arXiv:2302.02262v1 [math.AP] 4 Feb 2023

加权 Sobolev 空间上的最佳索博列夫与亚当斯-特鲁丁格-莫泽嵌入及其应用

JOAO MARCOS DO O、GUOZHEN LU 和 RAONI PONCIANO

ABSTRACT. 我们在不假设任何边界条件的情况下，推导出一类带势权的 Sobolev 空间上的最佳 Sobolev 嵌入。此外，我们还研究了临界 Sobolev 嵌入到指数类时的 Adams 型不等式，并得到了最佳常数。作为应用，我们证明，具有多项式增长或指数增长非线性的相应椭圆方程均存在非平凡解。

1. INTRODUCTION

众所周知，Sobolev 型不等式对于偏微分方程的研究至关重要，尤其是在研究源于几何和物理的偏微分方程时。关于这类嵌入及其应用，已有大量研究。例如，参见 [3,5,7,13,18] 及其中的参考文献。

最近，受寻找边值问题对称解的启发，作者在以原点为中心的单位球 $B \subset \mathbb{R}^N$ 内，针对不要求满足任何边界条件的径向函数索博列夫空间，证明了尖锐的逐点估计。因此，他们证明，在不假设对称性且不存在权重时，对称函数的索博列夫空间嵌入到特定的加权 Lebesgue 空间中，其指数远高于通常的 Sobolev 指数。由此，便可以研究非线性项具有高多项式增长的边值问题。我们强调，超临界问题解的存在性是这项研究的重要动机。结果概述如下：

定理 A. 设 $k \geq 1$ 为整数， $p \geq 1$ 为实数。 $L^q(B,|x|^\beta) = \{u\colon B \to \mathbb{R}$ 可测：$\int_B |u|^q |x|^\beta \mathrm{d}x < \infty\}$ 且 $W^{k,p}_{\text{径向}}(B)$ 是 $W^{k,p}(B)$ 中径向对称函数的空间。

如果 $N > kp$，那么 $W^{k,\,p}_{\text{径向}}(B)$ 连续嵌入于 $L^q(B,|x|^\beta)$，对任意 $1 \leq q \leq p(N+\beta)/(N-kp)$ 且 $\beta \geq 0$。此外，当 $q < p(N+\beta)/(N-kp)$；
若 $N = kp$，则对于每个 $1 \leq q < \infty$， $W^{k,\,p}_{\text{径}}(B)$ 紧嵌入于 $L^q(B,|x|^\beta)$，且 $\beta \geq 0$。

2000 年数学主题分类。35J20、35J25、35J50。本研究部分受益于巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）#312340/2021-4 和 #429285/2016-7、帕拉伊巴州研究支持基金会（FAPESQ）#2020/07566-3、高等教育人员进修协调局（CAPES）#88887.633572/2021-00，以及西蒙斯基金会提供的西蒙斯合作资助 519099 和 957892。

定理 A 的证明由以下径向估计得出：

- 若 $N > kp$，那么存在 $C = C(N,k,p) > 0$，使得对所有 $u \in W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$

$$|u(x)| \le C\frac{\|u\|_{W^{m,p}}}{|x|^{\frac{N-kp}{p}}}, \quad \forall x \in \overline{B}\backslash\{0\}; \tag{1}$$

- 若 $N = kp$ 且 $p > 1$，那么存在 $C = C(k,p) > 0$，使得对所有 $u \in W^{k,p}_{\mathrm{rad}}(B)$

$$|u(x)| \le C\|u\|_{W^{k,p}}\left(|\log|x||^{\frac{p-1}{p}} + 1\right), \quad \forall x \in \overline{B}\backslash\{0\}. \tag{2}$$

值得一提的是，受 H´enon 型方程的启发，这类估计在 [20] 中针对空间 $W^{1,2}_{0,\mathrm{rad}}(B)$ 进行了研究；在 [14] 中则针对空间 $W^{1,2}_{\mathrm{rad}}(B)$ 进行了研究。在 [2, 推论 2.2], 中，针对空间 $W^{1,N}_{0,\mathrm{rad}}(B)$ 得到了与（2）类似的结果。另请参见 [22]，其中作者证明了空间 $W^{1,2}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ 的径向引理，并以此研究孤立波。

受前人研究的启发，本文旨在研究一类更一般的、无边界条件的加权 Sobolev 空间的类似嵌入结果。具体而言，这些结果包括高阶加权 Sobolev 空间上的锐 Sobolev 嵌入定理，无需假设任何边界条件；它们推广了 [13] 中的非加权结果，并改进了 [10] 中带边界条件的结果。在临界情形下，我们的结果通过将嵌入提升为指数型嵌入，即具有最佳常数的 Adams-Moser-Trudinger 型不等式，改进了 [13] 中的结果；同时，也通过去除边界条件改进了 [13] 中的结果。

令 $AC(0,R)$ 为区间 $(0,R)$ 上所有绝对连续函数构成的空间。众所周知，$u \in AC(0,R)$ 当且仅当 u 几乎处处有导数 u'，且该导数 Lebesgue 可积，并且 $u(r) = u(a) + \int_a^r u'(s)\,\mathrm{d}s$。若函数 u 在 $(0,R)$ 上局部绝对连续，则称其在 $(0,R)$ 上局部绝对连续；也就是说，对每个 $r \in (0,R)$，都存在 V_r 的一个邻域，使得 u 在 V_r 上绝对连续。令 $AC_{\mathrm{loc}}(0,R)$ 为区间 $(0,R)$ 上所有局部绝对连续函数构成的空间。

对于每个非负整数 ℓ 和 $0 < R \le \infty$，令 $AC^{\ell}_{\mathrm{loc}}(0,R)$ 表示所有满足 $u^{(\ell)} \in AC_{\mathrm{loc}}(0,\{\mathrm{v9}\})$ 的函数 $u\colon (0,R) \to \mathbb{R}$ 的集合，其中 $u^{(\ell)} = \mathrm{d}^{\ell}u/\mathrm{d}r^{\ell}$。对于 $p \ge 1$ 和 α 实数，我们用 $L^p_\alpha = L^p_\alpha(0,R)$ 表示由满足以下条件的可测函数 $u\colon (0,R) \to \mathbb{R}$ 构成的加权 Lebesgue 空间：

$$\|u\|_{L^p_\alpha} = \left(\int_0^R |u|^p r^\alpha \mathrm{d}r\right)^{1/p} < \infty,$$

它在标准范数 $\|u\|_{L^p_\alpha}$下是一个巴拿赫空间。

对于任意正整数 k 以及 $(\alpha_0,\dots,\alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$，其中 $\alpha_j > -1$ 对于 $j = 0$、1、…、k，属于 [10]，作者考虑了高阶导数的加权 Sobolev 空间 $X^{k,p}_{0,R} = X^{k,p}_{0,R}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)$，该空间由满足以下条件的所有函数 $u \in AC^{k-1}_{\mathrm{loc}}(0,R)$ 构成：

$$\lim_{r\to R} u^{(j)}(r) = 0, \quad j = 0,\dots,k-1 \text{ and } u^{(j)} \in L^p_{\alpha_j}, \quad j = 0,\dots,k.$$

空间 $X^{k,\,{}_0\overset{p}{R}}$，配备范数

$$\|u\|_{X_R^{k,p}}=\left(\sum_{j=0}^{k}\|u^{(j)}\|_{L^p_{\alpha_j}}^p\right)^{1/p}$$

是一个巴拿赫空间。假设 $0<R<\infty$ 和

$$\alpha_{j-1}\geq\alpha_j-p,\quad j=1,\dots,k, \tag{3}$$

我们得到（见命题 2.1），范数 $\|\cdot\|_{X^{k,\,R}{}^p}$ 和

$$\|u\|_{X^{k,p}_{0,R}}:=\|u^{(k)}\|_{L^p_{\alpha_k}}=\left(\int_0^R|u^{(k)}|^p r^{\alpha_k}\mathrm{d}r\right)^{1/p}$$

等价于 $X^{k,\,{}_0\overset{p}{R},}$。此外，[10]中建立了以下嵌入结果：

定理B. 设 $p\geq1$ 和 $0<R<\infty$。考虑 $(\alpha_0,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^{k+1}$，其中 $\alpha_j>-1$ 对 $j=0,1,\dots,k$ 成立，且 $\theta>-1$ 满足

$$\min\{\theta,\alpha_{j-1}\}\geq\alpha_j-p,\quad\forall j=1,\dots,k. \tag{4}$$

若 $\alpha_k-kp+1>0$，则有连续嵌入：

$$X^{k,p}_{0,R}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)\hookrightarrow L^q_\theta,\ \forall\,1\leq q\leq p^*:=p^*(\theta,p,k,\alpha_k)=\frac{(\theta+1)p}{\alpha_k-kp+1}.$$

此外，若 $q<p^*$，则该嵌入是紧的。
若 $\alpha_k-kp+1=0$，则有紧嵌入：

$$X^{k,p}_{0,R}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)\hookrightarrow L^q_\theta,\quad\forall\,1\leq q<\infty.$$

对于任意正整数 k 以及 $(\alpha_0,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^{k+1}$，考虑不带边界条件的高阶导数加权 Sobole夫空间，

$$X^{k,p}_R=X^{k,p}_R(\alpha_0,\dots,\alpha_k)=\{u\colon(0,R)\to\mathbb{R}:u^{(j)}\in L^p_{\alpha_j},\ j=0,1,\dots,k\}.$$

利用下面的命题 2.2，可得 $u\in AC^{k-1}{}_{\mathrm{loc}}(0,R)$ 对所有 $u\in X^{k,\,R}{}^p$ 都成立。这些空间 $X^{k,\,R}{}^p$ 和 $X^{k,\,{}_0\overset{p}{R},}$在范数下是完备的

$$\|u\|_{X_R^{k,p}}=\left(\sum_{j=0}^{k}\|u^{(j)}\|_{L^p_{\alpha_j}}^p\right)^{1/p}.$$

对于加权 Sobolev 空间 $X^{k,\,R}{}^p$，可以区分出三种特殊情形，分别为

索博列夫：亚当斯-特鲁丁	$\alpha_k-kp+1>0$
格-莫泽：Morrey：	$\alpha_k-kp+1=0$
	$\alpha_k-kp+1<0$

空间 $X_R:=X^{k,\,{}_0\overset{p}{R},}$ 及其 $k=1$ 于 [7] 中被引入，用于研究一类形如 $Lu=-r^{-\gamma}(r^\alpha|u'|^\beta u')'$ 的拟线性椭圆算子所对应的 Br´ezis-Nirenberg 型问题，其中这些算子作用于定义在以原点为中心的球上的径向函数

该球的半径为 R。根据参数的选择，该类包括以下算子：

(i) L 是关于 $\alpha=\gamma=N-1$ 和 $\beta=0$ 的拉普拉斯算子；(ii) L 是关于 $\alpha=\gamma=N-1$ 和 $\beta=p-2$ 的 p-拉普拉斯算子；(ii) L 是关于 $\alpha=N-k$、$\gamma=N-1$ 和 $\beta=k-1$ 的 k-Hessian。

研究此类问题的合适空间是

$$\begin{cases} Lu=f(r,u) \text{ in } (0,R) \\ u'(0)=u(R)=0, \\ u>0 \text{ in } (0,R). \end{cases} \tag{5}$$

空间 X_R，定义为所有绝对连续函数 u 的集合：$(0,R]\to\mathbb{R}$，使得 $u(R)=0$，并且

$$\int_0^R |u'(r)|^{\beta+2} r^{\alpha}\mathrm{d}r<\infty.$$

关于空间 X_R 的研究在 [7–10] 及其参考文献中已相当成熟。但他们总是假设 $u(R)=0$ 属于空间 X_R，以便应用来自 [21] 的结果（见命题 2.1），从而保证存在一个常数 $C=C(R,q,\gamma,\alpha,\beta)>0$，使得

$$\left(\int_0^R |u(r)|^q r^{\gamma}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^R |u'(r)|^{\beta+2} r^{\alpha}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{\beta+2}}$$

对任意 $1\le q\le(\gamma+1)(\beta+2)/(\alpha-\beta-1)$ 和 $\alpha-\beta-1>0$。因此，X_R 连续嵌入于 L^q_γ。

1.1. 主要结果的描述。现在我们可以陈述第一个主要结果。

定理 1.1. 设 $p\ge1$、$0<R<\infty$ 和 $\theta\ge\alpha_k-kp$。

若 $\alpha_k-kp+1>0$，则连续嵌入成立

$$X_R^{k,p}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)\hookrightarrow L^q_\theta(0,R) \quad \textit{for all} \quad 1\le q\le p^*:=\frac{(\theta+1)p}{\alpha_k-kp+1}.$$

此外，若 $q<p^*$.，则该嵌入是紧的

若 $\alpha_k-kp+1=0$，则紧嵌入成立

$$X_R^{k,p}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)\hookrightarrow L^q_\theta(0,R) \quad \textit{for all} \quad q\in[1,\infty).$$

如果 $\alpha_k-kp+1<0$、$p>1$、$\alpha_k\ge0$，则连续嵌入成立

$$X_R^{k,p}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)\hookrightarrow C^{k-\lfloor\frac{\alpha_k+1}{p}\rfloor-1,\gamma}([0,R]),$$

$$\textit{where } \gamma=\min\left\{1+\left\lfloor\frac{\alpha_k+1}{p}\right\rfloor-\frac{\alpha_k+1}{p},1-\frac{1}{p}\right\} \quad \textit{if} \quad \frac{\alpha_k+1}{p}\notin\mathbb{Z}$$

$$\textit{and } \gamma\in(0,1) \quad \textit{if} \quad \frac{\alpha_k+1}{p}\in\mathbb{Z}.$$

定理 1.1 的证明分为一系列径向引理（命题 2.3、2.4 和 2.5），并结合适用于空间 $X^{k}{}_{,R}{}^{p}$ 的 Hardy 型不等式（命题 2.6 ）。

注1.1. 在定理 1.1 中，$p^* = (\theta+1)p/(\alpha_k - kp + 1)$ 和 $\theta \geq \alpha_k - kp$ 是尖锐的。事实上，考虑空间 $X^{1,1}{}_1(1,2)$。对所有 $q > p^* = 1$，$u(t) = 1/t^{2/q}$ 都属于 $X^{1,1}{}_1(1,2)\backslash L_1^q$。另一方面，对于每个 $\theta < 1 = \alpha_k - kp$，定义 $u(t) = 1/t^{\theta+1}$，并注意到 $u \in X^{1,1}{}_1(1,2)\backslash L_\theta^{p^*}$。

注1.2. 定理 1.1 在两个方面推广了定理B。首先，定理 1.1 考虑的是空间 $X^{k,}{}_R{}^p$，而不是 $X^{k,}{}_0{}^p_R$，；后者是定理B中所使用的空间，在该定理的证明中，条件 $u^{(j)}(r) \xrightarrow{r\to R} 0$ 是必要的。其次，这里采用了假设 $\theta \geq \alpha_k - kp$，它弱于文献 *[10]*中研究的条件 (4)。

对于定理 1.1 中的情形 $\alpha_k - kp + 1 = 0$，我们有 $X^{k,}{}_R{}^p \hookrightarrow L_\theta^q$，对所有 $1 \leq q < \infty$ 和 $\theta > -1$均成立，但可以看出，取 $\phi(r) = \log(\log(\frac{eR}{r}))$时，$X^{k,}{}_R{}^p \not\hookrightarrow L^\infty$。因此，一个自然的问题是：函数 $g(s)$可能具有的最大增长速度是什么，使得若 $u \in X^{k,}{}_R{}^p$，则推出 $\int_0^R g(u)\,\mathrm{d}r < \infty$? 与经典研究 $[1, 19, 24]$ 及加权特鲁丁格-莫泽不等式 $[11, 12, 15, 17]$, 类似，我们可以得出结论：指数增长是最优的。具体而言，令

$$\ell_\mu := \sup_{\|u\|_{X_R^{k,p}} \leq 1} \int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} r^\theta \mathrm{d}r. \tag{6}$$

于是我们找到了一个 $\mu_0 > 0$，使得当 $\mu < \mu_0$ 时，(6) 有限；当 $\mu > \mu_0$时，(6) 无限。注意，我们处理的是高阶导数，而范数 $\|u\|_{X^{k,}{}_R{}^p}$ 与 D.R. Adams $[1]$ 所采用的范数不同。

定理 1.2. 设 $X^{k,}{}_R{}^p(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$，其中 $\alpha_k - kp + 1 = 0$、$p > 1$ 和 $\theta > -1$。
(a) 对所有 $\mu \geq 0$ 和 $u \in X^{k,}{}_R{}^p$，都有 $\exp(\mu|u|^{p/(p-1)}) \in L_\theta^1$。(b) 若 $0 \leq \mu < \mu_0$，则 ℓ_μ 有限，其中

$$\mu_0 := (\theta+1)[(k-1)!]^{p/(p-1)}.$$

此外，ℓ_μ 可由一个非负函数 $u_0 \in X^{k,}{}_R{}^p$ 取到，且满足 $\|u_0\|_{X^{k,}{}_R{}^p} = 1$。(c) 若 $\mu > \mu_0$，且对于 $i = 0, \ldots, k-1$ 有 $\alpha_i - ip + 1 > 0$，则 $\ell_\mu = \infty$。

注 1.3。条件 $\alpha_i - ip + 1 > 0$ 是自然的，因为若 $\alpha_i - ip + 1 < 0$，则定理 1.1 的 Morrey 情形意味着 ℓ_μ 有限。对于 $\alpha_i - ip + 1 = 0$，我们可以在 $u \in X^{i,}{}_R{}^p$ 上应用该定理，因为它属于 Adams-Trudinger-Moser 情形。

对于一阶导数的情形，即对应于 $k = 1$ 和 $\mu_0 = \theta + 1$ 的情形，在对边界作出某些额外假设的条件下，我们能够证明即使在临界情形 $\mu = \mu_0$ 下，ℓ_μ 也是有限的。具体而言，令

$$\mathcal{K}_A = \{u \in X_R^{1,p} \colon \|u\|_{X_R^{1,p}} \leq 1 \text{ and } u(R) \leq Au(r),\ \forall r \in (0, R]\},$$

我们有

定理 1.3. 设 $\theta > -1$ 和 $X^{1,}{}_{R}{}^{p}(\alpha_0, p-1)$，且 $p \geq 2$。对于每个 $A > 0$，都存在一个常数 $C = C(p, \alpha_0, \theta, A) > 0$，使得

$$\sup_{u \in \mathcal{K}_A} \int_0^R e^{(\theta+1)|u|^{\frac{p}{p-1}}} r^\theta \mathrm{d}r \leq C R^{\theta+1}.$$

注 1.4。注意，若满足狄利克雷边界条件（$u(R) = 0$），或 u 是非递增的，则条件 $u(R) \leq Au(r)$ 对 $A = 1$ 成立。

注 1.5。考虑到 $X^{1}{}_{0}{}^{p}_{R}$，以及用 $\|u'\|_{L^p_{\alpha_1}}$ 的范数代替 $X^{1}{}_{R}{}^{p}$ 和 $\|u\|_{X^{1,}{}_{R}{}^{p}}$，*[9]* 中的定理 1.1 与定理 1.3 类似。

定理 1.2 的一个显著推论是以下到加权奥利奇空间的连续嵌入

$$X^{k,p}_R(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \hookrightarrow L_\Phi(\theta), \tag{7}$$

其中 Φ 定义为

$$\Phi(t) = \exp(|t|^{p'}) \tag{8}$$

且 $L_\Phi(\theta)$ 是加权奥利奇空间 $L_\Phi(\theta) := L_\Phi(0, R;\, r^\theta \mathrm{d}r)$，其赋予卢森堡范数

$$\|u\|_{L_\Phi(\theta)} = \inf\left\{\delta > 0 \colon \int_0^R \Phi(\delta^{-1}u) r^\theta \mathrm{d}r \leq 1\right\}.$$

我们还证明，式 (7) 给出的索伯列夫嵌入在自然意义下是最优的，也就是说，空间 $L_\Phi(\theta)$ 不能被任何更小的加权奥利奇空间 $L_\Psi(\theta)$ 所取代。更具体地说，若 Φ 和 Ψ 是两个 N-函数，则称 Ψ 严格快于 Φ 增长，并记作 $\Phi \prec \Psi$，当且仅当对所有 $\eta > 0$，都有 $\Phi(t)/\Psi(\eta t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$。基于这一意义，我们陈述以下定理。

定理 1.4. 假设 (3)、$\alpha_k - kp + 1 = 0$，且对所有 $i = 0, \ldots, k-1$，$\alpha_i - ip + 1 > 0$。设 Ψ 为一个 N-函数，使得 $\Phi \prec \Psi$，其中 Φ 由式 (8) 给出。那么 $X^{k,}{}_{0}{}^{p}_{R,}(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ 不能连续嵌入 $L_\Psi(\theta)$。特别地，$X^{k,}{}_{R}{}^{p}$ 也不能连续嵌入 $L_\Psi(\theta)$。

令 $X^{k,}{}_{\mathcal{N}}{}^{p}{}_{,\gamma,R}(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ 为具有纳维边界条件的加权索博列夫空间，定义为

$$\left\{u \in X^{k,p}_R(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \colon \Delta^j_\gamma u(R) = 0 \ \forall j = 0, \ldots, \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \right\},$$

其中 $\Delta_\gamma u = -r^{-\gamma}(r^\gamma u')' = -u'' - \gamma u'/r$。$u$ 的 γ-广义 k 阶梯度记为 $\nabla^k_\gamma u$，定义为

$$\nabla^k_\gamma u = \begin{cases} \left(\Delta_\gamma^{\frac{k-1}{2}} u\right)' & \text{for } k \text{ odd}, \\ \Delta_\gamma^{\frac{k}{2}} u & \text{for } k \text{ even}. \end{cases}$$

在权函数和 γ 满足自然条件的假设下，我们能够证明范数$\|\nabla^k_\gamma \cdot\|_{L^p_{\alpha_k}}$ 和 $\|\cdot\|_{X^{k,}{}_{R}{}^{p}}$ 在 $X^{k,}{}_{\mathcal{N}}{}^{p}{}_{,\gamma,}{}_{R}$ 中等价（见命题 4.1）。以下定理将 Adams 不等式 [1] 中关于径向对称函数的经典结果加以推广。

定理1.5. 设 $X^{k,\,\aleph^{p},\,\gamma,\,R}(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$ 满足 $\alpha_k-kp+1=0$。若 $\theta>-1$ 且 $\gamma>k-1$ 对于 k 为偶数，而 $\gamma>k-2$ 对于 k 为奇数，则

$$\sup_{R\in(0,\infty)}\sup_{\substack{u\in X^{k,p}_{\aleph,\gamma,R}\\ \|\nabla^k_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_k}}=1}} R^{-(\theta+1)}\int_0^R e^{\mu|u|^{p'}}r^\theta \mathrm{d}r<\infty\Leftrightarrow\mu\le\mu_0,$$

其中

$$\mu_0=\mu_0(\theta,\gamma,p,k):=\begin{cases}(\theta+1)\left(2^{k-1}\dfrac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+2-k}{2})}\right)^{\frac{p}{p-1}}, & k\ \textit{odd},\\ (\theta+1)\left(2^{k-1}\dfrac{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+1-k}{2})}\right)^{\frac{p}{p-1}}, & k\ \textit{even}.\end{cases}$$

注1.6。在 $\gamma=\alpha_k$ 的特殊情形下，并且采用更强的狄利克雷边界条件时，*[10,* 定理 1.*3]* 证明了一个类似的结果。然而，其中给出的证明仅表明，当 $\mu_0=\mu_0(\theta,\alpha_k,k)$ 时，上述上确界为无穷大；而当

$$\mu\le(\theta+1)\left(2^{k-1}(p-1)\frac{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{\alpha_k-1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha_k+1-k}{2})}\right)^{p'}$$

该值严格小于 $\mu_0=\mu_0(\theta,\alpha_k,k)$，但 $k=1$ 的情形除外 .

事实上，在 *[10]*（见第 535 页）中，声称

$$\mu_0(\alpha,\theta,k)=C_{k,\alpha}^{-p'}\mu_0(\alpha-2(l-1)p,\theta,2).$$

然而，这个等式并不成立，经过仔细计算可得以下等式:

$$\mu_0(\alpha,\theta,k)=C_{k,\alpha}^{-p'}\mu_0(\alpha,\theta,2).$$

1.2. 应用。作为定理 1.1 所给嵌入的一个应用，我们研究四阶问题

$$\begin{cases}\Delta_\alpha^2u=r^{\theta-\alpha}g(r)|u|^{p-2}u & \text{in } (0,R),\\ u=\Delta_\alpha u=0 & \text{in } R,\\ u'=(\Delta_\alpha u)'=0 & \text{in } 0,\end{cases}\tag{9}$$

其中 $g\colon\ [0,R]\to\mathbb{R}$ 连续且为正， p 为次临界， $\Delta_\alpha u=-r^{-\alpha}(r^\alpha u')'$ 是α-广义径向拉普拉斯算子。当 $\alpha>3$时，与问题 (9) 相关的函数空间符合定理 1.1 的 Sobolev 情形。更具体地说，我们证明了问题 (9) 的弱解的存在性与正则性结果。

定理 1.6。假设 $2\le p<2(\theta+1)/(\alpha-3)$且 $\theta>\alpha-1$。那么存在 $u_0\in C^4((0,R])\cap C^3([0,R])$，使其为问题 (9) 的一个非平凡经典解，且满足 $\Delta_\alpha u_0\in C^2((0,R])\cap C^1([0,R])$。此外， $u_0''(0)=-\Delta_\alpha u_0(0)/(\alpha+1)$且 $u_0'''(0)=0$。

我们还研究 y 是问题中定理 1.2 所给出的可达性的一项应用

$$\begin{cases}\Delta_3^2u=r^{\theta-3}f(r,u) & \text{in } (0,R),\\ u=\Delta_3u=0 & \text{in } R,\\ u'=(\Delta_3u)'=0 & \text{in } 0,\end{cases}\tag{10}$$

其中 f是次临界的（即 f满足带有 $\mu < \theta + 1$的 (f_{ATM})）。更具体地说，我们证明弱解的存在性，并发展这些问题的正则性理论。

定理 1.7. 假设 $\theta > 2$和 f满足 (f_{ATM})，其中 $f(r,\cdot)$ 是奇函数，并且对所有 $t \geq 0$都有 $f(r,t) \geq 0$。如果 $\mu < \theta + 1$，那么存在 $u_0 \in C^4((0,R]) \cap C^3([0,R])$ 的一个非平凡经典解，使其满足

$$\begin{cases} \Delta_3^2 u = r^{\theta-3}\lambda f(r,u) & in\ (0,R), \\ u = \Delta_3 u = 0 & in\ R, \\ u' = (\Delta_3 u)' = 0 & in\ 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda = \int_0^R f(r,u_0)u_0 r^\theta \mathrm{d}r$。此外，$\Delta_3 u_0 \in C^2((0,R]) \cap C^1([0,R])$，$u_0''(0) = -\Delta_3 u_0(0)/4$，并且 $u_0'''(0) = 0$。

1.3. 记号。我们使用以下记号。

- $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}:$ 对每个 $x \in \mathbb{R},\ n \leq x\}$。
- $p' = \frac{p}{p-1}$ 对每个 $1 < p < \infty$。

1.4. 论文结构。在第 2 节中，我们为 $X^{k,\ _R}{}^p$ 证明一些径向引理，并证明定理 1.1。在第 3 节中，我们研究 Adams-Trudinger-Moser 情形（$\alpha_k - kp + 1 = 0$），找出使上确界 (6) 有限或无限的一些条件。具体而言，我们证明定理 1.2、1.3 和 1.4。第 4 节将给出加权 Sobolev 空间的 Adams 不等式（定理1.5）。第 5 节将研究偏微分方程 (9) 和 (10)，并证明定理 1.6 和 1.7。此外，本节还将发展偏微分方程的正则性理论：$\Delta_\alpha^2 u = r^{\theta-\alpha} f(r,u)$。

2. Radial Lemmas and proof of Theorem 1.1

我们首先按照 [21] 的记号回顾一些定义。若函数 $u \in AC_{\mathrm{loc}}(0,R)$ 满足 $\lim_{r\to 0} u(r) = 0$，则称其属于类 $AC_L(0,R)$。类似地，若 $u \in AC_{\mathrm{loc}}(0,R)$ 满足 $\lim_{r\to R} u(r) = 0$，则称其属于 $AC_R(0,R)$。在 [21, Example 6.9] 中证明了以下 Hardy 型不等式:

命题 2.1. 给定 $p,q \in [1,\infty)$ 和 $\theta,\alpha \in \mathbb{R}$，不等式

$$\left(\int_0^R |u|^q r^\theta \mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^R |u'|^p r^\alpha \mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}$$

成立 在以下条件下，存在某个常数 $C = C(p,q,\theta,\alpha,R) > 0$:
(i) 对于 $u \in AC_L(0,R)$，当且仅当满足以下两个条件之一：(1) $1 \leq p \leq q < \infty$，$q \geq \frac{(\theta+1)p}{\alpha-p+1}$，且 $\alpha - p + 1 < 0$。(2) $1 \leq q < p < \infty$, $q > \frac{(\theta+1)p}{\alpha-p+1}$，且 $\alpha - p + 1 < 0$; (ii) 对于 $u \in AC_R(0,R)$，当且仅当满足以下两个条件之一：(1) 若 $1 \leq p \leq q < \infty$，则

$$1 \leq p \leq q \leq \frac{(\theta+1)p}{\alpha-p+1}\ and\ \alpha - p + 1 > 0,$$

or

$$\theta > -1\ and\ \alpha - p + 1 \leq 0.$$

(2) 若 $1 \le q < p$，则

$$1 \le q < p < \infty,\ with\ q < \frac{(\theta+1)p}{\alpha - p + 1}\ and\ \alpha - p + 1 > 0,$$

or

$$\theta > -1\ and\ \alpha - p + 1 \le 0.$$

与经典索об列夫空间类似，我们有连续嵌入 $W^{k,p}(I) \hookrightarrow AC^{k-1}(I)$（对于 I 有界区间），对于加权索博列夫空间 $X^{k}_{,R}{}^{p}$，我们也有以下类似结果:

命题 2.2. 设 $u \in X^{k}_{,R}{}^{p}(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$，且 $1 \le p < \infty$。则存在$U \in AC^{k-1}{}_{\text{loc}}((0, R])$，使得

$$u = U \quad a.e.\ on \quad (0, R).$$

此外，$U^{(k)}$（在经典意义下）几乎处处存在于 $(0, R)$ 上，$U_{(k)}$是可测函数，并且

$$\int_0^R \left|U^{(j)}(t)\right|^p t^{\alpha_j} \mathrm{d}t < \infty\ for\ j = 0, 1, \ldots, k.$$

证明. 设 $u \in X^{1}_{,R}{}^{p}(\alpha_0, \alpha_1)$，且 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $1/n_0 < R$。注意，对于所有 $n \ge n_0$，都有 $u \in W^{1,p}(1/n, R)$，因为对于所有 $t \in [1/n, R]$ 和 $n \ge n_0$，$1 \le t^{\alpha_i} / \min_{t\in[1/n,R]} t^{\alpha_i}$。由 [6,定理 8.2]，，对于每个 $n \ge n_0$，存在 $U_n \in AC([1/n, R])$，使得 $U_n = u$ 几乎处处成立于 $(1/n, R)$。当 $k = 1$ 时，通过对每个$t \in$定义 $U(t) := U_n(t)$，即可完成证明，其中$t \in$属于$(0, R]$，且 n是满足 $1/n < t$的自然数。对于 $u \in X^{k}_{,R}{}^{p}(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$，只需在 $u^{(k-1)} \in X^{1}_{,R}{}^{p}(\alpha_{k-1}, \alpha_k)$上使用$k = 1$ 这一情形（参见 [6, 定理 8.2]之后的注释 6）。□

注释 2.1. 命题 2.2 的逆命题也成立，证明是显然的。

由于 $u \in X^{1,}{}_{R}{}^{p}$ 不一定满足 $u(R) = 0$，因此我们需要下面的引理来得到径向引理。

引理 2.1. 存在一个常数 $C = C(\alpha_0, \alpha_1, p, R) > 0$，使得

$$|u(R)| \le C\|u\|_{X_R^{1,p}}, \quad \forall u \in X_R^{1,p}(\alpha_0, \alpha_1).$$

证明. 根据积分中值定理和命题 2.2，存在 $t_0 \in (R/2, R)$，使得

$$u(t_0) = \frac{2}{R}\int_{\frac{R}{2}}^{R} u(r)\mathrm{d}r. \tag{11}$$

另一方面,

$$u(R) - u(t_0) = \int_{t_0}^{R} u'(r)\mathrm{d}r. \tag{12}$$

那么，由（11）和（12）可得，

$$\begin{aligned}|u(R)| &\le |u(R)-u(t_0)|+|u(t_0)|\\ &\le \int_{\frac{R}{2}}^{R} |u'(r)|\, r^{\frac{\alpha_1}{p}}\cdot r^{-\frac{\alpha_1}{p}}\mathrm{d}r+\frac{2}{R}\int_{\frac{R}{2}}^{R}|u(r)|r^{\frac{\alpha_0}{p}}\cdot r^{-\frac{\alpha_0}{p}}\mathrm{d}r\\ &\le \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}(0,R)}\left\|r^{-\frac{\alpha_1}{p}}\right\|_{L^{p'}(\frac{R}{2},R)}+\frac{2}{R}\|u\|_{L^p_{\alpha_0}(0,R)}\left\|r^{-\frac{\alpha_0}{p}}\right\|_{L^{p'}(\frac{R}{2},R)}\\ &\le C\|u\|_{X^{1,p}_R}.\end{aligned}$$

□

现在我们准备证明 Sobolev 情形（$\alpha_k-kp+1>0$）和 Adams-Trudinger-Moser 情形（$\alpha_k-kp+1=0$）下的径向引理。命题 2.3 针对第一种情形；对于第二种情形，我们需要将其分为命题 2.4（当 $p>1$ 时）和命题 2.5（当 $p=1$ 时）。

命题 2.3。假设 $\alpha_k-kp+1>0$。那么，存在常数 $C=C(\alpha_0,\dots,\alpha_k,p,k,R)>0$，使得对所有 $u\in X^{k,}{}_R{}^p(\alpha_0,\dots,\alpha_k)$，均有

$$|u(t)|\le C\frac{1}{t^{\frac{\alpha_k-kp+1}{p}}}\|u\|_{X^{k,p}_R},\quad \forall t\in(0,R]. \tag{13}$$

证明。我们将对 k 使用归纳法进行证明。令 $u\in X^{1,}{}_R{}^p$ 且 $t\in(0,R]$。由于 [13]，恒等式

$$u(t)=u(R)-\int_t^R u'(r)r^{\frac{\alpha_1}{p}}\cdot r^{-\frac{\alpha_1}{p}}\mathrm{d}r$$

成立。由 H¨older 不等式和引理 2.1，可得

$$|u(t)|\le C\frac{1}{t^{\frac{\alpha_1-p+1}{p}}}\|u\|_{X^{1,p}_R},$$

这就证明了 $k=1$ 的 (13)。现在，设 $\alpha_k-kp+1>0$, $u\in X^{k,}{}_R{}^p$ 和 $t\in(0,R]$。由 $u'\in X^{k-1,}{}_R{}^p(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ 和归纳假设，我们有

$$|u(t)|\le |u(R)|+\int_t^R|u'(r)|\mathrm{d}r\le |u(R)|+C\|u'\|_{X^{k-1,p}_R}\int_t^R\frac{1}{r^{\frac{\alpha_k-(k-1)p+1}{p}}}\mathrm{d}r.$$

因此，由引理 2.1 可得 (13) 成立。 □

命题 2.4。若 $\alpha_k-kp+1=0$ 和 $p>1$，则存在一个常数$C=C(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1},p,k,R)>0$，使得对所有 $u\in X^{k,}{}_R{}^p$，均有

$$|u(t)|\le|\log(t/R)|^{\frac{p-1}{p}}\|u^{(k)}\|_{L^p_{\alpha_k}}+C\|u\|_{X^{k,p}_R},\quad \forall t\in(0,R]. \tag{14}$$

若 $u\in X^{1,}{}_{0\,R}^{\,p}(\alpha_0,p-1)$，则 (14) 在 $C=0$ 的情况下成立。

证明。分部积分 $k-1$ 次后，我们得到恒等式

$$\int_t^R u^{(k)}(r)r^{k-1}\mathrm{d}r=(-1)^k(k-1)!\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j}{j!}\left(u^{(j)}(t)t^j-u^{(j)}(R)R^j\right).$$

Then

$$u(t)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_t^R u^{(k)}(r)r^{k-1}\mathrm{d}r+u(R)-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^j}{j!}\left(u^{(j)}(t)t^j-u^{(j)}(R)R^j\right)]. \tag{15}$$

由于 $\alpha_k-kp+1=0$,

$$\int_t^R u^{(k)}(r)r^{k-1}\mathrm{d}r\le|\log(t/R)|^{\frac{p-1}{p}}\|u^{(k)}\|_{L^p_{\alpha_k}}. \tag{16}$$

由命题 2.3 可知，应用于 $u^{(j)}\in X^{k-j,\ R}{}^{p}(\alpha_j,\ldots,\alpha_k)$，可得

$$\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^j}{j!}u^{(j)}(t)t^j ds\le C\|u\|_{X_R^{k,p}}. \tag{17}$$

因此，(14) 是 (15)、(16)、(17) 和引理 2.1 的推论。 □

命题 2.5。若 $\alpha_k-kp+1=0$ 且 $p=1$，则 $X^{k,\ R}{}^{p}\hookrightarrow C([0,R])$。换言之，$X^{k,\ R}{}^{1}(\alpha_0,\ldots,\alpha_{k-1},k-1)\hookrightarrow C([0,R])$。

证明。注意到对于所有 $j=1,\ldots,k-1$，都有 $u^{(j)}\in X^{k-j,\ R}{}^{1}(\alpha_j,\ldots,\alpha_k)$。由命题 2.3 可得

$$|u^{(j)}(t)|\le C\frac{1}{t^j}\|u\|_{X_R^{k,1}}.$$

根据（15）、引理 2.1 以及 $u^{(k)}(t)t^{k-1}\in L^1$，我们有

$$|u(t)|\le C\|u\|_{X_R^{k,1}},\quad\forall t\in(0,R].$$

剩下需要证明的是 $\lim_{t\to0}u(t)$ 存在。由于 $u^{(k)}(t)t^{k-1}\in L^1$ 且由（15）可知，只需证明对于所有 $j=1,\ \ldots,\ k-1$，均存在 $\lim_{t\to0}u^{(j)}(t)t^j$。设 $1\le i\le k-1$ 为整数。利用分部积分，我们有

$$\int_t^R u^{(i+1)}(r)r^i\mathrm{d}r=u^{(i)}(R)R^i-u^{(i)}(t)t^i-i\int_t^R u^{(i)}(r)r^{i-1}\mathrm{d}r. \tag{18}$$

如果对于所有 $i=1,\ \ldots,\ k$，都有 $u^{(i)}\in L^1_{i-1}$，则我们可以在（18）中令 $t\to0$ 趋于极限，从而得到命题 2.5。为了证明对于所有 $i=0,\ \ldots,\ k-1$ 都有 $u^{(k-i)}\in L^1_{k-i-1}$，我们对 i 使用归纳法。$i=0$ 的情形由 $u\in X^{k,\ R}{}^{1}(\alpha_0,\ldots,\ k-1)$ 得出。假设 $i<k-1$ 且 $u^{(k-i)}\in X^{i,\ R}{}^{1}(\alpha_{k-i},\ldots,\ k-1)$。根据命题 2.1 和引理 2.1

$$\begin{aligned}\int_0^R|u^{(k-i-1)}(r)|r^{k-i-2}\mathrm{d}r&\le C\|u\|_{X_R^{k,p}}+\int_0^R\left|u^{(k-i-1)}(r)-u^{(k-i-1)}(R)\right|r^{k-i-2}\mathrm{d}r\\&\le C\|u\|_{X_R^{k,p}}+C\int_0^R|u^{(k-i)}(r)|r^{k-i-1}\mathrm{d}r<\infty,\end{aligned}$$

至此，命题 2.5 的证明完成。 □

在证明命题 2.6 给出的 Hardy 型不等式之前，我们先陈述以下在 [16, 定理 4.3 和注 4.4] 中证明的结果。

定理 2.1. 设 $1 < p < \infty$。则不等式

$$\int_0^1 |z(t)|^p u(t)\mathrm{d}t \le C \int_0^1 \left|z^{(m)}(t)\right|^p v(t)\mathrm{d}t \tag{19}$$

对所有满足 $z^{(j)}(1) = 0$ 的 $z \in W^{m,\,p}((0,1),\,v)$ 均成立；对于任意 $j = 0, 1, \ldots, m-1$，当且仅当，

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{0<x<1} \left(\int_0^x (x-t)^{(m-1)p} u(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_x^1 v(t)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty \\ &\sup_{0<x<1} \left(\int_0^x u(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_x^1 (t-x)^{\frac{(m-1)p}{p-1}} v(t)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中 u 和 v 是定义在 $(0,1)$ 上的正可测函数。

命题 2.6. 给定满足 $\alpha_k - jp + 1 > 0$ 的 $j = 0, 1, \ldots, k$，则存在常数$C_j = C(j, p, R, k, \alpha_k) > 0$，使得对所有 $u \in X^{k,\,{}_R}{}^p$，

$$\int_0^R \left|\frac{u^{(k-j)}(t)}{t^j}\right|^p t^{\alpha_k}\mathrm{d}t \le C_j \sum_{i=k-j}^{k} \int_0^R \left|u^{(i)}(t)\right|^p t^{\alpha_i}\mathrm{d}t. \tag{21}$$

特别地，

$$\left\|\frac{u}{t^k}\right\|_{L^p_{\alpha_k}} \le C_k \|u\|_{X^{k,p}_R}.$$

证明。由于对于所有 $u \in X^{k,\,{}_R}{}^p(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$，都有 $u^{(k-j)} \in X^{j,\,{}_R}{}^p(\alpha_{k-j}, \ldots, \alpha_k)$，因此只需证明 $j = k$ 的情形，即

$$\int_0^R \left|\frac{u(t)}{t^k}\right|^p t^{\alpha_k}\mathrm{d}t \le C \sum_{i=0}^{k} \int_0^R \left|u^{(i)}(t)\right|^p t^{\alpha_i}\mathrm{d}t. \tag{22}$$

给定 $u \in X^{k,\,{}_R}{}^p$，我们定义 $v \in X^{k,\,{}_R}{}^p$ 如下:

$$v(t) = u(t) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u^{(i)}(R)}{i!}(t-R)^i. \tag{23}$$

因此，对于 $i = 0$，$v^{(i)}(R) = 0$，.....，以及 $v^{(k)} = u^{(k)}$ $k-1$。于是 $v \in X^{k,\,{}_0}{}^p_{R,}$。
情形 $p > 1$: 我们先证明 (20) 对 $u(t) = t^{\alpha_k - kp}$ 和 $v(t) = t^{\alpha_k}$ 成立。事实上，

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^x (x-t)^{(k-1)p} t^{\alpha_k - kp}\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_x^R t^{-\frac{\alpha_k}{p-1}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\le \left(x^{(k-1)p} \int_0^x t^{\alpha_k - kp}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} C \left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha_k}{p-1}-1}} - \frac{1}{R^{\frac{\alpha_k}{p-1}-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\le C\left(x^{(k-1)p+\alpha_k-kp+1}\right)^{1/p} x^{-\frac{\alpha_k-p+1}{p}} \le C \end{aligned}$$

并且对所有 $0 < x < R$,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^x t^{\alpha_k - kp}\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_x^R (t-x)^{\frac{(k-1)p}{p-1}} t^{-\frac{\alpha_k}{p-1}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \le Cx^{\frac{\alpha_k - kp+1}{p}}\left(\int_x^R t^{-\frac{\alpha_k - kp+p}{p-1}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \le Cx^{\frac{\alpha_k - kp+1}{p}}\left(\frac{1}{x^{-\frac{\alpha_k - kp+1}{p-1}}} - \frac{1}{R^{-\frac{\alpha_k - kp+1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \le C.
\end{aligned}$$

由定理 2.1,

$$\int_0^R \left|\frac{v(t)}{t^k}\right|^p t^{\alpha_k}\mathrm{d}t \le C\int_0^R \left|v^{(k)}(t)\right|^p t^{\alpha_k}\mathrm{d}t.$$

此外，由引理 2.1 和 (23)，我们有 $|u(t)| \le |v(t)| + C\|u\|_{X^{k,\,R}{}^p}$。因此

$$\int_0^R \left|\frac{u(t)}{t^k}\right|^p t^{\alpha_k}\mathrm{d}t \le C\int_0^R \left|u^{(k)}(t)\right|^p t^{\alpha_k}\mathrm{d}t + C\|u\|^p_{X^{k,p}},$$

从而得到 (22)。

情形 $p = 1$：由于 $|u(t)| \le |v(t)| + C\|u\|_{X^{k,\,R}{}^p}$，只需证明

$$\int_0^R |v(t)| t^{\alpha_k - k}\mathrm{d}t \le C\int_0^R \left|v^{(k)}(t)\right| t^{\alpha_k}\mathrm{d}t. \tag{24}$$

对 (24) 左端分部积分 k 次，可得 (24)。 □

因此，我们已经完成证明索博列夫情形和 Adams-Trudinger-Moser 情形下定理 1.1 所需的所有步骤。

为了证明定理 1.1 中的 Morrey 情形，我们将证明两个预备结果。我们采用经典 Sobolev空间 $W^{k,\,p}(\Omega)$（$\Omega \subset \mathbb{R}^N$）中使用的相同论证，其中$kp > N$。

引理 2.2. 设 $p > 1, 0 < R \le \infty, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha_1 \ge 0$。若 $\alpha_1 - p + 1 < 0$，则对所有$u \in X^{1,}{}_{R}{}^{p}(\alpha_0, \alpha_1)$，有

$$|u(r) - u(s)| \le C|r-s|^\gamma \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}} \quad \forall r, s \in (0, R),$$

其中 $\gamma = 1 - (\alpha_1 + 1)/p$ 且 $C = C(p, \alpha_1) > 0$。

证明. 给定 $r, s \in (0, R)$，满足 $r > s$，定义 $I = (r, s)$。对于满足 $x > y$ 的 $x, y \in \overline{I}$，我们有

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\le |x-y|\int_0^1 |u'(y + t(x-y))|\mathrm{d}t \\
&\le |r-s|\int_0^1 |u'(y + t(x-y))|\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{25}$$

Set

$$\overline{u} = \frac{1}{|r-s|}\int_I u(x)\mathrm{d}x.$$

积分 对 $x \in I$ 应用 (25)，并作变量代换 $z = h(x) = y + t(x-y)$，得到

$$\begin{aligned}|\overline{u} - u(y)| &\le \int_I \int_0^1 |u'(y + t(x-y))| \mathrm{d}t \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_I |u'(y + t(x-y))| \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \int_{h(I)} |u'(z)| \mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}t}{t}. \end{aligned} \tag{26}$$

由于 $h(I) \subset I$,

$$\begin{aligned}\int_{h(I)} |u'(z)| \mathrm{d}z &\le \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}(I)} \left(\int_{h(I)} z^{-\frac{\alpha_1}{p-1}} \mathrm{d}z \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\frac{p-1}{p-1-\alpha_1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}} \left[h(r)^{\frac{p-1-\alpha_1}{p-1}} - h(s)^{\frac{p-1-\alpha_1}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &\le \left(\frac{p-1}{p-1-\alpha_1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}} t^{\frac{p-1-\alpha_1}{p}} |r-s|^{1-\frac{\alpha_1+1}{p}}, \end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们对所有 $a \ge b \ge 0$ 和 $0 < \beta \le 1$ 使用了 $\alpha_1 \ge 0$ 以及 $a^\beta - b^\beta \le (a-b)^\beta$。利用（26）可得

$$\begin{aligned}|\overline{u} - u(y)| &\le \left(\frac{p-1}{p-1-\alpha_1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}(I)} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha_1+1}{p}} \mathrm{d}t |r-s|^{1-\frac{\alpha_1+1}{p}} \\ &= \left(\frac{p-1}{p-1-\alpha_1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{p}{p-1-\alpha_1} \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}(I)} |r-s|^{1-\frac{\alpha_1+1}{p}}. \end{aligned}$$

将此不等式分别对 $y = r$ 和 $y = s$ 相加，我们得到

$$|u(r) - u(s)| \le \left(\frac{p-1}{p-1-\alpha_1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{2p}{p-1-\alpha_1} \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}(I)} |r-s|^{1-\frac{\alpha_1+1}{p}}.$$

□

注意到，当$k = 1$时，接下来的定理恰好是定理 1.1 的 Morrey 情形。

定理 2.2. 设 $p > 1$、 α_0、 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ 和 $0 < R < \infty$。若 $\alpha_1 - p + 1 < 0$，则以下连续嵌入成立

$$X^{1,p}_R(\alpha_0, \alpha_1) \hookrightarrow C^{0,\gamma}([0,R]),$$

此外，对于所有 $u \in X^{1,}{}_R{}^p$，我们有

$$|u(r) - u(s)| \le C|r-s|^\gamma \|u'\|_{L^p_{\alpha_1}} \quad \forall r, s \in [0,R],$$

其中 $\gamma = \min\{1 - (\alpha_1+1)/p,\ 1 - 1/p\}$ 且 C是仅依赖于 p和 $\min\{\alpha_1, 0\}$的正常数。

证明。由于 $X^{1,p}_{R}(\alpha_0,\alpha_1) \hookrightarrow X^{1,p}_{R}(\alpha_0,0)$ 对于 $\alpha_1<0$成立，我们可以假设 $\alpha_1\geq 0$。由引理 2.2 可得

$$|u(r)-u(s)|\leq C\|u'\|_{L^p_{\alpha_1}}|r-s|^{\gamma},\quad \forall r,s\in[0,R]. \tag{27}$$

因此,

$$|u(r)|\leq |u(R)|+C\|u'\|_{L^p_{\alpha_1}}R^{\gamma},\quad \forall r\in[0,R].$$

利用引理 2.1，我们得到连续嵌入

$$X^{1,p}_R(\alpha_0,\alpha_1)\hookrightarrow L^{\infty}([0,R]),$$

结合 (27)，可推出嵌入

$$X^{1,p}_R(\alpha_0,\alpha_1)\hookrightarrow C^{0,\gamma}([0,R]),$$

证明完毕。 □

定理 1.1 的证明。 *a*) 只需证明对于 $q=p^*$ 的连续嵌入。由命题 2.3，存在 $C>0$ 使得

$$|u(r)|^{\frac{(\theta-\alpha_k+kp)p}{\alpha_k-kp+1}}r^{\theta-\alpha_k+kp}\leq C\|u\|^{\frac{(\theta-\alpha_k+kp)p}{\alpha_k-kp+1}}_{X^{k,p}_R},\quad \forall r\in(0,R].$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^R|u(r)|^{\frac{(\theta+1)p}{\alpha_k-kp+1}}r^{\theta}\mathrm{d}r &\leq C\|u\|^{\frac{(\theta-\alpha_k+kp)p}{\alpha_k-kp+1}}_{X^{k,p}_R}\int_0^R|u(r)|^p r^{\alpha_k-kp}\mathrm{d}r\\ &\leq C\|u\|^{\frac{(\theta-\alpha_k+kp)p}{\alpha_k-kp+1}}_{X^{k,p}_R}\|u\|^p_{X^{k,p}_R}\\ &= C\|u\|^{\frac{(\theta+1)p}{\alpha_k-kp+1}}_{X^{k,p}_R},\end{aligned}$$

其中第二个不等式由命题 2.6 得出。

b) 利用命题 2.4 和命题 2.5，证明是直接的。

c) 设 $u\in X^{k,p}_{R}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)$，其中 $\alpha_k-kp+1<0$。记 $\ell=\lfloor\frac{\alpha_k+1}{p}\rfloor$。我们将证明分为两种情况:

情况 $\frac{\alpha_k+1}{p}\notin\mathbb{Z}$: 在这种情况下 $\alpha_k-\ell p+1>0$。由定理 1.1,

$$u^{(k-\ell)}\in X^{\ell,p}_R(\alpha_{k-\ell},\dots,\alpha_k)\hookrightarrow L^p_{\alpha_k-\ell p}.$$

因此，$u^{(k-\ell-1)}\in X^{1,p}_{R}(\alpha_{k-\ell-1},\alpha_k-\ell p)$。然后由定理 2.2 可知

$$u^{(k-\ell-1)}\in X^{1,p}_R(\alpha_{k-\ell-1},\alpha_k-\ell p)\hookrightarrow C^{0,\gamma}([0,R]),$$

其中 $\gamma=\min\{1-\frac{\alpha_k-\ell p+1}{p},1-\frac{1}{p}\}$。

情形 $\frac{\alpha_k+1}{p}\in\mathbb{Z}$: 在这种情况下 $\alpha_k-\ell p+1=0$。根据定理 1.1

$$u^{(k-\ell)}\in X^{1,p}_R(\alpha_{k-\ell},\dots,\alpha_k)\hookrightarrow L^q_0\hookrightarrow L^q_{p-1},\quad \forall q\in[1,\infty)$$

and

$$u^{(k-\ell-1)}\in X^{1,p}_R(\alpha_{k-\ell-1},p-1)\hookrightarrow L^q_0,\quad \forall q\in[1,\infty).$$

于是，由定理 2.2 可知，对于每个 $q \in (1,\infty)$,

$$u^{(k-\ell-1)} \in X_R^{1,q}(0,0) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{q}}([0,R]).$$

取 $q \to \infty$，我们得到 $u^{(k-\ell-1)} \in C^{0,\gamma}([0,R])$，对每个 $\gamma \in (0,1)$ 均成立。 □

3. Adams-Trudinger-Moser inequality for higher derivatives

本节中，我们将证明定理 1.2 和定理 1.3。我们着重回答以下问题：考虑 Adams-Trudinger-Moser 情形（$\alpha_k - kp + 1 = 0$）下的空间 $X^{k,p}_{R}$，对于哪些 $\mu > 0$，上确界

$$\sup_{\|u\|_{X^{k,p}_R} \le 1} \int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} r^\theta \mathrm{d}r$$

是有限的? 首先，我们需要验证，对于每个 $u \in X^{k,p}_{R}$，$\int_0^R \exp(\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}) r^\theta \mathrm{d}r$ 都是有限的。这是定理 1.2 的条目（a），由命题 3.1 得出。我们利用命题 3.2 证明命题 3.3, 后者对应定理 1.2 的条目（b）。最后，我们在命题 3.4 中证明定理 1.2 的条目（c）。

命题 3.1. 设 $X^{k,p}_{R}(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$ 满足 $\alpha_k - kp + 1 = 0$ 和 $\theta > -1$。那么对于任意 $\mu \ge 0$，我们有 $\exp(\mu|u|^{p'}) \in L^1_\theta$，对所有 $u \in X^{k,p}_{R}$ 均成立。

证明. 设 $u \in X^{k,p}_{R}$ 和 $\theta > -1$。我们断言

$$\lim_{r\to 0} \frac{u(r)}{|\log r|^{\frac{p-1}{p}}} = 0. \tag{28}$$

事实上，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $T = T(\varepsilon) > 0$，使得 $\int_0^T |u^{(k)}(r)|^p r^{kp-1} \mathrm{d}r < \varepsilon$。利用 (15)、(16) 和 (17)（取 $R = T$），可得 (28)。固定 $\delta = (\frac{\theta+1}{2\mu})^{(p-1)/p}$。由 (28)，存在 $T > 0$，使得对所有 $t \le T$，$|u(t)| \le \delta |\log\, t|^{\frac{p-1}{p}}$。于是

$$\int_0^T e^{\mu|u|^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r \le \int_0^T r^{\frac{\theta-1}{2}} \mathrm{d}r < \infty.$$

这就完成了 $\exp(\mu|u|^{p'}) \in L^1_\theta$，因为命题 2.4 对项 $\int_T^R e^{\mu|u|^{p'}} \mathrm{d}r$ 给出了估计（其常数依赖于 T）。□

命题 3.2. 设 $X^{k,p}_{R}(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$，其中 $\alpha_k - kp + 1 = 0$ 且 $\theta > -1$。若 $\mu < \mu_0$，则

$$\sup_{\|u\|_{X^{k,p}_R} \le 1} \int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} r^\theta \mathrm{d}r < \infty.$$

证明. 基于定理 2.6], 的证明，我们将找到 μ_0，使得对任意 $\mu < \mu_0$，都有 (6)。首先考虑以下不等式

$$(a+b)^q \le (1+\varepsilon) a^q + c_q \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\right) b^q, \quad \forall a,b \ge 0 \text{ and } \varepsilon > 0, \tag{29}$$

其中 $c_q > 0$ 仅取决于 $q \ge 1$。

设 $u \in X^{k,}{}_{R}{}^{p}$，其中 $\|u\|_{X^{k,}{}_{R}{}^{p}} \le 1$。由命题 2.4 的证明可知，

$$|u(t)| \le \left(\frac{1}{(k-1)!} \left| \log \frac{t}{R} \right|^{\frac{p-1}{p}} + C \right) \|u\|_{X_R^{k,p}}, \quad \forall t \in (0, R].$$

利用 (29)，我们得出

$$|u(t)|^{\frac{p}{p-1}} \le \frac{1+\varepsilon}{[(k-1)!]^{\frac{p}{p-1}}} \left| \log \frac{t}{R} \right| + c_{\varepsilon,p} \quad \forall t \in (0, R].$$

于是，

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{\mu |u|^{\frac{p}{p-1}}} r^\theta \mathrm{d}r &\le e^{\mu c_{p,\varepsilon}} R^{\frac{1+\varepsilon}{[(k-1)!]^{p/(p-1)}}} \int_0^R r^\theta r^{-\frac{1+\varepsilon}{[(k-1)!]^{p/(p-1)}}\mu} \mathrm{d}r \\ &= e^{\mu c_{p,\varepsilon}} R^{\theta+1} \int_0^1 r^{\theta - \frac{1+\varepsilon}{[(k-1)!]^{p/(p-1)}}\mu} \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

注意，最后一个积分有限当且仅当

$$\theta - \frac{1+\varepsilon}{[(k-1)!]^{p/(p-1)}}\mu > -1.$$

由于

$$\mu < \mu_0 = (\theta+1)[(k-1)!]^{p/(p-1)},$$

取足够小的 $\varepsilon > 0$，即可得到所需结果。 □

命题 3.3。设 $X^{k,}{}_{R}{}^{p}(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ 且 $\alpha_k - kp + 1 = 0$ 和 $\theta > -1$。对于每个 $0 \le \mu < \mu_0$，

$$\sup_{\|u\|_{X_R^{k,p}} \le 1} \int_0^R e^{\mu |u|^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r$$

可以取到。此外，若 u 是一个极大化函数，则 u 可以取为非负，且 $\|u\|_{X^{k,}{}_{R}{}^{p}} = 1$。

证明。设 (u_n) 是 $X^{k,}{}_{R}{}^{p}$ 中的一个极大化序列，满足 $\|u_n\|_{X^{k,}{}_{R}{}^{p}} \le 1$。由定理 1.1，存在 $u_0 \in X^{k,}{}_{R}{}^{p}$，使得取一个子序列后，$u_n \rightharpoonup u_0$ 在 $X^{k,}{}_{R}{}^{p}$ 中，并且对所有 $q \ge 1$，$u_n \to u_0$ 属于 $L^q_\theta(0, R)$。由 $|e^x - e^y| \le |x - y|(e^x + e^y)$ 可得

$$\left| \int_0^R \left(e^{\mu |u_n|^{p'}} - e^{\mu |u_0|^{p'}} \right) r^\theta \mathrm{d}r \right| \le \mu \int_0^R \left| |u_n|^{p'} - |u_0|^{p'} \right| \left(e^{\mu |u_n|^{p'}} + e^{\mu |u_0|^{p'}} \right) r^\theta \mathrm{d}r. \tag{30}$$

取定 $q > 1$ 和 $q\mu < \mu_0$，我们有

$$\begin{aligned} \int_0^R \left| |u_n|^{p'} - |u_0|^{p'} \right| e^{\mu |u_n|^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r &\le \left(\int_0^R \left| |u_n|^{p'} - |u_0|^{p'} \right|^{q'} r^\theta \mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^R e^{q\mu |u_n|^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \|u_n - u_0\|^{p'}_{L^{p'q'}_\theta} \left(\int_0^R e^{q\mu |u_n|^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{31}$$

由命题 3.2，右侧的积分关于 n 一致有界。利用 (30) 和 (31)，并令 $u_n \to u_0$ 属于 $L_\theta^{p'q'}$，我们得出

$$\sup_{\|u\|_{X_R^{k,p}}\le 1}\int_0^R e^{\mu|u|^{p'}}r^\theta \mathrm{d}r = \lim \int_0^R e^{\mu|u_n|^{p'}}r^\theta \mathrm{d}r = \int_0^R e^{\mu|u_0|^{p'}}r^\theta \mathrm{d}r.$$

为证明 $\|u_0\|_{X^{k,}{}_R^p}=1$，假设 $\|u_0\|_{X^{k,}{}_R^p}<1$ 并取 $v=u_0/\|u_0\|_{X^{k,}{}_R^p}$，从而与 u 取得上确界这一事实矛盾。必要时，我们可以将 u_0 替换为 $|u_0|$，从而假设 u_0 非负。□

命题 3.4. 设 $X^{k,}{}_R^p(\alpha_0,\dots,\alpha_k)$，满足对所有 $i=0,\dots,k-1$均有 $\alpha_i - ip+1>0$，且 $\alpha_k - kp+1=0$。若 $\theta>-1$，则

$$\sup_{\|u\|_{X_R^{k,p}}\le 1}\int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}}r^\theta \mathrm{d}r=\infty, \quad \forall \mu>\mu_0.$$

证明。我们的证明基于 [1]。设 $\phi\in C^\infty[0,1]$ 满足

$$\begin{cases} \phi(0)=\phi'(0)=\cdots=\phi^{(k+1)}(0)=0,\ \phi'\ge 0,\\ \phi(1)=\phi'(1)=1,\ \phi''(1)=\cdots\phi^{(k-1)}(1)=0. \end{cases}$$

考虑 $0<\varepsilon<1/2$ 和

$$H(t)=\begin{cases} \varepsilon\phi\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right), & \text{if } 0<t\le\varepsilon\\ t, & \text{if } \varepsilon<t\le 1-\varepsilon,\\ 1-\varepsilon\phi\left(\dfrac{1-t}{\varepsilon}\right), & \text{if } 1-\varepsilon<t\le 1,\\ 1, & \text{if } t>1. \end{cases}$$

设 $m\in\mathbb{N}$，并令序列 $(\psi_{m,\ \varepsilon})_m$ 由下式给出

$$\psi_{m,\varepsilon}(r)=H\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right), \quad r>0.$$

我们断言

$$\|\psi_{m,\varepsilon}\|^p_{X_R^{k,p}}\le [(k-1)!]^p(\log m)^{1-p}\left[1+2^p\varepsilon\|\phi'\|^p_\infty+O\left((\log m)^{-1}\right)\right]. \tag{32}$$

为推导（32），我们首先验证

$$\|\psi_{m,\varepsilon}\|^p_{L^p_{\alpha_0}}=O\left((\log m)^{-p}\right). \tag{33}$$

事实上，使用以下变量替换 $t=\log\frac{R}{r}/\log m$ 我们得到

$$\begin{aligned}
\|\psi_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_0}}^p &= \int_0^R \left|H\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right)\right|^p r^{\alpha_0}\mathrm{d}r \\
&= R^{\alpha_0+1}\log m\left[\int_0^\varepsilon \left|\varepsilon\phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^p m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^p m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t\right. \\
&\quad \left. + \int_{1-\varepsilon}^1 \left|1-\varepsilon\phi\left(\frac{1-t}{\varepsilon}\right)\right|^p m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t + \int_1^\infty m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t\right] \\
&\le R^{\alpha_0+1}\log m\left[\int_0^\varepsilon \left|\varepsilon\phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^p m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t + \int_\varepsilon^\infty m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t\right] \\
&= R^{\alpha_0+1}\log m\int_0^\varepsilon \left|\varepsilon\phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^p m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t + O\left((\log m)^{-p}\right). \qquad (34)
\end{aligned}$$

固定 $\gamma\in(\frac{1}{k+1},1)$。由于当 m 足够大时，$\phi((\log m)^{-\gamma})\le(\log m)^{-\gamma(k+1)}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^\varepsilon \left|\varepsilon\phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^p m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t &\le \varepsilon^p\int_0^{\varepsilon(\log m)^{-\gamma}} \left|\phi\left((\log m)^{-\gamma}\right)\right|^p m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t \\
&\quad + \varepsilon^p\int_{\varepsilon(\log m)^{-\gamma}}^\varepsilon m^{-(\alpha_0+1)t}\mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon^p(\log m)^{-\gamma p(k+1)}\frac{1}{(\alpha_0+1)\log m} \\
&\quad + \varepsilon^p\frac{1}{(\alpha_0+1)e^{\varepsilon(\alpha_0+1)(\log m)^{1-\gamma}}\log m} \\
&= O\left((\log m)^{-p-1}\right) \qquad (35)
\end{aligned}$$

当 m足够大时。(34)结合(35)即可推出(33)。

现在的任务是估计每个 $i=1,\dots,k$ 对应的 $\|\psi^{(i)}_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_i}}$。对 $i=1,\dots,k$ 使用归纳法，我们有

$$\psi^{(i)}_{m,\varepsilon}(r)=\frac{1}{r^i}\sum_{j=1}^i\frac{c(j,i)}{(\log m)^j}H^{(j)}\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right),$$

其中，$c(j,i)$ 满足 $c(1,1)=-1$，$c(1,i)=(-1)^i(i-1)!$ $c(i,i)=(-1)^i$，且 $c(j,i+1)=-ic(j,i)-c(j-1,i)$ 对每个 $j=2,\dots,i$ 均成立。于是

$$\begin{aligned}
\|\psi^{(i)}_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_i}}^p &\le \left(\frac{(i-1)!}{\log m}\right)^p\int_0^R \left|H'\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right)+O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p r^{\alpha_i-ip}\mathrm{d}r \\
&\le \left(\frac{(i-1)!}{\log m}\right)^p\left[\left|\|\phi'\|_\infty+O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p\int_{\frac{R}{m}}^{Rm^{\varepsilon-1}} r^{\alpha_i-ip}\mathrm{d}r\right. \\
&\quad \left. + \int_{Rm^{\varepsilon-1}}^{Rm^{-\varepsilon}} r^{\alpha_i-ip}\mathrm{d}r + \left|\|\phi'\|_\infty+O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p\int_{Rm^{-\varepsilon}}^R r^{\alpha_i-ip+1}\mathrm{d}r\right]. \qquad (36)
\end{aligned}$$

对于 $i=1,\dots,k-1$，由（36）可得

$$\begin{aligned}\|\psi_{m,\varepsilon}^{(i)}\|_{L^p_{\alpha_1}}^p &\le \left(\frac{(i-1)!}{\log m}\right)^p \left[\frac{R^{\alpha_i-ip+1}\left|\|\phi'\|_\infty + O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p}{(\alpha_i-ip+1)m^{(1-\varepsilon)(\alpha_i-ip+1)}}\right.\\ &\quad \left. + \frac{R^{\alpha_i-ip+1}}{m^{\varepsilon(\alpha_i-ip+1)}} + \frac{R^{\alpha_i-ip+1}\left|\|\phi'\|_\infty + O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p}{\alpha_i-ip+1}\right]\\ &= O\left((\log m)^{-p}\right). \end{aligned} \tag{37}$$

利用 (36) 可得

$$\begin{aligned}\|\psi_{m,\varepsilon}^{(k)}\|_{L^p_{\alpha_k}}^p &\le \left(\frac{(k-1)!}{\log m}\right)^p \left[\varepsilon\log m\left|\|\phi'\|_\infty + O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p + \log m\right.\\ &\quad \left. + \varepsilon\log m\left|\|\phi'\|_\infty + O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p\right]\\ &\le [(k-1)!]^p(\log m)^{1-p}\left[1+2^p\varepsilon\|\phi'\|_\infty^p + O\left((\log m)^{-p}\right)\right]. \end{aligned} \tag{38}$$

最后，由 (33)、(37) 和 (38) 可得 (32)。

Set

$$u_{m,\varepsilon}(r) = \frac{\psi_{m,\varepsilon}(r)}{\|\psi_{m,\varepsilon}\|_{X_R^{k,p}}}.$$

给定 $\mu > \mu_0 = (\theta+1)[(k-1)!\ ]^{p'}$，(32) 保证

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{\mu u_{m,\varepsilon}^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r &\ge \int_0^{\frac{R}{m}} e^{\mu\|\psi_{m,\varepsilon}\|_{X_R^{k,p}}^{-p'}} r^\theta \mathrm{d}r\\ &\ge e^{\frac{\mu\log m}{[(k-1)!]^{p'}[1+2^p\varepsilon\|\phi'\|_\infty^p + O\left((\log m)^{-1}\right)]} - (\theta+1)\log m}\frac{R^{\theta+1}}{\theta+1}\\ &= \frac{R^{\theta+1}}{\theta+1} e^{(\theta+1)\log m\left(\frac{\mu}{\mu_0}\frac{1}{1+2^p\varepsilon\|\phi'\|_\infty^p + O\left((\log m)^{-1}\right)} - 1\right)}. \end{aligned}$$

因此，取 $\varepsilon>0$ 足够小，我们有右侧项在 $m\to\infty$ 时趋于无穷大。

□

在证明定理 1.3 之前，我们需要考虑 [9] 中的定理 1.2：

定理 3.1. 设 $p\ge 2$ 是一个实数。那么存在一个依赖于 p 的常数 c_1，使得

$$\sup_{w\in\mathcal{K}}\int_0^\infty e^{\rho w^{\frac{p}{p-1}}(t)-t}\mathrm{d}t \begin{cases} \le c_1 & \text{if } \rho\le 1,\\ =\infty & \text{if } \rho>1, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{K} := \{w\in C^1([0,\infty)),$ 且 $w(0)=0,\ w\ge 0,\ \int_0^\infty |w'|^p\mathrm{d}t\le 1\}$。

我们的思路是采用与 Moser [19] 相同的变量替换，并将函数 w 延拓到 $\widetilde{w}$，使其满足边界条件。因此，利用带边界条件的定理（定理 3.1），我们可以推出定理 1.3。条件$u(R)\le Au(r)$ 对于保证 $\int_0^\infty |\widetilde{w}'(t)|^p\mathrm{d}t\le 1$ 是必要的。

定理 1.3 的证明。将 u 替换为 $|u|$后，我们可以假设 $u \geq 0$。定义 $w(t) = (\theta+1)^{\frac{p-1}{p}} u(r)$，其中 $t = -(\theta+1)\log(r/R)$。于是

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{(\theta+1)|u(r)|^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r &= \frac{R^{\theta+1}}{\theta+1} \int_0^R e^{\left|(\theta+1)^{\frac{p-1}{p}} u(r)\right|^{p'}} \left(\frac{r}{R}\right)^{\theta+1} \frac{(\theta+1)\mathrm{d}r}{r} \\ &= \frac{R^{\theta+1}}{\theta+1} \int_0^\infty e^{|w(t)|^{p'} - t} \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{39}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{X_R^{1,p}} &= \int_0^R |u(r)|^p r^{\alpha_0+1} \frac{\mathrm{d}r}{r} + \int_0^R |u'(r)|^p r^p \frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &= \frac{R^{\alpha_0+1}}{(\theta+1)^p} \int_0^\infty |w(t)|^p e^{-\frac{\alpha_0+1}{\theta+1}t} \mathrm{d}t + \int_0^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

因此,

$$\sup_{u \in \mathcal{K}_A} \int_0^R e^{(\theta+1)|u|^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r = \frac{R^{\theta+1}}{\theta+1} \sup_{w \in \widetilde{\mathcal{K}}_A} \int_0^\infty e^{|w(t)|^{p'} - t} \mathrm{d}t,$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{K}}_A := \{w \in & C((0,\infty);\mathbb{R}) \colon w \geq 0,\ w' \text{ exists a.e.}, \\ & \|w\| \leq 1 \text{ and } w(0) \leq A w(t)\ \forall t \in [0,\infty)\},\end{aligned}$$

and

$$\|w\| := \left(\frac{R^{\alpha_0+1}}{(\theta+1)^p} \int_0^\infty |w(t)|^p e^{-\frac{\alpha_0+1}{\theta+1}t} \mathrm{d}t + \int_0^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

~令 $w \in \mathcal{K}_A$ 满足 $\|w\| \leq 1$。定义

$$C_1 = (\theta+1)\left[\frac{(\alpha_0+1)A^p}{R^{\alpha_0+1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}$$

以及由以下方式给出的 $\widetilde{w}\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\widetilde{w}(t) = \begin{cases} \dfrac{w(0)t}{C_1} & \text{if } 0 \leq t \leq C_1 \\ w(t - C_1) & \text{if } t \geq C_1. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\widetilde{w}'(t)|^p \mathrm{d}t &= \frac{|w(0)|^p}{C_1^{p-1}} + \int_0^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha_0+1}{(\theta+1)C_1^{p-1}} \int_0^\infty |w(0)|^p e^{-\frac{\alpha_0+1}{\theta+1}t} \mathrm{d}t + \int_0^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{(\alpha_0+1)A^p}{(\theta+1)C_1^{p-1}} \int_0^\infty |w(t)|^p e^{-\frac{\alpha_0+1}{\theta+1}t} \mathrm{d}t + \int_0^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

定理 3.1 推出

$$\int_0^\infty e^{|\widetilde{w}(t)|^{p'}-t}\mathrm{d}t \le C_2,$$

对于某个仅依赖于 p 的常数 $C_2>0$。因此,

$$C_2 \ge \int_{C_1}^\infty e^{|w(t-C_1)|^{p'}-t}\mathrm{d}t = e^{-C_1}\int_0^\infty e^{|w(t)|^{p'}-t}\mathrm{d}t.$$

□

这里我们证明，由 (8) 给出的指数函数 $\Psi(t)$ 是最优的，即它是加权 Sobolev 空间 $X^{k,}{}_{0}{}^{p}_{R}$, 嵌入加权 Orlicz 空间时所允许的最大增长。更准确地说，我们证明定理 1.4。

引理 3.1. 设对所有 $i=0,\dots,k-1,\quad \alpha_k-kp+1=0$ 和 $\alpha_i-ip+1>0$ 均成立。则存在一个有界序列 $(u_n)\subset X^{k,}{}_{0}{}^{p}_{R}$, 满足

$$\int_0^R e^{|u_n|^{p'}}r^\theta \mathrm{d}r \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

证明. 固定 $\mu>\mu_0$，命题 3.4 的证明保证存在一个序列 (v_n)，它属于 $X^{k,}{}_{0}{}^{p}_{R},$，且满足 $\|v_n\|_{X^{k,}{}_{R}{}^{p}}=1$ 以及

$$\int_0^R e^{\mu|v_n|^{\frac{p}{p-1}}}r^\theta \mathrm{d}r \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

定义 $u_n:=\mu^{\frac{p-1}{p}}v_n$，可得 (u_n) 在 $X^{k,}{}_{R}{}^{p}$ 中有界，且

$$\int_0^R e^{|u_n|^{\frac{p}{p-1}}}r^\theta \mathrm{d}r \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

□

引理 3.2. 假设两个 N-函数满足 $\Phi\prec\Psi$。若空间 $X^{k,}{}_{0}{}^{p}_{R,}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)$ 连续嵌入于 $L_\Psi(\theta)$, 则对任意 $\nu>0$，我们有

$$\sup_{\|u\|_{X^{k,p}_{0,R}}\le\nu}\int_0^R \Phi(u)r^\theta \mathrm{d}r<\infty.$$

证明. 存在一个常数 $C_0>0$，使得

$$\|u\|_{L_\Psi(\theta)}\le C_0\|u\|_{X^{k,p}_{0,R}},\quad \forall u\in X^{k,p}_{0,R}. \tag{40}$$

由 $\Phi\prec\Psi$ 可得满足以下条件的 T_ν

$$\Psi(t)\le\Psi\left(\frac{t}{C_0\nu}\right),\quad \forall t\ge T_\nu.$$

设 $u\in X^{k,}{}_{0}{}^{p}_{R},$，使得 $\|u\|_{X^{k,0}{}^{p}{}_{,R}}\le\nu$。利用（40），我们得到

$$\int_0^R \Psi\left(\frac{u}{C_0\nu}\right)r^\theta \mathrm{d}r\le 1.$$

因此,

$$\int_0^R \Phi(u) r^\theta \mathrm{d}r = \int_{|u|\geq T_\nu} \Phi(u) r^\theta \mathrm{d}r + \int_{|u|<T_\nu} \Phi(u) r^\theta \mathrm{d}r \leq 1 + \frac{\Phi(T_\nu) R^{\theta+1}}{\theta+1}.$$

□

定理 1.7 的证明。由引理 3.1 和引理 3.2 可直接得出证明。 □

4. Adams-type inequality for Weighted Sobolev spaces with Navier Boundary condition

4.1. 通常范数与 k 阶梯度范数的等价性。本小节的任务是证明以下命题。

命题 4.1。假设 $\alpha_k-(k-1)p+1>0$, $\gamma>(\alpha_k-p+1)/p$且 $\alpha_i\geq\alpha_k-(k-i)p$对所有 $i=0,\ldots,k$ 均成立。$\|\nabla_\gamma^k\cdot\|_{L^p_{\alpha_k}}$ 是$\|\cdot\|_{X^{k,R}{}^p}$ 在 $X^{k,}{}_{\mathcal{N}}{}^p{}_{,\gamma,R}(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$ 中的一个等价范数。

下一个命题是命题 4.1 的 $k=2$ 情形，但使用广义径向椭圆算子 L 代替 Δ_γ。

命题 4.2. 设加权索博列夫空间 $X^{2,}{}_R{}^p(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\cap X^{1,}{}_0{}^p_R(\alpha_0,\alpha_1)$ 满足$1\leq p<\infty$、$\alpha_0\geq\alpha_2-2p$ 和 $\alpha_1\geq\alpha_2-p$。设 $Lu=-r^{-\gamma}(r^\alpha u')'$ 是一个算子，满足α、$\gamma>0$ 以及 $\alpha>(\alpha_2-p+1)/p$。假设 $\alpha_2-p+1\geq0$。令 $\eta=\alpha_2+p(\gamma-\alpha)$。那么范数

$$\|u\|_L := \left(\int_0^R |Lu|^p r^\eta \mathrm{d}r\right)^{1/p}$$

等价于 $X^{2,}{}_R{}^p(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\cap X^{1,}{}_0{}^p_R(\alpha_0,\alpha_1)$ 中的通常范数$\|u\|_{X^{2,R}{}^p}$。

下面的引理等价于经典索博列夫空间中的 L^p 正则性。在某些条件下，我们证明，对于给定的 $Lu=v\in L^p_\eta$，若 $u(R)=u'(0)=0$，则有$u\in X^{2,}{}_R{}^p\cap X^{1,0}{}^p_R$。

引理 4.1. 设 $\alpha,\gamma,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $v\in L^p_\eta(0,R)$，且 $1\leq p<\infty$和 $\eta=\alpha_2+p(\gamma-\alpha)$。定义

$$u(r)=\int_r^R t^{-\alpha}\int_0^t v(s)s^\gamma \mathrm{d}s\mathrm{d}t \quad \text{a.e. } r\in(0,R). \tag{41}$$

若 $\alpha>(\alpha_2-p+1)/p$，则 $u\in X^{2,}{}_R{}^p(\alpha_2-2p,\alpha_2-p,\alpha_2)$，且$\|u\|_{X^{2,}{}_R{}^p}\leq C\|v\|_{L^p_\eta}$，其中$C=C(\alpha,\gamma,\alpha_2,p,R)>0$。

证明。我们可以对 u 求两次弱导数，这些导数为

$$u'(r)=-r^{-\alpha}\int_0^r v(s)s^\gamma \mathrm{d}s \tag{42}$$

and

$$u''(r)=\alpha r^{-(\alpha+1)}\int_0^r v(s)s^\gamma \mathrm{d}s - v(r)r^{\gamma-\alpha}. \tag{43}$$

注意， $u \in AC^1_{\text{loc}}((0,R])$。由于 $u(R) = 0$，命题 2.1 保证了 $\|u\|_{L^p_{\alpha_2-2p}} \leq C\|u'\|_{L^p_{\alpha_2}}$。接下来我们需要证明 $u' \in L^p_{\alpha_2-p}$ 和 $u'' \in L^p_{\alpha_2}$。

首先，我们证明 $u'' \in L^p_{\alpha_2}$。定义 $w(r) = \int_0^r v(s)s^\gamma \mathrm{d}s$。由于 $w(0) = 0$ 且$\alpha > (\alpha_2 - p + 1)/p$，由命题 2.1 可得

$$\int_0^R \left| r^{-(\alpha+1)} \int_0^r v(s)s^\gamma \mathrm{d}s \right|^p r^{\alpha_2}\mathrm{d}r = \int_0^R |w(r)|^p r^{\alpha_2-p(\alpha+1)}\mathrm{d}r \leq C\int_0^R |w'(r)|^p r^{\alpha_2-p\alpha}\mathrm{d}r = C\|v\|^p_{L^p_\eta}.$$

因此，由 (43) 可得，

$$\int_0^R |u''(r)|^p r^{\alpha_2}\mathrm{d}r \leq C\int_0^R \left| r^{-(\alpha+1)} \int_0^r v(s)s^\gamma \mathrm{d}s \right|^p r^{\alpha_2}\mathrm{d}r + C\int_0^R |v(s)|^p r^{\alpha_2+p(\gamma-\alpha)}\mathrm{d}r \leq C\|v\|^p_{L^p_\eta}.$$

现在我们只需验证 $u' \in L^p_{\alpha_1}$。像之前一样应用命题 2.1，可得（由 (42)）

$$\int_0^R |u'(r)|^p r^{\alpha_2-p}\mathrm{d}r = \int_0^r |w(r)|^p r^{\alpha_2-p(\alpha+1)}\mathrm{d}r \leq C\int_0^R |w'(r)|^p r^{\alpha_2-p\alpha}\mathrm{d}r = C\|v\|^p_{L^p_\eta}.$$

□

命题 4.2 的证明。首先，我们需要验证 $\|\cdot\|_L$ 是一个范数。除了 $\|u\|_L = 0 \Rightarrow u = 0$之外，范数的其他性质都显而易见。设 u 满足 $\|u\|_L = 0$。则 $(r^\alpha u')' = 0$。由于 $u' \in X^{1,p}_{,R}(\alpha_1, \alpha_2)$且 $\alpha_2 - p + 1 \geq 0$，由径向引理（命题 2.3、2.4 和 2.5）并取 $\alpha > (\alpha_2 - p + 1)/p$，我们得到 $\lim_{r\to 0} r^\alpha u'(r) = 0$。因此 $u' = 0$。利用 $u \in X^{1,p}_{0,R}$，我们得出 $u = 0$。因此，$\|\cdot\|_L$ 是一个范数。

现在证明 $\|u\|_L \leq C\|u\|_{X^{2,R}}$。注意

$$\|u\|^p_L = \int_0^R |\alpha u' + ru''|^p r^{\alpha_2-p}\mathrm{d}t \leq 2^p\alpha^p \int_0^R |u'|^p r^{\alpha_2-p}\mathrm{d}r + 2^p\int_0^R |u''|^p r^{\alpha_2}\mathrm{d}r. \tag{44}$$

由于 $u' \in X^{1,p}_{,R}(\alpha_1, \alpha_2)$ 且 $\alpha_2 - p + 1 \geq 0$，定理 1.1 保证存在 $\|u'\|_{L^p_{\alpha_2-p}} \leq C\|u'\|_{X^{1,R}}$，其中 $C > 0$。因此，(44) 意味着 $\|u\|_L \leq C\|u\|_{X^{2,R}}$。

只需证明 $\|u\|_{X^{2,p}_{,R}} \leq C\|u\|_L$。我们的想法是对以下算子使用开映射定理

$$\begin{aligned} L\colon X^{2,p}_R(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \cap X^{1,p}_{0,R}(\alpha_0,\alpha_1) &\longrightarrow L^p_\eta \\ u &\longmapsto Lu. \end{aligned}$$

容易看出，L 是巴拿赫空间之间的线性映射。在整个证明过程中，我们已经证明了 L 是单射且连续的。对于 L的满射性，任取 $v \in L^p_\eta$，由引理 4.1 可得 u，使得 $Lu = v$ 且

$$u \in X^{2,p}_R(\alpha_2 - 2p, \alpha_2 - p, \alpha_2) \subset X^{2,p}_R(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2).$$

由 (41) 得到 $u \in X^{1,\,0}{}_R^{\,p}(\alpha_0,\alpha_1)$。因此，根据开映射定理即可得到所需结论。□

为完成命题 4.1，我们还需要三个引理。最后一个（引理 4.4）是引理 4.1 的推广，适用于除 $L=\Delta_\gamma$ 以外的所有 k。

引理 4.2. 设 $\gamma \in \mathbb{R}$, $j=0,\dots,k$ 和 $X^{k,}{}_R^{\,p}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)$ 为加权索博列夫空间，使得对所有 $i=j,\dots,k$, $\alpha_i-(i-1)p+1\geq 0$。对于每个 $u\in X^{k,}{}_R^{\,p}$，我们有 $\nabla_\gamma^j u \in X^{k-j,}{}_R^{\,p}(\alpha_j,\dots,\alpha_k)$，且

$$\|\nabla_\gamma^j u\|_{X_R^{k-j,p}} \leq C\|u\|_{X_R^{k,p}},$$

其中 $C>0$ 不依赖于 u。

证明. 考虑 $\ell=0,\dots,k-j$。利用关于 j 和 ℓ 的归纳法，我们可以证明

$$\left(\nabla_\gamma^j u\right)^{(\ell)} = \sum_{i=0}^{j+\ell-1} C_{ijl}\frac{u^{(j+\ell-i)}}{r^i}, \tag{45}$$

对某个 $C_{ijl}=C_{ijl}(\gamma)\in\mathbb{R}$ 成立。只需验证

$$\|(\nabla_\gamma^j u)^{(\ell)}\|_{L^p_{\alpha_{j+\ell}}} \leq C\|u\|_{X_R^{k,p}}.$$

利用 (45)、$\alpha_{j+\ell}-(j+\ell-1)p+1\geq 0$ 以及定理 1.1（关于 $u^{(j+\ell-i)}\in X^{i,}{}_R^{\,p}(\alpha_{j+\ell-i},\dots,\alpha_{j+\ell})$），我们得到

$$\|(\nabla_\gamma^j u)^{(\ell)}\|^p_{L^p_{\alpha_{j+\ell}}} \leq C\sum_{i=0}^{j+\ell-1}\int_0^R \left|\frac{u^{(j+\ell-i)}}{r^i}\right|^p r^{\alpha_{j+\ell}}\mathrm{d}r \leq C\sum_{i=0}^{j+\ell-1}\|u^{(j+\ell-i)}\|_{X_R^{i,p}} \leq C\|u\|_{X_R^{j+\ell,p}}.$$

□

引理 4.3. $X^{k,\,\mathcal{N}}{}^{\,p}{}_{,\,\gamma,\,R}(\alpha_0,\dots,\alpha_k)$ 是一个巴拿赫空间，其范数为 $\|\cdot\|_{X^{k,\,R}{}^{\,p}}$。

证明. 设 (u_n) 是 $X^{k,\,\mathcal{N}}{}^{\,p}{}_{,\,\gamma,\,R}$ 中的柯西序列。则对某个 $u\in X^{k,\,R}{}^{\,p}$，有 $u_n\to u\in X^{k,\,R}{}^{\,p}$。由 (45),

$$|\Delta_\gamma^j u(R)| = |\nabla_\gamma^{2j}u_n(R)-\nabla_\gamma^{2j}u(R)| \leq \sum_{i=0}^{2j-1} C_{ij}\frac{|u_n^{(2j-i)}(R)-u^{(2j-i)}(R)|}{R^i},$$

对所有 $0\leq j\leq \lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。利用引理 2.1，我们得出

$$|\Delta_\gamma^j u(R)| \leq \sum_{i=0}^{2j-1}\frac{C_{ij}\widetilde{C}_{ij}\|u_n^{(2j-i)}-u^{(2j-i)}\|_{X_R^{1,p}}}{R^i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

引理 4.4. 设 $v\in X^{k,\,R}{}^{\,p}(\alpha_k-kp,\dots,\alpha_k)$ 且

$$u(r) := \int_r^R t^{-\gamma}\int_0^t v(s)s^\gamma \mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad r\in(0,R),$$

其中 $\gamma>(\alpha_k-kp-p+1)/p$。那么

$$u\in X_R^{k+2,p}(\alpha_k-(k+2)p,\alpha_k-(k+1)p,\alpha_k-kp,\dots,\alpha_k).$$

证明。我们断言

$$\frac{v(r)}{r^{k-i}} \in X_R^{i,p}(\alpha_k - ip, \dots, \alpha_k), \quad \forall i = 0, \dots, k. \tag{46}$$

事实上，(46) 中的 $i = 0$ 情形由 $v \in L^p_{\alpha_k - kp}$ 得出。假设 (46) 对任意$j = 0$、.....、i 均成立。我们的任务是证明

$$\frac{v(r)}{r^{k-i-1}} \in X_R^{i+1,p}(\alpha_k - (i+1)p, \dots, \alpha_k).$$

由于 $v(r)/r^{k-i-1} \in L^p_{\alpha_k-(i+1)p}$，我们只需验证

$$\frac{v'(r)}{r^{k-i-1}} - (k-i-1)\frac{v(r)}{r^{k-i}} = \left(\frac{v(r)}{r^{k-i-1}}\right)' \in X_R^{i,p}(\alpha_k - ip, \dots, \alpha_k).$$

对 $v' \in X^{k-1}{}_{,R}{}^{p}$ 和 $v \in X^{k}{}_{,R}{}^{p}$ 使用归纳假设，即可得出 (46)。

我们来验证

$$r^{-(\gamma+i)} \int_0^r v(s) s^\gamma \mathrm{d}s \in L^p_{\alpha_k-(k-i+1)p}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{47}$$

记 $w(r) = \int_0^r v(s)s^\gamma \mathrm{d}s$。由命题 2.1 及 $\alpha_k - (\gamma + k + 1)p + 1 < 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^R \left| r^{-(\gamma+i)} \int_0^r v(s) s^\gamma \mathrm{d}s \right|^p r^{\alpha_k-(k-i+1)p} \mathrm{d}r &= \int_0^R |w(r)|^p r^{\alpha_k-(\gamma+k+1)p} \mathrm{d}r \\
&\le C \int_0^R |w'(r)|^p r^{\alpha_k-(\gamma+k)p} \mathrm{d}r \\
&= C \int_0^R |v(r)|^p r^{\alpha_k - kp} \mathrm{d}r \\
&= C \|v\|^p_{L^p_{\alpha_k-kp}}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

由引理 4.1，我们已经得到 $u \in X^{2}{}_{,R}{}^{p}(\alpha_k - (k+2)p, \alpha_k - (k+1)p, \alpha_k - kp)$。因此，只需证明

$$u''(r) = \gamma r^{-(\gamma+1)} \int_0^r v(s) s^\gamma \mathrm{d}s - v(r) \in X_R^{k,p}(\alpha_k - kp, \dots, \alpha_k).$$

只需证明

$$r^{-(\gamma+1)} \int_0^r v(s) s^\gamma \mathrm{d}s \in X_R^{k,p}(\alpha_k - kp, \dots, \alpha_k). \tag{48}$$

事实上，对每个 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，令

$$w_i(r) := r^{-(\gamma+i+1)} \int_0^r v(s) s^\gamma \mathrm{d}s.$$

(47) 保证 $w_i \in L^p_{\alpha_k-(k-i)p}$。注意，利用 (46),

$$\begin{aligned} w_0 \in X^{k,p}_R &\Leftrightarrow -(\gamma+1)r^{-(\gamma+i+2)}\int_0^r v(s)s^\gamma \mathrm{d}s + \frac{v(r)}{r} = w_0' \in X^{k-1,p}_R \\ &\Leftrightarrow w_1 \in X^{k-1,p}_R \\ &\Leftrightarrow w_1' \in X^{k-2,p}_R \\ &\vdots \\ &\Leftrightarrow w_k \in L^p_{\alpha_k}. \end{aligned}$$

引理证毕。 □

命题 4.1 的证明。与命题 4.2 的证明一样，我们的任务是证明

$$\begin{aligned} \phi\colon X^{k,p}_{\mathcal{N},\gamma,R} &\longrightarrow L^p_{\alpha_k} \\ u &\longmapsto \nabla^k_\gamma u \end{aligned}$$

是一个同构。注意， ϕ 是线性的，并且根据引理 4.2，它是连续的。由开映射定理和引理 4.3，只需证明 ϕ 是双射。令 $u \in X^{k,\mathcal{N}^p,\gamma,R}$满足 $\phi(u) = \nabla^k_\gamma u = 0$。我们断言

$$r^\gamma \nabla^i_\gamma u \xrightarrow{r\to 0} 0 \quad \forall 1 \le i \le k-1. \tag{49}$$

事实上，由 (45) 可得,

$$\left|r^\gamma \nabla^i_\gamma u\right| \le \sum_{\ell=0}^{i-1} C_{i\ell} r^{\gamma-\ell}|u^{(i-\ell)}|.$$

现在先假设 $\alpha_k-(k-1)p+1>0$。由于 $u^{(i-\ell)} \in X^{k-i+\ell,\mathcal{N}^p,\gamma,R}$，命题 2.3 推出$|u^{(i-\ell)}(r)| \le C\|u\|_{X^{k,\mathcal{N}^p,\gamma,R}} r^{-\frac{\alpha_k-(k-i+\ell)p+1}{p}}$。于是

$$\left|r^\gamma \nabla^i_\gamma u\right| \le C\|u\|_{X^{k,p}_R}\sum_{\ell=0}^{i-1} r^{\gamma-\ell-\frac{\alpha_k-(k-i+\ell)p+1}{p}} \le C\|u\|_{X^{k,p}_R} r^{\gamma-\frac{\alpha_k-(k-i)p+1}{p}}.$$

因此，由 $\gamma > (\alpha_k - p + 1)/p \ge (\alpha_k - (k-i)p+1)/p$ 可得 (49)。对于情形$\alpha_k-(k-1)p+1=0$，采用相同论证，但以命题 2.4 和命题 2.5 替代命题 2.3，即可得出 (49)。

令 j 为满足 $k=2j$ 或 $k=2j+1$的整数。由 $\nabla^k_\gamma u = 0$ 和 $u \in X^{k,\mathcal{N}^p,\gamma,R}$，可得 $\Delta^j_\gamma u = 0$。$u \in X^{k,\mathcal{N}^p,\gamma,R}$ 以及 (49) 保证我们可以应用以下结果

$$\Delta_\gamma v = 0,\ r^\gamma v' \xrightarrow{r\to 0} 0 \text{ and } v(R) = 0 \Rightarrow v = 0$$

在 $\Delta^j_\gamma u = 0$ 上进行 j 次，得到 $u = 0$。由此可知 ϕ 是单射。

现在证明 ϕ 是满射。假设 $k = 2j$。给定 $v \in L^p_{\alpha_k}$，由引理 4.1 可知，存在 $u_1 \in X^{2,R^p}(\alpha_k-2p,\alpha_k-p,\alpha_k) \cap X^{1,0}_{R,}{}^p$使得 $\Delta_\gamma u_1 = v$。再次利用引理 4.1，得到 $u_2 \in X^{2,R^p}(\alpha_k-4p,\alpha_k-3p,\alpha_k-2p) \cap X^{1,0}_{R,}{}^p$满足 $\Delta_\gamma u_2 = u_1$。由

根据引理 4.4 以及 $u_1 \in X^{1,0}_{R}{}^{p}$，我们有 $u_2 \in X^{4,\mathcal{N}}{}^{p}{}_{,\gamma,R}(\alpha_k-4p,\dots,\alpha_k)$ 和 $\Delta_\gamma^2 u_2 = v$。继续这一论证，可得 $u_j \in X^{2j,\mathcal{N}}{}^{p}{}_{,\gamma,R}(\alpha_k-2jp,\dots,\alpha_k)$，使得 $\phi(u_j) = \Delta_\gamma^j u_j = v$。

现在假设 $k = 2j+1$。给定 $v \in L^p_{\alpha_k}$，令

$$\widetilde{u}(r) = -\int_r^R v(s)\mathrm{d}s.$$

由命题 2.1，$\|\widetilde{u}\|_{L^p_{\alpha_k-p}} \le C\|v\|_{L^p_{\alpha_k}}$。于是 $\widetilde{u} \in X^{1,}{}_{0}{}^{p}{}_{R,}(\alpha_k-p,\alpha_k)$。与定理 $k=2j$ 的证明类似，我们得到 $u \in X^{2j+1,}{}_{\mathcal{N}}{}^{p}{}_{R,\gamma,}(\alpha_k-kp,\dots,\alpha_k)$，使得 $\Delta_\gamma^j u = \widetilde{u}$。因此，$\phi(u) = \nabla_\gamma^k u = v$。□

4.2. 二阶导数情形的定理 1.5。由于 $X^{1,}{}_{\mathcal{N}}{}^{p}{}_{,\gamma,R} = X^{1,}{}_{0}{}^{p}{}_{R,}$ 对所有 γ 均成立，我们指出，加权 Sobolev 空间上的 Adams 型不等式在一阶导数情形已由 [9, 定理1.1]解决。下面陈述二阶导数情形下的不等式。

定理 4.1. 设 $p>1$ 和 $\theta > -1$。若 $\alpha_2 - 2p + 1 = 0$ 和 $\gamma > 1$，则

$$\sup_{R\in(0,\infty)} \sup_{\substack{u\in X_R^{2,p}\cap X_{0,R}^{1,p}\\ \|\Delta_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_2}}\le 1}} R^{-(\theta+1)} \int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} r^\theta \mathrm{d}r < \infty, \ \textit{if } \mu \le \mu_0,$$

其中

$$\mu_0 = (\theta+1)(\gamma-1)^{\frac{p}{p-1}}.$$

为了证明上述定理，我们需要考虑 Tarsi 证明的以下引理（参见 [23]第 6 节中的引理 1）。

引理 4.5. 设 $p>1$。那么，对任意 $r>0$，存在一个常数 $C_0 = C_0(p,r)$，使得对区间 $(1,\infty)$ 上满足下列条件的任意正可测函数 $f(s)$，

$$\int_1^\infty f^p s^{2p-1}\mathrm{d}s \le 1$$

then

$$\int_1^\infty e^{rF^q(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}} \le C_0$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 和

$$F(t) = \int_1^t \int_z^\infty f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}z.$$

定理 4.1 的证明. 设 $u \in X^{2,}{}_{R}{}^{p}\cap X^{1,0}_{R}{}^{p}{}_{,}$使得 $\|\Delta_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_2}} \le 1$ 和 $\mu \le \mu_0$。我们可以取 $v \in AC^2_{\mathrm{loc}}(0,R)$ 为下列问题的解

$$\begin{cases} -\Delta_\gamma v = |\Delta_\gamma u|, & \text{in } (0,R)\\ v(R) = 0, \end{cases}$$

由下式给出

$$v(r) = \int_r^R s^{-\gamma}\int_0^s |\Delta_\gamma u| t^\gamma \mathrm{d}t\mathrm{d}s \ge 0.$$

引理 4.1 保证 v 定义良好，且 $v \in X^2,{}_R{}^p(\alpha_2-2p,\alpha_2-p,\alpha_2)$。此外，$v$ 满足 $|u(t)| \le v(t)$，对所有 $t \in (0,R)$ 均成立。事实上，由命题 2.3 关于 $u' \in X^1,{}_R{}^p$ 可得$r^\gamma u'(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$。因此，

$$v(r)=\int_r^R s^{-\gamma}\int_0^s |(t^\gamma u')'|\mathrm{d}t\mathrm{d}s \ge \left|\int_r^R s^{-\gamma}\int_0^s (t^\gamma u')'\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right| \ge |u(r)|.$$

现在，我们考虑以下变量替换:

$$w(t)=v(Rt^{\frac{1}{1-\gamma}}),\ \text{for } t\in[1,\infty).$$

由此可得

$$w'(t)=\frac{1}{1-\gamma}Rt^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}v'(Rt^{\frac{1}{1-\gamma}}),$$

and

$$w''(t)=\left(\frac{R}{1-\gamma}\right)^2 t^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}}\Delta_\gamma v(Rt^{\frac{1}{1-\gamma}}).$$

利用 $\alpha_2-2p+1=0$，我们有

$$\int_0^R(-\Delta_\gamma v)^p r^{\alpha_2}\mathrm{d}r=(\gamma-1)^{2p-1}\int_1^\infty(-w''(t))^p t^{2p-1}\mathrm{d}t.$$

现在，由于$\|\Delta_\gamma v\|_{L^p_{\alpha_2}}=\|\Delta_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_2}}\le 1$，我们得到

$$\int_1^\infty(-(\gamma-1)^{\frac{2p-1}{p}}w''(t))^p t^{2p-1}\mathrm{d}t\le 1. \tag{50}$$

根据 $v'\in X^1$ 上的命题 2.3，${}_R{}^p(\alpha_2-p,\alpha_2)$，

$$w'(\infty)=\lim_{t\to\infty}w'(t)=\frac{R^{1-\gamma}}{1-\gamma}\lim_{r\to 0}r^\gamma v'(r)=0.$$

此外，由 $|u(t)|\le v(t)$ 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}}r^\theta\mathrm{d}r &\le \int_0^R e^{\mu_0|u(r)|^{\frac{p}{p-1}}}r^\theta\mathrm{d}r\\
&\le \int_0^R e^{\mu_0 v(r)^{\frac{p}{p-1}}}r^\theta\mathrm{d}r\\
&=\frac{R^{\theta+1}}{\gamma-1}\int_1^\infty e^{\mu_0 w(t)^{\frac{p}{p-1}}}t^{\frac{\theta+\gamma}{1-\gamma}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{R^{\theta+1}}{\gamma-1}\int_1^\infty \exp\left(\mu_0\frac{(\gamma-1)^{-\frac{2p-1}{p-1}}}{(\gamma-1)^{-\frac{2p-1}{p-1}}}w(t)^{\frac{p}{p-1}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{\theta+\gamma}{\gamma-1}}}\\
&=\frac{R^{\theta+1}}{\gamma-1}\int_1^\infty \exp\left[\frac{\theta+1}{\gamma-1}\left((\gamma-1)^{\frac{2p-1}{p}}w(t)\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{\theta+\gamma}{\gamma-1}}},
\end{aligned} \tag{51}$$

对任意 $\mu\le\mu_0$。由于 $w(1)=0$ 且 $w'(\infty)=0$，我们有 $w(t)=\int_1^t\int_z^\infty -w''(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}z$。因此，由 (50) 和 (51) 可应用引理 4.5 完成证明。□

4.3. 临界情形下 Adams 型不等式的证明。本小节中，我们着重讨论定理1.5的临界情形，这等价于下面的定理。

定理 4.2。设 $X^{k,\mathcal{N}^p,\gamma,R}(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$，其中 $\alpha_k - kp + 1 = 0$。假设 $p > 1$、$\theta > -1$ 和$\gamma > k-1$ 对于 k 为偶数，并且当 k 为奇数时 $\gamma > k-2$ 。则

$$\sup_{R\in(0,\infty)} \sup_{u\in X^{k,p}_{\mathcal{N},\gamma,R},\|\nabla^k_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_k}}\le 1} R^{-(\theta+1)} \int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} r^\theta \mathrm{d}r < \infty, \quad \forall \mu \le \mu_0.$$

[10] 中的命题 3.1 与我们的下一个引理类似，只是我们假设 $r^\gamma u'(r) \xrightarrow{t\to 0} 0$，而不是 $\Delta_\gamma u(r) \xrightarrow{r\to R} 0$。为完整起见，我们给出证明。

引理 4.6。设 p、$q > 1$ 和 $0 < R < \infty$。考虑满足 $\gamma - 2q + 1 > 0$的 γ。那么，对于任意 $u \in AC^2_{\mathrm{loc}}(0, R)$，若 $\lim_{r\to R} u(r) = \lim_{r\to 0} r^\gamma u'(r) = 0$，则有

$$\left(\int_0^R |u|^p r^{\frac{(\gamma+1)p}{q^*}-1}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}} \le C_{\gamma,q}\left(\int_0^R |\Delta_\gamma u|^p r^{\frac{(\gamma+1)p}{q}-1}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中

$$C_{\gamma,q} = \frac{q^2}{(q-1)(\gamma+1)(\gamma-2q+1)} \ and\ q^* = \frac{(\gamma+1)q}{\gamma-2q+1}.$$

证明。设 $w(t) = u(Rt^{\frac{1}{1-\gamma}})$。则

$$\int_0^R |u|^p r^{\frac{(\gamma+1)p}{q^*}-1}\mathrm{d}r = \frac{R^{\frac{(\gamma+1)p}{q^*}}}{\gamma-1}\int_1^\infty |w|^p t^{-\frac{(\gamma-2q+1)p}{q(\gamma-1)}-1}\mathrm{d}t \tag{52}$$

and

$$\int_0^R |\Delta_\gamma u|^p r^{\frac{(\gamma+1)p}{q}-1}\mathrm{d}r = (\gamma-1)^{2p}\frac{R^{\frac{(\gamma+1)p}{q}-2p}}{\gamma-1}\int_1^\infty |w''(t)|^p t^{p\frac{2q\gamma-\gamma-1}{q(\gamma-1)}-1}\mathrm{d}t. \tag{53}$$

由于 $\lim_{r\to R} u(r) = \lim_{r\to 0} r^\gamma u'(r) = 0$，我们有

$$w(t) = \int_1^t \int_z^\infty -w''(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}z.$$

Set

$$a = \frac{p-1}{p}\frac{2q\gamma-\gamma-1}{q(\gamma-1)}.$$

注意,

$$\begin{aligned} w(t)^p &= \left(\int_1^t\int_z^\infty -w''(s)\frac{s^a}{s^a}\mathrm{d}s\mathrm{d}z\right)^p \\ &\le \left(\left[\int_1^t\int_z^\infty |w''(s)|^p s^{ap}\mathrm{d}s\mathrm{d}z\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_1^t\int_z^\infty s^{-ap'}\mathrm{d}s\mathrm{d}z\right]^{\frac{p-1}{p}}\right)^p \\ &\le \left[\int_1^t\int_z^\infty |w''(s)|^p s^{ap}\mathrm{d}s\mathrm{d}z\right]\left[(\gamma-1)^2 C_{\gamma,q}\left(t^{\frac{\gamma-2q+1}{q(\gamma-1)}-1}-1\right)\right]^{p-1}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty |w|^p t^{-\frac{(\gamma-2q+1)p}{q(\gamma-1)}-1}\mathrm{d}t \\
&\quad\le \int_1^\infty \left[\int_1^t\int_z^\infty |w''(s)|^p s^{ap}\mathrm{d}s\mathrm{d}z\right]\left[(\gamma-1)^2C_{\gamma,q}\left(t^{\frac{\gamma-2q+1}{q(\gamma-1)}}-1\right)\right]^{p-1} t^{-\frac{(\gamma-2q+1)p}{q(\gamma-1)}-1}\mathrm{d}t \\
&\quad= \left((\gamma-1)^2C_{\gamma,q}\right)^{p-1}\int_1^\infty |w''(s)|^p s^{ap}\int_1^s\int_z^\infty t^{-\frac{\gamma-2q+1}{q(\gamma-1)}-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&\quad\le \frac{[(\gamma-1)^2C_{\gamma,q}]^{p-1}}{\frac{\gamma-2q+1}{q(\gamma-1)}\left(-\frac{\gamma-2q+1}{q(\gamma-1)}+1\right)}\int_1^\infty |w''(s)|^p\left(s^{-\frac{\gamma-2q+1}{q(\gamma-1)}+1}-1\right)s^{(1-p)\frac{\gamma+1-2q\gamma}{q(\gamma-1)}}\mathrm{d}s \\
&\quad\le \left[(\gamma-1)^2C_{\gamma,q}\right]^p\int_1^\infty |w''(s)|^p s^{p\frac{2q\gamma-\gamma-1}{q(\gamma-1)}-1}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

利用 (52) 和 (53)，我们得证。 □

引理 4.7. 假设 $u\in AC^1_{\mathrm{loc}}(0,R)$，且 $\lim_{r\to R}u(r)=0$。若 $\alpha-p+1>0$，则

$$\left(\int_0^R |u|^p r^{\alpha-p}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{\alpha-p+1}\left(\int_0^R |u'|^p r^\alpha\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明. 根据 [21,定理 6.2], ，只需验证

$$\frac{p}{\alpha-p+1}=\frac{p}{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}\sup_{0<r<R}\|r^{\frac{\alpha-p}{p}}\|_{L^p(0,r)}\|r^{-\frac{\alpha}{p}}\|_{L^{p'}(r,R)}.$$

证明如下，因为

$$\|r^{\frac{\alpha-p}{p}}\|_{L^p(0,r)}\|r^{-\frac{\alpha}{p}}\|_{L^{p'}(r,R)}=\frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}{\alpha-p+1}\left(1-R^{-\frac{\alpha-p+1}{p-1}}r^{(\alpha-p+1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

□

引理 4.8. 设 $p>1$、γ、$\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $j\ge 2$ 为整数，使得 $\gamma>(\alpha-p+1)/p$ 且 $\alpha>2(j-1)p-1$。假设 $u\in AC^{2j-1}_{\text{局部}}(0,R)$，且 $\lim_{r\to R}\Delta_\gamma^i u(r)=\lim_{r\to 0}r^\gamma(\Delta_\gamma^i u)'(r)=0$ 对所有 $i=1,\dots,j-1$ 均成立。则

$$\|\Delta_\gamma u\|_{L^p_{\alpha-2(j-1)p}}\le\left(\prod_{i=1}^{j-1}C_i\right)\|\Delta_\gamma^j u\|_{L^p_\alpha},$$

其中

$$C_i=\frac{p^2}{[(\gamma+1)p-(\alpha-2(i-1)p+1)]\,(\alpha-2ip+1)},\quad \forall i=1,\dots,j-1.$$

证明。令 $\eta_0:=\alpha$。我们断言

$$\|\Delta_\gamma^{j-i}u\|_{L^p_{\eta_i}}\le\widetilde{C}_i\|\Delta_\gamma^{j-i+1}u\|_{L^p_{\eta_{i-1}}}\quad\forall i=1,\dots,j-1, \tag{54}$$

其中

$$q_i=\frac{(\gamma+1)p}{\eta_{i-1}+1},\ \widetilde{C}_i=\frac{q_i^2}{(q_i-1)(\gamma+1)(\gamma-2q_i+1)}\text{ and }\eta_i=\frac{p(\gamma-2q_i+1)}{q_i}-1.$$

在证明（54）之前，我们先来检验

$$\eta_i = \alpha - 2ip, \quad \forall i = 0, \dots, j-1. \tag{55}$$

对于 $i = 0$，(55) 是显然的。假设 (55) 对某些 $i = 0$、.....、$j-2$ 成立。那么

$$\begin{aligned}\eta_{i+1} + 1 &= \frac{p(\gamma - 2q_{i+1} + 1)}{q_{i+1}} = \frac{p\left[(\gamma+1)(\eta_i+1) - 2q_{i+1}(\eta_i+1)\right]}{q_{i+1}(\eta_i+1)} \\ &= \frac{p\left[(\gamma+1)(\alpha - 2ip + 1) - 2(\gamma+1)p\right]}{p(\gamma+1)} = \alpha - 2(i+1)p + 1.\end{aligned}$$

因此 (55) 得证。

由于 $\gamma > (\alpha - p + 1)/p$ 且 $\alpha > 2(j-1)p - 1$，我们对所有 $i = 1$、.....、$j-1$ 得到 $q_i > 1$、$\eta_i + 1 > 0$ 和 $\gamma - 2q_i + 1 > 0$。于是，我们可以使用引理 4.6 得到 (54)。因此，应用 (54)，当 $\widetilde{C}_i = C_i$ 时，引理得证。根据 (55),

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_i &= \frac{(\eta_{i-1}+1)^2 q_i^2}{\left[q_i(\eta_{i-1}+1) - \eta_{i-1} - 1\right](\gamma+1)\left[(\gamma+1)(\eta_{i-1}+1) - 2q_i(\eta_{i-1}+1)\right]} \\ &= \frac{(\gamma+1)^2 p^2}{\left[(\gamma+1)p - (\alpha - 2(i-1)p + 1)\right](\gamma+1)^2\left[\alpha - 2(i-1)p + 1 - 2p\right]} \\ &= C_i.\end{aligned}$$

□

定理 4.2 的证明。考虑 $u \in X^{k,\,\aleph^{p},\,\gamma,\,R}$，其中 $\|\nabla_\gamma^k u\|_{L^p_{\alpha_k}} \le 1$。我们的证明分为两种情形：

情形 $k = 2j$：我们可以假设 $j \ge 2$，因为情形 $k = 2$ 已在定理 4.1 中解决。由于 $\gamma > k-1$、$\alpha_k - kp + 1 = 0$、$u \in X^{k,\,\aleph^{p},\,\gamma,\,R}$，并且对所有 $i = 1$，.....，$k-1$，$r^\gamma \nabla_\gamma^i u(r) \xrightarrow{r\to 0} 0$（见方程 (49)），引理 4.8 保证

$$\|\Delta_\gamma u\|_{L^p_{2p-1}} \le \left(\prod_{i=1}^{j-1} C_i\right) \|\Delta_\gamma^j u\|_{L^p_{\alpha_k}}, \tag{56}$$

with

$$C_i = \frac{1}{2^2\left(\frac{\gamma+1}{2} - j + i - 1\right)(j-i)}, \quad \forall i = 1, \dots, j-1.$$

定义 $v = u/\prod_{i=1}^{j-1} C_i$。那么，根据 (56),

$$\|\Delta_\gamma v\|_{L^p_{2p-1}} = \frac{\|\Delta_\gamma u\|_{L^p_{2p-1}}}{\prod_{i=1}^{j-1} C_i} \le \|\Delta_\gamma^j u\|_{L^p_{\alpha_k}} = \|\nabla_\gamma^k u\|_{L^p_{\alpha_k}} \le 1.$$

利用定理 4.1，我们得到 $C = C(\gamma, \theta, p) > 0$，使得

$$C \ge R^{-(\theta+1)} \int_0^R e^{(\theta+1)(\gamma-1)^{p'}|v|^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r.$$

因此，

$$R^{-(\theta+1)} \int_0^R \exp\left[(\theta+1)\left(\frac{\gamma-1}{\prod_{i=1}^{j-1} C_i}\right)^{p'} |u|^{p'}\right] r^\theta \mathrm{d}r \le C.$$

如果我们证明，则可得情形 $k=2j$。

$$(\gamma-1)\prod_{i=1}^{j-1}C_i^{-1}=2^{k-1}\frac{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+1-k}{2})}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}(\gamma-1)\prod_{i=1}^{j-1}C_i^{-1}&=(\gamma-1)\prod_{i=1}^{j-1}2^2\left(\frac{\gamma+1}{2}-j+i-1\right)(j-i)\\&=(\gamma-1)2^{k-2}(j-1)!\left(\frac{\gamma+1}{2}-j\right)\dots\left(\frac{\gamma+1}{2}-2\right)\\&=\frac{\gamma-1}{2}2^{k-1}\Gamma(j)\frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2}-1)}{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2}-j)}\\&=2^{k-1}\frac{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+1-k}{2})}.\end{aligned}$$

情形 $k=2j+1$: 现在暂且假设 $k>3$。由于 $\gamma>k-2$, $\alpha_k-kp+1=0$, $u\in X^{k,p}_{\mathbb{N},\gamma,R}$ 且 $r^\gamma\nabla^i_\gamma u(r)\xrightarrow{r\to 0}0$ 对所有 $i=1,\dots,k-2$ 均成立（在 $u\in X^{k-1,p}_{R}(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-2},\alpha_k-p)$ 上应用方程 (49)），引理 4.8 保证

$$\|\Delta_\gamma u\|_{L^p_{2p-1}}\le\left(\prod_{i=1}^{j-1}C_i\right)\|\Delta^j_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_k-p}},\tag{57}$$

其中

$$C_i=\frac{1}{2^2\left(\frac{\gamma+1}{2}-j+i-1\right)(j-i)},\quad\forall i=1,\dots j-1.$$

定义 $v=u/\frac{p}{\alpha_k-p+1}\prod_{i=1}^{j-1}C_i$（当 $k>3$ 时）以及 $v=u/\frac{p}{\alpha_k-p+1}$（当 $k=3$ 时）。于是，由 (57) 和引理 4.7,

$$\|\Delta_\gamma v\|_{L^p_{2p-1}}\le\frac{\|\Delta^j_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_k-p}}}{\frac{p}{\alpha_k-p+1}}\le\|(\Delta^j_\gamma u)'\|_{L^p_{\alpha_k}}=\|\nabla^k_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_k}}\le 1.$$

利用定理 4.1，我们有 $C=C(\gamma,\theta,p)>0$，使得

$$C\ge R^{-(\theta+1)}\int_0^R e^{(\theta+1)(\gamma-1)^{p'}|v|^{p'}}r^\theta\mathrm{d}r.$$

那么（为简便起见，记 $\prod_{i=1}^{j-1}C_i=1$，若 $k=3$），

$$R^{-(\theta+1)}\int_0^R\exp\left[(\theta+1)\left(\frac{\gamma-1}{\frac{p}{\alpha_k-p+1}\prod_{i=1}^{j-1}C_i}\right)^{p'}|u|^{p'}\right]r^\theta\mathrm{d}r\le C.$$

如果我们证明，就能得到 $k=2j+1$ 情形。

$$(\gamma-1)\frac{\alpha_k-p+1}{p}\prod_{i=1}^{j-1}C_i^{-1}=2^{k-1}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+2-k}{2})}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}(\gamma-1)\frac{\alpha_k-p+1}{p}\prod_{i=1}^{j-1}C_i^{-1} &= (\gamma-1)2j\prod_{i=1}^{j-1}2^2\left(\frac{\gamma+1}{2}-j+i-1\right)(j-i)\\ &= \frac{\gamma-1}{2}2^{2j}j(j-1)!\left(\frac{\gamma+1}{2}-j\right)\cdots\left(\frac{\gamma+1}{2}-2\right)\\ &= \frac{\gamma-1}{2}2^{k-1}\Gamma(j+1)\frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2}-1)}{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2}-j)}\\ &= 2^{k-1}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+2-k}{2})}.\end{aligned}$$

□

4.4. 证明超临界情形下上确界无界。由定理 4.2 可知，要完成定理1.5的证明，我们只需证明以下定理。

定理 4.3. 设 $X^{k,}{}_{\mathcal{N}}{}^{p}{}_{,\gamma,R}(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$ 满足 $\alpha_k-kp+1=0$。假设 $p>1$、$\theta>-1$ 和$\gamma>k-1$，当 k 为偶数时成立，若 k 为奇数，则当 $\gamma>k-2$ 时成立。若 $R\in(0,\infty)$ 且 $\mu>\mu_0$，则我们有

$$\sup_{u\in X^{k,p}_{\mathcal{N},\gamma,R},\|\nabla^k_\gamma u\|_{L^p_{\alpha_k}}\le 1}\int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}}r^\theta \mathrm{d}r=\infty.$$

证明。该序列的构造与命题 3.4 证明中所用的论证类似。令 $\phi\in C^\infty[0,1]$，使得

$$\begin{cases}\phi(0)=\phi'(0)=\cdots=\phi^{(k-1)}(0)=0,\ \phi'\ge 0,\\ \phi(1)=\phi'(1)=1,\ \phi''(1)=\cdots\phi^{(k-1)}(1)=0.\end{cases}$$

考虑 $0<\varepsilon<1/2$ 和

$$H(t)=\begin{cases}\varepsilon\phi\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right), & \text{if } 0<t\le\varepsilon\\ t, & \text{if } \varepsilon<t\le 1-\varepsilon,\\ 1-\varepsilon\phi\left(\dfrac{1-t}{\varepsilon}\right), & \text{if } 1-\varepsilon<t\le 1,\\ 1, & \text{if } t>1.\end{cases}$$

令 $m\in\mathbb{N}$ 及由下式给出的序列 $(\psi_{m,\ \varepsilon})_m$

$$\psi_{m,\varepsilon}(r)=H\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right),\quad r>0.$$

它是 不难看出，$\psi_{m,\varepsilon}\in X^{k,}{}_{0}{}^{p}{}_{,R}\subset X^{k,}{}_{\mathcal{N}}{}^{p}{}_{R,\circ}$ 对 $n\in\mathbb{N}$ 归纳可得

$$\Delta^n_\gamma\psi_{m,\varepsilon}(r)=\frac{1}{r^{2n}}\sum_{i=1}^{2n}\frac{c_{in}}{(\log m)^i}H^{(i)}\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right),\tag{58}$$

其中

$$\begin{cases} c_{11} = -(\gamma-1),\ c_{21} = -1; \\ c_{1n+1} = 2n\,(\gamma - 2n - 1)\,c_{1n}; \\ c_{2n+1} = -2n(2n+1)c_{2n} - (4n+1)c_{1n} + 2n\gamma c_{2n} + \gamma c_{1n}; \\ c_{2n+1n+1} = -(4n+1)c_{2nn} - c_{2n-1n} + \gamma c_{2nn} \\ c_{2n+2n+1} = -c_{2nn}. \end{cases}$$

并且，对于每个 $i = 3$、.....、$2n$,

$$c_{in+1} = -2n(2n+1)c_{in} - (4n+1)c_{i-1n} - c_{i-2n} + 2n\gamma c_{in} + \gamma c_{i-1n}.$$

由 $c_{11} = -(\gamma-1)$ 和 $c_{1n+1} = 2n(\gamma - 2n - 1)c_{1n}$ 可得

$$\begin{aligned} c_{1n} &= -(\gamma-1)2^{n-1}(n-1)!\prod_{i=1}^{n-1}(\gamma - 2i - 1) \\ &= -(\gamma-1)2^{2n-2}(n-1)!\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\gamma-1}{2} - i\right) \\ &= -\frac{\gamma-1}{2}2^{2n-1}(n-1)!\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2} - (n-1)\right)} \\ &= -2^{2n-1}\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1-2n}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{59}$$

情形 $k = 2j$: 由 (58),

$$\Delta_\gamma^j \psi_{m,\varepsilon}(r) = \frac{c_{1j}}{r^{2j}\log m}H'\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right) + \frac{O\left((\log m)^{-2}\right)}{r^{2j}}.$$

Then

$$\begin{aligned} \|\nabla_\gamma^k \psi_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_k}}^p &= \left|\frac{c_{1j}}{\log m}\right|^p \int_{\frac{R}{m}}^{R}\left|H'\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right) + O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p r^{\alpha_k - kp}\mathrm{d}r \\ &\le \left|\frac{c_{1j}}{\log m}\right|^p \left[\int_{\frac{R}{m}}^{Rm^{\varepsilon-1}} \left|\|\phi'\|_\infty + O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p r^{-1}\mathrm{d}r\right. \\ &\quad \left. + \int_{Rm^{\varepsilon-1}}^{Rm^{-\varepsilon}} r^{-1}\mathrm{d}r + \int_{Rm^{-\varepsilon}}^{R}\left|\|\phi'\|_\infty + O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p r^{-1}\right] \\ &\le |c_{1j}|^p (\log m)^{1-p}\left[1 + 2\varepsilon\left|\|\phi'\|_\infty + O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p\right]. \end{aligned} \tag{60}$$

Set

$$u_{m,\varepsilon}(r) = \frac{\psi_{m,\varepsilon}(r)}{\|\nabla_\gamma^k \psi_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_k}}}.$$

由 (59) 得到 $\mu_0=(\theta+1)|c_{1j}|^{\frac{p}{p-1}}$。给定 $\mu>\mu_0$，(60) 保证

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{\mu u_{m,\varepsilon}^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r &\geq \int_0^{\frac{R}{m}} e^{\mu\|\nabla_\gamma^k\psi_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_k}}^{-p'}} r^\theta \mathrm{d}r \\ &\geq e^{\frac{\mu\log m}{|c_{1j}|^{p'}[1+2\varepsilon\|\phi'\|_\infty+O\left((\log m)^{-1}\right)]^{1/(p-1)}}-(\theta+1)\log m}\frac{R^{\theta+1}}{\theta+1} \\ &= \frac{R^{\theta+1}}{\theta+1}e^{(\theta+1)\log m\left(\frac{\mu}{\mu_0}\frac{1}{[1+2\varepsilon\|\phi'\|_\infty+O\left((\log m)^{-1}\right)]^{1/(p-1)}}-1\right)}.\end{aligned}$$

因此，取足够小的 $\varepsilon>0$，可知当 $m\to\infty$ 时，右侧项趋于无穷大。

情形 $k=2j+1$：对 (58) 求导，得到

$$\nabla_\gamma^k\psi_{m,\varepsilon}(r)=-\frac{2jc_{1j}}{r^{2j+1}\log m}H'\left(\frac{\log\frac{R}{r}}{\log m}\right)+\frac{O\left((\log m)^{-2}\right)}{r^{2j+1}}$$

仿照前一种情形继续推导，

$$\|\nabla_\gamma^k\psi_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_k}}^p\leq|2jc_{1j}|^p(\log m)^{1-p}\left[1+2\varepsilon\left|\|\psi'\|_\infty+O\left((\log m)^{-1}\right)\right|^p\right]. \tag{61}$$

Set

$$u_{m,\varepsilon}(r)=\frac{\psi_{m,\varepsilon}(r)}{\|\nabla_\gamma^k\psi_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_k}}}.$$

由 (59) 得到 $\mu_0=(\theta+1)|2jc_{1j}|^{\frac{p}{p-1}}$。给定 $\mu>\mu_0$，(61) 保证

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{\mu u_{m,\varepsilon}^{p'}} r^\theta \mathrm{d}r &\geq \int_0^{\frac{R}{m}} e^{\mu\|\nabla_\gamma^k\psi_{m,\varepsilon}\|_{L^p_{\alpha_k}}^{-p'}} r^\theta \mathrm{d}r \\ &\geq e^{\frac{\mu\log m}{|2jc_{1j}|^{p'}[1+2\varepsilon\|\phi'\|_\infty+O\left((\log m)^{-1}\right)]^{1/(p-1)}}-(\theta+1)\log m}\frac{R^{\theta+1}}{\theta+1} \\ &= \frac{R^{\theta+1}}{\theta+1}e^{(\theta+1)\log m\left(\frac{\mu}{\mu_0}\frac{1}{[1+2\varepsilon\|\phi'\|_\infty+O\left((\log m)^{-1}\right)]^{1/(p-1)}}-1\right)}.\end{aligned}$$

因此，取足够小的 $\varepsilon>0$，可知当 $m\to\infty$ 时，右侧项趋于无穷大。□

5. Applications in a PDE

5.1. Sobolev 情形的应用。定义 α-广义径向拉普拉斯算子$\Delta_\alpha u:=-r^{-\alpha}(r^\alpha u')'$，其中 $\alpha>3$。考虑以下问题

$$\begin{cases}\Delta_\alpha^2 u=r^{\theta-\alpha}f(r,u) & \text{in } (0,R),\\ u=\Delta_\alpha u=0 & \text{in } R,\\ u'=(\Delta_\alpha u)'=0 & \text{in } 0,\end{cases} \tag{62}$$

其中 $\theta\geq\alpha-4$ 和 $f:\ [0,R]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，且满足

$$|f(r,t)|\leq c_1+c_2|u|^{p-1}, \tag{f_S}$$

对于某些 c_1、$c_2>0$ 和 $1\le p\le 2(\theta+1)/(\alpha-3)$。此外，我们考虑以下空间

$$X_S:=X_R^{2,2}(\alpha-4,\alpha-2,\alpha)\cap X_{0,R}^{1,2}(\alpha-4,\alpha-2).$$

我们称 $u\in X_S$ 是 (62) 的弱解，当且仅当

$$\int_0^R \Delta_\alpha u\Delta_\alpha v r^\alpha \mathrm{d}r=\int_0^R f(r,u)vr^\theta \mathrm{d}r\quad \forall v\in X_S.$$

能量泛函 $J\colon X_S\to\mathbb{R}$ 由下式给出

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^R |\Delta_\alpha u|^2 r^\alpha \mathrm{d}r-\int_0^R F(r,u)r^\theta \mathrm{d}r,$$

其中 $F(r,t)=\int_0^t f(r,s)\mathrm{d}s$。注意，$(f_S)$ 保证

$$|F(r,t)|\le c_1|u|+c_3|u|^p, \tag{F_S}$$

对于某个 $c_3>0$。

推论 5.1。范数

$$\|u\|_{\Delta_\alpha}:=\left(\int_0^R |\Delta_\alpha u|^2 r^\alpha \mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}$$

等价于 $\|\cdot\|_{X^{2,}{}_{R}{}^{2}}$ 在 X_S 中。

证明。由命题 4.2 可直接得出。 □

命题 5.1。设 $1<p<2(\theta+1)/(\alpha-3)$，且对于某个 g，$f(r,u)=g(r)|u|^{p-2}u\colon [0,R]\to\mathbb{R}$ 为连续正函数。令

$$m_{\alpha,\theta}:=\inf_{u\in X_S\setminus\{0\}}\frac{\int_0^R |\Delta_\alpha u|^2 r^\alpha \mathrm{d}r}{\left(\int_0^R g(r)|u|^p r^\theta \mathrm{d}r\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

则 $m_{\alpha,\theta}$ 可由函数 $u_0\in X_S\setminus\{0\}$ 取得。此外，经过适当倍乘后，u_0 是方程 (62) 的一个弱解。

证明。设 (u_n) 是 X_S 中 $m_{\alpha,\theta}$ 的一个极小化序列。必要时，我们可以通过改变 u_n 来假设 $\|u_n\|_{\Delta_\alpha}=1$。由于 X_S 是自反的，取子序列后，对某个 $u_0\in X_S$，有 $u_n\rightharpoonup u_0$。定理 1.1 的紧嵌入蕴含

$$\int_0^R g(r)|u_n|^p r^\theta \mathrm{d}r\to\int_0^R g(r)|u_0|^p r^\theta \mathrm{d}r.$$

注意到 $u_0\in X_S\setminus\{0\}$，否则

$$1=\left(\frac{\int_0^R g(r)|u_n|^p r^\theta \mathrm{d}r}{\int_0^R g(r)|u_n|^p r^\theta \mathrm{d}r}\right)^{\frac{2}{p}}\|u_n\|_{\Delta_\alpha}^2\to\left(\int_0^R g(r)|u_0|^p r^\theta \mathrm{d}r\right)^{\frac{2}{p}} m_{\alpha,\theta}=0.$$

由于 $(u_n)_n$ 是一个极小化序列，且 $u_n\rightharpoonup u_0$ 属于 X_S，

$$m_{\alpha,\theta}\le\frac{\|u_0\|_{\Delta_\alpha}^2}{\|g(r)^{1/p}u_0\|_{L_\theta^p}^2}\le\frac{1}{\lim\|g(r)^{1/p}u_n\|_{L_\theta^p}^2}=\lim\frac{\|u_n\|_{\Delta_\alpha}^2}{\|g(r)^{1/p}u_n\|_{L_\theta^p}^2}=m_{\alpha,\theta},$$

由此可知， u_0 达到 $m_{\alpha,\theta}$。

根据拉格朗日乘子，存在 $\lambda > 0$ 使得

$$\int_0^R \Delta_\alpha u_0 \Delta_\alpha v r^\alpha \mathrm{d}r = \lambda \int_0^R g(r)|u_0|^{p-2}u_0 v r^\theta \mathrm{d}r, \quad \forall v \in X_S.$$

注意到 $\widetilde{u}_0(r) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} u_0(r)$ 是 (62) 的一个弱解。 □

命题 5.2. 假设 u_0 是 (62) 的一个弱解，且 $p \geq 2$。则 $u_0 \in C^4(0,R]$,$\Delta_\alpha u_0 \in C^2(0,R]$ 且 $\Delta_\alpha^2 u_0 = r^{\theta-\alpha} f(r,u_0)$ $\forall r \in (0,R]$。此外， $u_0(R) = \Delta_\alpha u_0(R) = 0$。

证明。我们断言 $\Delta_\alpha u_0$ 的弱导数为

$$(\Delta_\alpha u_0)'(r) = -r^{-\alpha}\int_0^r f(s,u_0(s))s^\theta \mathrm{d}s. \tag{63}$$

注意，右侧项由 (f_S) 和定理 1.1（其中 $p \geq 2$）可良好定义。利用 (63)，并注意 (63) 的右侧项属于 $C^1((0,R])$，我们接下来只需证明 (63) 以及$\Delta_\alpha u_0(R) = 0$。

令 $\varphi \in C_0^\infty(0,R)$。写作 $v(r) = -\int_r^R \varphi s^{-\alpha}\mathrm{d}s$，我们有 $\varphi = r^\alpha v'$ 和 $v \in X_S$。利用 u_0 是弱解以及富比尼定理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^R \Delta_\alpha u_0 \varphi' \mathrm{d}r &= -\int_0^R \Delta_\alpha u_0 \Delta_\alpha v r^\alpha \mathrm{d}r \\ &= \int_0^R \int_r^R f(r,u_0(r))\varphi(s)s^{-\alpha}r^\theta \mathrm{d}s\mathrm{d}r \\ &= \int_0^R s^{-\alpha}\int_0^s f(r,u_0(r))r^\theta \mathrm{d}r\varphi(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

这就证明了 (63)。

我们来验证 $\Delta_\alpha u_0(R) = 0$。固定 $v\colon\ [0,R] \to \mathbb{R}$ 光滑，使得 $v \equiv 0$ 属于 $[0,R/3]$，且 $v(r) = R - r$ 属于 $[2R/3,R]$。注意到 $v \in X_S$，并且由 u_0 是 (62) 的弱解可知，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^R f(r,u_0)v r^\theta \mathrm{d}r = \int_0^R \Delta_\alpha u_0 \Delta_\alpha v r^\alpha \mathrm{d}r &= -\int_0^R \Delta_\alpha u_0 (r^\alpha v')' \mathrm{d}r \\ &= -\Delta_\alpha u_0(R)v'(R)R^\alpha + \int_0^R r^\alpha (\Delta_\alpha u_0)' v' \mathrm{d}r \\ &= \Delta_\alpha u_0(R)R^\alpha - \int_0^R \left(r^\alpha(\Delta_\alpha u_0)'\right)' v \mathrm{d}r \\ &= \Delta_\alpha u_0(R)R^\alpha + \int_0^R \Delta_\alpha^2 u_0 v r^\alpha \mathrm{d}r.\end{aligned}$$

由于 $\Delta_\alpha^2 u_0 = r^{\theta-\alpha} f(r,u_0)$，我们得出 $\Delta_\alpha u_0(R) = 0$。 □

引理 5.1. 假设 $2 \leq p < 2(\theta+1)/(\alpha-3)$ 且 $\theta \geq \alpha - 2$。若 u_0 是方程 (62) 的弱解，则 $u_0 \in X^{2,\ s}_{R}(\alpha-2s, \alpha-s, \alpha)$ 对所有 $s \geq 1$均成立。

证明。由命题 5.2 可知， $\Delta_\alpha^2 u_0 = r^{\theta-\alpha} f(r,u_0)$，其中 $u_0(R) = \Delta_\alpha u_0(R) = 0$。下面验证：给定 $s \geq 1$,

$$u_0 \in L^{s(p-1)}_{\alpha+s(\theta-\alpha+2)} \Rightarrow u_0 \in X_R^{2,s}(\alpha-2s, \alpha-s, \alpha). \tag{64}$$

事实上，由 $u_0 \in L^{s(p-1)}_{\alpha+s\,(\theta-\alpha+2)}$ 和 (f_S)，我们得到 $\Delta_\alpha^2 u_0 = r^{\theta-\alpha} f(r,u_0) \in L^s_{\alpha+2s}$。由于 $r^\alpha \Delta_\alpha u_0 \xrightarrow{r\to 0} 0$ （见 (63)）且 $\Delta_\alpha u_0(R) = 0$，我们可以写成

$$\Delta_\alpha u_0(r) = \int_r^R t^{-\alpha} \int_0^t \Delta_\alpha^2 u_0(s) s^\alpha \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

引理 4.1 保证 $\Delta_\alpha u_0 \in {X^2_{,R}}^s(\alpha, \alpha+s, \alpha+2s)$。由于 $r^\alpha u_0 \xrightarrow{r\to 0} 0$ 且 $u_0(R) = 0$，我们也可以写成

$$u_0(r) = \int_r^R t^{-\alpha} \int_0^t \Delta_\alpha u_0(s) s^\alpha \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

因此，由引理 4.1 可得 (64)。

设 $q \geq 1$ 满足 $q\,[(p-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2)] \leq 2(\alpha+1)$。在 $u_0 \in {X^2_{,R}}^2(\alpha-4, \alpha-2, \alpha)$ 中应用定理 1.1，得到 $u_0 \in L^{q(p-1)}_{\alpha+2q}$。注意，(64) 意味着 $u_0 \in {X^{2,}_R}^q(\alpha-2q, \alpha-q, \alpha)$。因此，我们只需考虑以下情形:

$$(p-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2) > 0. \tag{65}$$

记 $q := 2(\alpha+1)/[(p-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2)]$。由 $p < 2(\theta+1)/(\alpha-3)$，我们有$q > 2$。我们可以假设

$$(p-1)\left[(p-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2)\right] - 2[\theta-\alpha+2+2(p-1)] > 0. \tag{66}$$

事实上，若 (66) 不成立，则 $u_0 \in {X^2_{,\,R}}^q(\alpha-2q, \alpha-q, \alpha)$ 意味着，对于所有 $s \geq 1$，都有 $u_0 \in L^{s(p-1)}_{\alpha+s\,(\theta-\alpha+2)}$。于是，由 (64) 可知，对于所有 $s \geq 1$，都有 $u_0 \in {X^2_{,\,R}}^s(\alpha-2s, \alpha-2, \alpha)$。令

$$k := \frac{(p-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2)}{(p-1)\left[(p-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2)\right] - 2\left[\theta-\alpha+2+2(p-1)\right]}.$$

利用 (65) 和 (66)，我们得到 k 定义良好且为正。此外，由 $p < 2(\theta+1)/(\alpha-3)$,

$$\begin{aligned} k &= \frac{\alpha-3-\frac{2(\theta-\alpha+2)}{p-1}}{(p-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2) - 4 - \frac{2(\theta-\alpha+2)}{p-1}} \\ &> \frac{\alpha-3-\frac{2(\theta-\alpha+2)}{p-1}}{(\frac{2(\theta+1)}{\alpha-3}-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2) - 4 - \frac{2(\theta-\alpha+2)}{p-1}} = 1. \end{aligned}$$

只需证明以下结论即可完成证明

$$u_0 \in X_R^{2,s}(\alpha-2s, \alpha-s, \alpha),\ s \geq q \Rightarrow u_0 \in X_R^{2,ks}(\alpha-2ks, \alpha-ks, \alpha). \tag{67}$$

首先，我们可以假设 $\alpha - 2s + 1 > 0$，否则定理 1.1 的 Adams-Trudinger-Moser 情形即得出结论。注意到

$$q = \frac{2(\alpha+1)}{(p-1)(\alpha-3) - 2(\theta-\alpha+2)} = \frac{(p-1)(\alpha+1) - (\alpha+1)k^{-1}}{\theta-\alpha+2+2(p-1)}.$$

Then

$$s \geq q \Rightarrow s\left[k(\theta-\alpha+2)+2k(p-1)\right] \geq k(p-1)(\alpha+1)-(\alpha+1)$$
$$\Rightarrow ks(p-1) \leq \frac{s\left[\alpha+1+ks(\theta-\alpha+2)\right]}{\alpha-2s+1}.$$

利用 $u_0 \in X^{2,\,s}_{R}(\alpha-2s,\alpha-s,\alpha)$，我们得到 $u_0 \in L^{ks(p-1)}_{\alpha+ks}{}^{(\theta-\alpha+2)}$。因此，由（64）可得（67）。□

命题 5.3. 假设 u_0 是方程 (62) 的一个弱解，且 $\theta > \alpha-1$ 和 $2 \leq p < 2(\theta+1)/(\alpha-3)$。那么 $u_0 \in C^4((0,R]) \cap C^3([0,R])$ 是方程 (62) 的一个经典解，且 $\Delta_\alpha u_0 \in C^2((0,R]) \cap C^1([0,R])$ 和 $u_0'(0) = (\Delta_\alpha u_0)'(0) = u_0(R) = \Delta_\alpha u_0(R) = 0$。此外，$u_0''(0) = -\Delta_\alpha u_0(0)/(\alpha+1)$ 且 $u_0'''(0) = 0$。

证明. 由命题 5.2、引理 5.1 以及定理 1.1 的 Morrey 情形可得$u_0 \in C^4((0,R]) \cap C^1([0,R])$，其中 $\Delta_\alpha u_0 \in C^2((0,R])$ 且 $\Delta_\alpha^2 u_0 = r^{\theta-\alpha} f(r,u_0)$ 对所有$r \in (0,R]$均成立。下面验证 $u_0'(0) = (\Delta_\alpha u_0)'(0) = 0$。由式 (63) 中的洛必达法则，取$\theta > \alpha-1$，可得

$$\lim_{r\to 0}(\Delta_\alpha u_0)'(r) = -\lim_{r\to 0}\frac{f(r,u_0(r))r^\theta}{\alpha r^{\alpha-1}} = 0. \tag{68}$$

利用 $u_0'(r) = -r^{-\alpha}\int_0^r \Delta_\alpha u_0(s)s^\alpha \mathrm{d}s$，并两次应用洛必达法则，我们得到

$$\lim_{r\to 0} u_0'(r) = -\alpha^{-1}\lim_{r\to 0}\Delta_\alpha u_0(r)r = \alpha^{-1}\lim_{r\to 0}(\Delta_\alpha u_0)'(r)r^2 = 0.$$

由 (63) 和 (68) 可得 $\Delta_\alpha u_0 \in C^1([0,R])$。

现在我们只需证明 $u_0 \in C^3([0,R])$，其中 $u_0''(0) = -\Delta_\alpha u_0(0)/(\alpha+1)$ 且$u_0'''(0) = 0$。注意到

$$u_0''(r) = -\alpha\frac{u_0'(r)}{r} - \Delta_\alpha u_0(r) = \alpha r^{-\alpha-1}\int_0^r \Delta_\alpha u_0(s)s^\alpha \mathrm{d}s - \Delta_\alpha u_0(r)$$

并且 $\lim_{r\to 0} u_0''(r) = -\Delta_\alpha u_0(0)/(\alpha+1)$。此外，

$$u_0'''(r) = \alpha r^{-1}\Delta_\alpha u_0(r) - \alpha(\alpha+1)r^{-\alpha-2}\int_0^r \Delta_\alpha u_0(s)s^\alpha \mathrm{d}s - (\Delta_\alpha u_0)'(r)$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{r^{\alpha+2}}\int_0^r \left(\Delta_\alpha u_0(r) - \Delta_\alpha u_0(s)\right)s^\alpha \mathrm{d}s - (\Delta_\alpha u_0)'(r).$$

给定 $\varepsilon > 0$，由 $(\Delta_\alpha u_0)'(0) = 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $|(\Delta_\alpha u_0)'(r)| \leq \varepsilon$ 且$|\Delta_\alpha u_0(r) - \Delta_\alpha u_0(s)| \leq \varepsilon(r-s)$ 对所有 $0 < s \leq r < \delta$ 均成立。因此

$$|u_0'''(r)| \leq \varepsilon\frac{\alpha(\alpha+1)}{r^{\alpha+1}}\int_0^r s^\alpha \mathrm{d}s + \varepsilon = (\alpha+1)\varepsilon, \quad \forall r \in (0,\delta).$$

因此，$u_0 \in C^3([0,R])$ 满足 $u_0'''(0) = 0$。 □

*Pr*定理 1.6 的证明。这是命题 5.1 和命题 5.3 的直接推论。 □

5.2. Adams-Trudinger-Moser 情形的应用。定义算子$\Delta_3 u := -r^{-3}(r^3 u')'$。考虑以下问题

$$\begin{cases} \Delta_3^2 u = r^{\theta-3} f(r,u) & \text{in } (0,R), \\ u = \Delta_3 u = 0 & \text{in } R, \\ u' = (\Delta_3 u)' = 0 & \text{in } 0, \end{cases} \tag{69}$$

其中 $\theta > -1$ 和 $f:\ [0,R]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续。此外，我们考虑以下空间

$$X_{ATM} = X_R^{2,2}(-1,1,3) \cap X_{0,R}^{1,2}(-1,1).$$

推论 5.2。范数

$$\|u\|_{\Delta_3} := \left(\int_0^R |\Delta_3 u|^2 r^3 \mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}$$

等价于$\|\cdot\|_{X^{2,}{}_R{}^2}$在 X_{ATM} 中。

证明。由命题 4.2 可直接得出。 □

由此推论可得

$$m_\Delta := \inf_{u\in X_{ATM}\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{\Delta_3}}{\|u\|_{X_R^{2,2}}} > 0.$$

我们假设 f 具有如下指数增长

$$|f(r,t)| \le c_1 e^{\mu(m_\Delta t)^2} \quad \forall r\in[0,R], t\in\mathbb{R}, \tag{f_{ATM}}$$

对于某些 $c_1>0$ 和 $\mu>0$。我们称 $u\in X_{ATM}$ 是（69）的一个弱解，如果 f

$$\int_0^R \Delta_3 u \Delta_3 v r^3 \mathrm{d}r = \int_0^R f(r,u) v r^\theta \mathrm{d}r \quad \forall v\in X_{ATM}.$$

能量泛函 $J:\ X_{ATM}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^R |\Delta_3 u|^2 r^3 \mathrm{d}r - \int_0^R F(r,u) r^\theta \mathrm{d}r,$$

其中 $F(r,t)=\int_0^t f(r,s)\mathrm{d}s$。注意，（$f_{ATM}$）保证

$$|F(r,t)| \le c_2 e^{\widetilde{\mu}(m_\Delta t)^2} \quad \forall r\in[0,R], t\in\mathbb{R}, \tag{F_{ATM}}$$

对于某个 $c_2>0$ 和 $\widetilde{\mu}>\mu$。此外，J由 (F_{ATM}) 和命题 3.1 定义良好。

命题 5.4. 假设 $t\mapsto f(r,t)$ 是一个奇函数，且对所有 $t\ge 0$，$f(r,t)\ge 0$。如果 $\mu<\theta+1$，那么下述上确界

$$\sup_{\substack{\|u\|_{\Delta_3}=1 \\ u\in X_{ATM}}} \int_0^R F(r,u) r^\theta \mathrm{d}r \tag{70}$$

可取到 d，对于某个 $u_0\in X_{ATM}$，满足 $\|u_0\|_{\Delta_3}=1$。此外，u_0 是一个弱解 o f

$$\begin{cases} \Delta_3^2 u = r^{\theta-3}\lambda f(r,u) & in\ (0,R), \\ u = \Delta_3 u = 0 & in\ R, \\ u' = (\Delta_3 u') = 0 & in\ 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda = \int_0^R f(r,u_0)u_0 r^\theta \mathrm{d}r$.

证明。令（u_n）为满足 $\|u_n\|_{\Delta_3} = 1$ 的（70）的极大化序列。取子序列后，$u_n \rightharpoonup u_0$ 对于某个 $u_0 \in X_{ATM}$ 成立。由定理 1.1，我们有 $u_n \to u_0$ 在 L^q_θ 中对所有 $q \geq 1$成立。取 $q > 1$，满足 $q\mu < (\theta+1)m^2$。利用中值定理、（f_{ATM}）以及 $s \mapsto e^{q\mu s^2}$ 的凸性，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^R |F(r,u_n) - F(r,u_0)| r^\theta \mathrm{d}r &= \int_0^R |f(r, tu_n + (1-t)u_0)||u_n - u_0| r^\theta \mathrm{d}r \\
&\leq c_1 \int_0^R e^{\mu m_\Delta^2 |tu_n + (1-t)u_0|^2} |u_n - u_0| r^\theta \mathrm{d}r \\
&\leq c_1 \left(\int_0^R e^{q\mu m_\Delta^2 |tu_n + (1-t)u_0|^2} r^\theta \mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{q}} \|u_n - u_0\|_{L^q_\theta} \\
&\leq c_1 \left(\int_0^R e^{q\mu (m_\Delta u_n)^2} r^\theta \mathrm{d}r + \int_0^R e^{q\mu (m_\Delta u_0)^2} r^\theta \mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{q}} \|u_n - u_0\|_{L^q_\theta}.
\end{aligned}$$

由于 $\|m_\Delta u_n\|_{X^{2,}{}_R{}^2} \leq \|u_n\|_{\Delta_3} = 1$ 我们可以应用命题 3.2 得到

$$\int_0^R F(r,u_0) r^\theta \mathrm{d}r = \sup_{\substack{\|u\|_{\Delta_3}=1 \\ u \in X_{ATM}}} \int_0^R F(r,u) r^\theta \mathrm{d}r. \tag{71}$$

由 $f(r,\ t) = -f(r,\ -t) \geq 0$对所有 $t \geq 0$成立，我们得到 $F(r,\ u) \geq 0$，并且 $F(r,\ \gamma u) \geq F(r,\ u_0)$ 对所有 $\gamma \geq 1$成立。我们可以假设 $F(r,\ u)$ 不恒为零。于是 $u_0 \in X_{ATM} \backslash \{0\}$，因为（71）意味着 $\int_0^R F(r,\ u_0)\, r^\theta \mathrm{d}r > 0$。我们可以假设 $\|u_0\|_{\Delta_3} = 1$。否则，定义 $\widetilde{u}_0 = u_0/\|u_0\|_{\Delta_3}$，我们有 $\|\widetilde{u}_0\|_{\Delta_3} = 1$ 并且

$$\int_0^R F(r,\widetilde{u}_0) r^\theta \mathrm{d}r \geq \int_0^R F(r,u_0) r^\theta \mathrm{d}r = \sup_{\substack{\|u\|_{\Delta_3}=1 \\ u \in X_{ATM}}} \int_0^R F(r,u) r^\theta \mathrm{d}r.$$

因此，我们得到 $u_0 \in X_{ATM}$，使其在 $\|u_0\|_{\Delta_3} = 1$ 条件下达到上确界。此外，在 (71) 中应用拉格朗日乘子，我们得出

$$\int_0^R \Delta_3 u_0 \Delta_3 v r^3 \mathrm{d}r = \lambda \int_0^R f(r,u_0) v r^\theta \mathrm{d}r \quad \forall v \in X_{ATM},$$

其中 $\lambda = \int_0^R f(r,u_0) u_0 r^\theta \mathrm{d}r$。 □

命题 5.5. 假设 u_0 是 (69) 的一个弱解。那么 $u_0 \in C^4(0,R]$, $\Delta_3 u_0 \in C^2(0,R]$ 且 $\Delta_3^2 u_0 = r^{\theta-3} f(r,u_0)$ $\forall r \in (0,R]$。此外，$u_0(R) = \Delta_3 u_0(R) = 0$。

证明。此证明与命题 5.2 的证明类似，采用 $\alpha = 3$，但我们不必假设 $p \geq 2$，因为 (f_{ATM}) 和命题 3.1 保证对每个 $r \in [0,R]$，$f(r,u_0(\cdot)) \in L^1_{\theta^\circ}$ □

命题 5.6. 假设 u_0 是满足 $\theta > 2$ 的方程 (69) 的弱解。那么 $u_0 \in C^4((0,R]) \cap C^3([0,R])$ 是满足 $\Delta_3 u_0 \in C^2((0,R]) \cap C^1([0,R])$ 的方程 (69) 的经典解，并且 $u_0'(0) = (\Delta_3 u_0)'(0) = u_0(R) = \Delta_3 u_0(R) = 0$。此外，$u_0''(0) = -\Delta_3 u_0(0)/4$ 且 $u_0'''(0) = 0$。

证明. 若证明$u_0 \in C^1([0,R])$，则该证明与命题 5.3 的证明类似。我们声称

$$\Delta_3^2 u_0 = r^{\theta-3} f(r,u_0) \in L^p_{4p-\theta-2}, \quad \forall p>1. \tag{72}$$

事实上，利用 (f_{ATM}) 可得

$$\int_0^R |r^{\theta-3} f(r,u_0)|^p r^{4p-\theta-2} \mathrm{d}r \le c_1 \int_0^R e^{\mu p (m_\Delta u_0)^2} r^{(\theta+1)(p-1)-1} \mathrm{d}r.$$

于是，命题 3.1 保证了 (72)。

由 (72) 中的引理 4.1 可得 $\Delta_3 u_0 \in X^{2,p}_{,R}(2p-\theta-2, 3p-\theta-2, 2p-\theta-2)$。同样，由引理 4.1 可得 $u_0 \in X^{2,p}_{,R}(-\theta-2, p-\theta-2, 2p-\theta-2)$。因此，定理 1.1 的 Morrey 情形蕴含 $u_0 \in C^1([0,R])$。□

*Proo*定理 1.7 中的 f。这是命题 5.4 和命题 5 的直接推论。 6. □

References

[1] D. R. Adams，高阶导数的 J. Moser 最佳不等式，《数学年刊》128 (1988), 385–398. 5, 6, 18

[2] Adimurthi, J.M. do ´O, K. Tintarev，涉及 N-拉普拉斯算子的 Hardy–Sobolev 型不等式的余紧性与极小化函数，《非线性微分方程及其应用》17 (2010) 467–477. 2[3]R.A. Adams, J.J.F. Fournier，《Sobolev 空间》。第二版。纯粹与应用数学（阿姆斯特丹），140. Elsevier/Academic Press，阿姆斯特丹，2003. 1[4]D. Bonheure, E. Serra 和 E. Tarallo，莫泽-特鲁丁格不等式中极值函数的对称性及二维中的 H ´énon 型问题，《微分方程进展》13 (2008), 105–138. 16[5] H. Brezis, F. Browder，20 世纪的偏微分方程，《数学进展》135 (1998), 76–144. 1[6]H. Brezis，《泛函分析、Sobolev 空间与偏微分方程》，Universitext，Springer，纽约，2010. 9[7]P. Cl´ement, D. G. de Figueiredo 和 E. Mitidieri，具有临界指数的拟线性椭圆方程，《拓扑方法与非线性分析》7 (1996), 133–170. 1, 3, 4[8] J. M. do ´O 和 J. F. de Oliveira，加权特鲁丁格-莫泽不等式的集中紧性与极值问题，《当代数学通讯》19 (2017), 1650003, 26. 4[9] J. M. do ´O 和 J. F. de Oliveira，涉及分数维的加权 Sobolev 空间的特鲁丁格-莫泽型不等式，《美国数学会会刊》142 (2014), 2813–2828. 4, 6, 20, 28[10] J. M. do ´O, A. C. Macedo 和 J. F. de Oliveira，加权 Sobolev 空间上的最佳 Adams 型不等式，《数学季刊》71 (2020), 517–538. 2, 3, 4, 5, 7, 30[11]M. Dong, N. Lam 和 G. Lu，最佳加权特鲁丁格-莫泽不等式与卡法雷利-科恩-尼伦伯格不等式及其极值函数。《非线性分析》173 (2018), 75-98. 5[12] M. Dong 和 G. Lu，加权特鲁丁格-莫泽不等式的最佳常数与最大化函数的存在性。《变分法与偏微分方程》55 (2016), no. 4, Art. 88, 26 pp. 5[13] D. G. Figueiredo, E. M. dos Santos 和 M. O. Hiroshi，对称函数的 Sobolev 空间及其应用，《泛函分析杂志》261 (2011), 3735–3770. 1, 2, 10[14] M. Gazzini, E. Serra，H ´énon 方程的诺伊曼问题、迹不等式与斯捷克洛夫特征值，《Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire》25 (2) (2008) 281–302. 2[15] M. Ishiwata, M. Nakamura 和 H. Wadade，关于缩放不变形式的加权特鲁丁格-莫泽型不等式的最佳常数。《Ann. Inst. H. Poincar´eAnal. Non Linaire》31(2), 297–314 (2014) 5[16] A. Kufner 和 L. E. Persson，《Hardy 型加权不等式》，世界科技出版公司，新加坡，2003. 11

[17] N. Lam, G. Lu 和 L. Zhang，不同范数下的最佳奇异 Trudinger-Moser 不等式。《Adv. Nonlinear Stud.》19 (2019), no. 2, 239–261. 5[18] V. Maz'ya，《Sobolev 空间及其在椭圆偏微分方程中的应用》（《数学科学基础丛书》342），Springer (2011). 1[19] J. Moser，N. Trudinger 不等式的最佳形式，《Indiana Univ. Math. J.》20 (1970/1971), 1077–1092. 5, 20[20] W.-M. Ni，单位球上的非线性 Dirichlet 问题及其应用，《Indiana Univ. Math. J.》31 (1982) 801–807 2[21] B. Opic 和 A. Kufner，《Hardy 型不等式》，Pitman 数学研究札记丛书219，Lonngmman Scientific & Technical，哈洛，1990. 4, 8, 31[22] W. Strauss，高维中孤立波的存在性，《Comm. Math. Phys.》55 (1977)149–162. 2[23] C. Tarsi，Adams 不等式与嵌入 Zygmund 空间的极限 Sobolev 嵌入，《Potential Anal.》37 (2012), 353-385. 28[24] N. S. Trudinger，关于嵌入 Orlicz 空间及其若干应用，《J. Math. Mech.》17 (1967), 473–483. 5

(J.M. do ´O) Dep. Mathematics, Federal University of Paraíba 58051-900, João Pessoa-PB, Brazil电子邮箱：jmbo@pq.cnpq.br

(陆国珍) Dep. Mathematics, University of Connecticut06269, Storrs-CT, United States of America电子邮箱：guozhen.lu@uconn.edu

(R. Ponciano) Dep. Mathematics, Federal University of Paraíba 58051-900, João Pessoa-PB, Brazil电子邮箱：raoni.cabral.ponciano@academico.ufpb.br