arXiv:2302.02264v1 [math.LO] 4 Feb 2023

连续逻辑中可定义集的半格

JAMES HANSON

Abstract. 在连续一阶逻辑中，可定义集的并集是可定义的，但其交集通常并非可定义。这意味着，在任意连续理论中，单变量的 $\varnothing$-可定义集在包含关系下构成一个并半格，但未必构成格。我们研究哪些半格可以作为连续理 论中可定义集的集合出现。我们证明，对于任意非平凡有限半格 L（或等价地，任意有限格 L），都存在一个超稳定理论 T，其可定义集半格为 L。随后，我们将这一构造推广到某些无限半格。特别地，我们证明，以下半格可以在连续理论中出现：$\alpha+1$ 以及对于任意序数 α的（$\alpha+1$）*、在 ω上方包含一个精确对的半格，以及对于任意可数交半格 L， L 中的滤子格。根据作者先前的工作，这证明了这些半格可以在稳定理论 [5]中出现。前两个构造使用基数为 $\aleph_0+|\alpha|$的语言，后两个构造使用可数语言。

Introduction

连续一阶逻辑以 [3], 引入的现代形式，是普通一阶逻辑的一种推广。它研究由完备度量空间以及一致连续谓词和函数构成的结构，称为度量结构。

在度量结构 M中，若闭集 $D\subseteq M$ 的距离谓词 $\inf\{d(x,y):\ y\in D\}$ 等价于一个公式，则称其为可定义集。（我们约定公式对一致收敛极限封闭。）这些集恰好是允许相对量化的集：也就是说，对于任意公式 $\varphi(x,y)$，都存在一个与 $\inf_{y\in D}\varphi(x,y)$等价的公式。我们将可定义集 $D\subseteq M$ 与相应的类型闭集 $\{\mathrm{tp}(a):\ a\in D^N,\ N\succeq M\}$属于 $S_1(T)$视为一体，并且也将这些集合称为可定义集。

可定义集固然有用，但并非总是丰富充足。存在非平凡的度量结构 M，其中唯一的（不含参数的）可定义集是 $\varnothing$ 和 M。类似地，虽然离散逻辑中的可定义集具有布尔代数的结构，但在连续逻辑中，只有两个可定义集的并集可以保证是可定义的。可定义集的补集通常甚至不是闭集，而两个可定义集的交集也可能不是可定义的。这意味着，度量结构的可定义子集所成的偏序通常只是一个有界并半格。在这种情况下，逻辑学家通常会对哪些半格能以这种方式出现

Date: 2023年2月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 03C66。
Key words and phrases. 半格、可定义集、连续逻辑、拓扑度量空间。

这一问题难以抗拒。本文将探讨这一问题的若干方面。

最容易确立的限制是基数方面的限制。 M 的可定义子集的集合在豪斯多夫度量下总是闭集。这意味着它的基数只能与某个完备度量空间的基数相同。基本的集合论拓扑由此可知，若 M 是语言 $\mathcal{L}$ 的基数为κ的度量结构，那么 M 的可定义子集的集合 $\mathscr{D}$ 要么具有 $|\mathscr{D}| \leq \kappa$ ，要么具有 $|\mathscr{D}| = \kappa^{\aleph_0}$。如果 $\mathcal{L}$ 是可数的，那么 $\mathscr{D}$ 就是一个波兰空间，而$(D, E) \mapsto D \cup E$ 是一个博雷尔函数，因此描述性集合论便可派上用场。尽管如此，作者并不知道有关波兰半格的任何结果不是有关波兰偏序结果的特例。

一个更专门的问题是，各种模型论性质是否会对可能出现的可定义集半格施加限制。除离散性本身之外，目前已知的此类限制寥寥无几。作者在其学位论文 [4, 第2.4、2.5、5.5], 章中研究了可定义集的丰盛条件，并确立了该条件成立的条件；他将其称为字典性。尽管这一条件似乎早已在学界口耳相传，但当时尚无对其进行系统研究的已发表成果。若类型空间 $S_{\bar{x}}(A)$具有由可定义邻域构成的基（其中邻域不要求是开集），则称其具有字典性。若某个理论在任意参数集上的所有类型都具有字典性，则称该理论具有字典性。目前已知具有字典性的理论大致只有三类：类型空间全都全不连通的理论；对于每个 $n < \omega$ 和有限元组 $\bar{a}$， $S_n(\bar{a})$均为CB-可分析的理论；以及随机化（无论原理论是否具有字典性，也无论其为离散理论还是连续理论）。第二类理论包括 ω-稳定理论，这意味着所有 ω-稳定理论都具有字典性。

另一方面，作者在 [5, 定理 5.2] 中证明，对于任意满足 d开[2] 的紧拓扑度量空间 (X, τ, d)，它都等距同胚（即在拓扑度量空间意义下同构）于某个严格稳定理论 T的 $S_1(T)$。这意味着，稳定性本身不会对可定义集半格施加任何限制。

不过，这留下了一个缺口。 ω-稳定性会施加根本性的限制，而单纯的稳定性则毫无限制。那么，超稳定性究竟会施加什么限制（如果有的话）？ [4, 第 C.1] 节中明确构造的许多反例都是超稳定的，这不利于超稳定性在这方面会带来任何限制的设想。例如，存在一个具有平凡几何的弱极小理论 T，其 $S_1(T)$ 同胚于 $[0, 1]$，但只有 $\varnothing$和 $S_1(T)$ 是可定义集。[3] 尽管如此，超稳定性可能确实会对可定义集的类施加某些微妙限制。

本文将提供证据，表明超稳定性并不意味着任何此类限制。我们将证明，对于每个非平凡有限半格 L，都存在一个具有平凡几何的弱极小理论 T，使得 $S_1(T)$ 的可定义子集半格与 L 同构。注意，由于有限半格总是完备的，因此它们总是格，所以我们的结果表明，可定义集的有限半格

[1]当且仅当该理论与一个（可能是多排序的）离散理论双可解释时，这种情况才会发生。[2]d 若对每个开 U 和 $r > 0$， $U^{<r} := \bigcup_{x \in U} B_{<r}(x)$都是开的，则称其为开。[3]$T$ 可以取为带有离散度量、并以 $\cos(x)$ 为谓词的 $\mathbb{N}$ 理论。

恰好就是有限格。[4] 这确实意味着我们的结果有一定局限，因为超稳定性可能会对可定义集半格施加某些限制，而这些限制比有限性所施加的限制更弱。

1. Finite semilattices of definable sets

在构造过程中，以下事实值得牢记。拓扑算子（如内部算子 $\mathrm{int}\,A$）总是在紧致逻辑拓扑中计算。我们约定上标算子的绑定优先级高于前缀和中缀算子，因此 $\mathrm{int}\,A^{<\varepsilon}$ 表示 $\mathrm{int}(A^{<\varepsilon})$，$\mathrm{cl}(A\cap B)^{<\varepsilon}$ 表示 $\mathrm{cl}((A\cap B)^{<\varepsilon})$，而 $A\cap B^{<\varepsilon}$表示 $A\cap(B^{<\varepsilon})$。

事实 1.1. 对任意类型空间 $S_1(T)$，闭集 $D\subseteq S_1(T)$ 可定义，当且仅当对每个 $r>0$，$D\subseteq \mathrm{int}\,D^{<r}$。

对于任意拓扑度量空间 X 和集合 $Q\subseteq X$，以下条件等价。

(1) $Q\subseteq \mathrm{int}\,Q^{<r}$ 对每个 $r>0$都成立。

(2) $Q\subseteq \mathrm{int}\,Q^{<r}$ 对任意小的 $r>0$都成立。

若 X 上的度量是开度量，则 1 和 2 也都等价于 3。

(3) 对每个 $r>0$，$Q^{<r}$ 都是开集。

证明。关于可定义集的陈述等价于 [3, 命题 9.19]。

1 显然蕴含 2。假设 2 成立，则对任意 $r>0$，我们都能找到正的 $s<r$，使得 $Q\subseteq \mathrm{int}\,Q^{<s}$，但 $\mathrm{int}\,Q^{<s}\subseteq Q^{<s}\subseteq Q^{<r}$，因此 $Q\subseteq \mathrm{int}\,Q^{<r}$。

3 显然蕴含 1 和 2，因此假设该度量是开的。对任意 $x\in Q^{<r}$，令$s=d(x,Q)<r$。由三角不等式可得 $x\in Q^{<s}\subseteq(\mathrm{int}\,Q^{<r-s})^{<s}\subseteq Q^{<r}$。由于 $(\mathrm{int}\,Q^{<r-s})^{<s}$是开集，$x\in\mathrm{int}\,Q^{<r}$。因为对每个 $x\in Q^{<r}$都可以这样做，所以 $Q^{<r}$ 是开集。□

根据事实 1.1，我们将使用以下定义。

定义 1.2。在任意拓扑度量空间 (X,τ,d) 中，若对每个 $r>0$ 都有 $D\subseteq \mathrm{int}\,D^{<r}$，则闭集 $D\subseteq X$ 是可定义的。

在第 2 节中，即使 X 不紧，我们也会使用定义 1.2。

或许将“可定义集”这一术语推广到这样的任意拓扑度量空间并不妥当，但目前看来，除了连续逻辑中的类型空间这一语境之外，定义 1.2 似乎没有任何应用。

1.1. 电路结构。我们将首先把类型空间 $S_1(T)$ 构造为一个具体的拓扑度量空间。随后我们会论证，我们所构造的实际上是某个具有平凡几何的弱极小 T 的 $S_1(T)$。这一构造通过搭建一种类似逻辑电路的结构来进行，其中包含“导线”和“门”。遗憾的是，这个比喻在某种程度上是反过来的：如果一条导线与所讨论的可定义集不相交，那么将它视为“开启”才更合理。

定义 1.3. 给定一个拓扑度量空间 (X,τ,d)，若集合 $A\subseteq X$ 满足：对于任意 $a\in A$ 和 $x\in X\setminus A$，$d(a,x)=1$，则称其在 X 中清晰嵌入。若 $\{x\}$ 在 X中清晰嵌入，我们也可以说点 x 清晰嵌入。

点 $a\in X$ 是度量意义下的 ε-孤立点，当且仅当对任意 $x\in X\setminus\{a\}$，$d(a,x)\geq\varepsilon$。

[4]若 T 是矛盾理论，那么按定义的字面意思，$S_1(T)$ 是 $\varnothing$，其可定义集半格是平凡格。

本文中所有度量的取值均在 $[0,1]$中。注意， a 清晰嵌入，当且仅当它在度量意义下是 1-孤立的。

定义 1.4. 给定拓扑度量空间 X 和 Y， X 和 Y的余积记作 $X \oplus Y$，它是一个拓扑度量空间，其底层拓扑空间为 $X \sqcup Y$，度量扩展后满足：对于任意 $x \in X$和 $y \in Y$， $d(x,y) = 1$。

给定一个拓扑度量空间 X 以及两个清晰嵌入的点 x 和 y，将 x 和 y 焊接在一起所得到的拓扑度量空间，是一个底层拓扑空间为 X 的拓扑度量空间，其中 x 和 y 在拓扑上粘合，并且度量的定义使得对于 X 中满足$\{z,w\} \neq \{x,y\}$的任意 z 和 w，$d(z,w)$保持不变。给定一个有限的清晰嵌入点集 $X_0 \subseteq X$，我们以类似方式定义将 X_0 中的点焊接在一起。

给定两个拓扑度量空间 X和 Y，其中 $x \in X$和 $y \in Y$清晰嵌入，将 x 和 y 焊接在一起所得到的拓扑度量空间，等于在 $X \oplus Y$中将 x和 y焊接在一起所得到的拓扑度量空间。

容易验证，定义 1.4 中描述的对象实际上都是拓扑度量空间。

一个我们会经常隐式使用的事实是：如果 X 是度量空间，且 D、 $E \subseteq X$，那么对于任意 $r > 0$， $(D \cap E)^{<r} \cap E = \bigcup_{x \in D \cap E} B^E_{<r}(x)$，其中 $B^E_{<r}(x)$ 是度量空间 (E,d) 中以 x 为中心、半径为 r 的开球。换句话说， $(D \cap E)^{<r} \cap E$ 是在 E 中“计算”的 $(D \cap E)^{<r}$。

引理 1.5. 设 X 和 Y 是拓扑度量空间。

(1) $D \subseteq X \oplus Y$ 可定义，当且仅当 $D \cap X$ 在 X 中可定义，且 $D \cap Y$ 在 Y 中可定义。(2) $X \oplus Y$ 具有开度量，当且仅当 X 和 Y 具有开度量。

设 Z 是拓扑度量空间，设 z_0 和 z_1 是清晰嵌入于 Z 中的点，设 W 是由 z_0 和 z_1 焊接在一起得到的 Z，设 $w \in W$ 是对应于 z_0和 z_1的点，并设 $\pi : Z \to W$ 是商映射。

(3) 对任意闭集 $D \subseteq Z$， $\pi[D] \subseteq W$ 可定义，当且仅当以下条件之一成立：

- $\{z_0, z_1\} \cap D = \varnothing$ 和 D 可定义，或者
- $\{z_0, z_1\} \cap D \neq \varnothing$ 和 $D \cup \{z_0, z_1\}$ 可定义。(4) W 具有开度量，

当且仅当 Z 具有开度量。

证明。1 和 2 直接由以下事实得出：对于任意正的 $r \leq 1$ 和任意 $A \subseteq X \oplus Y$， $A^{<r} = (X \cap A)^{<r} \cup (Y \cap A)^{<r}$。

对于 3，假设 $\pi[D]$ 可定义。如果 $w \notin \pi[D]$，那么我们有 $\pi[D]$ 是 $W \setminus \{w\}$ 的可定义子集，而 $W \setminus \{w\}$ 是开的。由于 $\pi \restriction (Z \setminus \{z_0, z_1\})$ 是等距同胚，这足以证明 D 在 $Z \setminus \{z_0, z_1\}$ 中可定义，因此在 Z 中也可定义。这个论证中的每一步都是可逆的，所以我们还可得：如果 $\{z_0, z_1\} \cap D = \varnothing$ 且 D 可定义，那么 $\pi[D]$ 可定义。

如果 $w \in \pi[D]$，那么 $\pi^{-1}[D] = D \cup \{z_0, z_1\}$。对于每个 $r > 0$，现在我们有 $\pi^{-1}[D^{<r}] = (D \cup \{z_0, z_1\})^{<r}$。因此 $D \cup \{z_0, z_1\}$ 可定义。同样，这个论证是可逆的，所以我们可得：如果 $D \cup \{z_0, z_1\}$ 可定义，那么 $\pi[D \cup \{z_0, z_1\}]$可定义。

对于 4，若 Z 具有开度量，则对于任意 $U \subseteq W$ 和任意 $r > 0$，显然有 $U^{<r} = \pi[\pi^{-1}[U]^{<r}]$ 是开的。另一方面，若 W具有开度量，则对于任意 $U \subseteq Z \setminus \{z_0, z_1\}$和任意 $r > 0$，有 $U^{<r} = \pi^{-1}[\pi[U]^{<r}]$。若 U 包含 z_0 和 z_1中的一个，则对于任意正的 $r \leq 1$，有 $U^{<r} =$

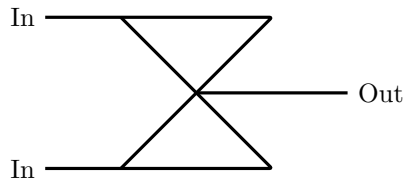

FIGURE 1. &，与门空间

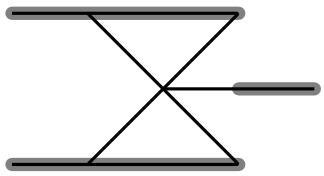

FIGURE 2. 带离散度量的区域

$(U \cap \{z_0, z_1\}) \cup \pi^{-1}[\pi[U \setminus \{z_0, z_1\}]^{<r}]$。由于 U 是$U \cap \{z_0, z_1\}$中各点的一个邻域，因此该集合总是开的。此外，对于任意 $r > 1$，有 $U^{<r} = Z$。因此 Z 具有开度量。□

注意，引理 1.5 表明：如果 x 清晰嵌入于 X，且 y 清晰嵌入于 Y，并且 W 是将 x 与 y 焊接在一起的结果，那么

- 对于任意闭集 $D \subseteq W$，D 可定义，当且仅当 $D \cap X$ 在X 中可定义，且 $D \cap Y$ 在 Y中可定义，并且
- W 具有开度量，当且仅当 X 和 Y 具有开度量。

我们可以用尖括号表示数的有序元组，以避免与开区间混淆。

定义 1.6. 与门空间是拓扑度量空间 (& τ, d)，其中 & 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，定义如下：

$$([-2,1] \times \{-1,1\}) \cup \{\langle x, \pm x\rangle : -1 \le x \le 1\} \cup ([0,2] \times \{0\})$$

（见图 1），τ 是子空间拓扑，而 d 是满足以下条件的唯一度量：

- 若 $\langle x,\ y\rangle \in ([-2,1] \times \{-1,1\}) \cup ([1,2] \times \{0\})$，且 $\langle z、\ w\rangle \neq \langle x、\ y\rangle$（见图 2），则 $d(\langle x, y\rangle, \langle z, w\rangle) = 1$，
- 若 $x \neq z$，则 $d(\langle x, y\rangle, \langle z, w\rangle) = 1$，且
- 若 $\langle x,\ y\rangle$ 和 $\langle z$均属于集合 $\{\langle x, \pm x\rangle :\ -1 \le x \le 1\} \cup ([0,1] \times \{0\})$，$x = z$，且 $y \neq w$，则 $d(\langle x, y\rangle, \langle z, w\rangle) = \max(|y|, |w|)$。

点 $\langle -2、\ 1\rangle$ 和 $\langle -2、\ -1\rangle$ 是 & 的输入顶点，而点 $\langle 2、\ 0\rangle$是输出顶点。

注意，& 的顶点是清晰嵌入的。

引理 1.7。固定一个拓扑度量空间 X。对于任意 $\varepsilon > 0$，若 $U \subseteq X$ 是一个连通开集，使得每个 $x \in U$ 在度量意义下都是 ε-孤立的，则对于任意可定义集$D \subseteq X$，要么 $U \subseteq D$，要么 $U \cap D = \varnothing$。

证明。固定一个连通开集 U 和一个 $\varepsilon > 0$，使得每个 $x \in U$ 在度量意义下都是ε-孤立的。固定一个可定义集 D。我们有 $U \cap D^{<\frac{1}{2}\varepsilon} = U \cap D$，因此

$$U \cap D \subseteq U \cap \operatorname{int} D^{<\frac{1}{2}\varepsilon} \subseteq U \cap D^{<\frac{1}{2}\varepsilon} = U \cap D$$

且 $U \cap D$是开集，因此在 U中相对既开又闭。因此，要么是 $U \cap D = \varnothing$，要么是 $U \cap D = U$，如所需。□

与门空间这一名称由以下命题得以说明。

命题 1.8。& 的非空可定义真子集只有

(1) $\{\langle x, y\rangle \in \&:\ x > 0\} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$，
(2) $\{\langle x, y\rangle \in \&:\ x < 0\} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$，

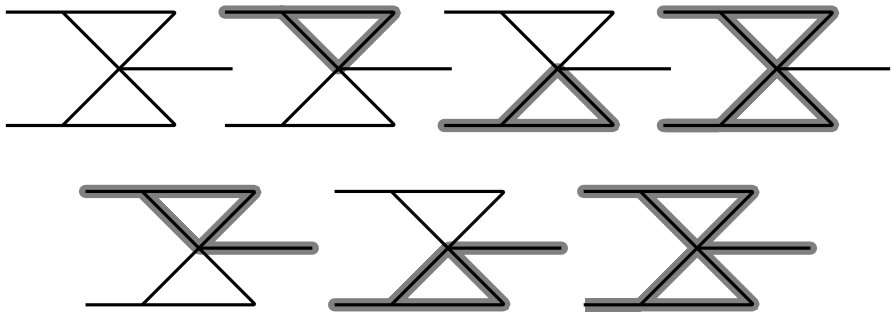

FIGURE 3. & 的可定义子集

(3) 1 和 2 的并集，(4) 1 和 $(0,2]\times\{0\}$ 的并集，以及 (5) 2 和 $(0,2]\times\{0\}$ 的并集。

特别地，可定义子集 $D\subseteq$ & 由其与 $\{\langle -2,1\rangle,\langle -2,-1\rangle,\langle 2,0\rangle\}$ 的交集唯一确定，唯一的限制是：若 $\langle -2,1\rangle\notin D$ 且$\langle -2,-1\rangle\notin D$，则 $\langle 2,0\rangle\notin D$。

证明。为了验证所列集合是可定义的，由对称性和并集可知，只需检查 1 和 4。令 D_1 为 1 中描述的集合。对于任意正的 $r\leq 1$，我们有 $D_1^{<r}$ 是 $D_1\cup\{\langle x,-|x|\rangle:|x|<r\}\cup\{\langle x,0\rangle:x<r\}$，这是一个开集。因此 D_1 是可定义的。若 D_4 是 4 中描述的集合，则 $D_4^{<r}$是 $D_1^{<r}\cup D_4$，这也是开集。因此 D_4 是可定义的。

现在假设 $D\subseteq$& 是可定义的。& 是一个拓扑图。我们将 & 的边定义为与 (0, 1) 同胚的极大开子集。& 中有 9 条边与图论中的边相对应。& 的每条边 U 都可以写成若干连通开集的并集 $\bigcup_{n<\omega}U_n$，使得任意 $x\in U_n$ 在度量意义下都是孤立的2^{-n-1}。因此，由引理 1.7，且由于每个 U 都是连通的，我们有：要么 $U\subseteq D$，要么 $U\cap D=\varnothing$。

由于 D 是闭集，它必然包含其中任意一条边的闭包。现在假设 D包含四个点 $\langle\pm1,\pm1\rangle$ 中的一个。将此点称为 $\langle x,y\rangle$假设 $\langle x,y\rangle\notin\operatorname{int}D$。于是我们可以找到一个足够小的 $r>0$，使得对于某个开邻域 $V\ni\langle x,\ y\rangle$, $D^{<r}\cap V=D\cap V$，这又构成矛盾。

我们现在已经证明的内容足以说明，D 必定是 D_1、D_2（第 2 节中的可定义集）和 $[0,2]\times\{0\}$ 的（可能为空的）并集。如果 D是 $\varnothing$ 或 &，或者出现在命题陈述所列的集合中，那么结论即得。唯一其他的可能性是 $D=[0,2]\times\{0\}$，但若是如此，则 $D^{<\frac{1}{2}}=D\cup\{\langle z,\pm z\rangle:0\leq z<\frac{1}{2}\}$，这不是开集。因此，$D$ 不可能是这个集合，结论即得。“特别地”这一陈述立即可得。□

因此，我们看到 & 的作用类似于与门，具体来说：给定一个可定义集 $D\subseteq$&，我们把不属于该可定义集的顶点视为“开启”。根据命题 1.8，如果输入顶点处于开启状态，那么输出顶点也必定处于开启状态；但对这个门的配置没有其他限制。

严格来说，现实世界中的与门通常不会规定与命题 1.8 中状态 1、2 或 3 类似的状态下应有的行为，因为通常其输出被

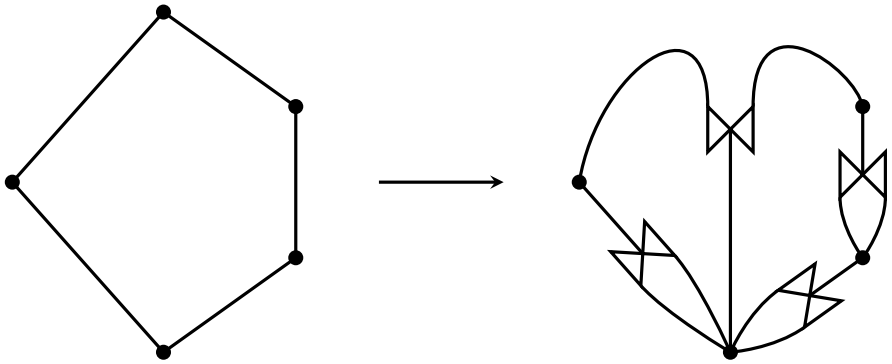

FIGURE 4. $\mathbb{X}(N_5)$（已移除多余的 & 副本）

视为输入的函数。这意味着，对哪些配置应当是可能的，有两种解释方式。这里我们将与门的运作解释为“如果……那么……”的形式：当两个输入都为开时，输出为开。另一种方式是将其解释为“当且仅当”的形式：当且仅当两个输入都为开时，输出才为开。实际上，构造一个实现这种行为的拓扑度量空间更容易，但最终我们需要实现某种类似 & 的东西，而由此得到的构造最终会更加复杂。

1.2. 构造类型空间。现在我们将使用 & 来构造类型空间，使其可定义集半格为任意有限格。

定义 1.9。对于任意有界格 L，将集合 $L \setminus \{1^L\}$ 记作 L^-（其中 1^L 是 L 的最大元）。

对于有限格 L，我们将 $\mathbb{X}(L)$ 记为按以下方式构造的拓扑度量空间：对于每个满足 $a \wedge b \leq c$ 的三元组 $(a,b,c) \in (L^-)^3$，取 & 的一个副本，其中两个输入顶点分别标记为 a 和 b，输出顶点标记为 c。对于每个 $a \in L^-$，将所有标记为 a 的顶点焊接在一起。$\mathbb{X}(L)$ 即为所得空间。我们将 $\mathbb{X}(L)$ 中对应于标记为 a 的顶点的点记为 x_a，并将 $N(L)$ 记为 $\{x_a : a \in L^-\}$。

注意，定义 1.9 会包含许多不必要的 & 副本，例如对应于形如 (a,a,a) 的三元组的副本。实际上，只需包含对应于格的某种表示的副本即可。例如，N_5^- 有 42 个满足 $a \wedge b \leq c$ 的有序三元组 (a,b,c)，但只需其中 4 个，就能构造出一个可定义集半格同构于 N_5 的拓扑度量空间，如图 4 所示。

这个例子还表明，即使类型空间是“平面的”（也就是说，可以嵌入 $\mathbb{R}^2$中），且只有有限多个可定义集，可定义集格也可能不是模的。

引理 1.10。给定一个有限格 L 和一个可定义集 D。

(1) 任意可定义集 $D \subseteq \mathbb{X}(L)$ 都由 $D \cap N(L)$ 唯一确定。(2) 对于任意满足 $a \wedge b \leq c$ 的 a、b、$c \in L^-$，如果 $a \notin D$ 且 $b \notin D$，那么 $c \notin D$。特别地，集合 $\{a \in L^- : x_a \notin D\} \cup \{1^L\}$ 是格 L 的一个滤子。

(3) 对于任意非空滤子 $F \subseteq L$，存在一个可定义集 $D \subseteq \mathbb{X}(L)$，使得 $F = \{a \in L^- : x_a \notin D\} \cup \{1^L\}$。

证明。1 和 2 由引理 1.5 和命题 1.8 得出。

对于 3，给定一个非空滤子 F，令 $D \subseteq \mathbb{X}(L)$ 为满足 $D \cap N(L) = \{x_a : a \in F^-\}$ 的唯一集合，使得对于 & 在 $\mathbb{X}(L)$ 中的每个副本 A，$D \cap A$ 在 A 中是可定义的。由引理 1.5 和命题 1.8 可知，此集合是可定义的。□

命题 1.11。对于任意有限格 L，$\mathbb{X}(L)$ 中的可定义集半格与 L 同构。

证明。对于任意 $a \in L$，令 $F_a = \{b \in L : b \geq a\}$，并令 D_a 为 $\mathbb{X}(L)$ 中对应的可定义集。显然，$D_a = D_b$ 当且仅当 $a = b$，因为 $F_a^- = F_b^-$ 当且仅当 $a = b$，所以映射 $a \mapsto D_a$ 是单射。此外，$F_{a \vee b} = F_a \cap F_b$，且与 $F_a \cap F_b$ 对应的可定义集为 $D_a \cup D_b$，因此映射 $a \mapsto D_a$ 保持并。F_{1^L} 显然是 $\mathbb{X}(L)$，而 F_{0^L} 显然是 $\varnothing$。因此，$a \mapsto D_a$ 是有界半格同态。最后，由于 L 是有限的，每个非空滤子都具有 F_a 的形式，因此 $a \mapsto D_a$ 是满射，从而是格同构。□

注意，对于每个 $a \in L$，D_a 都是唯一一个不包含 x_a 的极大可定义集。[5] 例如，在图 4 中，N_5 的左侧元素映射到这样一个可定义集：它包含 & 的两个右侧副本，以及 & 的中间副本的右侧。

1.3. 弱极小性。此时，[5, 定理 5.2] 足以得出结论：定义 1.9 中给出的拓扑度量空间实际上是某个稳定理论的类型空间，[6] 但鉴于所涉及的类型空间具有特殊形式，我们还可以得到更强的结论。

这里给出的例子与 [4, 第 C 节1]，中构造的许多例子有一个共同模式：与相关类型空间相对应的理论，其类型空间本身可以以下述意义作为一个模型。

定义 1.12. 对于任意紧致拓扑度量空间 (X, τ, d)，我们将 $\mathcal{L}_X$ 记为这样一种度量语言：其中对每个连续的 $f : X \to [0, 1]$，，都包含一个谓词符号 P_f；其一致连续模 α_{P_f} 的 P_f 选取为使得 f 在 X 上是 α_{P_f}-一致连续的。（此外，如果 f 是利普希茨的，且 r 是 f 的最优利普希茨常数，我们就取 $\alpha_{P_f}(x)$ 为 rx。）

我们用 M_X 表示底层度量空间为 (X, d)，且对所有 $P_f \in \mathcal{L}_X$ 和 $a \in M$，$P_f^{M_x}(a) = f(a)$ 的 $\mathcal{L}_X$-结构。我们用 T_X 表示 $\mathrm{Th}(M_x)$。

由 [1, 引理 1.15、命题 1.17] 可知，从紧致拓扑度量空间到 $\mathbb{R}$ 的任何连续函数都是一致连续的（相关特殊情形的直接证明也见 [4,命题 2.1.2(v)]）。因此，$\mathcal{L}_X$ 总是定义良好的。

对于任意紧致拓扑度量空间 X，我们都有一个自然的投影映射 $\pi_X : S_1(T_X) \to X$。（这是因为，X 中的一个点 x 由其在 M_X中的无量词 1-型唯一确定。）对于大多数 X 而言，这不会是一个同胚，但在某些特殊情况下则是。

[5] $D_{1^L} = \mathbb{X}(L)$ 因为 x_{1^L} 不存在，所以不包含在任何可定义集中。[6] 只需验证 & 上的度量是开度量，这相当直接。

定义 1.13。我们称紧致拓扑度量空间 X 是自蕴含的，如果 $\pi_X : S_1(T) \to X$ 是一个等距同胚（即拓扑度量空间的同构）。

尽管我们觉得自蕴含性颇为有趣，但它似乎不太可能发挥广泛作用。

为了完成我们的结果，我们将证明，对于任意有限非平凡格 L，$\mathbb{X}(L)$ 都是自蕴含的，而 $T_{\mathbb{X}(L)}$ 是具有平凡几何的弱极小结构（这意味着它是超稳定的）。

命题 1.14。紧致拓扑度量空间 X 是自蕴含的，当且仅当 $S_1(T_X)$ 中的每个类型都在 M_X 中实现。

证明。如果 X 是自蕴含的，那么对于任意 $p \in S_1(T_X)$，存在一个 $x \in X$ 使得 $\mathrm{tp}(x) = p$，这正是所需的结论。

反过来，假设 $S_1(T_X)$ 中的每个类型都在 M_X 中实现。由于 $\pi_X(\mathrm{tp}(x)) = x$，$S_1(T_X)$ 中的每个类型至多由 M_X 中的一个元素实现。由于每个类型都已实现，它们必定都恰好由 M_X 中的一个元素实现。因此 $\pi_X : S_1(T_X) \to X$ 是一个双射。由于 $S_1(T_X)$ 和 X 都是紧豪斯多夫空间，这意味着 π_X 是一个同胚。

最后，我们需要证明 π_X 是等距的。显然，对于任意 p、$q \in S_1(T)$，有 $d(p, q) \leq d(\pi_X(p)\ \pi_X(q))$（因为对于所有 $r \in S_1(T)$，$\mathrm{tp}(\pi_X(r)) = r$）。另一方面，根据 [2, 定理 1.6],，对于任意正的 $r < d(\pi_X(p)\ \pi_X(q))$，存在一个 $\frac{1}{r}$- 利普希茨函数 f: $X \to [0, 1]$，使得 $f(\pi_X(p)) = 0$ 且 $f(\pi_X(q)) = 1$。因此 $P^p_f = 0$ 且 $P^q_f = 1$，从而 $d(p, q) > r$。由于对于任意正的 $r < d(\pi_X(p)\ \pi_X(q))$ 都可以这样做，我们有 $d(p, q) \geq d(\pi_X(p)\ \pi_X(q))$。因此 $d(p, q) = d(\pi_X(p)\ \pi_X(q))$，如所要求。□

命题 1.15. 对任意有限非平凡格 L, $\mathbb{X}(L)$，它都是自蕴含的。

证明。找一个超滤子 $\mathcal{U}$（定义在某个指标集 I 上），使得超幂 $M^{\mathcal{U}}_{\mathbb{X}(L)}$ 是 $|\mathcal{L}_{\mathbb{X}(L)}|^+$-饱和的。特别地，$M^{\mathcal{U}}_{\mathbb{X}(L)}$ 实现了 $S_1(T_{\mathbb{X}(L)})$ 中的所有类型。固定$a \in M^{\mathcal{U}}_{\mathbb{X}(L)}$。我们需要论证 $a \equiv \pi_{\mathbb{X}(L)}(\mathrm{tp}(a))$。

$\mathbb{X}(L)$ 中有三类点：一类点 x 满足对所有$y \neq x$，$d(x, y) = 1$；一类点 x 满足恰有一个 y 使得 $0 < d(x, y) < 1$；还有一类点 x，恰有两个点 y 和 z 满足 $0 < d(x, y) < 1$，且 $d(x, y) = d(x, y) = d(y, z)$。

第一类点的集合是闭集，而后两类点的集合是开集。显然，如果 $a \in M^{\mathcal{U}}_{\mathbb{X}(L)}$ 是第一类点的极限，那么它在 $M^{\mathcal{U}}_{\mathbb{X}(L)}$ 中也满足相同的性质。因此，交换 a 和$\pi_X(\mathrm{tp}(a))$ 的映射是 $M^{\mathcal{U}}_{\mathbb{X}(L)}$ 的自同构，并且我们有 $a \equiv \pi_X(\mathrm{tp}(a))$。

假设 $a = (x_i)_{i \in I}/\mathcal{U}$ 是 $M^{\mathcal{U}}_{\mathbb{X}}(L)$ 的某个元素，其中 x_i 对一族 $\mathcal{U}$-大的指标 $i \in I$ 来说是第二类点。族 $(x_i)_{i \in I}$ 最终必集中于 & 的某个副本中，并且在该副本中，它将位于区域 $\{\langle x, \pm x\rangle : -1 < x < 0\}$。对于每个使 x_i 为第二类点的 $i \in I$，令 y_i 为 X 中唯一满足 $d(x_i, y_i) < 1$ 的点。令 $b = (y_i)_{i \in I}/\mathcal{U}$。有三种可能：要么 $\lim_{i \to \mathcal{U}} d(x_i, y_i) = 0$，要么 $\lim_{i \in \mathcal{U}} d(x_i, y_i) \in (0, 1)$，要么 $\lim_{i \in \mathcal{U}} d(x_i, y_i) = 1$。在第一种和第三种情况下，我们有 $\pi_X(\mathrm{tp}(a))$ 是第一类点，而且再次地，交换 a 与 $\pi_X(\mathrm{tp}(a))$ 的映射是 $M^{\mathcal{U}}_{\mathbb{X}(L)}$ 的一个自同构。在第二种情况下，同样地，我们有交换 a 与

a 与 $\pi_X(\text{tp}(a))$，并交换 b 与 $\pi_X(\text{tp}(b))$ 的映射是 $M_{\mathbb{X}}^{\mathcal{U}}(L)$ 的一个自同构。因此，无论哪种情况，我们都有 $a \equiv \pi_X(\text{tp}(a))$。

当对于一组基数为 $\mathcal{U}$ 的指标， x_i 是第三类点时，论证基本相同。□

定理 1.16. 对于任意有限非平凡格 L，存在一个具有平凡几何的弱极小理论 T，使得 $S_1(T)$ 的可定义子集半格与 L 同构。

证明。根据命题 1.11，我们知道存在一个拓扑度量空间 $\mathbb{X}(L)$，其可定义集半格与 L 同构。根据命题 1.15，我们知道 $S_1(T_X)$ 与 X 等距同胚，因此它们的可定义集半格同构。

命题 1.15 的证明表明，可以在 T_X 的模型上定义一种稳定分叉关系：当且仅当存在 $b \in B$ 和 $c \in C$，使得 $d(b, A) = 1$、 $d(c, A) = 1$，并且 $d(b, c) < 1$ 时，$B \not\perp_A C$。此外，每当 $d(b, c) < 1$ 时，都有 $b \in \text{acl}(c)$。因此，1-型发生分叉的唯一方式就是变为代数的，这意味着该理论是弱极小的。□

2. Some infinite semilattices of definable sets

利用第 1 节中的一些技术，我们能够将某些特定的无限格实现为类型空间的可定义子集半格。其思路是利用 & 的副本构造一个无限大的电路，然后以适当的方式进行紧化（例如图 5），并且可能继续推进这一构造（例如图 6）。由于我们使用了 [5], ，所得理论都是稳定的，但其超稳定性尚不清楚。问题在于，所得类型空间不是自蕴含的，因此我们无法像在定理 1.16 中那样构造相应的理论。这自然引出了一个问题。

问题 2.1。命题 2.8 和 2.9 以及定理 2.19 中构造的类型空间，是超稳定理论的类型空间吗？如果不是，是否存在具有相同可定义集半格的超稳定理论？

2.1. 清晰单点紧化。

定义 2.2. 给定拓扑度量空间 (X, τ, d)， X 的清晰单点紧化是一个拓扑度量空间，其底层拓扑空间是 X, $X \cup \{\infty\}$ 的单点紧化，其度量是对 d 的扩展，使得 ∞ 清晰嵌入（即对于所有 $x \in X$， $d(\infty, x) = 1$ ）。

如果清晰单点紧化存在，我们将 (X, τ, d) 的清晰单点紧化记为 (X^*, τ^*, d^*)。

（请回想，我们取所有度量的值都属于 $[0, 1]$。）请注意，虽然定义 2.2 中描述的对象总是存在，但一般而言它可能不构成拓扑度量空间。例如，配备离散的 $\{0, \frac{1}{2}\}$-值度量的无限离散空间不存在清晰单点紧化。

引理 2.3. 固定一个拓扑度量空间 (X, τ, d)。如果 X 具有开度量且 X^*存在，那么 d^* 也开。

证明。回忆一下，拓扑单点紧化（X^*, τ^*）的子集是开的，当且仅当它是 X 的开子集，或者是 $X^* = X \cup \{\infty\}$中

X的闭紧子集的补集。由于 X 是拓扑度量空间，它自动是豪斯多夫的，因此其中所有紧子集都是闭集。

若 $U \subseteq X$ 是开集，则对于任意 $r \leq 1$，有 $U^{<r} \subseteq X$，因此 $U^{<r}$ 是一个开集。对于 $r > 1$, $U^{<r} = X^*$ 也同样是一个开集。

若 $U \subseteq X^*$ 是 X的紧子集 F的补集，则对于任意 $r \leq 1$，有 $U^{<r} = (U \cap X)^{<r} \cup \{\infty\}$，因此 $F \setminus U^{<r}$与 $F \setminus (U \cap X)^{<r}$相同；它是紧集的闭子集，因此本身也是紧集。于是 $U^{<r}$ 是闭紧集的补集，因此是 X^*的开子集。若 $r \geq 1$，则同样有 $U^{<r} = X^*$。□

命题 2.4。固定一个拓扑度量空间 (X, τ, d)，使得 X^* 存在。闭集 $D \subseteq X^*$ 可定义，当且仅当 $D \cap X$ 在 X 中可定义，且满足以下条件之一

- D 是紧的，且 $D \subseteq X$ 或

对于每个 $r > 0$，$X \setminus (\text{int}_\tau (D \cap X)^{<r})$都是紧的。

证明。假设 $D \subseteq X^*$ 是可定义的。对于任意正的 $r \leq 1$，我们有$D^{<r} \cap X = (D \cap X)^{<r}$，所以 $D \cap X \subseteq (\text{int}_{\tau^*} D^{<r}) \cap X \subseteq (D \cap X)^{<r}$，因此$D \cap X \subseteq \text{int}_\tau (D \cap X)^{<r}$。因此，$D \cap X$ 在 X中是可定义的。

如果 $\infty \notin D$，那么 D 必定是紧的，因为 D 是 X^* 的一个不包含 ∞ 的闭子集（并且由于 X 是拓扑度量空间，因此是豪斯多夫的）。

如果 $\infty \in D$，那么对于每个 $r > 0$，我们有$\text{int}_{\tau^*} D^{<r}$ 是 ∞的一个开邻域。因此，根据 X^*上的拓扑定义，$\text{int}_\tau (D \cap X)^{<r}$ 在 X中是余紧的。

现在假设 $D \cap X$ 是可定义的。如果第一个项目符号成立，那么对于任意正的 $r \leq 1$，我们都有 $D^{<r} \cap X = (D \cap X)^{<r}$，因此 $D \subseteq \text{int}_\tau D^{<r} = \text{int}_{\tau^*} D^{<r}$。所以，$D$ 在 X^*中是可定义的。

如果第二个项目符号成立，那么对于任意正的 $r \leq 1$ 和 $x \in D$，我们要么有 $x \in X$，此时 $x \in \text{int}_\tau (D \cap X)^{<r} \subseteq \text{int}_{\tau^*} D^{<r}$；要么有 $x = \infty$，此时 $\{\infty\} \cup \text{int}_\tau (D \cap X)^{<r} \subseteq D^{<r}$是 ∞ 的开邻域。因此，无论哪种情况，都有 $x \in \text{int}_{\tau^*} D^{<r}$。所以 $D \subseteq \text{int}_{\tau^*} D^{<r}$，并且由于对于任意充分小的 $r > 0$我们都可以这样做，D 在 X^*中是可定义的。□

2.2. 拓扑度量空间的有向系统。我们需要以下定义和技术引理，以处理这样一个事实：直极限（也称为有向余极限）在拓扑度量空间范畴中似乎相当微妙。

定义 2.5. 取一个有向集 I、一个拓扑度量空间族 $(X_i, \tau_i, d_i)_{i \in I}$，以及每对 $i \leq j \in I$ 对应的等距拓扑嵌入 $f_{ij} : X_i \to X_j$。假设这些数据构成一个有向系统。令 (X_I, τ_I, d_I) 为该系统的直极限（其含义是 $(X_I, \tau_I) = \lim_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ 且 $(X_I, d_I) = \lim_{i \in I} (X_i, d_i)$），并令 $f_{jI} : X_j \to X_I$ 为诱导包含映射。

如果拓扑度量空间的有向系统 $((X_i, \tau_i, d_i)_{i \in I}, (f_{ij})^{i \leq j \in I})$ 满足：对于任意 $i \leq j \in I$，$f_{ij}[X_i]$ 清晰嵌入 X_j，则称该系统是清晰的。如果对于任意 $x \in X_I$，都存在一个 $j \in I$ 使得 $x \in \text{int}_{\tau_I} f_{jI}[X_j]$，则称该系统最终开。

引理 2.6. 设 $((X_i, \tau_i, d_i)_{i \in I}, (f_{ij})^{i \leq j \in I})$ 是一个清晰有向系统，其拓扑度量空间满足 $\lim_{i \in I} (X_i, \tau_i, d_i) = (X_I, \tau_I, d_I)$ 是一个拓扑度量空间。固定一个闭集 $D \subseteq X_I$。

(1) 如果 D 在 X_I中可定义，那么对于每个 $j \in I$，$D \cap X_j$ 在 X_j 中可定义。(2) 如果 d_j 是开集，并且对于每个 $j \in I$，$D \cap X_j$ 在 X_j 中可定义，那么 D 在 X_I中可定义。

证明。我们不妨假设每个 X_j 都是 X_I和 f_{jI} 的子集： $X_j \to X_I$ 是恒等映射。

对于 1，固定 $r \in (0,1]$ 并考虑 $D^{<r}$。由于每个 X_j 都清晰嵌入于 X_I，我们有 $D^{<r} \cap X_j = (D \cap X_j)^{<r}$。令 $U = \text{int}_{\tau_I} D^{<r}$。根据假设， $D \subseteq U$。根据归纳极限拓扑的定义， $U \cap X_j$ 是 τ_j-开集。因此

$$D \cap X_j \subseteq U \cap X_j \subseteq D^{<r} \cap X_j \subseteq (D \cap X_j)^{<r},$$

由此 $D \cap X_j \subseteq \text{int}_{\tau_j}(D \cap X_j)^{<r}$。由于对任意充分小的 $r > 0$ 都可以这样做， $D \cap X_j$ 在 X_j中是可定义的。

对于 2，显然对任意 $r > 0$， $D^{<r} = \bigcup_{i \in I}(D \cap X_j)^{<r}$。此外，与之前一样，我们有，若 $r \leq 1$，则对每个 $j \in I$，$(D \cap X_j)^{<r} = D^{<r} \cap X_j$。因此，由于每个 $(D \cap X_j)^{<r}$都是 τ_j-开集，我们有 $D^{<r}$是 τ_I-开集。对于$r \geq 1$， $D^{<r}$ 要么是 $\varnothing$，要么是 X_I，所以在所有情形下 $D^{<r}$ 都是开集，并且 D 在X_I中是可定义的。□

引理 2.7. 假设 $((X_i, \tau_i, d_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \in I})$ 是一个清晰且最终开拓扑度量空间的有向系统。

(1) $\lim_{i \in I}(X_i, \tau_i, d_i) = (X_I, \tau_I, d_I)$ 是一个拓扑度量空间。(2) 若对每个 $i \in I$，d_i 都是开的，则 d_I 是开的。(3) 若对每个 $i \in I$， X_i 都是紧的，则 (X_I, τ_I, d_I) 有清晰单点紧化。

证明. 不失一般性，我们可以将每个 X_i 与其在 $f_{iI}[X_i] \subseteq X_I$ 中的像视为相同，因此映射 f_{ij} 和 f_{iI} 是恒等映射。显然，对于每个 $i \in I$， X_i 清晰嵌入于 X_I。

回顾一下，集合 $U \subseteq X_I$ 是 τ_I-开的，当且仅当对于每个$i \in I$， $U \cap X_i$ 都是 τ_i-开的。固定 $x \in X_I$ 和一个开邻域 $U \ni x$。找出满足$x \in X_i$ 的 $i \in I$。找出一个满足 $\varepsilon < 1$ 的 $\varepsilon > 0$，使得 $B_{<\varepsilon}(x) \cap X_i \subseteq U \cap X_i$（因为 d_i 加细拓扑 τ_i，这样的对象存在）。由于 X_i 清晰嵌入于 X_I，我们有$B_{<\varepsilon}(x) \cap X_i = B_{<\varepsilon}$。因此 $B_{<\varepsilon}(x) \subseteq U$。由于对任意 x 和$U \ni x$，我们都能这样做，所以 d_I 加细 τ_I。

固定 x、$y \in X_I$ 和 $r > 0$，使得 $d_I(x, y) > r$。不失一般性，我们可以假设 $r < 1$。找出 $j \in I$，使得 x 和 y 都是 $\text{int}_{\tau_I} X_j$ 的元素。（这是可行的，因为如果 $x \in \text{int}_{\tau_I} X_j$ 且 $y \in \text{int}_{\tau_I} x_k$，那么对任意 $\ell \geq j$、k，都有 $\{x, y\} \subseteq \text{int}_{\tau_I} X_\ell$。）由于 X_j 是拓扑度量空间，因此存在 X_j 中的邻域$U \ni x$ 和 $V \ni y$，使得对任意 $x' \in U$ 和 $y' \in V$，都有 $d_j(x', y') > r$。

现在， $U \cap \text{int}_{\tau_I} X_j \ni x$ 和 $V \cap \text{int}_{\tau_I} X_j \ni y$ 是 X_I 中具有相同性质的邻域。由于对任意 x、$y \in X_I$ 都可以这样做，因此 d_I 是下半连续的，所以结论 1 成立（即， X_I 是拓扑度量空间）。

对于 2，固定一个开集 U。对于每个 $x \in U$，找一个 $j(x) \in I$使得 $x \in \text{int}_{\tau_I} X_{j(x)}$，并令 $V_x = U \cap \text{int}_{\tau_I} X_{j(x)}$。显然，我们有 $U = \bigcup_{x \in U} V_x$。固定 $r > 0$。如果$r > 1$，那么 $U^{<r} = X_I$是一个开集，因此假设 $r \leq 1$。我们有 $U^{<r} = \bigcup_{x \in U} V_x^{<r}$。由于 $X_{j(x)}$ 清晰嵌入于 X_I，我们有 $V_x^{<r} \subseteq X_{j(x)}$。此外，由于 $d_{j(x)}$ 是开集， $V_x^{<r}$是 $\tau_{j(x)}$-开集。

现在需要证明 $V_x^{<r}$是开的。固定 $y \in V_x^{<r}$。找出 $k \in I$ 使得$k \geq j(x)$ 且 $y \in \text{int}_{\tau_I} X_k$。现在我们知道 X_j 清晰嵌入于 X_k，因此在 X_k 中计算的$V_x^{<r}$与在 X_j中计算的 $V_x^{<r}$ 是同一个集合。由于 d_j 是开的，因此作为 X_j的子集， $V_x^{<r}$是开的。由此可知， $V_x^{<r} \cap \text{int}_{\tau_I} X_k$ 是 X_k 中 x 的一个开邻域（注意，$\text{int}_{\tau_I} X_k$ 在 X_k中是开的）。因此它

也是 X_I 中的一个开邻域。由于对任意 $y \in V_x^{<r}$都可以这样做，因此 $V_x^{<r}$是开的。最后，由于对任意 $x \in U$， $V_x^{<r}$都是开的， $U^{<r}$也同样是开的。

对于 3，由于 X_I 是拓扑度量空间，因此它是豪斯多夫的，且其所有紧集都是闭集。正如定义 2.2 后所述，显然 d_I^* 加细 τ_I^*，因此我们只需验证 d_I^* 是下半连续的。如果 x、$y \in X_I$ 和 $d(x, y) > r > 0$，那么由于 X_I 是拓扑度量空间，存在开集 $U \ni x$ 和 $V \ni y$，使得 $\inf\{d(x', y') : x' \in U, y' \in V\} > r$。唯一还需检查的情况是 $x \in X_I$ 和 ∞。取 $j \in I$，使得 $x \in \operatorname{int}_{\tau_I} X_j$。由于 X_j 是清晰嵌入的，我们有，对于任意 $x' \in \operatorname{int}_{\tau_I} X_j$ 以及任意 $y' \in X_I^* \setminus X_j$， $d(x', y') = 1$。注意，由于 X_j 是紧的且 X_I 是豪斯多夫的， X_j 是闭紧集，因此 $X_I^* \setminus X_j$ 是 τ_I^*-开集。由于对任意 $x \in X_I$ 都可以这样做，所以 $d(x, y)$ 是下半连续的，因此 X_I 有清晰单点紧化。□

引理 2.7 远非最优，但本节中的技巧究竟能推进到什么程度尚不清楚，因此我们并未花太多精力去改进它。

现在我们已经具备所需的工具，可以构造某些特殊的可定义集合的格。

2.3. 后继序数。这里我们将构造一些类型空间，使得其中的可定义集半格对应于任意后继序数。

命题 2.8. 对任意序数 α，存在一个稳定理论 T，其语言的基数为 $\aleph_0 + |\alpha|$，使得 $S_1(T)$ 的可定义子集半格与 $\alpha + 1$ 同构。此外，反向序 $(\alpha + 1)^*$ 也同样成立。

证明. 令 $\&^\dagger$ 为将其输入顶点焊接在一起后得到的 &。将焊接后的点称为 $g \in \&^\dagger$。令 E 为 $\&^\dagger$ 的唯一非空可定义真子集（即对应于 $\{\langle x, y\rangle$ 的集合：& 中的 $y \neq 0\} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$）。

令 (X_0, τ_0, d_0) 为单点拓扑度量空间，并令 x_0 为 X_0 的唯一元素。令 $f_{00} : X_0 \to X_0$ 为恒等映射。注意， d_0 是开的。

对每个后继序数 $\alpha + 1$，给定一个点 $x_\alpha \in X_\alpha$ 以及由紧致拓扑度量空间 $(X_\beta, \tau_\beta, d_\beta)_{\beta \leq \alpha}$ 组成的有向系统（以及 $(f_{\beta\gamma})_{\gamma \leq \gamma \leq \alpha}$，其中 X_β 对每个 $\beta \leq \alpha$ 都具有开度量），令 $(X_{\alpha+1}, \tau_{\alpha+1}, d_{\alpha+1})$ 为 X_α 与一个新的副本在 $x_\alpha \in X_\alpha$ 和 $g \in$ 处焊接在一起所得的空间。将 $\&_\alpha^\dagger$ 记作该副本在 $X_{\alpha+1}$ 中的子集，并将 E_α 记作 $\&_\alpha^\dagger$ 的 E 副本。令 $f_{\alpha, \alpha+1} : X_\alpha \to X_{\alpha+1}$ 为将 X_α 包含到 $X_{\alpha+1}$ 中的自然包含映射。对每个 $\beta \leq \alpha$，令 $f_{\beta, \alpha+1} : X_\beta \to X_{\alpha+1}$ 为 $f_{\alpha, \alpha+1} \circ f_{\beta\alpha}$。注意，由引理 1.5 的第 2 和第 4 部分可知，度量 $d_{\alpha+1}$ 也是开的。此外， $X_{\alpha+1}$ 显然是紧的。

对于极限序数 λ，给定 $(X_\beta)_{\beta<\lambda}$ 和 $(f_{\beta\gamma})_{\beta \leq \gamma < \lambda}$，我们需要论证这是一个由拓扑度量空间构成的清晰且最终开有向系统。根据定义 1.4，清晰性显而易见。此外，我们显然有，对于任意 $\beta \leq \gamma < \lambda$， $f_{\beta\gamma}[X_{\beta+1} \setminus \{x_{\beta+1}\}]$ 是一个包含 X_β 的开集，因此该系统最终开。由此，根据引理 2.7，$\lim_{\beta<\lambda}(X_\beta, \tau_\beta, d_\beta)$ 是一个具有开度量和清晰单点紧化的拓扑度量空间。设 $(X_\lambda, \tau_\lambda, d_\lambda)$ 为该清晰单点紧化。根据引理 2.3，d_λ 是一个开度量。对于任意 $\beta < \lambda$，令$f_{\beta\lambda} : X_\beta \to X_\lambda$ 为自然包含映射，它由从 X_β 到 $\lim_{\gamma<\lambda} X_\gamma$ 的包含映射与从 $\lim_{\gamma<\lambda} X_\gamma$ 到 X_λ 的包含映射复合而成。

现在，对于任意序数 α，考虑 $(X_\alpha, \tau_\alpha, d_\alpha)$。根据归纳法可知，这是一个具有开度量的紧致拓扑度量空间。（注意，如果一个拓扑度量空间的有向系统有最后一个元素，那么它显然是最终开的，因此

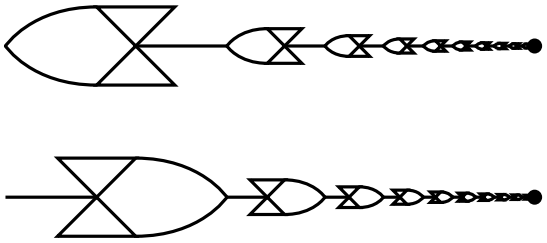

FIGURE 5. $\omega+1$ 以及 $(\omega+1)^*$



FIGURE 6. $\omega+\omega+1$

引理 2.7 在后继阶段也适用。）我们需要论证， X_α 的可定义子集所成的偏序与 $\alpha+1$ 序同构。对于 $\beta<\alpha$，我们将把 X_β 视为 X_α 的子集。对于任意 $\beta<\alpha$，考虑集合 $D_\beta:=X_\beta\cup E_\beta$。对于$\gamma\leq\beta$, $D_\beta\cap X_\gamma=X_\gamma$，它在 X_γ 中可定义。对于 $\gamma=\beta+1$， $D_\beta\cap X_\gamma$ 根据引理 1.5 可定义。现在我们需要通过归纳法论证，对于每个 $\gamma>\beta+1$， $D_\beta\cap X_\gamma=D_\beta$ 在 X_γ 中可定义。如果 $D_\beta\cap X_\gamma$ 在 X_γ 中可定义，那么根据引理 1.5， $D_\beta\cap X_{\gamma+1}=D_\beta$ 在 $X_{\gamma+1}$ 中可定义。对于极限 $\lambda>\beta+1$，由引理 2.6 可知， D_β 在 $\lim_{\gamma<\lambda}X_\gamma=\bigcup_{\gamma<\lambda}X_\gamma$ 中可定义。因此，根据命题 2.4， D_β 在 X_λ 中可定义。因此，由归纳法可知， D_β 在 X_α 中可定义。

显然，若 $\beta<\gamma<\alpha$，则 $D_\beta\subset D_\gamma$。此外，对每个 $\beta<\alpha$，都有 $D_\beta\notin\{\varnothing,X_\alpha\}$。因此，可定义集族 $\{\varnothing\}\cup\{D_\beta:\ \beta<\alpha\}\cup\{X_\alpha\}$ 的序型为 $1+\alpha+1=\alpha+1$。

现在最后，我们只需证明这些是 X_α 的唯一可定义子集。设 $D\subseteq X_\alpha$ 是一个非空可定义集，且不是 X_α。设 $\beta<\alpha$ 是满足 $\&_\beta^\dagger\not\subseteq D$ 的最小者。根据引理 1.5 和 2.6，必有 $D\cap\&_\beta^\dagger$ 为空，或 $D\cap\&_\beta^\dagger=E_\beta$。由于对每个 $\gamma<\beta$ 都有 $\&_\gamma^\dagger\subseteq D$，且 D 是闭集，因此必有 D 包含 $x_\beta\in\&_\beta^\dagger$，所以第一种情况不可能成立，必有 $D\cap\&_\beta^\dagger=E_\beta$。现在，为了导出矛盾，假设存在一个 $\gamma\in(\beta,\alpha)$，使得 $D\cap\&_\gamma^\dagger\neq\varnothing$。设 γ 是其中最小的一个。根据引理 1.4 和 2.6，必有 $x_\gamma\in D$。我们知道 $x_{\beta+1}\notin D$，所以必有 $\gamma>\beta+1$。如果 γ 是后继序数，那么必有 $D\cap\&_{\gamma-1}^\dagger\neq\varnothing$，这就产生了矛盾。因此必有 γ 是极限序数。但此时 $D\cap X_\gamma$ 将 x_γ（X_γ 中的无穷远点）作为孤立点包含在内，这与命题 2.4 矛盾。因此，不存在这样的 γ。所以 $D=D_\beta$。由于对每个非空真可定义子集 D 都可以这样做，我们得到 X_α 的可定义子集半格与 $\alpha+1$ 序同构。由 [5, 定理 5.2] 即得结论。

对于反向序，按照上述构造进行，但将 $\&^\dagger$ 的定向反转。（见图 5。）我们将用 X_α^*、 x_α^*、 $\&_\alpha^{\dagger*}$ 和 E_α^* 表示此构造中的相应对象。（特别要注意，对于任意 α， x_α^* 是 $\&_\alpha^{\dagger*}$ 中与点 $\langle 2,0\rangle$ 相对应的元素。）现在，固定一个 α，对于任意 $\beta<\alpha$，

记 D^*_β 为集合 $(X^*_\alpha \setminus X^*_\beta) \cup E^*_\beta$。由与前面基本相同的论证可知，对于任意 $\beta < \alpha$， D^*_β 是 α 的可定义子集。此外，每个 D^*_β 既非空集，也非整个 X_α；对于任意 $\beta < \gamma < \alpha$、 $D_\beta \supset D_\gamma$，因此我们有：在 X^*_α 中存在一个序型为 $1 + \alpha^* + 1 =$ （$\alpha + 1$）* 的可定义集族。

同样，我们需要证明每个可定义的 $D \subseteq X^*_\alpha$ 要么是 $\varnothing$、 X^*_α，要么是某个 $\beta < \alpha$的 D^*_β。假设 D 是 X^*_α的非空可定义真子集。令$\beta < \alpha$ 为满足 $D \cap \&^{\dagger *}_\beta \neq \varnothing$的最小对象。若 β 是后继序数，则结论显然成立，即 $D \cap \&^*_\beta = E^*_\beta$（否则 D 会包含 x^*_β，因此 $D \cap \&^{\delta *}_{\beta-1}$将非空）。假设 β 是极限序数，且 $\&^{\dagger *}_\beta \cap D \neq E^*_\beta$。必有 $x^*_\beta \in D$，但这意味着 $D \cap X^*_\beta = \{x^*_\beta\}$，而它不是 X^*_β的可定义子集。这与命题 2.4 矛盾。因此，必有 $D \cap \&^{\dagger *}_\beta = E^*_\beta$。现在反设存在一个 $\gamma \in (\beta, \alpha)$，使得 $\&^{\dagger *}_\gamma \not\subseteq D$。令 γ 为满足此条件的最小对象。由于它是最小的，必有 $x^*_\gamma \in D$；但根据引理 1.5 以及命题 1.8 和 2.4，这意味着 $\&^{\dagger *}_\gamma \subseteq D$，矛盾。因此不存在这样的 γ，于是得到 $D = D^*_\beta$，证毕。由于对任意非空可定义真子集 $D \subset X^*_\alpha$都可以这样做，我们得到X^*_α 中的可定义集半格与 $(\alpha + 1)^*$序同构。根据 [5, 定理 5.2]，结论再次成立。

为了得到理论 T 的语言的基数上界，请注意，基本的归纳论证表明，对于任意 α，X_α 都有一个基，其基数至多为$\aleph_0 + |\alpha|$。这意味着存在 T 的一个约化 T_0，其语言的基数至多为 $\aleph_0 + |\alpha|$，使得 $S_1(T_0)$ 与 $S_1(T)$ 等距同胚。反向序情形的论证相同。□

可以将图 5 中的类型空间拼接起来，使所得的可定义集半格同构于 $1 + \mathbb{Z} + 1$。不过，我们不对此作明确说明，因为我们将在第 2.5 节证明一个更一般的结论。

2.4. 一个非格半格。本节将给出一个类型空间的例子，其中可定义集半格不是格。虽然这是意料之中的现象，但似乎不太容易找到这样的例子。

回忆一下，在半格 L 中，理想 I 上方的精确对是由元素 a 和 b 组成的一对，满足 $I = \{x \in L : x \leq a \wedge x \leq b\}$。如果 I 没有最大元素，那么这就意味着 $\{a, b\}$ 没有最大下界。

设 X_ω 和 x_ω 如命题 2.8 的证明中所述。按照图 7 所示的构形，将 & 的三个副本焊接到 x_ω 上，并将所得空间称为 Y。不难验证，$(Y \setminus X_\omega) \cup \{x_\omega\}$ 的可定义子集的格同构于二元布尔代数。设 A 和 B 为 $(Y \setminus X_\omega) \cup \{x_\omega\}$ 的两个非空可定义真子集。

命题 2.9。 Y 的非空可定义真子集恰为 D_α（如命题 2.8 的证明中所定义）、 $X_\omega \cup A$ 和 $X_\omega \cup B$。特别地， $X_\omega \cup A$ 和 $X_\omega \cup B$ 在理想 $\{\varnothing\} \cup \{D_\alpha : \alpha < \omega\}$ 上方构成一个精确对，因此没有交。

证明。根据命题 2.8 的证明中的相同推理，我们可以证明，对于任意 $\alpha < \omega$， D_α 在 Y 中是可定义的。此外，由引理 1.5 可知， $X_\omega \cup A$ 和 $X_\omega \cup B$ 是可定义的。

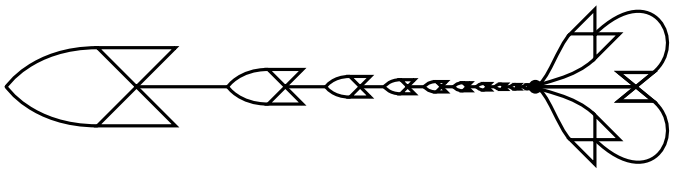

FIGURE 7. 上方的精确对 ω

由命题 2.8 的证明可知，在 X_ω 中可定义的集合 $D \subseteq X_\omega$ 只有 $\varnothing$、 X_ω 以及满足 $\alpha < \omega\}$ 的集合 $\{D_\alpha$。
容易验证，若 $D \subseteq (Y \setminus X_\omega) \cup \{x_\omega\}$ 非空且在 $(Y \setminus X_\omega) \cup \{x_\omega\}$ 中可定义，则 $x_\omega \in D$。

因此，由引理 1.5 可知， Y 的可定义子集恰为$\varnothing$、 Y、 $\{D_\alpha : \alpha < \omega\}$、 $X_\omega \cup A$ 和 $X_\omega \cup B$，结论得证。□

我们收录这个命题，并非因为它解决了连续逻辑中稳定理论的一个悬而未决的问题，[7] 而主要是因为它表明，这里介绍的技巧可用于构造不是格的半格。请注意，本文中介绍的其他可定义集半格实际上都是完备格。

2.5. 可数交半格上的滤子格。这里我们将证明，对于任意可数交半格 $(L, \wedge)$，都存在一个类型空间 $S_1(T)$，其可定义集的并半格与 L 上的滤子格同构（即向上封闭且对交封闭的集合）。[8] 从某种意义上说，这是定理 1.16（尤其是引理 1.10 的第 2 部分）的推广；但与本节其他结果一样，我们只能构造出一个稳定理论。

可数交半格中的滤子格，与具有可数交稠密子集的完备格是一回事。[9] 这包括任意可数完备格，例如 $1 + \mathbb{Z} + 1$ 和 Rieger–Nishimura 格（即由一个生成元自由生成的 Heyting 代数），以及分析中许多熟悉的偏序，例如 $([0,1], \leq)$，还有模去 Lebesgue 测度为 0 的集合后的 $[0,1]$ 可测子集构成的布尔代数。

这一构造分为五个步骤。
(1) 我们将构造一个非紧的局部紧拓扑度量空间 $\mathbb{Y}_0(L)$（具有开度量），其可定义集半格就是所需的格。这个空间将是局部紧的，并具有一个连续函数 ν 到 $\mathbb{R}_{\geq 0}$

[7]即使在 $\mathbb{R}$ 的强极小理论中，取度量 $d(x,y) = \min(|x-y|, 1)$，可定义集半格也不是格。可以构造两个可定义集 D_0和 D_1，使它们在 $S_1(\mathbb{R})$ 中满足： $D_0 \cap D_1$ 是 $\mathbb{Z}$ 与强极小类型的并集。这不是可定义的，但 $\mathbb{Z}$ 的每个有限子集都是可定义的，由此可知 D_0 和 D_1 没有交。[8]事实上， $S_1(T)$的可定义子集的任意并集都将是可定义的，但这并不能直接由可定义集半格完备推出。例如，考虑一个离散理论 T，满足 $S_1(T)$是极不连通的。 $S_1(T)$的既开又闭子集构成的布尔代数是完备的，但并非所有既开又闭集的并集都是既开又闭的，因为并非所有开集都是闭集。[9]如果 $A \subseteq L$ 的每个元素都是 L 中某个（可能无限或为空的）子集的交，那么称集合 $A \subseteq L$ 为 $meet\text{-}dense$。

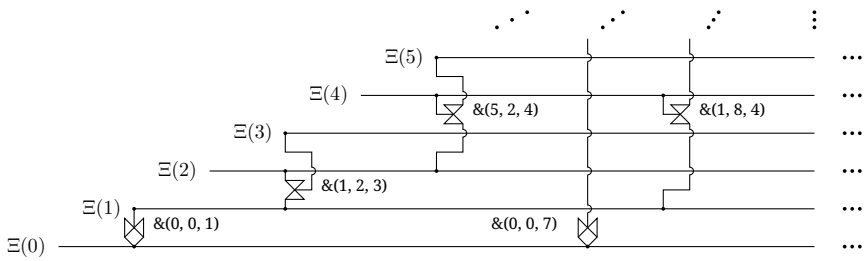

FIGURE 8. $\mathbb{Y}_0(L)$，其中显示了若干个 & 副本

满足这样的性质：对于每个 $r > 0$， $\nu^{-1}[[0, r]]$ 都是紧的。 L 的每个元素 a 都将对应于 $\mathbb{Y}_0(L)$ 的一个开子集 U_a ，并满足$a < b \Rightarrow U_a \supset U_b$。从概念上说，这与第 1 节中的构造类似，但我们需要将对应于每个元素的节点拉开，以避免将无穷多根导线焊接到同一个点上。滤子F将映射到可定义集 $\mathbb{Y}_0(L) \setminus \bigcap_{a\in F} U_a$。

(2) 我们再添加 $\mathbb{Y}_1(L)$ 和 $\mathbb{Y}_2(L)$ 的两个额外副本 $\mathbb{Y}_0(L)$，它们轮流在 $\nu(x) \to \infty$ 时于极限处任意接近 $\mathbb{Y}_0(L)$。当一个副本接近 $\mathbb{Y}_0(L)$ 时，另一个则会退至距离为 1 的位置，这样我们就可以在其中安全地将点焊接在一起，而不会破坏度量的开性。

(3) 我们会定期在 $\mathbb{Y}_0(L)$ 的两个额外副本中将点焊接在一起（在它们退至距离为 1 的位置），以便“短路”可定义集在 $\mathbb{Y}_1(L)$ 和 $\mathbb{Y}_2(L)$ 中的行为。特别是，对于任意可定义集 D 和任一 $i \in \{1, 2\}$，要么 $\mathbb{Y}_i(L) \subseteq D$，要么 $\mathbb{Y}_i(L) \cap D = \varnothing$。(4) 我们将 $\mathbb{Y}_1(L)$ 和 $\mathbb{Y}_2(L)$ 中的点焊接到 $\mathbb{Y}_0(L)$ 中对应于 L 的底部的某个点 0^L。这将确保空间的任何非空可定义子集都包含 $\mathbb{Y}_1(L)$ 和 $\mathbb{Y}_2(L)$ 的全部。(5) 我们对该空间作清晰单点紧化，加入点 ∞。任何非空可定义集必然包含 ∞。然后我们论证可定义集半格保持不变。

特别需要指出的是，这并未为我们提供一种通用方法，无法在保留可定义集半格的同时，将非紧的局部紧拓扑度量空间嵌入紧致拓扑度量空间，因为我们的方法将严重依赖于 $\mathbb{Y}_0(L)$ 的特殊形式。

2.5.1. 步骤 1：空间 $\mathbb{Y}_0(L)$。

定义 2.10。我们用 Ξ 表示集合 $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : x \geq y\}$，并将其视为具有诱导拓扑和离散度量的拓扑度量空间。

设 $(L, \wedge)$ 是一个带有给定枚举 $(\ell_n)_{n<\omega}$ 的可数交半格。我们始终假设 $\ell_0 = 0^L$（即 L 的最小元）。我们用 $\mathbb{Y}_0(L)$ 表示这样一个拓扑度量空间：它由 Ξ 以及对每个满足 $\ell_a \wedge \ell_b \leq \ell_c$ 的三元组 $\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{N}^3$，各取一个 & 的副本构成；输入顶点焊接到 $\langle \max(a, b, c)\ a\rangle$ 和 $\langle \max(a, b, c)\ b\rangle$，输出顶点焊接到 $\langle \max(a, b, c)\ c\rangle$。

我们用 $\Xi(a)$ 表示集合 $\{\langle x, a\rangle : x \geq a\}$，并用 $\&(a, b, c)$ 表示余积 y 对应于 (a, b, c) 的 $\mathbb{Y}_0(L)$ 中的 &，前提是它存在。（参见图8。）

对于任意滤子 $F \subseteq L$，我们用 $\mathbb{D}_0(F)$ 表示 $\mathbb{Y}_0(L)$ 的子集，该子集是以下各项的并集

- $\Xi(a)$ 对每个 a，满足 $\ell_a \notin F$ 且
- 对每个三元组 $\langle a_0, a_1, a_2\rangle$，满足 $\ell_{a_0} \wedge \ell_{a_1} \leq \ell_{a_2}$，$\&(a_0, a_1, a_2)$ 中在 $\&(a_0, a_1, a_2)$ 中可定义的唯一子集，并且对每个 $i < 3$，当且仅当 $\ell_{a_i} \notin F$ 时，包含焊接到 $\Xi(a_i)$ 的顶点。

我们将 ν_L 记作从 $\mathbb{Y}_0(L)$ 到 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的函数，它将 Ξ 的每个元素 $\langle x, y\rangle$映射到 x，并将每个 $\&(a, b, c)$ 的每个元素映射到 $\max(a, b, c)$。

定义 2.11。给定一个拓扑度量空间 X，X 的清晰切片是一个连续函数 $\nu\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，满足对于任意 $x, y \in X$，若 $\nu(x) \neq \nu(y)$，则 $d(x, y) = 1$。

引理 2.12。固定一个可数交半格 L。

(1) $\mathbb{Y}_0(L)$ 定义良好，且是具有开度量的拓扑度量空间。(2) $\mathbb{Y}_0(L)$ 是局部紧的。特别地，对于任意 $r \geq 0$，$\nu_L^{-1}[[0, r]]$ 是紧的。(3) 对于任意滤子 $F \subseteq L$，$\mathbb{D}_0(F)$ 定义良好且是闭集。(4) 函数 $\nu_L\colon \mathbb{Y}_0(L) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是连续的。(5) ν_L 是 $\mathbb{Y}_0(L)$ 的清晰切片。

证明。1 由引理 1.4 和 2.7 得出，其中我们将 $\mathbb{Y}_0(L)$ 视为清晰有向系统 $(\bigcup_{n<k} \Xi(\ell_n) \cup \bigcup\{\&(a, b, c)\colon a, b, c < k,\ \ell_a \wedge \ell_b \leq \ell_c\})_{k<\omega}$ 的直极限，其映射为自然包含映射。

2 由以下事实可得：对于任意 $r \geq 0$，只有有限多个 $\Xi(a)$ 及 $\&$ 的副本含有满足 $\nu(x) \leq r$ 的点 x。

对于 3，我们首先需要验证，对每个 $\&(a, b, c)$，所指定的 $\&(a, b, c)$ 中的可定义集确实存在。固定 $\langle a, b, c\rangle$，使得 $\ell_a \wedge \ell_b \leq \ell_c$。由命题 1.8 可知，对 $\&(a, b, c)$ 的可定义子集，唯一的限制是：如果它们不包含分别对应于 a 和 b 的顶点，就不能包含对应于 c 的顶点。因此，假设 $\ell_a \in F$ 和 $\ell_b \in F$（这样一来，$\&(a, b, c)$ 中分别对应于 a 和 b 的顶点不能包含在 $\mathbb{D}_0(F)$ 中）。那么，由于 F 是一个滤子，$\ell_a \wedge \ell_b \in F$，因此 $\ell_c \in F$ 也成立。所以，$\&(a, b, c)$ 中对应于 c 的顶点不包含在 $\mathbb{D}_0(F)$ 中，所需的可定义集由此存在。所得集合是闭集，因为它是闭集的局部有限并。

4 和 5 是显然的。 □

命题 2.13. 对任意可数交半格 L 和滤子 $F \subseteq L$，$\mathbb{D}_0(F)$ 是 $\mathbb{Y}_0(L)$ 的可定义子集。此外，映射 $F \mapsto \mathbb{D}_0(F)$ 是一个完备格同构，它将 L 中滤子的格（并运算取为交集）映到 $\mathbb{Y}_0(L)$ 的可定义子集并半格。

此外，$\mathbb{Y}_0(L)$ 的任意一族可定义子集的并，等于它们的集合论并集。

证明。取定 L 中的一个滤子 F。令 $(Y_k)_{k<\omega}$ 为引理 2.12 的证明中所描述的有向系统。由于这个系统是清晰的，根据引理 2.12，我们只需验证对每个 $k < \omega$，$\mathbb{D}_0(F) \cap Y_k$ 是可定义的；但这由引理 1.5 以及 $\Xi(a)$ 在 Ξ 中既开又闭这一事实立即可得。

根据定义，显然 $F \mapsto \mathbb{D}_0(F)$ 是保序且单射的，因此要证明它是完备格同构，只需验证它是满射。

固定一个可定义集 $D \subseteq \mathbb{Y}_0(L)$。每个 $\Xi(a)$ 都有一个连通开邻域U，使得每个 $x \in U$ 都清晰嵌入。因此，根据引理 1.7，我们有

对于每个 $\ell_a \in L$，要么 $\Xi(a) \subseteq D$，要么 $\Xi(a) \cap D = \varnothing$。令 $F(D) = \{\ell_a \in L : \Xi(a) \cap D = \varnothing\}$。我们只需说明 $F(D)$ 是一个滤子，且 $D = \mathbb{D}_0(F(D))$。为说明 $F(D)$ 是一个滤子，设 ℓ_a 和 ℓ_b 属于 $F(D)$。对于任意满足 $\ell_a \wedge \ell_b \leq \ell_c$ 的 $\ell_c \in L$，我们必有 $D \cap \&(a,b,c)$ 不包含其任一输入顶点。因此，根据引理 1.5 和命题 1.8，$D \cap \&(a,b,c) = \varnothing$，从而$D \cap \Xi(c) = \varnothing$ 且 $\ell_c \in F(D)$。由于对任意 ℓ_a、$\ell_b \in L$ 都可以如此处理，因此 $F(D)$ 是一个滤子。也容易看出 $\mathbb{D}_0(F(D)) = D$。

“此外”这一陈述源于以下事实：显然，对于 L 中任意一族 $(F_i)_{i\in I}$ 滤子，$\mathbb{D}_0\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathbb{D}_0(F_i)$。□

2.5.2. 步骤 2：轮流进行。现在我们将建立一些工具，用于构造的这一步。

定义 2.14. 给定一个拓扑度量空间 (X,τ,d)，带有清晰切片 ν，以及两个连续函数 f_1，f_2：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to (0,1],$，我们将拓扑度量空间 $\mathbb{W}(X,\nu,f_1,f_2)$ 记作 $X \times 3$（其中 $3 = \{0,1,2\}$ 具有离散拓扑，$X \times 3$ 赋予积拓扑），并配备唯一的度量 $d_{\mathbb{W}}$，使得

- $d_{\mathbb{W}}$ 在 X 的每个副本上延拓 d，
- 由 $\nu((x,i)) = \nu(x)$ 将函数 ν 延拓到 $X \times 3$ 后，所得函数是一个清晰切片，
- 对于满足 $\nu(x) = \nu(y)$ 的任意 $(x,0)$ 和 $(y,1)$，$d_{\mathbb{W}}(x,y) = \max(d(x,y)\ f_1(\nu(x)))$，
- 对于满足 $\nu(x) = \nu(y)$ 的任意 $(x,0)$ 和 $(y,2)$，$d_{\mathbb{W}}(x,y) = \max(d(x,y)\ f_2(\nu(x)))$，并且
- 对于满足 $\nu(x) = \nu(y)$ 的任意 $(x,1)$ 和 $(y,2)$，$d_{\mathbb{W}}(x,y) = \max(d(x,y), \min(f_1(\nu(x)) + f_2(\nu(x)), 1))$。

给定度量空间 (X,d) 中的任意两个集合 A 和 B，我们将用 $d^{\inf}(A,B)$ 表示量 $\inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$。回想一下，拓扑度量空间定义中的下半连续条件等价于以下条件：对于任意 $x,y \in X$，若 $d(x,y) > r$，则存在开邻域 $U \ni x$ 和 $V \ni y$，使得 $d^{\inf}(U,V) > r$。

引理 2.15. 设 X 是一个具有清晰切片 ν 的拓扑度量空间，且 f_1、f_2 :$\mathbb{R}_{\geq 0} \to (0,1]$ 是连续函数。

(1) 度量 $d_{\mathbb{W}}$ 定义良好。(2) $\mathbb{W}(X,\nu,f_1,f_2)$ 是一个拓扑度量空间。(3) 对于两种 $i \in \{1,2\}$，若 $x \in X \times \{i\}$ 且 $f_i(\nu(x)) = 1$，则 x 清晰嵌入于 $X \times \{i\}$ 当且仅当它清晰嵌入于 $\mathbb{W}(X,\nu,f_1,f_2)$。(4) 闭子集 $D \subseteq \mathbb{W}(X,\nu,f_1,f_2)$ 可定义，当且仅当对于每个 $i < 3$，$D \cap (X \times \{i\})$ 在 $X \times \{i\}$ 中可定义。(5) $d_{\mathbb{W}}$ 是开度量，当且仅当 d 是开度量。

证明。对于 1，由于 ν 是清晰切片，且度量取值于 $[0,1]$，我们只需对满足 $\nu(x) = \nu(y) = \nu(z)$ 的三元组 (x,y,z) 检验三角不等式；这很容易由以下事实得出：在 $\nu^{-1}(r)$ 上，度量 $d_{\mathbb{W}}$ 是度量 $\max(d,d_3)$，其中 d_3 是 3 上满足 $d_3(0,1) = f_1(\nu(x))$、$d_3(0,2) = f_2(\nu(x))$ 且$d_3(1,2) = \min(f_1(\nu(x)) + f_2(\nu(x)), 1)$ 的度量。由于 f_1 和 f_2 始终为正，这就是一个度量。

对于 2，$d_{\mathbb{W}}$ 细化拓扑这一事实显而易见，因此我们只需检验下半连续性。固定 $\mathbb{W}(X,\nu,f_1,f_2)$ 中的 (x,i) 和 (y,j)。若 $i = j$，那么对任意 $r < d(x,y)$，显然可以找到开邻域 $U \ni x$ 和 $V \ni y$ 使得$d^{\inf}(U,V) > r$，因为 X 是拓扑度量空间。因此假设 $i \neq j$。若 $\nu(x) \neq \nu(y)$，

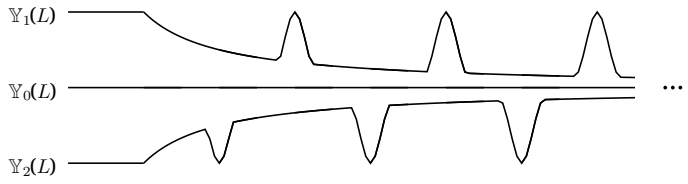

FIGURE 9. $\mathbb{Y}_{012}(L)$

那么可以假设 $\nu(x) < s < t < \nu(y)$。于是有 $x \in \nu^{-1}[[0,s)], y \in \nu^{-1}[(t,\infty)]$, 以及 $d_{\mathbb{W}}^{\inf}(\nu^{-1}[[0,s)], \nu^{-1}[(t,\infty)]) = 1 > r$，因此我们得到了所需的邻域。故假设 $\nu(x) = \nu(y)$。

若 $\{i,j\} = \{0,1\}$，则令 $g(u)$ 为 $f_1(u)$；若 $\{i,j\} = \{0,2\}$，则令其为 $f_2(u)$；若 $\{i,j\} = \{1,2\}$，则令其为 $\min(f_1(u) + f_2(u), 1)$。注意，$g(u)$ 始终是连续的。若 $d_{\mathbb{W}}((x,i),(y,j)) = g(\nu(x)) > r$，那么根据 ν 的连续性，将存在邻域 $U \ni (x,i)$ 和 $V \ni (y,j)$，使得 $U \subseteq X \times \{i\}$ 且 $V \subseteq X \times \{j\}$，从而 $d_{\mathbb{W}}^{\inf}(U,V) > r$。另一方面，若 $d_{\mathbb{W}}((x,i),(y,j)) > r \geq g(\nu(x))$，那么必有 $d_{\mathbb{W}}((x,i),(y,j)) = d(x,y)$。取 $U, V \subseteq X$，使得 $x \in U$, $y \in V$，且 $d^{\inf}(U,V) > r$。显然，我们有 $d_{\mathbb{W}}^{\inf}(U \times \{i\}, V \times \{j\}) > r$，故证毕。

3 显然。4 由可定义性具有局部性质这一事实得出。

对于 5，首先注意到开性会传递到开子空间，因此如果 $d_{\mathbb{W}}$ 是一个开度量，那么 d 是一个开度量。现在假设 d 是一个开度量。固定一个开集 $U \subseteq \mathbb{W}(X, \nu, f_1, f_2)$ 和一个 $r > 0$。假设 $(x,i) \in U^{<r}$。我们需要证明 $x \in \text{int } U^{<r}$。如果 $r > 1$，这显然成立，因此假设 $r \leq 1$。如果存在一个 $(y,i) \in U$ 使得 $d(x,y) < r$，那么由 d 的开性即可得证，因此假设不存在这样的 $(y,i) \in U$。必定存在一个 $(y,j) \in U$，满足 $j \neq i$，使得 $d_{\mathbb{W}}((x,i),(y,j)) < r$。由于 $r \leq 1$，这意味着 $\nu(x) = \nu(y)$。令 $g(u)$ 按照前面的方式定义。注意，根据定义，我们有 $g(\nu(x)) < r \leq 1$。找一个区间 $(s,t) \ni \nu(x)$，使得对于任意 $u \in (s,t)$，$g(u) < r$。现在我们有

$$x \in \{(z,i) : (\exists (w,j) \in U) d(z,w) < r\} \cap \nu^{-1}[(s,t)] \subseteq U^{<r}.$$

集合 $\{(z,i) : (\exists (w,j) \in U) d(z,w) < r\}$ 根据 d 的开性是开集，而集合 $\nu^{-1}[(s,t)]$ 根据 ν 的连续性是开集。由定义 $d_{\mathbb{W}}$ 可知，它们的交集是 $U^{<r}$ 的子集，这一点显然成立，因此 $x \in \text{int } U^{<r}$，如所需。□

固定两个连续函数 $h_1, h_2 \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to (0,1]$，满足

- $h_1(0) = 1$,
- 对于每个奇数 $n \in \mathbb{N}$, $h_1(n) = 1$,
- 对于每个偶数 $n \in \mathbb{N}$, $h_2(n) = 1$，并且
- 对于每个满足 $x \geq 1$ 的 x，$\min(h_1(x), h_2(x)) = \frac{1}{x}$。

显然，这样的函数存在。

定义 2.16. 我们用 $\mathbb{Y}_{012}(L)$ 表示空间 $\mathbb{W}(\mathbb{Y}_0(L), \nu_L, h_1, h_2)$（图 9）。我们将把 $\mathbb{Y}_0(L)$ 与 $\mathbb{Y}_0(L) \times \{0\}$ 视为相同，并且对于这两种 $i \in \{1,2\}$，我们都用 $\mathbb{Y}_i(L)$ 表示 $\mathbb{Y}_0(L) \times \{i\}$。

2.5.3. 步骤 3-5：完成构造。

定义 2.17. 我们将 $\mathbb{Y}(L)$ 记作 $\mathbb{Y}_{012}(L)$，其中以下各组点彼此焊接：

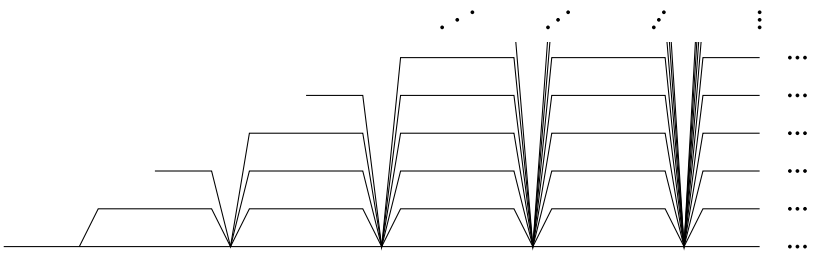

FIGURE 10. 定义 2.17 第 1 部分所述的焊接

（1）对于每个奇数 n，我们将点 $\{(\langle n,m\rangle,1):\langle n,m\rangle\in\Xi,\ m\le n\}\subseteq\mathbb{Y}_1(L)$ 焊接在一起（图 10）。（2）对于每个偶数 n，我们将点 $\{(\langle n,m\rangle,2):\langle n,m\rangle\in\Xi,\ m\le n\}\subseteq\mathbb{Y}_2(L)$ 焊接在一起。（3）我们将点 $\{(\langle 0,0\rangle,i):i<3\}$ 焊接在一起。

我们将 π_{012} 记作从 $\mathbb{Y}_{012}(L)$ 到 $\mathbb{Y}(L)$ 的商映射。我们也将 ν 视为定义在 $\mathbb{Y}(L)$ 上的函数，它满足：对于任意 $x\in\mathbb{Y}_{012}(L)$，$\nu(\pi_{012}(x))=\nu(x)$。

注意，根据 $d_{\mathbb{W}}$ 的定义以及我们对 h_1 和 h_2的选择，被焊接的点都清晰嵌入。还要注意，尽管我们在焊接无穷多个点，但对于每个 $r>0$，我们在$\nu^{-1}[[0,r]]$中只焊接有限多个点。最后，注意 $\nu:\mathbb{Y}(L)\to\mathbb{R}_{\ge0}$ 是良定义的。

引理 2.18。固定一个可数交半格 L，它带有一个给定的枚举 $(\ell_n)_{n<\omega}$，满足 $\ell_0=0^L$。

(1) $\mathbb{Y}(L)$ 是一个具有开度量的良定义拓扑度量空间。(2) 闭集 $D\subseteq\mathbb{Y}(L)$ 是可定义的，当且仅当 $D=\varnothing$ 或 $D\cap\pi_{012}[\mathbb{Y}_0(L)]$ 在 $\pi_{012}[\mathbb{Y}_0(L)]$ 中是可定义的，并且 $\pi_{012}[\mathbb{Y}_1(L)\cup\mathbb{Y}_2(L)]\subseteq D$。(3) $\mathbb{Y}(L)$ 具有清晰单点紧化。

证明。1 由引理 1.5 和引理 2.7 得出，其中我们将 $\mathbb{Y}(L)$ 视为拓扑度量空间有向系统 $(\{x\in\mathbb{Y}(L):\nu(x)\le k\})_{k<\omega}$ 的极限。

对于 2，如果 $D\subseteq\mathbb{Y}(L)$ 是可定义的，那么根据引理 1.5 和 2.6，我们有 $D\cap\pi_{012}[\mathbb{Y}_0(L)]$ 是可定义的。根据命题 2.13，如果 $D\cap\pi_{012}[\mathbb{Y}_0(L)]$ 非空，那么 $\pi_{012}[\Xi(0)]\subseteq D$（因为我们假设 $\ell_0=0^L$）。另一方面，对于 $\mathbb{Y}_1(L)$ 和 $\mathbb{Y}_2(L)$，相对于它们各自的 $\Xi(0)$ 副本，情况也相同；但鉴于其中被焊接在一起的点，我们有：如果一个相对可定义集 $D\subseteq\pi_{012}[\mathbb{Y}_i(L)]$（对于某个 $i\in\{1,2\}$）包含 $\mathbb{Y}_i(L)$ 的 $\Xi(0)$ 副本，那么它必然包含 $\mathbb{Y}_i(L)$ 的 Ξ 副本的全部，因此根据命题 1.8，它必然包含 $\mathbb{Y}_i(L)$ 的全部。因此，由于我们在 $\Xi(0)$ 的三个副本中都焊接了点，以下各项是等价的：

- $D\subseteq\mathbb{Y}(L)$非空。

对于某个 $i<3$，- $D\cap\pi_{012}[\mathbb{Y}_i(L)]\neq\varnothing$。

- $D\supseteq\pi_{012}[\Xi(0)]$。

对于某个 $i\in\{1,2\}$，- $D\supseteq\pi_{012}[\mathbb{Y}_i(L)]$。

对于两个 $i\in\{1,2\}$，- $D\supseteq\pi_{012}[\mathbb{Y}_i(L)]$。

因此，由引理 1.5 可得所需结论。

3 由引理 2.7 得出。 □

定理 2.19. 对于任意可数交半格 L，存在一个定义在可数语言中的稳定理论 T，使得 $S_1(T)$ 的可定义子集的并半格与 L 中的滤子格同构。此外，对于 $S_1(T)$ 的任意可定义子集族 $\mathscr{D}$，$\mathscr{D}$ 的并就是集合论并集。

证明。固定一个满足 $\ell_0 = 0^L$ 的 L 枚举 $(\ell_n)_{n<\omega}$。令 $\mathbb{Y}^*(L)$ 为 $\mathbb{Y}(L)$ 的清晰单点紧化（使用枚举 $(\ell_n)_{n<\omega}$ 计算），根据引理 2.18 第 3 部分，该紧化存在。令 ∞ 表示 $\mathbb{Y}^*(L)$ 中的无穷远点。

令 $D \subseteq \mathbb{Y}^*(L)$ 为一个可定义集。由于 $\mathbb{Y}(L)$ 没有非空的可定义紧子集（因为它们必须包含所有 $\pi_{012}[\Xi(0)]$），由命题 2.4 可知，若 D 非空，则它必须包含 ∞，并且 $D \cap \mathbb{Y}(L)$ 必须在 $\mathbb{Y}(L)$ 中可定义。

现在令 $D \subseteq \mathbb{Y}(L)$ 为 $\mathbb{Y}(L)$ 的一个非空可定义子集。我们需要论证 $D \cup \{\infty\}$ 是 $\mathbb{Y}^*(L)$ 的可定义子集。显然，$(D \cup \{\infty\}) \cap \mathbb{Y}(L)$ 在 $\mathbb{Y}(L)$ 中可定义，因此根据命题 2.4，我们只需验证对于每个 $r > 0$，$\mathbb{Y}^*(L) \setminus (\text{int } D^{<r})$ 都是紧的。根据引理 2.18 第 2 部分，D 包含了所有 $\pi_{012}(\mathbb{Y}_1(L) \cup \mathbb{Y}_2(L))$。根据度量的定义，对于任意满足 $\nu(x) > \frac{1}{r}$ 的 $x \in \mathbb{Y}_{012}(L)$，存在一个 $y \in \mathbb{Y}_1(L) \cup \mathbb{Y}_2(L)$，使得 $d(\pi_{012}(x)\ \pi_{012}(y)) < r$。因此，若 $x \in \mathbb{Y}(L)$ 满足 $x \notin D^{<r}$，则 $\nu(x) \leq \frac{1}{r}$。所有这类 x 的集合是紧的，因此 $\mathbb{Y}(L) \setminus (\text{int } D^{<r})$ 是紧的。由于我们可以对任意 $r > 0$ 执行此操作，根据命题 2.4，$D \cup \{*\}$ 在 $\mathbb{Y}^*(L)$ 中可定义。

因此，$\mathbb{Y}(L)$ 和 $\mathbb{Y}^*(L)$ 中的可定义集半格是同构的。任意并都等于集合论并集这一事实，可由命题 2.13 直接得出。

最后，$\mathbb{Y}^*(L)$ 是紧的，且具有开度量，这由引理 2.3 得出。因此，根据 [5,定理 5.2],，存在一个稳定理论 T，使得 $S_1(T)$ 与 $\mathbb{Y}^*(L)$ 等距同胚。由于 $\mathbb{Y}^*(L)$ 具有可数拓扑基，如果需要，我们可以找到 T 的一个可数约化 T'，使其具有相同的 1-类型空间。因此，我们可以假设 T 具有可数语言。□

References

[1] Ita¨ı Ben Yaacov。《拓扑度量空间与度量结构的扰动》。 *Logic and Analysis*，1 3 2008 ( ):235，July 。
[2] Ita ¨ *Journal of Logic and Analysis* 10 1 2010 Ben Yaacov。《拓扑度量空间上的利普希茨函数》。，。[3] Ita¨ı Ben Yaacov、Alexander Berenstein、C. Ward Henson 和 Alexander Usvyatsov。 *Modeltheory for metric structures*，收录于 *London Mathematical Society Lecture Note Series*第 2 卷，第 315–427 页。剑桥大学出版社，2008 年。[4] James Hanson。 *Definability and categoricity in continuous logic*。博士学位论文，威斯康星大学麦迪逊分校，2020年。[5] James Hanson。《连续逻辑中类型空间的拓扑度量刻画》。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2106.13261 页，2021年6月。已投稿。

Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD 20742, USA
Email address: jhanson9@umd.edu