Q$，$\rho_0(x,w) = 1$。因此 $x \notin \overline{Q}$。

现在我们需要论证，如果 $x \in \overline{Q}$，那么对任意 $y \sqsubseteq x$，$y \in \overline{Q}$ 也成立。假设 $y \sqsubseteq x$且 $y \notin \overline{Q}$。根据定义，这意味着存在一个 $\beta < \alpha$，使得 $\inf\{\rho_\beta(y,z) : z \sqsubseteq x\} = r > 0$，但这意味着对于所有 $w \in Q$，$\rho_{\beta+1}(x,w) \geq r$，因此 $x \notin \overline{Q}$。

对于任意 $x \in \overline{Q}$，令 $\pi(x)$ 表示 Q 中属于 $\mathrm{tc}(x)$ 的唯一元素。我们需要证明，对于所有 $\beta < \alpha$，$\rho_\beta(x, \pi(x)) = 0$。显然，对于任意满足 $\pi(y) = \pi(x)$ 的 $y \in \overline{Q}$，都有 $\rho_0(y, \pi(x)) = 0$。假设对于所有满足 $\pi(y) = \pi(x)$ 的 $\gamma < \beta$ 和 $y \in \overline{Q}$，都有 $\rho_\gamma(y, \pi(x)) = 0$。如果 β 是一个极限序数，那么$\rho_\beta(x, \pi(x)) = 0$。假设对于某个 δ，$\beta = \delta + 1$。取满足 $\pi(y) = \pi(x)$ 的 y。取 $z \sqsubseteq y$。显然，我们有 $\mathrm{tc}(z) \cap Q \subseteq \mathrm{tc}(y) \cap Q$。此外，必有 $z \in \overline{Q}$。因此，我们也必有 $\pi(z) = \pi(y) = \pi(x)$，所以根据归纳假设，我们有$\rho_\delta(z, \pi(x)) = 0$。由于对任意 $z \sqsubseteq y$ 都可以如此进行，因此我们有 $\rho_{\delta+1}(y, \pi(x)) = 0$，这正是所需。□

定义 6.7。固定一个如定义 6.1 中的元组 $(Q, d, \sqsubseteq)$，以及一个无限序数 α，使得 $\mathcal{T}_\alpha(Q)$ 是 $V_{\alpha+\omega}$ 的一个元素。我们将假设，受限的 $\mathcal{L}_e$-公式是 $V_{\alpha+\omega}$ 的元素。

令 $(M, \alpha^M, Q^M, d^M, \sqsubseteq^M, \mathcal{T}^M)$ 为一个与 $(V_{\alpha+\omega}, \alpha, Q, d, \sqsubseteq, \mathcal{T}_\alpha(Q))$ 初等等价的结构。对于依据定义 6.1 在 M 中内部计算得到的函数，我们分别记作 $\rho_\beta^M(x,y)$ 和 $e_\beta^M(x,y)$。

对于任意满足 $|r| \leq n$ 的 $r \in \mathbb{R}^M$，其中 n 是某个标准自然数，r 的标准部分记作 $\mathrm{st}(r)$，它是满足 $r \geq t$ 的唯一标准实数，当且仅当对于所有标准有理数 t，$\mathrm{st}(r) \geq t$。

M 上的规范是一个非增函数 $s : \alpha^M \to [0,1]$（其中 $[0,1]$ 是标准单位区间），且 $s(0) = 1$。M 上的内部规范是一个从 α^M 到 $[0,1]^M$ 的非增函数 $s \in M$，且 $s(0) = 1$。若 M 上的内部规范 ε 光滑，则

- $s(0) = s(1)$,

对于所有充分大的 $\beta \in \alpha^M$，- $s(\beta) = 0$,

对于每个 $\beta \in \alpha^M$，-，$s(\beta) < s(\beta + 1) + \varepsilon$，并且

- 对于任意极限序数 $\lambda \in \alpha^M$，都存在一个 $\beta < \lambda$，使得 $s(\beta) = s(\lambda)$。

给定 M 上的一个内部规范 s，s 的标准部分记作 s^{st}，即 $\mathrm{st} \circ s$。

给定 M 上的一个规范 s，我们定义函数

$$\rho_s(x,y) := \sup_{\beta \in \alpha^M} \min(\rho_\beta^M(x,y), s(\beta))$$

以及 $e_s(x,y) = \inf_{w \sqsubseteq^M y} \rho_s(x,w)$。对于任意内部规范 s，我们用 ρ_s 和 e_s 表示在 M 内部计算得到的相应量，并用 ρ_s^{st} 和 e_s^{st} 表示它们相应的标准部分。

给定 M 上的两个规范 s_0 和 s_1，我们用 $\|s_0 - s_1\|$ 表示量 $\sup_{\beta \in \alpha^M} |s_0(\beta) - s_1(\beta)|$。

注意，对于定义 6.7 中的任意 M，$\rho_s^{\mathrm{st}} = \rho_{s^{\mathrm{st}}}$ 和 $e_s^{\mathrm{st}} = e_{s^{\mathrm{st}}}$ 都成立。由于 $\rho_s(x,y)$ 是一族伪度量的上确界，它本身也是伪度量。最后，显然，对于 M 上的任意规范 s，$(\mathcal{T}^M, e_s)$ 是一个 $\mathcal{L}_e$-结构。

下文中，我们将用“(M 如 6.7 中所述。)”表示结构 $M = (\mathcal{T}^M, \alpha^M, \mathbb{R}^M)$ 满足定义 6.7 中的条件。

引理 6.8。（M 如 6.7 中所述。）固定一个受限的 $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(\bar{x})$ 以及一个元组 $\bar{a} \in \mathcal{T}^M$。

（1）对于 M 上的任意规范 s 和 t，

$$|\varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s)}(\bar{a}) - \varphi^{(\mathcal{T}^M, e_t)}(\bar{a})| \leq v(\varphi)\|s - t\|.$$

（2）对于 M 上的任意内部规范 s，

$$\mathrm{st}((\varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s)}(\bar{a}))^M) = \varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s^{\mathrm{st}})}(\bar{a}),$$

其中 $(\varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s)}(\bar{a}))^M$ 是在 M 中内部计算的 $\varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s)}(\bar{a})$ 的值。

证明。直接可证，对于任意 a、$b \in \mathcal{T}^M$、$|\rho_s(a,b) - \rho_t(a,b)| \leq \|s - t\|$。同样，这意味着对于任意 a、$b \in \mathcal{T}^M$、$|e_s(a,b) - e_t(a,b)| \leq \|s - t\|$。由此，结论 1 可通过归纳论证得到。结论 2 也可通过简单的归纳论证得到。□

引理 6.9。（M 同 6.7 中一样。）对于任意 $\beta \in \alpha^M$,

$$\rho_{\beta+1}^M(x,y) = \sup_{z \in \mathcal{T}^M} |e_\beta^M(z,x) - e_\beta^M(z,y)|.$$

证明。由以下事实可立即得出：ρ_β^M 是 $\mathcal{T}^M$ 上的伪度量，而 $\rho_{\beta+1}^M(x,y)$ 恰好是关于 $\rho_{\beta+1}^M$ 的 $\{z : z \sqsubseteq^M x\}$ 与 $\{z : z \sqsubseteq^M y\}$ 之间的豪斯多夫距离。□

引理 6.10。（M与 6.7 中相同。）固定 $\varepsilon \in (0,1]^M$以及 M上的一个 ε-光滑内部规范 s。令 $d_{e,\ s}(x,y) \coloneqq \sup_z |e_s^M(z,x) - e_s^M(z,y)|$。以下命题在 M内部成立：

(1) $\rho_s(a,b) \leq d_{e,\ s}(a,b) \leq \rho_s(a,b) + \varepsilon$对所有 $a,b \in \mathcal{T}^M$均成立。(2) $|e_s(a,b) - \inf_z \min(d_{e,\ s}(a,z) + 2e_s(z,b),1)| \leq \varepsilon$对所有 $a,b \in \mathcal{T}^M$均成立。

证明。首先注意，根据定义，$d_{e,\ s}(x,y)$是由伪度量 $\rho_s(x,y)$诱导的豪斯多夫伪度量。因此，我们特别还可得

$$d_{e,s}(x,y) = \max\left(\sup_{z \sqsubseteq x} e_s(z,y), \sup_{w \sqsubseteq y} e_s(w,x)\right).$$

对于 1，固定 a 和 b，其中 $\mathcal{T}$。如果 a 和 b 都是 $\sqsubseteq$-空的，那么 $d_{e,\ s}(a,b) = \rho_s(a,b) = 0$。如果其中一个是 $\sqsubseteq$-空的而另一个不是，那么 $d_{e,\ s}(a,b) = \rho_s(a,b) = 1$。因此，假设它们都不是 $\sqsubseteq$-空的。

假设 $\rho_s(a,b) > r$。这意味着存在一个 $\beta \in \alpha^M$，使得 $\min(\rho_\beta(a,b)\ s(\beta)) > r$，进而意味着 $\rho_\beta(a,b) > r$。若 β 是一个极限序数，则 $\rho_\beta(a,b) = \sup_{\gamma<\beta} \rho_\gamma(a,b)$，因此，由于 s 是非递增的，我们可以假设 β 不是极限序数。由于 $s(0) = s(1)$，根据引理 6.2，我们可以假设 $\beta > 0$。因此，令 $\gamma + 1 = \beta$。现在我们可以不失一般性地假设存在一个 $c \sqsubset a$，使得 $e_\gamma(c,b) > r$，这意味着对所有 $f \sqsubset b$，都有 $\rho_\gamma(c,f) > r$。因此，对所有 $f \sqsubset b$，都有 $\rho_s(c,f) \geq \min(\rho_s(c,f)\ s(\gamma)) > r$，由此可得$e_s(c,b) \geq r$且 $d_{e,s}(a,b) \geq r$。由于我们可以对任意 $r < \rho_s(a,b)$进行上述操作，因此有$d_{e,s}(a,b) \geq \rho_s(a,b)$。

现在假设对于某个 $r > 0$，$d_{e,s}(a,b) > r$。不失一般性，我们可以假设存在一个 $c \sqsubset a$，使得 $e_s(c,b) > r$。因此，特别地，对于所有 $f \sqsubset b$，$\rho_s(c,f) > r$。所以，对于任意这样的 f，都存在一个 $\beta_f \in \alpha^M$，使得 $\min(\rho_{\beta_f}(c,f)\ s(\beta_f)) > r$。由于 s 是ε-光滑的，因此存在最大的 $\gamma \in \alpha^M$，使得 $s(\gamma) > r$。注意，对于所有 $f \sqsubset b$，必有 $\gamma \geq \beta_f$。所以现在我们实际上知道，对于所有 $f \sqsubset b$，$\rho_\gamma(c,f) > r$。因此，$e_\gamma(c,b) \geq r$，从而 $\rho_{\gamma+1}(a,b) \geq r$，于是 $\rho_s(a,b) \geq \min(\rho_{\gamma+1}(a,b)\ s(\gamma+1)) > r - \varepsilon$。由于对于任意$r < d_e$，$_s(a,b)$，我们都可以这样做，因此我们有 $\rho_s(a,b) \geq d_{e,s}(a,b) - \varepsilon$，证毕。

对于 2，由引理 5.2 证明的 $\Leftarrow$方向可知，对于所有 $a,b \in \mathcal{T}^M$，$e_s(a,b) = \inf_z \min(\rho_s(a,z)+2e_2(z,b), 1)$。由第 1 部分可立即得到

$$|\inf_z \min(d_{e,s}(a,z) + 2e_2(z,b),1) - \inf_z \min(\rho_s(a,z) + 2e_2(z,b),1)| \leq \varepsilon$$

对于所有 $a,b \in \mathcal{T}^M$，因此所需结果得证。 □

引理 6.11。（M与 6.7 中相同。）固定 $\varepsilon \in (0,1]^M$，并令 s 为 ε-光滑的 M 上的内部规范。对于任意[15] $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(\bar{a},\bar{b})$以及任意 $\bar{a},\bar{b} \in \mathcal{T}^M$，

$$|\varphi^{(\mathcal{T}^M,e_s)}(\bar{a}) - \varphi^{(\mathcal{T}^M,e_s)}(\bar{b})| \leq 2v(\varphi)d_{e,s}(\bar{a},\bar{b}),$$

其中 $d_{e,\ s}(\bar{a},b) = \max_{i<|\bar{a}|} d_{e,\ s}(a_i,b_i)$。

证明。我们对公式进行归纳来证明此结论。如果 φ 是 $e(x,y)$，那么我们有

$$\begin{aligned}
|e(a_0,a_1) - e(b_0,b_1)| &\leq |e(a_0,a_1) - e(b_0,a_1)| + |e(b_0,a_1) - e(b_0,b_1)| \\
&\leq \rho_s(a_0,b_0) + d_{e,s}(a_1,b_1) \\
&\leq d_{e,s}(a_0,b_0) + d_{e,s}(a_1,b_1) \\
&\leq 2d_{e,s}(a_0a_1,b_0b_1)
\end{aligned}$$

根据引理 6.10。关于联结词和量词的论证与引理 1.6 中相同。 □

[15]可能是非标准的，不过我们并不需要这一点。

引理 6.12。（M 同 6.7。）固定 $\varepsilon \in (0,1]^M$，并设 s 是 ε-光滑的内部规范，定义在 M 上。对于任意 $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(x,\bar{y})$，M 满足：

$$(\mathcal{T}^M, e_s) \models \sup_{\bar{y}} \inf_{z} \sup_{x} \max(\min(e(x,z), -\varphi(x,\bar{y})), \min(\varepsilon_\varphi - e(x,z), \varphi(x,\bar{y}) - 1)) \leq 2v(\varphi)\varepsilon.$$

证明。对于任意 $\bar{a} \in M$，以及任意 $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(x,\bar{y})$，令 $B_0 = \{x \in \mathcal{T}^M : \varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s)}(x,\bar{a}) \leq 0\}$。我们需要说明，$B_0$ 在定义 6.4 给出的 $\mathcal{T}^M$ 上的拓扑中是闭的。假设 $c \notin B_0$。这意味着 $\varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s)}(c,\bar{a}) > 0$。由于 e_s 相对于 ρ_s是 2-利普希茨的，这意味着存在一个 $\delta > 0$，使得对于任意满足 $\rho_s(c,c') < \delta$的 $c' \in \mathcal{T}^M$，$\varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s)}(c',\bar{a}) > 0$ 也成立。由于 s 是 ε-光滑的，因此存在一个 $\gamma \in \alpha^M$，使得 $s(\gamma) = 0$。根据引理 6.2，我们知道，若 $\rho_\gamma(c,c') < \frac{1}{2}\delta$，则 $\rho_s(c,c') < \delta$。因此，集合 $\{x : \rho_\gamma(x,c) < \frac{1}{2}\delta\}$ 与 B_0不相交。由于对任意 $c \notin B_0$我们都可以这样做，因此 B_0 是闭的。

令 b 为 $\mathcal{T}^M$ 中与 B_0 共外延的唯一元素（由命题 6.5 可知其存在）。对于任意 $c \in \mathcal{T}^M$，若 $\varphi^{(\mathcal{T}^M, e_s)}(c,\bar{a}) \leq 0$，则根据我们对 c 的选取，$c \sqsubseteq b$，因此 $e_s(c,b) = 0$。所以，对所有 $c \in \mathcal{T}^M$，$\min(e_s(c,b) - \varphi(c,\bar{a})) \leq 0$。另一方面，若 $e_s(c,b) \leq \varepsilon_\varphi$，则存在一个 $f \sqsubseteq b$，使得对于任意 $\sigma > 0$，$\rho_s(c,f) < \varepsilon_\varphi + \sigma$。因此，由引理 6.10 和 6.11，$\varphi(c,\bar{a}) < 2v(\varphi)d_{e,s}(c,f) < 2v(\varphi)(\varepsilon_\varphi + \sigma + \varepsilon)$。由于 $2v(\varphi)\varepsilon_\varphi < 1$，且我们对任意 $\sigma > 0$ 都可以这样做，因此 $\varphi(c,\bar{a}) \leq 1 + 2v(\varphi)\varepsilon$。所以，对于任意 $c \in \mathcal{T}^M$，$\min(\varepsilon_\varphi - e(c,b), \varphi(c,\bar{a}) - 1) \leq 2v(\varphi)\varepsilon$。□

引理 6.13。（M 如 6.7 中所述。）对于任意在 $[0,1]$ 中具有稠密像的（外部）规范 s（定义在 M 上），以及（标准）有理数 $\varepsilon \in (0,1]$，存在一个 ε-光滑的内部规范 t，使得 $\|s - t^{\mathrm{st}}\| \leq \varepsilon$。

证明。取足够大的标准 n，使得 $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\varepsilon$。对于每个 $i < n$，取 $\beta_i \in \alpha^M$，使得 $\frac{i}{n} \leq s(\beta_i) < \frac{i+1}{n}$。注意，由于 s 的值域是稠密的，因此没有任何一个 β_i 是 0 或 1。还要注意，$(\beta_i)_{i<n}$ 是一个递减的序数序列。对于任意 $\gamma \in \alpha^M$，令

$$t(\gamma) = \begin{cases} 0 & \gamma \geq \beta_0 \\ \frac{i}{n} & 0 < i < n,\ \beta_{i-1} > \gamma \geq \beta_i \\ 1 & \beta_{n-1} > \gamma \end{cases}.$$

显然，对于所有充分大的 γ，$t(\gamma) = 0$。我们还有，对于所有 $\gamma \in \alpha^M$，$s(\gamma) < s(\gamma+1) + \frac{2}{n} < s(\gamma+1) + \varepsilon$。最后，$\varepsilon$-光滑定义中的极限序数条件显然满足，因此 t 是 ε-光滑的。

现在，对于任意的 γ，若 $t(\gamma) = 0$，则 $\gamma \geq \beta_0$，因此 $s(\gamma) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$。若 $t(\gamma) \in (0,1)$，则存在一个正的 $i < n$ 使得 $\beta_{i-1} > \gamma \geq \beta_i$，这意味着 $\frac{i-1}{n} \leq s(\gamma) \leq \frac{i+1}{n}$，所以 $|s(\gamma) - t(\gamma)| = |s(\gamma) - \frac{i}{n}| < \varepsilon$。若 $t(\gamma) = 1$，则 $s(\gamma) \geq s(\beta_{n-1}) \geq \frac{n-1}{n}$，因此$|s(\gamma) - t(\gamma)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$。因此 $\|s - t\| \leq \varepsilon$，证毕。□

为了继续，我们需要用到模型论中的一个事实。这与通常用于构造 NFU 的部分标准模型的方法类似。

引理 6.14. 对于任意序数 σ，存在一个 $\alpha > \sigma$，以及一个结构 $(M, \alpha^M) \equiv (V_{\alpha+\omega}, \alpha)$，使得 V_σ^M 与 V_σ 同构，并且存在一个由小于 α^M 的 M- 序数组成的集合，它与 $\mathbb{Q}$ 序同构。

证明。令 $\kappa = |V_\sigma|$。令 $\alpha = \beth_{(2^\kappa)^+}$。用 Skolem 函数扩张 $(V_{\alpha+\omega}, \in)$。根据 [17, 引理 7.2。12], 我们可以在 $(V_{\alpha+\omega}, \in, \alpha,$ Skolem 函数) 的某个初等扩张 N中找到一个 V_σ-不可区分序列 I，其序型为 $\mathbb{Q}$，使得对于任意递增序列 $a_0 <$

$\cdots < a_{n-1}$在 I中，存在序数 δ_0、.....、$\delta_{n-1} < \alpha$，使得 tp($\bar{a}/V_\sigma$) = tp(δ/V_σ)。令 M为 $V_\sigma \cup I$的 Skolem包。对于 V_σ^M中的任意元素 a，存在一个 Skolem函数 f 以及元组 $b \in V_\sigma$和 $\bar{c} \in I$，使得 $a = f(b, \bar{c})$。根据构造，存在一个元组 $\delta \in V_\alpha$，使得 tp($\bar{c}/V_\sigma$) = tp(δ/V_σ)。由于 $f(b,\delta) \in V_\sigma$，我们有 $f(b,\bar{c}) = f(b,\delta)$。因此$V_\sigma^M = V_\sigma$，如所要求。□

定理 6.15。对于任意具有 $[0,1]$ 值度量的完备度量空间 (Q,d)，以及任意序数 σ，存在一个 MSE 模型 N，使得 N 包含一个与 (Q,d) 等距同构的蒯因原子集合，以及一个 1-离散集 v，使得 $(v,\in_e)$ 与 $(V_\sigma,\in)$ 同构（因此 Ord^N 的标准部分长度至少为 σ，并且若 σ 是无限的，则 $N \models \mathrm{Inf}(v)$）。特别地，MSE 是一致的。

证明。固定满足定义 6.1 的 (Q,d)。固定某个序数 σ。我们不妨假设 $(Q,d) \in V_\sigma$。应用引理 6.14，得到一个与 $V_{\alpha+\omega}$ 初等等价的结构 M，其中某个 $\alpha > \sigma$使得 M 的标准部分包含 V_σ。令 J 为一个小于 α^M、与 $\mathbb{Q}$ 序同构的 M-序数集合。由于 $\mathcal{T}_\alpha(Q)$ 可由 Q 和 α 定义，因此在 M 中存在一个元素 $\mathcal{T}^M$，它在 Q 和 α^M上实现相同的类型。这样，我们可以将 M 视为满足定义 6.7 条件的结构。

J也与 $(0,1) \cap \mathbb{Q}$序同构。令 f为见证这一点的序同构。定义 $s\colon \mathrm{Ord}^M \to [0,1] \to s(\beta) = \mathrm{Inf}\{f(\gamma)\colon \gamma \in J,\ \gamma \le \beta\}$ 且 $\inf \varnothing = 1$。这显然是 M上的规范。令 $N = (\mathcal{T}^M, e_s)$。

我们需要证明，对于 MSE 的任意公理 φ（即定义 5.1 和 5.5 中列出的公理）以及任意 $\varepsilon > 0$，$N \models \varphi \le \varepsilon$，结论均成立。若 φ 是 H-外延性公理，则根据引理 6.13，我们可以找到一个 $\frac{1}{2}\varepsilon$-光滑的内部规范 t，使得 $\|s - t^{st}\| \le \frac{1}{2}\varepsilon$。根据引理6.8和引理6.10，我们有 $\varphi^N \le \varphi^{(\mathcal{T}^M, e_t)} + \frac{1}{2}\varepsilon \le \varepsilon$。若 φ是关于公式 ψ的切除公理，则根据引理 6.12，我们同样可以找到一个 2^{v^1} (ψ) ε-光滑的内部规范 t。由于对于任意 $\varphi \in$ MSE 和 $\varepsilon > 0$我们都可以这样做，因此我们有 $N \models$ MSE。

最后，我们只需验证，与 (Q,d) 同构的蒯因原子集合以及与 V_σ 同构的集合存在于 N 中。令 q 为 $\mathcal{T}^M$ 中与引理 6.6 中定义的集合 Q^* 共外延的元素。我们有，Q 是 q 的稠密子集；此外，对于所有 $\beta < \alpha$，ρ_β 在 Q 上与 d 一致，因此 (q,ρ_s) 与 (Q,d) 等距同构，因为 Q 度量完备。

最后，令 $v = v_\sigma$ 如引理 6.3 的证明中所定义。由于 $\sigma(\sigma) = 1$，我们有 v 是 1-离散的。关系 $x \in_e y$（即 $e(x,y) = 0$）对于 v 的 $\in$-元素与 $x \in y$ 一致，因此我们有 $(v,\in_e)$ 与 $(V_\sigma,\in)$ 同构。□

关于定理 6.15，有一点值得注意：如果 M 满足选择公理，那么由此得到的结构 N 将在其所有一致离散集中满足选择公理。反过来，如果存在一个集合 $x \in V_\alpha^M$可以证明选择公理不成立，那么在 N中，相应的 1-离散集也不满足选择公理。由于我们的构造过程从未用到选择公理，这就证明了：对一致离散集而言，选择公理独立于 MSE。

回忆一下，如果对每个受限的 $\mathcal{L}_e$-句子 φ 和r，只要 $M \models \varphi < r$，就存在一个有限的 $\mathcal{L}_e$-结构 N 使得 $N \models \varphi < r$，那么称 $\mathcal{L}_e$-结构 M 是伪有限的。

定理 6.16。存在一个 MSE 的伪有限模型。

证明。考虑结构 $M = (V_{\omega+\omega}, \omega, \varnothing, \dots)$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 s_n 为 M 上由 $s_n(i) = \min(\max(1 - \frac{i-1}{n}, 0), 1)$ 定义的尺度。很容易看出，它是 $\frac{1}{n}$-光滑的。$\mathcal{T}_\omega(\varnothing)$ 关于伪度量 ρ_{s_n} 的商集是有限的，因此，根据引理 6.10 和 6.12，序列 $(\mathcal{T}_\omega(\varnothing)/\rho_{s_n}, e_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的任意超积都是 MSE 的伪有限模型。□

显然，MSE 的伪有限模型都不可能满足 Inf，因为伪有限结构都无法解释罗宾逊算术。

7. Translation to Łukasiewicz logic

在 [2] 中已经指出，连续逻辑与卢卡西维奇-帕维尔卡谓词逻辑之间存在紧密联系。这种逻辑通过为每个有理数 $r \in [0,1]$引入零元联结词，扩展了卢卡西维奇逻辑。由于有理帕维尔卡逻辑中的每个一元联结词 $f(x)$都是分段线性的，并且对除有限个 $x \in [0,1]$之外的所有 $\in \mathbb{Z}$，都有 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}x f(x)$，因此显然 $\frac{x}{2}$ 不是其中可以构造出的联结词。人们或许会认为，这会使有理帕维尔卡逻辑无法在连续逻辑的意义下达到逻辑完备；但正如 [2, 命题 1.17]，所指出的，联结词 $x \mapsto \frac{1}{2}x$ 是有理帕维尔卡逻辑中联结词的一致极限：

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} \min\left(\frac{i}{n}, x \dot{-} \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2}x$$

对所有 $x \in [0,1]$均一致成立。这意味着，连续逻辑中的所有取值于 $[0,1]$的公式，都是卢卡西维奇-帕维尔卡公式的一致极限。

我们想借此机会指出，事实远不止于此。就条件而非公式而言，普通的卢卡西维奇逻辑相对于连续逻辑已经是逻辑完备的，具体来说：对于每个受限公式$\varphi(\bar{x})$（无论是 [1, 第 3] 节所述意义上的，还是 [8, 第 1.3]节所述更宽泛意义上的），都存在一个公式 $\psi(\bar{x})$，它只使用联结词 1 和 $x \dot{-} y$，使得对于任意度量结构M和元组 $\bar{a} \in M$，$\varphi^M(\bar{a}) \le 0$当且仅当 $\psi^M(\bar{a}) \le 0$。[16] 由此可知，任何连续一阶理论或类型（在谓词取值于 $[0,1]$的语言中）都可以完全用卢卡西维奇逻辑公理化。这一点对于熟悉卢卡西维奇逻辑及其延拓的人来说或许显而易见，但我们认为有必要明确写出。这个事实可由 [7], 中的结果推出；不过，鉴于应用这些结果需要进行大量转换，我们将在此略述一种论证。

若受限公式 φ 是原子公式的有理仿射组合，则称其为有理仿射文字。若无量词公式具有最大仿射范式（简称最大 ANF），即 $\max_{n<N} \min_{m<M_n} \varphi_{nm}$，其中每个 φ_{nm} 都是有理仿射文字，则称该公式处于最大仿射范式。若公式 φ 是由一串量词后接一个最大 ANF 公式构成，则称其处于前束最大 ANF。可以不难证明（并且在 [8, 命题 1.4.12]中有明确的推导），每个受限公式都等价于一个处于前束最大 ANF 的公式。

根据 McNaughton定理 [14, 定理 1],，对于任意整数 a和 $b_0, \ldots, b_{n-1}$，函数$M(\bar{x}; a, b) = \min(\max(a + b_0x_0 + b_1x_1 + \cdots + b_{n-1}x_{n-1}, 0), 1)$ 可以用卢卡西维奇逻辑的联结词表示。

设 $\varphi \le r$ 是一个受限闭条件。不失一般性，我们可以假设 $r = 0$。根据上述讨论，我们可以将 φ 重写为一个等价的前束最大 ANF 公式

$$\psi(\bar{x}) = \underset{x_0}{\mathrm{qnt}}\,\underset{x_1}{\mathrm{qnt}}\,\underset{x_2}{\mathrm{qnt}} \ldots \max_{n<N} \min_{m<M_n} \left(a_{nm} + \sum_{k<K_{nm}} b_{nmk}\chi_{nmk}\right)$$

其中，每个 qnt 都是 inf 或 sup，且每个 χ_{nmk} 都是一个原子公式。令 ℓ 为一个大于 ψ中系数分母的数。现在考虑公式 $\psi^\dagger(\bar{x})$

[16]然而请注意，并非 $[0,1]^n \to [0,1]$ 中的所有连续函数都是命题Łukasiewicz逻辑中表达式的一致极限，因为任何此类表达式都会将 $\{0,1\}^n$ 映射到 $\{0,1\}$，因此就连续逻辑所关心的意义而言，Łukasiewicz-Pavelka逻辑严格更强。

定义为

$$\operatorname*{qnt}_{x_0}\operatorname*{qnt}_{x_1}\operatorname*{qnt}_{x_2}\ldots\max_{n<N}\min_{m<M_n} M(\chi_{n,m,0},\ldots,\chi_{n,m,K_{nm}-1};\ell!\cdot a_{nm},\ell!\cdot b_{n,m,0},\ldots,\ell!\cdot b_{n,m,K_{nm}-1}).$$

注意，$\psi^\dagger$ 等价于 $\min(\max(\ell!\cdot\psi,0),1)$。显然，在任意结构中，$M,\psi(\bar{a})\leq 0$ 当且仅当 $\psi^\dagger(\bar{a})\leq 0$，但根据McNaughton定理，后一个条件可以用卢卡西维奇逻辑表达。特别是，如果我们将 $M(-;\ell!\cdot a_{nm},\ell!\cdot b_{n,m,0},\ldots,\ell!\,b_{n,m,K_{nm}-1})$解释为卢卡西维奇逻辑中的一个表达式，那么 $M\models\psi(\bar{a})\geq 0$ 当且仅当 M 满足

$$\neg Qx_0Qx_1Qx_3\cdots\bigvee_{n<N}\bigwedge_{n<M_n} M(\chi_{n,m,0},\ldots,\chi_{n,m,K_{nm}-1};\ell!\cdot a_{nm},\ell!\cdot b_{n,m,0},\ldots,\ell!\cdot b_{n,m,K_{nm}-1}).$$

其中，当qnt_{x_i}为$\sup_{x_i}$时，Qx_i为$\exists x_i$；当qnt_{x_i}为$\inf_{x_i}$时，$\forall x_i$为$\exists x_i$。

连续逻辑和卢卡西维奇逻辑对等号（即度量）的处理存在一些细微差异；相关地，连续逻辑的预期语义比卢卡西维奇逻辑的更具体。不过，对于不含等号的结构（即一般结构，例如我们的 $\mathcal{L}_e$-结构），两者的表达能力并无差异。

虽然上述讨论足以证明它存在，但现在我们将给出 MSE 的卢卡西维奇逻辑的一种显式公理化。为了与现有的卢卡西维奇逻辑文献保持一致，我们将改用把 1 视为真的约定。因此，我们将 $x\,\hat{\epsilon}\,y$ 记作 $1-e(x,y)$。我们将 $A\to B$ 记作联结词 $1-(A\dot{-}B)=\min(1-A+B,1)$，并将 $\bot$ 记作 0。公式由 $x\,\hat{\epsilon}\,y$ 以及联结词 $\to$ 和 $\bot$、量词 $\exists$ 和 $\forall$ 构成。我们将这个公式集合记作 $\mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$，并将其视为受限 $\mathcal{L}_e$-公式集合的子集（其中我们将 $\exists x$ 解释为 $\sup_x$，将 $\forall x$ 解释为 $\inf_x$）。对于一个 $\mathcal{L}_e$-结构 M、一个元组 $\bar{a}\in M$ 和一个公式 $\varphi(\bar{x})\in\mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$，若 $M\models\varphi(\bar{a})=1$，我们就说 M 满足 $\varphi(\bar{a})$。

一个基本事实是，联结词 $\to$ 和 $\bot$ 可以用来定义以下运算：$A\leftrightarrow B:=1-|x-y|$，$\neg A:=1-A$，$A\wedge B:=\min(A,B)$，$A\vee B:=\max(A,B)$，以及$A\,\&\,B:=\max(A+B-1,0)$。

首先，我们需要定义外延相等：我们将 $x=_e y$ 作为公式 $\forall z(z\,\hat{\epsilon}\,x\leftrightarrow z\,\hat{\epsilon}\,y)$ 的简写。（这与 $1-d_e(x,y)$ 是同一回事。）有了这个记法，我们现在可以将 H-外延性公理写作

$$\forall x\forall y(x\,\hat{\epsilon}\,y\leftrightarrow\exists z(x=_e z\,\&\,z\,\hat{\epsilon}\,y\,\&\,z\,\hat{\epsilon}\,y)).\tag{1}$$

很容易验证，这就是对定义 5.1 的逐字转录。

给定任意公式 $\varphi\in\mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$，令 $\#\varphi$ 为 φ 中 $\hat{\epsilon}$ 的出现次数。[17] 对于切除公理模式，我们有

$$\forall\bar{y}\exists z\forall x(x\,\hat{\epsilon}\,z\vee(\neg\varphi\,\&\,\neg\varphi\,\&\,\neg\varphi))\wedge(\underbrace{\neg x\,\hat{\epsilon}\,z\,\&\cdots\&\,\neg x\,\hat{\epsilon}\,z}_{6\cdot\#\varphi\text{ times}})\vee(\varphi\,\&\,\varphi\,\&\,\varphi))\tag{2_φ}$$

对于每个不含自由变量 z 的公式 $\varphi(x,\bar{y})\in\mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$。由于这并非定义 5.5 中给出的切除公理模式的逐字转录，我们需要证明两者等价。

命题 7.1。一个 $\mathcal{L}_e$-结构 M 是 H-外延的，并且满足 $\mathcal{L}_e$-切除，当且仅当对于所有 $\varphi\in\mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$，它满足 (1) 和 ($2_\varphi$)。

[17] 也就是说，在相应的受限 $\mathcal{L}_e$-公式中，$e(x,y)$ 出现的次数。

证明。显然， M 是 H-外延的，当且仅当它满足 (1)。因此，不失一般性，我们可以假设 (M, d_e) 是一个完备度量空间。

通过简单的归纳论证可知，对任意 $\varphi \in \mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$, $v(\varphi) = \#\varphi$。特别地，任意这样的 φ 相对于 d_e 都是 $(2 \# \varphi)$-利普希茨的。

对于 $\Rightarrow$ 方向，根据命题 5.7，$(M, d_e, \sqsubseteq_e) \models \mathrm{MSE}$。固定一个公式 $\varphi(x, \bar{y}) \in \mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$ 和一个元组 $\bar{a} \in M$。若 $\#\varphi = 0$，则 $\varphi(x, \bar{a})$ 是一个不依赖于 $\bar{a}$ 的常元，因此 (2_φ) 可由 $\varnothing^M$ 或 V^M 见证。若 $\#\varphi > 0$，考虑集合 $b = \left[x : \ 1 - \varphi(x, \bar{a}) < \frac{1}{3} \sim \frac{2}{3}\right]$。对于任意 $c \in M$，若 $\varphi^M(c, \bar{a}) \geq \frac{2}{3}$，则 $(c \hat{\epsilon} \ b)^M = 1$；若 $(c \hat{\epsilon} \ b)^M = 1$，则 $\varphi^M(c, \bar{a}) > \frac{1}{3}$。特别地，这意味着若 $\varphi^M(f, \bar{a}) \leq \frac{1}{3}$，则 $(f \hat{\epsilon} \ b)^M \leq 1 - \frac{1}{6 \cdot \#\varphi}$（这意味着 M 满足 $\neg f \hat{\epsilon} \ b \ \& \ \cdots \ \& \ \neg f \hat{\epsilon} \ b$，其中有 $6 \cdot \#\varphi$ 个 $\neg f \hat{\epsilon} \ b$ 实例）。此外， M 满足

$$\forall x (x \ \hat{\epsilon} \ b \vee (\neg \varphi(x, \bar{a}) \ \& \ \neg \varphi(x, \bar{a}) \ \& \ \neg \varphi(x, \bar{a})))$$

and

$$\forall x (\underbrace{\neg x \ \hat{\epsilon} \ b \ \& \cdots \& \ \neg x \ \hat{\epsilon} \ b}_{6 \cdot \#\varphi \text{ times}}) \vee (\varphi(x, \bar{a}) \ \& \ \varphi(x, \bar{a}) \ \& \ \varphi(x, \bar{a})).$$

由于我们可以对任意的 $\varphi \in \mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$ 和任意的 $\bar{a} \in M$ 执行此操作，因此对于所有 $\varphi \in \mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$， M 都满足 (2_φ)。

对于 $\Leftarrow$ 方向，假设对于所有 $\varphi \in \mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$， M 都满足 (1) 和 (2_φ)。固定一个受限的 $\mathcal{L}_e$-公式 $\varphi(x, \bar{y})$。不失一般性，假设 $\varphi(x, \bar{y})$ 包含谓词 e 的一个实例，并且 $\varphi(x, \bar{y})$ 是前束最大 ANF。取一个充分大的 $\ell > 1$，并令 $\varphi^\dagger(x, \bar{y})$ 如上定义。特别地，我们可以将 $\varphi^\dagger(x, \bar{y})$ 视为 $\mathrm{L}_{\hat{\epsilon}}$ 中的一个公式，它具有如下性质：对于任意的 M 和 a， $\bar{b} \in M$， $(\varphi^\dagger)^M(a, \bar{b}) = \min(\max(\varphi^M(a, \bar{b}), 0), 1)$。

固定某个 $\bar{a} \in M$ 和 $\delta > 0$，使得 $\delta < 1$，并将 $(2_{\neg \varphi^\dagger})$ 应用于 $\bar{a}$，得到一个 $b \in M$，使得对每个 $x \in M$,

- 要么 $(x \hat{\epsilon} \ b)^M > 1 - \delta$，要么 $(\neg \neg \varphi^\dagger)^M(x, \bar{a}) > \frac{1-\delta}{3}$ 且
- 要么 $(\neg x \hat{\epsilon} \ b)^M > \frac{1-\delta}{6 \cdot \#\varphi^\dagger}$，要么 $(\neg \varphi^\dagger)^M(x, \bar{a}) > \frac{1-\delta}{3}$。

这意味着对每个 $x \in M$,

- 如果 $\varphi(x, \bar{a}) \leq \frac{1-\delta}{3 \cdot \ell!}$，那么 $e(x, b) < \delta$ 且
- 如果 $e(x, b) = 0$，那么 $\varphi(x, \bar{a}) < \frac{2+\delta}{3 \cdot \ell!}$。

由此可见，第一条显然蕴含：若 $\varphi(x, \bar{a}) \leq -\delta$，则 $e(x, z) < \delta$。现在假设对某个 $c \in M$, 有 $e(c, b) \leq \varepsilon_\varphi - \delta$。于是存在一个 $f \in M$，使得 $(f \hat{\epsilon} \ b)^M = 1$，且 $d(c, f) < \varepsilon_\varphi$。由于 $(f \hat{\epsilon} \ b)^M = 1$，我们有 $e(f, b) = 0$，因此 $\varphi(f, \bar{a}) < \frac{2+\delta}{3 \cdot \ell!}$！于是 $\varphi(c, \bar{a}) < \varphi(f, \bar{a}) + 2v(\varphi) d(c, f) < \frac{2+\delta}{3 \cdot \ell!} + 2v(\varphi) \varepsilon_\varphi < \frac{1}{\ell!} + 2v(\varphi) 6v(\varphi) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1 < 1 + \delta$。由于对任意足够小的 $\delta > 0$, 我们都可以这样做，因此 M 满足关于 $\varphi(x, \bar{y})$ 的切除公理。因此，由于对任意 $\varphi(x, \bar{y}) \in \mathcal{L}_e$，我们都可以这样做，故 M 满足 $\mathcal{L}_e$-切除。□

当然，也可以将本文中描述的无穷公理及其他句子翻译为卢卡西维奇逻辑，但这样做要复杂得多。

References

[1] Ita ¨ *Model theory* 1 *for metric structures* 2 *London Mathematical Society Lecture Note Series* 315 427 Ben Yaacov、Alexander Berenstein、C. Ward Henson 和 Alexander Usvyatsov。《[1]》，第 卷，页码 –。剑桥大学出版社，2008 年。[2] Xavier Caicedo 和 Jos´e N. Iovino。省略不可数类型与 $[0, 1]$ 值逻辑的力量。*Annals of Pure and Applied Logic*，165(6):1169–1200，2014年6月。

[3] C. C. Chang。无限值逻辑中的概括公理。

Mathematica Scandinavica 13 9 30, , :–。

1963

[4] Jens Erik Fenstad。关于卢卡西维奇无限值逻辑中概括公理的一致性。 *Mathematica Scandinavica*, 14(1):65–74，1964 年。[5] T. E. Forster。

Set Theory with a Universal Set: Exploring an Untyped Universe。英格兰牛津：克拉伦登出版社，1992 年。[6] Marco Forti 和 Furio Honsell。超宇宙的一般构造。 *Theoretical Computer Science*，156 1 2 203 1996 (-): –215，3 月。[7] Petr H´ajek、Jeff Paris 和 John Shepherdson。有理 Pavelka 谓词逻辑是卢卡西维奇谓词逻辑的保守扩张。 *Journal of Symbolic Logic*，65(2):669–682，2000 年 6 月。[8] James Hanson。

Definability and categoricity in continuous logic。博士论文，威斯康星大学麦迪逊分校，2020 年。[9] James Hanson。模拟可约性。 *J. Log. Comput.*，31:1561–1597，2021 年。[10] James Hanson。度量空间对于与度量结构的双重解释具有普适性。 *Annals of Pure and Applied Logic* 103204, 2022 ，第

页。[11] M. Randall Holmes。替代公理集合论。载于 Edward N. Zalta （编），*The Stanford Encyclopedia of Philosophy* 2021 2021 。形

而上学研究实验室，斯坦福大学，冬季版，。[12] H. Jerome Keisler。实值结构的模型论。 *arXiv e-prints*，页码 arXiv:2005.11851，2020 年。[13] R. J. Malitz。 *Set theory in which the axiom of foundation fails*。博士论文，加利福尼亚大学，1976 年。[14] Robert McNaughton。关于无限值命题逻辑的一个定理。

Journal of Symbolic Logic，16 1 1 1951 ( ): –13，3 月。[15] Franco Montagna（编）。

Petr Hájek on Mathematical Fuzzy Logic。施普林格国际出版社，2015 年。[16] Thoralf Skolem。关于概括公理的评论。谨以此文纪念 Heinrich Scholz。

Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik，3(1-5):1–17，1957 年。[17] Katrin Tent 和 Martin Ziegler。 *A Course in Model Theory*。逻辑讲义。剑桥大学出版社，2012 年。[18] Kazushige Terui。R. B. White 的文章《卢卡西维奇无限值谓词逻辑中概括公理的一致性》中的一个错误。2014 年。未发表。[19] Emil Weydert。

How to approximate the naive comprehension scheme inside of classical logic。博士论文，波恩大学，1989 年。[20] Richard B. White。卢卡西维奇无限值谓词逻辑中概括公理的一致性。

Journal of Philosophical Logic，8(1)，1979 年 1 月。

Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD 20742, USA

Email address: jhanson9@umd.edu