arXiv:2302.02265v1 [math.OC] 5 Feb 2023

纳入旅行时间的网约车系统动态定价与调度控制排队模型

Amir Anastasios Alwan、Ata、周雨薇

芝加哥大学布斯商学院

2023年2月7日

摘要

系统管理者在一个受网约车应用启发的排队网络模型中制定动态定价和调度控制决策。该模型的一项创新之处在于纳入了旅行时间，但这也使问题无法进行精确分析。因此，我们研究该问题在重交通状态下的情形。在完全资源池化和共同出行分布的假设下，我们通过分析相应的贝尔曼方程，得到了问题的闭式解。基于该解，我们为排队系统提出一种策略，并通过仿真研究展示其有效性。

关键词—网约车、动态定价、匹配、扩散近似、重交通分析、随机控制

1 引言

本文研究了一个受出租车和网约车系统启发的排队模型的动态控制问题。在这些系统中，顾客和司机可以由平台通过网页或移动应用程序进行集中匹配。此外，平台还可以随时间动态调整价格。我们考虑一个划分为一组地理区域的城市。每个这样的区域都应被视为一个上车或下车地点。同时，汽车停留在这些区域内，等待接载顾客。我们采用排队模型研究这一问题，遵循运筹学文献中日益增多的相关论文。然而，大量相关文献都假设

上车地点与下车地点之间的旅行时间不存在，例如 Ata et al. (2020) 及其中的参考文献。我们模型的一个关键创新之处在于纳入了旅行时间，但这也导致分析难度显著增加。

我们假设平台（下文也称为系统管理者）有两种调控手段：定价和调度控制。她希望制定一种有效策略，通过动态定价和动态调度控制决策来最大化长期平均利润。我们允许价格随时间和客户位置变化。动态调整价格会产生两种相互竞争的影响。一方面，提高价格会增加平台每趟行程的收入。另一方面，顾客对价格敏感，因此价格越高，客户需求越低。派单是指将汽车与请求乘车的顾客进行匹配的过程，也是平台一项重要的运营决策。

我们将网约车或出租车系统建模为一个作业数量固定的闭合排队网络，作业数量记为 n。SPN 中有 I 个缓冲区、 I 个单服务器节点和一个无限服务器节点。“服务器”和“资源”这两个术语可互换使用，均指单服务器节点。同样，“缓冲区”和“类别”这两个术语也可互换使用。因此，缓冲区i中的作业称为类别 i作业，其中 $i = 1$、.....、 I。除了动态选择价格外，系统管理者还可以开展 J 种可能的（调度）活动，每种活动都对应一个服务器为某个缓冲区中的作业提供服务。在单服务器节点完成服务后，作业会被路由至无限服务器节点。随后，作业继续在无限服务器节点接受服务，之后再以概率路由的方式返回缓冲区。无限服务器节点用于建模旅行时间。这一过程会无限持续下去。

在我们的示例应用中，作业对应于在系统中持续循环的汽车。 I 缓冲区对应于 I 城市区域，汽车在此等待与顾客匹配。此外，单服务器节点的服务率可以理解为相应区域的客户到达率，而客户到达率取决于价格。因此，随着平台调整乘车价格，客户需求会随时间动态变化。活动对应于将汽车从一个区域派往另一地区，为一位到达的顾客提供服务。因此，单服务器节点的服务完成对应于汽车与顾客匹配。与顾客匹配后，汽车必须前往接载顾客，并将其送往

目的地。我们假设所有未能立即满足的顾客请求都会流失。在排队模型中，这对应于作业被路由至无限服务器节点并在那里接受服务。也就是说，无限服务器节点对汽车从最初派单到顾客下车这段行程时间进行建模。在无限服务器节点完成服务后，作业会被路由至与顾客目的地区域相对应的缓冲区。正如排队论文献中通常采用的做法，这一过程通过概率路由结构建模。尽管我们研究的SPN 源于网约车和出租车系统，但下文将使用文献中通行的排队术语。不过，在需要提供直观说明或解释时，我们偶尔会提及作为研究动机的应用。

如上所述，纳入旅行时间会使问题变得复杂得多。为简化分析，我们假设只有一个出行节点。这一假设有两层含义：第一，任意两个区域之间的旅行时间服从相同的分布；第二，在无限服务器节点完成服务后，所有作业类别都采用相同的概率路由结构。诚然，这是一个限制性假设，但它简化了分析，并使我们能够将旅行时间纳入模型。我们认为，本模型是分析纳入旅行时间的共享出行网络模型的重要起点。

然而，即使在单一出行节点的假设下，这个问题仍无法进行精确分析。因此，我们考虑在重交通渐近区制下对其作扩散近似。在该区制下，满足所谓的完全资源池化条件时（参见 Harrison 和 L´opez （ 1999 年）），我们对问题进行解析求解，并推导出最优动态价格的闭式解。

尽管存在这些限制性假设，本文仍有两项贡献。第一，本文将旅行时间纳入模型，并在重交通状态下对由此产生的动态定价与调度控制问题进行解析求解。第二，本文在方法论上有所贡献：求解了无界域上的漂移率控制问题，这一问题本身也可能具有研究价值。

本文其余部分结构如下。第2节回顾相关文献。第3节介绍网约车平台的控制问题，并在第4节正式推导相关的布朗控制问题。第5节建立等价工作负荷表述

并通过研究相关的贝尔曼方程，在第6节和第7节对其求解。第8节结合原始控制问题的背景，阐释等价工作负荷表述的解，并提出定价与派单策略。第9节通过仿真研究展示拟议策略的有效性。第10节总结全文。本文有两个附录：附录 A 对布朗控制问题进行正式推导，附录B给出其他证明。

2 文献综述

本文涉及两类文献：网约车和出租车系统的建模与分析，以及排队网络的动态控制。

近年来，若干学者使用排队网络对网约车和出租车系统进行建模。现有文献大多关注定价、派单（匹配）和调度决策如何提升系统性能。从建模角度看，Ata等人（2020）和Braverman等人（2019）与我们的研究最为接近。Ata等人（2020）将网约车系统建模为一个带有派单和调度控制的封闭随机处理网络。在重交通条件下，他们用布朗控制问题（BCP）近似原控制问题。将BCP化简为等价工作负荷表述后，他们提出了一种数值求解算法。然而，他们的模型未纳入行程时间，而我们的模型纳入了。引入行程时间使得在扩散缩放下的重交通极限问题更具挑战性。另一方面，Braverman等人（2019）将网约车系统建模为一个包含行程时间和调度控制的闭式排队网络。通过求解一个适当的线性规划，他们提出了一种静态路径选择策略，并证明该策略在流体缩放下的大市场渐近机制中渐近最优。Hosseini等人（2021）扩展了Braverman等人（2019）的分析，设计了一种动态调度策略，在实际问题实例中的表现优于渐近最优的静态策略。在一项相关研究中，Zhang和Pavone（2016）结合单服务器和无限服务台排队模型，研究自动驾驶车辆的控制。作者通过求解线性规划得出一种开环策略。在此基础上，他们还提出了一种有效的动态再平衡策略。

另有若干论文处于网约车与排队研究的交叉领域，但其建模选择和分析方法与我们的研究差异更大。Banerjee 等（2015）研究单区域模型中的定价问题，该模型只有一个旅行时间节点；他们表明，最优静态定价策略表现良好。Banerjee 等（2021）构建了一个近似框架，用于研究在多种目标函数和各种系统约束下，采用定价、匹配和重新配置策略的车辆共享系统。具体而言，他们开发了算法，并证明随着各区域汽车数量的增加，所得策略的近似比会提高。Banerjee 等（2019）研究可用于网约车系统建模的一般闭式排队网络中的匹配问题。他们提出了一类不使用任何需求到达率信息的状态相关匹配策略。在完全资源池化假设下，他们证明，随着网络中供给单元数量增加，采用任何此类策略时的未满足需求比例都会呈指数级下降。Af`eche等人（2018）构建了一个博弈论流体模型，研究存在策略性司机的网约车系统中的准入控制和重新配置。他们的分析揭示了空间需求失衡，以及需求准入控制如何影响网络中司机策略行为等问题。在另一项相关研究中，Af`eche等人（2018）研究了需求冲击下的最优动态定价和¨派单控制。Ozkan 和 Ward（2020）将网约车系统建模为一个包含不耐烦顾客的开放排队网络模型。他们提出了一种匹配策略，并证明该策略在大市场情形下的流体尺度中渐近最优。Ozkan（2020）研究了一个包含策略性司机的流体模型，该模型同时纳入定价与匹配决策，并凸显了同时考量多种控制措施的重要性。Besbes 等（2021b）将网约车系统建模为空间多服务台队列，研究接客时间和行程时间对其容量规划的影响。Chen 等（2020）提出了渐近最优的静态和动态策略。Varma 等（2022）研究了一种开放网络模型，并提出了一个渐近最优策略。其他采用空间模型研究定价问题的论文包括Yang 等（2018）、Jacob, J. 和 Roet-Green, R（2021）以及Hu 等（2022）。

其他一些研究者没有使用排队论模型，而是关注网约车和出租车系统的不同方面，其中包括 Wang 等（2017）、Ata 等人（2019）、Bertsimas 等（2019）、Besbes 等（2021a）、Bimpikis 等（2019）、Cachon 等（2017）、Castillo 等（2021）、Chen 和 Sheldon（2016）、Garg 和 Nazerzadeh（2019）、Gokpinar 和 Selcuk（2019）、Guda

和 Subramanian（2019）、He 等（2020）、Hu 等（2022）、Hu 和 Zhou（2021）、Korolko 等（2020）以及 Lu 等（2018）。

本文也对排队系统动态控制的广泛文献作出了贡献。该领域有两种主要方法：(i) 马尔可夫决策过程（MDP）建模；(ii) 重交通近似。直观而言，第5–7节研究的工作负载问题，与采用马尔可夫决策过程建模研究的服务率和准入控制问题相关，参见 Stidham and Weber（1989）及其中的参考文献。最为相关的论文是 George and Harrison（2001）和 Ata（2005）。这些论文研究了 $M/M/1$ 队列的服务率控制问题，并给出了闭式解；另见 Ata and Shneorson（2006）、Ata and Zachariadis（2007）、Adusumilli and Hasenbein（2010）、Kumar等人（2013）。

第二种方法由 Harrison（1988）开创，另见 Harrison（2000，2003）。具体而言，许多论文研究了重交通近似下出现的一维扩散过程的漂移率控制问题，参见 Ata等人（2005）、Ata（2006）、Ghosh and Weerasinghe（2007，2010）、Rubino and Ata（2009）、Kim and Ward（2013）以及 Ata and Tongarlak（2013）。近来，Ata and Barjesteh（2020）和 Ata等人（2021）研究了不同背景下出现的漂移率控制问题，例如志愿者容量管理和备货型制造。本文所求解的漂移率控制问题，其分析与上述论文有显著差异，因为该问题涉及漂移率的二次成本、无界的可行漂移率集合以及无界状态空间。这些特征的结合使分析更具挑战性。本文还在建模方面作出贡献，构建了纳入旅行时间的动态派单与定价控制问题。此外，本文提出了一个在重交通极限下可解析处理的近似模型，并给出了其闭式解。

最后，本文借鉴了含无限服务器队列的闭合排队网络渐近分析方面的文献，例如 Kogan 等人（1986年）、Smorodinskii（1986年）、Kogan和Lipster（1993 年），以及 Krichagina 和 Puhalskii（1997年）的研究。

3 模型

受引言中所述出租车和网约车应用的启发，我们考虑一个包含 n 个作业、 I 个缓冲区、 I 个单服务器节点和一个无限服务器节点的闭合排队网络。图1展示了一个包含 $I = 4$ 和 $J = 10$ 的示例网络；有关此示例的动机，另请参阅第9节。

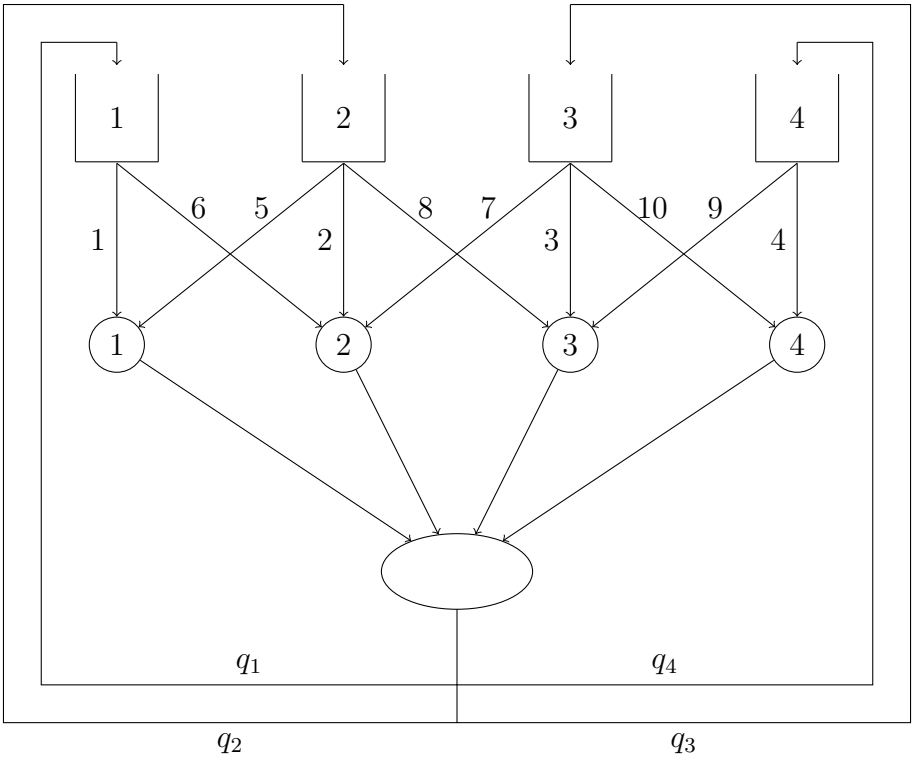


图1：一个包含四个区域和十项调度活动的网络。空心矩形表示缓冲区，圆形表示单服务器，椭圆表示无限服务器节点。缓冲区与服务器之间的箭头表示这十项活动。箭头上的数字表示活动的索引。活动1、2、3和4是本地调度活动，活动5至10是非本地调度活动。从无限服务器节点指向缓冲区的箭头表示网络中作业的概率性重新路由。

如前所述，除了动态定价决策外，系统管理者还会动态地做出派单决策。她可以选择 J 项派单活动。每项派单活动都涉及一个独特的缓冲区和一个独特的服务器——我们交替使用“单服务器节点”和“服务器”这两个术语。令 $s(j)$ 和 $b(j)$ 分别表示与活动 j 对应的服务器和缓冲区，其中 $j = 1$、.....、 J。换言之，活动 j 由服务器 $s(j)$ 执行，并由其服务

缓冲区 $b(j)$ 中的作业。我们用容量消耗矩阵 A 描述活动与资源之间的关联，用归属矩阵C描述活动与缓冲区之间的关联。也就是说， A 是如下给出的 $I \times J$ 矩阵

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } s(j) = i, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1}$$

且 C 是由下式给出的 $I \times J$ 矩阵

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } b(j) = i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

令 A_i 表示服务器 i 执行的活动集合。同样，令 C_i 表示为缓冲区 i提供服务的活动集合。我们有

$$\mathcal{A}_i = \{j : A_{ij} = 1\}, \tag{3}$$

$$\mathcal{C}_i = \{j : C_{ij} = 1\}. \tag{4}$$

对于每项活动 $j = 1, \ldots\ldots, J$，我们关联一个单位速率泊松过程 N_j。我们还将一个单位速率泊松过程 N_0与无限服务器节点关联起来。过程 N_0、N_1、……、N_J相互独立。无限服务器节点的服务率记为 $\eta > 0$。我们将时刻 t活动 j的服务率记为 $\mu_j(t)$，其中 $t \geq 0$且 $j = 1$、……、J。系统管理者随时间动态选择价格 $p(t) = (p_i(t))$，其中 $p_i(t)$表示在时刻 t向寻求从区域 i 乘车的顾客收取的价格。读者将在下文看到，这些价格最终决定活动服务率 $\mu_j(t)$，其中 $j = 1$、……、J和 $t \geq 0$。我们假设，对于 $t \geq 0$， $p_i(t) \in [p_{_i}, p_i]$，其中$0 \leq p_{_i} < p_i < \infty$。需求的价格敏感性由非负需求函数$\Lambda : \mathsf{P} \to \mathbb{R}_+^I$刻画，其中 $\mathsf{P} = \prod_{i=1}^{I}[p_{_i}, p_i]$。具体而言，时刻 t的需求率向量记为 $\lambda(t)$，其定义为[1]

$$\lambda(t) = \Lambda\left(p(t)\right) = \left(\Lambda_1(p_1(t)), \ldots, \Lambda_I(p_I(t))\right)', \quad t \geq 0. \tag{5}$$

为简化分析，我们作出如下单调性假设：

假设1。 需求率函数随价格严格递减，即 $\Lambda_i(p_i)$ 严格

[1]区域 i 中的客户需求速率 $\lambda_i(t)$ 仅取决于价格 $p_i(t)$。

随 p_i 递减，适用于 $i = 1,\ldots, I$。

根据这一单调性假设可知， $\Lambda_i(\cdot)$ 存在反函数，记为$\Lambda_i^{-1}(\cdot)$。此外，可以用随时间动态选择需求率向量 $\lambda(t)$来替代定价决策。这便于我们的分析。为采用这一方法继续分析，我们首先将可行需求率向量集合 $\mathrm{L} \subseteq \mathbb{R}_+^I$ 定义如下：

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{I} \mathcal{L}_i, \tag{6}$$

其中， $\mathrm{L}_i = [\Lambda_i(p_i)\ \Lambda_i(^{p}{}_i)]$ 适用于 $i = 1, \ldots\ldots, I$。记 $\Lambda^{-1}(x) = (\Lambda_1^{-1}(x_1)\ldots\ldots, \Lambda_I^{-1}(x_I))'$，其中 $x \in \mathrm{L}$，容易看出 Λ^{-1} 是 Λ的反函数。将需求率视为平台的定价控制，我们定义收益率函数 $\pi : \mathrm{L} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{I} x_i \Lambda_i^{-1}(x_i), \quad x \in \mathcal{L}. \tag{7}$$

我们还对收益率函数作出以下正则性假设：

假设2。 收益率函数 π 满足：（a）在$\mathcal{L}$上三次连续可微且严格凹；（b）在$\mathcal{L}$的内部存在一个极大值点。

在单服务器节点完成服务后，每个作业接下来都会进入无限服务器节点。在该节点完成服务后，作业接下来以概率 $q_i > 0$ 进入缓冲区 i $i = 1$、……、I，其中 $\sum_{i=1}^{I} q_i = 1$。路由概率向量 $q = (q_i)$ 与作业在进入无限服务器节点之前离开的单服务器节点无关。换言之，不同来源地的顾客目的地分布相同。这是一个限制性假设，但它大大简化了分析，并使我们能够将旅行时间纳入模型。正如引言中所述，我们认为这是分析纳入旅行时间的共享出行网络模型的重要第一步。为了从数学上对这一概率路由结构建模，我们令 $\psi = \{\psi(l)\ \ l \geq 1\}$ 表示一个由 I 维独立同分布随机向量构成的序列，其满足 $P(\psi(1) = e_i) = q_i$，对于 $i = 1$、……、I，其中 e_i 是一个 I 维向量，其第 i 个分量为 1，其余分量均为 0。接下来令

$$\Psi(m) = \sum_{l=1}^{m} \psi(l) \quad \text{for} \quad m \geq 1, \tag{8}$$

我们注意到， $\Psi(m)$ 的第 i 个分量，记为 $\Psi_i(m)$，表示在无限服务器节点完成服务的前 m 个作业中，被路由至缓冲区 i 的作业总数。

如前所述，系统管理者必须做出两类控制决策。首先，她必须选择一个 I 维需求率过程 $\lambda = \{\lambda(t) \ t \geq 0\}$。这等同于做出动态定价决策。请回想，单服务器节点 i 的顾客到达过程与其服务过程相对应。由于这些顾客可以由汽车运送至与活动 $j \in \mathcal{A}_i$ 相对应的区域，我们令

$$\mu_j(t) = \lambda_i(t) \quad \text{for} \quad j \in \mathcal{A}_i, \quad i = 1, \ldots, I, \quad \text{and} \quad t \geq 0. \tag{9}$$

这定义了 J 维服务率过程 $\mu = \{\mu(t) \ t \geq 0\}$，其中 $\mu(t) = (\mu_j(t))$。其次，她必须决定服务器如何将时间分配给各种（派单）活动。该决策采用累计分配过程 $T_j = \{T_j(t) \ t \geq 0\}$ 的形式，对应于 $j = 1$、.....、 J。具体而言，$T_j(t)$ 表示服务器 $s(j)$ 在 $[0, t]$ 期间用于活动 j （服务类别 $i(j)$ 的作业）的累计时间。

接下来，我们介绍描述作业在网络中移动的系统动态方程。为此，对于 $i = 1, \ldots, I$，令 $Q_0(t)$ 和 $Q_i(t)$ 分别表示时刻 t 无限服务器节点和缓冲区 i 中的作业数量。我们还令 $A_0(t)$ 和 $A_i(t)$ 分别表示截至时刻 t 已到达无限服务器节点和缓冲区 i 的作业总数，其中 $i = 1, \ldots, I$。于是有

$$A_0(t) = \sum_{j=1}^{J} N_j \left(\int_0^t \mu_j(s) \, dT_j(s) \right), \quad t \geq 0, \tag{10}$$

$$A_i(t) = \Psi_i \left(N_0 \left(\eta \int_0^t Q_0(s) \, ds \right) \right), \quad t \geq 0. \tag{11}$$

此外，对于 $i = 1, \ldots, I$，令 $D_0(t)$ 和 $D_i(t)$ 分别表示截至时刻 t 离开无限服务器节点和缓冲区 i 的作业总数，则有

$$D_0(t) = N_0 \left(\eta \int_0^t Q_0(s) \, ds \right), \qquad t \geq 0, \tag{12}$$

$$D_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{C}_i} N_j \left(\int_0^t \mu_j(s) \, dT_j(s) \right), \quad t \geq 0. \tag{13}$$

我们将 $(I + 1)$ 维过程 $Q = (Q_0, \ Q_1, \ \ldots, \ Q_I)'$ 称为队列长度过程，其

动态过程如下:

$$Q_i(t) = Q_i(0) + A_i(t) - D_i(t) \quad \text{for} \quad i = 0, 1, \ldots, I \quad \text{and} \quad t \geq 0, \tag{14}$$

其中， $Q(0)$ 是初始队列长度向量，满足 $\sum_{i=0}^{I} Q_i(0) = n$。令 $I_i(t)$ 表示服务器 i 在区间 $[0, t]$ 内闲置的累计时间，适用于 $i = 1, \ldots, I$，则有

$$I_i(t) = t - \sum_{j \in \mathcal{A}_i} T_j(t), \quad t \geq 0, \tag{15}$$

或者用矩阵表示法表示为，对于 $t \geq 0$， $I(t) = et - AT(t)$。注意，方程（10）–（14）意味着

$$\sum_{i=0}^{I} Q_i(t) = \sum_{i=0}^{I} Q_i(0) = n \quad \text{for} \quad t \geq 0,$$

这表明 闭合网络中系统内的作业总数保持不变 .

为了正式阐述平台的目标及其控制问题，我们引入两个成本参数向量 $h = (h_0, h_1, \ldots, h_I)' \in \mathbb{R}_+^{I+1}$和 $c = (c_1, \ldots, c_I)' \in \mathbb{R}_+^{I}$。在网约车系统中，平台为每辆行驶中的汽车按 h_0 的费率承担燃料成本。此外，对于$i = 1, \ldots, I$，每辆在区域 i等待接单的汽车都会产生费率为 h_i的持有成本，这反映了没有司机喜欢闲坐这一事实。我们假设，对于所有 $i = 1, \ldots, I$， $h_i > h_0$。最后，对于$i = 1, \ldots, I$，服务器 i每闲置一个单位时间，就会产生费率为 c_i的闲置成本。这代表了接载到达区域 i 的顾客所造成的收入损失和商誉损失。[2] 控制策略表示为（T, λ），并且必须满足以下条件:

$$T, \lambda \text{ are nonanticipating with respect to } Q, \tag{16}$$

$$T, I \text{ are nondecreasing and continuous with } T(0) = I(0) = 0, \tag{17}$$

$$\lambda(t) \in \mathbb{L} \text{ 对所有 } t \geq 0 \text{ 均成立}, \tag{18}$$

$$Q_i(t) \geq 0 \text{ for all } t \geq 0, \, i = 0, 1, \ldots, I. \tag{19}$$

方程 (16) 表示策略只能依赖可观测量；鉴于过程 T 和 I 的含义，方程 (17) 是自然成立的。方程 (18) 要求 λ 属于可实现需求率的集合。方程 (19) 表示队列长度非负。到达的客户需求通过以下方式分配给在各个缓冲区中等待的汽车

[2] 可以自然地假设 $c_i \geq p_i^* = \Lambda_i^{-1}(\lambda_i^*)$，其中 λ^* 定义见下文方程 (23) .

调度活动 $j = 1, \ldots\ldots, J$，例如参见方程 (10) 和 (13)。给定控制策略 (T, λ)，我们将截至时间 t 收集的累计利润定义为

$$V(t) = \int_0^t \left[\pi(\lambda(s)) - h'Q(s)\right] ds - c'I(t), \quad t \geq 0. \tag{20}$$

平台的控制问题是选择一个策略（T, λ），以便

$$\text{maximize} \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} E[V(t)] \tag{21}$$

$$\text{subject to} \quad (10)\text{–}(20). \tag{22}$$

由于原始形式的控制问题（21）–（22）不便于精确分析，下一节将探讨一个相关的控制问题，该问题处于汽车数量不断增加的渐近状态，并推导出近似布朗控制问题。布朗控制问题是对原问题的近似，但其可处理性要高得多。

4 布朗控制问题

本节沿用 Harrison（1988）所采用的类似方法，对第3节提出的控制问题建立布朗近似。许多作者都证明了重交通极限定理，以严格论证此类布朗近似的合理性，例如 Harrison（1998）、Williams（1998）、Kumar（2000年）、Bramson 和 Dai（2001）、Stolyar（2004）、Bell 和 Williams（2001、2005）、Ata 和 Kumar（2005）、Ata 和 Olsen（2009年、2013年）及其中的参考文献。本文不尝试证明严格的收敛定理，而是请读者参阅 Harrison（1988、2000年、2003年），了解我们所采用近似过程的详细且直观的论证。

近似过程首先求解以下静态定价问题（假设2保证最优解的存在），这有助于我们阐明后续数学推导所依据的重交通假设。我们设

$$\lambda^* = \arg\max_{\lambda\in\mathcal{L}} \pi(\lambda). \tag{23}$$

回顾假设2，我们假设 λ^* 位于 L 的内部，即 $\lambda^* \in$int(L)。向量 λ^*表示忽略系统中的波动时能够带来最高收入率的平均需求率

。请注意，各项活动对应的名义服务率由[3]给出

$$\mu_j^* = \lambda_i^* \quad \text{for} \quad j \in \mathcal{A}_i. \tag{24}$$

利用这些名义服务率，我们定义投入产出矩阵 $I \times J$ R 如下：

$$R_{ij} = \mu_j^* C_{ij}, \quad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J. \tag{25}$$

按照 Harrison（1988，2000年）的解释， R_{ij} 表示在名义服务率 μ_j^*下，活动 j每单位活动消耗的类别 i 物料的长期平均速率，其中 $j = 1$、.....、 J。我们还定义 I 维输入向量 ν 如下：

$$\nu_i = q_i \eta, \quad i = 1, \ldots, I. \tag{26}$$

我们将 ν_i 解释为从无限服务器节点流入缓冲区 i 的长期平均速率。为了陈述重交通假设，我们先引入本地活动的概念。在示例应用的背景下，它对应于某一区域内的顾客由同一区域内的汽车接载。按照排队论中的标准术语，它对应于服务器处理自身缓冲区中的顾客。不失一般性，我们假设前 I 项活动为本地活动。也就是说，

$$s(j) = b(j) = j \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, I.$$

这等价于假设矩阵 A 和 C 的前 I 列构成 $I \times I$ 维单位矩阵。下面给出重交通假设：

假设 3. 存在唯一的 $x^* \in \mathbb{R}^J$ 使得

$$x_j^* = \min\{\lambda_j^*, \nu_j\}, \quad j = 1, \ldots, I, \tag{27}$$

$$Rx^* = \nu, \tag{28}$$

$$Ax^* = e, \tag{29}$$

[3]具体而言，对于所有的 j, $\mu_j^* = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i^* A_{ij}$。这是因为对于每个 $j = 1, \ldots, J$，仅存在一个 i使得 $A_{ij} \neq 0$。也就是说，一项活动只使用一台服务器。采用矩阵表示法， $\mu^* = A'\lambda^*$，其中 A'是 A的转置。

$$x^* \geq 0. \tag{30}$$

向量 x^* 称为名义处理计划，分量 x_j^* 可解释为活动 j 的长期平均进行速率。方程（30）表示所有名义活动水平都必须非负。方程（29）意味着在名义处理计划下，服务器得到充分利用。方程（28）是流量平衡条件，表示在名义处理计划下，离开缓冲区的作业速率等于进入缓冲区的作业速率。请注意，根据方程（25）–（28），对于每个 i，都有 $\sum_{j\in\mathcal{C}_i}\mu_j^* x_j = q_i\eta$，对 i求和后即可推出 $(\mu^*)'x^* = \eta$。我们将 $(\mu^*)'x^*$ 解释为在名义处理计划下进入无限服务器节点的作业速率，而假设 3 确保该速率等于无限服务器节点的服务率。[4] 方程（27）确保本地活动以最大速率进行。在示例应用的背景下，这意味着尽可能由同一区域内的汽车满足客户需求。

按照 Harrison (2000) 的做法，我们称活动 j basic，当 $x_j^* > 0$ 时；若 $x_j^* = 0$，则称其为非基本活动。令 b 表示基本活动的数量。经过必要的重新编号后，不失一般性地假设活动 1、.....、b为基本活动，而活动 $b+1$、.....、 J为非基本活动。请注意，其中前 I 个是本地活动。与 Harrison (2000) 的做法相同，我们将矩阵 R和 A 分块如下：

$$R = [H \quad K] \qquad \text{and} \qquad A = [B \quad N], \tag{31}$$

其中 H， $B \in \mathbb{R}^{I\times b}$ 且 K， $N \in \mathbb{R}^{I\times(J-b)}$。子矩阵 H 和 B 分别对应于 R 和 A的基本活动，而子矩阵 K 和 N 对应于非基本活动。

为了推导近似布朗控制问题，我们考虑一个由作业总数 n 索引的一系列紧密相关的系统。当 $n \to \infty$ 时，该序列的形式极限就是近似布朗控制问题。我们在与序列中第 n 个系统相关的量上标注上标 n。具体而言，我们定义缩放需求率

[4]根据经典 $M/M/\infty$ 队列的直觉，该条件意味着，随着系统中的作业数量增加，即当 $n \to \infty$ 时，名义处理计划下无限服务器节点中的作业稳态比例等于 1。

函数 $\Lambda^n : \mathrm{P} \to \mathbb{R}_+^I$ 如下：

$$\Lambda^n(x) = n\Lambda(x), \quad x \in \mathcal{P}. \tag{32}$$

Then 我们将可容许的缩放需求率向量集合 L^n 定义如下 :

$$\mathcal{L}^n = \left\{\lambda^n \in \mathbb{R}_+^I : \lambda^n = \Lambda^n(p) \text{ for some } p \in \mathcal{P}\right\}. \tag{33}$$

由方程 (5)–(6) 和 (32)–(33) 可知，$\mathrm{L}^n = n\mathrm{L}$，且 Λ^n 具有反函数 $(\Lambda^n)^{-1}(x) = ((\Lambda_1^n)^{-1}(x_1) \ldots, (\Lambda_I^n)^{-1}(x_I))'$，其中 $x \in \mathrm{L}^n$。我们将缩放收益率函数π^n 定义如下：

$$\pi^n(x) = \sum_{i=1}^{I} x_i \left(\Lambda_i^n\right)^{-1}(x_i), \quad x \in \mathcal{L}^n. \tag{34}$$

注意到，当且仅当 $x \in \mathrm{L}$ 时， $nx \in \mathrm{L}^n$ ，由此可等价地得出[5]

$$\pi^n(nx) = n\pi(x) = n\sum_{i=1}^{I} x_i \Lambda_i^{-1}(x_i), \quad x \in \mathcal{L}. \tag{35}$$

因此，在第 n 个系统中，收入率过程仅按 n 缩放。我们还按如下方式缩放持有成本率 h^n 和闲置成本率 c^n ：

$$h_i^n = \frac{h_i}{\sqrt{n}}, \quad i = 0, 1, \ldots, I, \tag{36}$$

$$c_i^n = \sqrt{n}c_i, \quad i = 1, \ldots, I. \tag{37}$$

最后，我们允许平均行程时间按如下方式随 n 变化：

$$\eta^n = \eta + \frac{\hat{\eta}}{\sqrt{n}}, \tag{38}$$

其中 $\hat{\eta} \in \mathbb{R}$。正如 Kogan和Lipster（1993 年）以及 Ata等人（2021）所观察到的，在我们的重交通假设下，我们预计缓冲区的队列长度为 $\sqrt{n}$ 阶，无限服务器节点中的作业数量为 n 阶。因此，我们将中心化和缩放后的队列长度过程定义如下：

$$Z_0^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(Q_0^n(t) - n\right) \quad \text{and} \quad Z_i^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}Q_i^n(t) \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0. \tag{39}$$

[5](35) 中的第一个等式通过应用 (34) 并注意到，对于 $x \in \mathrm{L}$，$(\Lambda^n)^{-1}(nx) = \Lambda^{-1}(x)$，即可证明。随后由 (7) 可得 (35) 中的第二个等式。

注意，由于对所有 $t \geq 0$， $\sum_{i=0}^{I} Q_i^n(t) = n$，因此对所有 $t \geq 0$， $\sum_{i=0}^{I} Z_i^n(t) = 0$。

正如 Harrison (1988)（另见 Harrison (2000, 2003)）所论证的，任何值得考虑的策略都满足 $T^n(t) \approx x^* t$，对所有 $t \geq 0$ 和足够大的 n 都成立。也就是说，假设 3 中给出的名义分配率 x^* 应当能够对策略 T^n 下各项活动的分配率作出一阶近似。不过，系统管理者可以选择与此存在二阶偏差，即偏差量级为 $1/\sqrt{n}$。为刻画相对于名义分配率的此类偏差，我们定义如下中心化和缩放后的过程：

$$Y_j^n(t) = \sqrt{n}\left(x_j^* t - T_j^n(t)\right), \quad j = 1, \ldots, J, \quad t \geq 0, \tag{40}$$

同样，在重交通状态下，我们预期服务器在一阶近似下始终处于忙碌状态，但可能在二阶上出现闲置，即闲置量级为 $1/\sqrt{n}$。因此，我们定义如下缩放后的闲置过程：

$$U_i^n(t) = \sqrt{n} I_i^n(t), \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0. \tag{41}$$

由方程 (15) 和 (29) 可得

$$U_i^n(t) = \sum_{j \in \mathcal{A}_i} Y_j^n(t), \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0. \tag{42}$$

此外，我们分别将需求过程和服务率过程定义为如下中心化和缩放后的过程：

$$\zeta_i^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\lambda_i^n(t) - n\lambda_i^*\right), \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0, \tag{43}$$

$$\kappa_j^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\mu_j^n(t) - n\mu_j^*\right), \quad j = 1, \ldots, J, \quad t \geq 0. \tag{44}$$

注意，根据方程 (9)，对于每个 $j \in \mathcal{A}_i$，我们有 $\kappa_j^n(\cdot) = \zeta_i^n(\cdot)$。最后，我们定义中心化的~累计利润函数。为此，我们首先引入辅助函数 V^n，它将作为中心化函数。具体而言，我们定义

$$\tilde{V}^n(t) = n\left[\pi\left(\lambda^*\right) - h_0^n\right] t = n\pi\left(\lambda^*\right) t - \sqrt{n} h_0 t, \quad t \geq 0, \tag{45}$$

~其中，第二个等式根据 h_0^n 的定义得出，见方程（36）。注意， $V^n(t)$ 不受系统管理者控制的影响。因此，她可以不再最大化平均利润，而是

专注于最小化平均成本，其中截至时间 t 的累计成本记为 $\hat{V}^n(t)$，定义如下：

$$\hat{V}^n(t) = \tilde{V}^n(t) - V^n(t), \quad t \geq 0. \tag{46}$$

接下来，我们将过程 Z^n、Y^n、U^n、ζ^n、κ^n 和 V^n 分别替换为它们的形式极限 Z、Y、U、ζ、κ 和 ξ，如 $n \to \infty$ 所示。具体而言，布朗近似中的成本过程 ξ 为

$$\xi(t) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{I} \alpha_i \zeta_i^2(s) + \sum_{i=0}^{I} h_i Z_i(s) \right) ds + c'U(t), \quad t \geq 0, \tag{47}$$

其中，对于 $i = 1, \ldots, I$，$\alpha_i = -(\Lambda_i^{-1})'(\lambda_i^*) - (\lambda_i^*/2) \times (\Lambda_i^{-1})''(\lambda_i^*) > 0$。布朗控制问题及公式（47）的形式推导步骤见附录 A。

布朗控制问题（BCP）如下：选择过程 $Y = (Y_j)$ 和 $\zeta = (\zeta_i)$，使其相对于 B 非预见，从而

$$\text{minimize} \quad \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} E[\xi(t)] \tag{48}$$

满足

$$Z_i(t) = B_i(t) - q_i \eta \int_0^t \sum_{i=1}^{I} Z_i(s)\, ds - \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \int_0^t x_j^* \kappa_j(s)\, ds + \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \mu_j^* Y_j(t), \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0, \tag{49}$$

$$Z_0(t) = -\sum_{i=1}^{I} Z_i(t), \quad t \geq 0, \tag{50}$$

$$U(t) = AY(t), \quad t \geq 0, \tag{51}$$

$$\kappa_j(t) = \zeta_i(t) \quad \text{for} \quad j \in \mathcal{A}_i, \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0, \tag{52}$$

$$Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0, \tag{53}$$

U 随 $U(0) = 0$ 单调不减, (54)

其中，$B = \{B(t) : t \geq 0\}$ 是一个 I 维布朗运动，其初始状态为 $B(0) \geq 0$，漂移率向量为 $\gamma = (\gamma_i)$，其中 $\gamma_i = \hat{\eta} q_i$，协方差矩阵 Σ 由下式给出

$$\Sigma_{ii} = q_i \eta + \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \mu_j^* x_j^* \qquad \text{and} \qquad \Sigma_{ii'} = q_i q_{i'} \eta \qquad \text{for} \qquad i, i' = 1, \ldots, I, \quad i \neq i'. \tag{55}$$

尽管布朗控制问题（BCP）(49)–(52) 比其所近似的原始控制问题更简单，

该问题并不容易求解，因为它是一个多维随机控制问题。因此，我们在第5节进一步对其进行简化，并推导出一个等价的工作负载表述；在完全资源池化条件下，该表述是一维的，我们将在第6节对其进行解析求解。

5 等价工作负荷表述

作为推导工作负载问题的预备步骤，令 $Z = (Z_1、\ldots\ldots、Z_I)'$，并使用公式（25），我们首先将公式（49）改写为如下向量形式:

$$Z(t) = B(t) - \eta q \int_0^t e' Z(s)\, ds - C\,\mathrm{diag}(x^*) \int_0^t \kappa(s)\, ds + RY(t), \quad t \geq 0, \tag{56}$$

其中， e 是一个 I 维全 1 向量，而 diag(x^*) 是一个 $J \times J$ 对角矩阵，其第（j、j）个元素为 x_j^*。

受 Harrison 和 Van Mieghem（1997年）以及 Harrison（2000年）相关研究的启发，我们将可逆位移空间定义如下:

$$\mathcal{N} = \left\{ Hy_B : By_B = 0,\, y_B \in \mathbb{R}^b \right\}, \tag{57}$$

其中， $y_B \in \mathbb{R}^b$ 是由 y 中按基本活动$j = 1、\ldots\ldots、b$索引的分量构成的向量。我们令 M $=$ N$^\perp$ 为空间 N 的正交补，并将 $d =$ dim(M) 称为工作负载维度。任何行构成 M 的一组基的 $d \times I$ 矩阵 M 都称为工作负载矩阵。引理 1 根据互通缓冲区的概念给出了工作负载矩阵的一种规范选取，互通缓冲区的定义如下，参见 Ata et al. (2020)。关于互通服务器的相关定义，另见 Harrison 和 L´opez（1999年）。

定义1. 如果存在基本活动 j 和j'，使得 $i = b(j)$、 $i' = b(j')$ 和 $s(j) = s(j')$，则称缓冲区 i 和 i' 直接连通。也就是说，缓冲区 i 和 i' 由使用基本活动的同一台服务器服务。如果存在缓冲区 $i_1,\ldots,i_l$，使得 $i_1 = i$、 $i_l = i'$，且对于 $s = 1,\ldots,l-1$，缓冲区 i_s 与缓冲区 i_{s+1} 直接连通，则称缓冲区 i 和 i' 连通。

缓冲区通信是一种等价关系。因此，缓冲区集合可以划分为L 个互不相交的子集，同一子集中的所有缓冲区彼此通信。我们将每个子集称为一个缓冲池，并将第 l个缓冲池记为 P$_l$, $l = 1$, ……, L。每个缓冲池对应一个

服务器池。第 l个服务器池 S_l 定义如下：

$$\mathcal{S}_l = \{k : \exists j \in \{1, \ldots, b\} \text{ s.t. } s(j) = k \text{ and } b(j) \in \mathcal{P}_l\}, \quad l = 1, \ldots, L. \tag{58}$$

换言之，服务器池 l 由所有能够通过基本活动为缓冲区池 l 中的缓冲区提供服务的服务器组成。注意，由于缓冲区池将缓冲区划分为互不相交的集合，根据公式（58），服务器池也将服务器划分为互不相交的集合。因此，缓冲区池与服务器池之间存在一一对应关系。由此可得服务器通信的等价概念，但为便于数学处理，我们仍采用缓冲区通信的定义。下述引理刻画了工作负载维度和工作负载矩阵，其证明见附录B。

引理 1. 工作负载维度等于缓冲区池的数量，即 $d = L$。此外，由下式给出的 $L \times I$ 矩阵 M

$$M_{li} = \begin{cases} 1, & if\ i \in \mathcal{P}_l, \\ 0, & otherwise, \end{cases} \tag{59}$$

对于 $l = 1,\ldots, L$ 和 $i = 1,\ldots, I$，构成一个规范工作负载矩阵。

为便于推导工作负载状态动态，我们定义 $L \times I$ 矩阵 G 如下：

$$G_{lk} = \lambda_k^* \mathbf{1}_{\{k \in \mathcal{S}_l\}}, \quad l = 1, \ldots, L, \quad k = 1, \ldots, I. \tag{60}$$

也就是说， G的第 l 行（$G_{l1}, \ldots, G_{lI}$）包含服务器池 l 中各服务器的名义服务率，其余服务器对应的元素为零。下一个引理给出了一个有助于推导工作负载问题的有用结果。其证明见附录B。

引理 2. 我们有 $MR = GA$。

我们将 L 维工作负载过程 $W = \{W(t)\ t \geq 0\}$ 定义为

$$W(t) = MZ(t), \quad t \geq 0, \tag{61}$$

其中，第 l 个分量表示在时间 t ，第 l 个服务器池的作业总数，适用于 l = 1、...、 L。根据公式（61）和引理 2，我们得到以下描述

工作负载过程演变的方程：

$$W(t) = \chi(t) - M\eta q \int_0^t e' Z(s)\, ds - MC\mathrm{diag}(x^*) \int_0^t \kappa(s)\, ds + GU(t), \quad t \geq 0, \tag{62}$$

其中 $\chi(t) = MB(t)$，因此 $\chi = \{\chi(t)\ t \geq 0\}$ 是一个具有漂移向量$M\gamma$、协方差矩阵 $M\Sigma M'$ 和初始状态 $\chi(0) = MB(0) \geq 0$ 的 L 维布朗运动。

接下来，我们介绍一个密切相关的控制问题，称为约化布朗控制问题（RBCP）。其状态描述符是工作负载过程 W。更具体地说，RBCP 涉及选择一个关于 χ 非预见性的策略（Z, U, ζ），使得

$$\text{minimize} \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^I \alpha_i \zeta_i^2(s) + \sum_{i=1}^I (h_i - h_0) Z_i(s)\right) ds + c'U(t)\right] \tag{63}$$

满足

$$W(t) = MZ(t), \quad t \geq 0, \tag{64}$$

$$W(t) = \chi(t) - M\eta q \int_0^t e' Z(s)\, ds - MC\mathrm{diag}(x^*) \int_0^t \kappa(s)\, ds + GU(t), \quad t \geq 0, \tag{65}$$

$$Z(t) \geq 0 \text{ 适用于 } t \geq 0, \tag{66}$$

$$U \text{ 是非递减的，且 } U(0) = 0, \tag{67}$$

$$\kappa(t) = A'\zeta(t), \text{ 适用于 } t \geq 0. \tag{68}$$

如下一个命题所示，BCP (48)–(52) 与 RBCP (63)–(68) 是等价的，其证明见附录B。

命题 1。 *BCP (48)–(52)* 的每个可容许策略 (Y, ζ) 都会为 *RBCP (63)–(68)* 产生一个可容许策略 (Z, U, ζ)，且这两个策略具有相同的成本。另一方面，对于 *RBCP* 的每个可容许策略 (Z, U, ζ)，都存在一个可容许策略 (Y, ζ) 用于 *BCP*，其成本等于 *RBCP* 中策略 (Z, U, ζ) 的成本。

下文作出完全资源池化假设，在我们的语境中，这对应于拥有单一资源池，见下文的假设 4。Harrison 和 L´opez（1999年）指出，完全资源池化假设会导出一维工作负荷表述，另见 Ata 和 Kumar（2005）。同样，假设 4 使我们能够构建一个一维工作负荷表述，该表述等价于方程（63）–（68）中构建的 RBCP。

假设 4。 所有缓冲区均在名义处理计划下相互连通，即 $L = 1$。

该假设表明，在名义处理计划下，服务器的能力具有充分的重叠；更多详情请参见 Harrison 和 L´opez（1999年）。下面的引理使我们能够在假设 4 下简化 RBCP，其证明见附录 B。

引理3。 在假设 *4* 下，我们有 $M = e'$ 和 $G = (\lambda^*)'$。此外，我们有

$$M\eta q = \eta \qquad and \qquad MC\,diag(x^*)A' = e'. \tag{69}$$

利用引理3，RBCP 可等价地写成如下形式：选择一个相对于 χ 非预见的策略 (Z, U, ζ)，使得

$$\text{minimize} \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^I \alpha_i \zeta_i^2(s) + \sum_{i=1}^I (h_i - h_0) Z_i(s)\right) ds + c'U(t)\right] \tag{70}$$

满足以下约束

$$W(t) = \sum_{i=1}^I Z_i(t), \quad t \geq 0, \tag{71}$$

$$W(t) = \chi(t) - \eta \int_0^t W(s)\, ds - \int_0^t \sum_{i=1}^I \zeta_i(s)\, ds + \sum_{i=1}^I \lambda_i^* U_i(t), \quad t \geq 0, \tag{72}$$

$Z(t) \geq 0$ 适用于 $t \geq 0,$ (73)

U 关于 $U(0) = 0$,单调不减 (74)

其中， χ 是一个一维布朗运动，其漂移率参数为 $a = e'\gamma$ ，方差参数为 $\sigma^2 = e'\Sigma e$ ，初始状态为 $\chi(0) = \sum_{i=1}^I B_i(0) \geq 0$。

为进一步简化 RBCP，我们将成本函数 c 定义为

$$c(x) = \min\left\{\sum_{i=1}^I \alpha_i \zeta_i^2 : e'\zeta = x,\, \zeta \in \mathbb{R}^I\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{75}$$

将最优（依赖于状态的）漂移率函数 ζ^* 定义为

$$\zeta^*(x) = \operatorname{argmin}\left\{\sum_{i=1}^I \alpha_i \zeta_i^2 : e'\zeta = x,\, \zeta \in \mathbb{R}^I\right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{76}$$

定义 $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^I 1/\alpha_i$，下面的引理刻画了这些函数——C¸elik and Maglaras（2008）以及 Ata and Barjesteh（2020）中也有类似结果。

引理 4. 我们有 $c(x) = \frac{1}{\hat{\alpha}} x^2$ 以及 $\zeta_i^*(x) = \frac{1}{\alpha_i \hat{\alpha}} x$，对于 $i = 1, \ldots, I$ 和 $x \in \mathbb{R}$.

在工作负荷表述中，最优做法是将所有工作负载保留在持有成本最低的缓冲区中，即缓冲区 i^* ，其中

$$i^* = \arg\min_{i=1,\dots,I} h_i, \tag{77}$$

持有成本为 $h = h_{i^*} - h_0 > 0$。此外，系统管理者只会让空闲成本最低的服务器空闲，即，服务器 k^* 其中

$$k^* = \arg\min_{i=1,\dots,I} \frac{c_i}{\lambda_i^*}, \tag{78}$$

空闲成本为 $r = c_{k^*}/\lambda_{k^*}^*$。

工作负荷表述如下：选择一个策略 $\theta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ，该策略相对于 χ 是非预见性的，使得

$$\text{minimize} \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t \left[c\left(\theta(s)\right) + h\, W(s)\right] ds + rL(t)\right] \tag{79}$$

满足约束

$$W(t) = \chi(t) - \eta \int_0^t W(s)\, ds - \int_0^t \theta(s)\, ds + L(t), \quad t \geq 0, \tag{80}$$

$$W(t) \geq 0 \text{ 适用于 } t \geq 0, \tag{81}$$

$$L \text{ is nondecreasing with } L(0) = 0, \tag{82}$$

RBCP (63)–(68) 与 EWF (79)–(82) 等价，证明见以下命题；证明详见附录B。

命题 2. *EWF (79)–(82)* 的每个可容许策略 θ 都会产生 *RBCP (70)–(74)* 的一个可容许策略 (Z, U, ζ) ，且这两个策略的成本相同。另一方面，对于 *RBCP* 的每个可容许策略 (Z, U, ζ) ，都存在一个 *EWF* 的可容许策略 θ ，其成本小于或等于 *RBCP* 策略 (Z, U, ζ) 的成本。

接下来，我们在等价工作负荷表述中加入两个额外的约束。首先，我们要求

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{W(t)>0\}}\, dL(t) = 0, \tag{83}$$

这要求 程 L 只能在 $W = 0$ 时增加。也就是说，控制策略必 t

须满足工作守恒。我们加入这一限制，是因为从成本结构来看，其最优性是直观的：成本既包括持有成本，也包括空闲成本，而且工作负载过程是一维的。其次，我们施加以下正则性条件：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[W(t)]}{t}=0.$$

重申一下，我们还要求策略 θ 满足这些条件，才称其为可容许策略。

6 求解等价工作负荷表述

本节求解 EWF (79)–(82)。为尽量降低技术复杂性，我们将注意力限制在平稳马尔可夫策略上。也就是说，在时刻 t 选择的漂移仅是当前工作负载的函数，因此将其写作 $\theta(W(t))$。为便于分析，下面考虑工作负荷表述的贝尔曼方程，即以下二阶非线性微分方程：求一个函数 $f\in\mathsf{C}^2[0,\infty)$ 和一个常数 $\beta\in\mathbb{R}$，使其满足

$$\begin{aligned}\beta&=\min_{x\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2f''(w)-\eta wf'(w)-xf'(w)+af'(w)+c(x)+hw\right\}\\&=\min_{x\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{\hat{\alpha}}x^2-xf'(w)\right\}+\frac{1}{2}\sigma^2f''(w)-\eta wf'(w)+af'(w)+hw,\quad w\geq 0,\end{aligned}\tag{84}$$

满足边界条件

$$f'(0)=-r\quad\text{and}\quad f'\text{ is increasing with }\lim_{w\to\infty}f'(w)=\frac{h}{\eta}.\tag{85}$$

方程 (84) 右侧的优化问题是凸的。因此，很容易看出其解为

$$x^*=\frac{\hat{\alpha}}{2}f'(w).\tag{86}$$

贝尔曼方程随后可简化如下：求一个函数 $f\in\mathsf{C}^2[0,\infty)$ 和一个常数$\beta\in\mathbb{R}$，使其满足

$$\beta=-\frac{\hat{\alpha}}{4}\left[f'(y)\right]^2+\frac{1}{2}\sigma^2f''(y)-\eta yf'(y)+af'(y)+hy,\quad y\geq 0,\tag{87}$$

满足边界条件

$$f'(0) = -r \quad \text{and} \quad f' \text{ is increasing with } \lim_{w\to\infty} f'(w) = \frac{h}{\eta}. \tag{88}$$

令 $v = f'$，贝尔曼方程可写为：求函数 $v \in \mathbf{C}^1[0,\infty)$ 和常数 $\beta \in \mathbb{R}$，使其满足

$$\beta = -\frac{\hat{\alpha}}{4}v^2(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 v'(y) - \eta y v(y) + a v(y) + hy, \quad y \geq 0, \tag{89}$$

满足边界条件

$$v(0) = -r \quad \text{and} \quad v \text{ is increasing with } \lim_{y\to\infty} v(y) = \frac{h}{\eta}. \tag{90}$$

这将贝尔曼方程表示为一个一阶微分方程。下述定理给出了它的解。证明见第7节末尾。

Th定理 1. 贝尔曼方程 *(89)–(90)* 有一个解 (β^*, v)，其中 $\beta^* > 0$。

给定定理 1 中的 $\beta^* > 0$ 和 v，我们定义

$$f(y) = \int_0^y v(x)\,dx, \quad y \geq 0.$$

下一个结果可直接由定理 1 得出，并给出了原贝尔曼方程的一个解：

推论1。 二元组 (β^*, f) 满足贝尔曼方程 *(84)–(85)*。

定义如下候选策略 $\theta^* : [0,\infty) \to \mathbb{R}$：

$$\theta^*(w) = \frac{\hat{\alpha}}{2}v(w), \quad w \geq 0. \tag{91}$$

以下命题有助于证明我们的主要结果定理 2；证明见附录B。

命题 3。 对于等价工作负荷表述，候选策略 θ^* 是可容许的。也就是说，令 $W^* = \{W^*(t)\ \ t \geq 0\}$ 表示候选策略 θ^* 下的工作负载过程，则有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[W^*(t)]}{t} = 0.$$

下面的结果证明了候选策略是最优的：

定理 2. 候选策略 θ^* 对于等价工作负荷表述 *(79)–(82)* 是最优的，其长期平均成本为 β^*。

接下来，我们陈述一个用于证明定理 2 的辅助引理。

引理5. 令 W 表示在任意可容许策略下由 *(80)–(82)* 定义的工作负载过程 .

则有以下结论：

(i) $E\int_0^t f'(W(s))\,d\chi(s) = 0, \quad t \geq 0,$

(ii) $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{E[f(W(t))]}{t} = 0.$

证明。根据 Harrison（2013）中的命题 4.7，要证明第 (i) 部分，只需证明

$$E\int_0^t \left[f'(W(s))\right]^2 ds < \infty \quad \text{for each} \quad t \geq 0.$$

由于根据方程 (85)，对于所有 $w \geq 0$， $f'(w) \in [-r, h/\eta]$；且根据方程 (81)，对于所有 $t \geq 0$，$W(t) \geq 0$，因此可得

$$E\int_0^t \left[f'(W(s))\right]^2 ds \leq t\left(r + \frac{h}{\eta}\right)^2 < \infty, \quad \text{for} \quad t \geq 0,$$

从而证明了第 (i) 部分。

为了证明第 (ii) 部分，注意到只需证明

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|E[f(W(t))]|}{t} = 0.$$

我们还注意到

$$|E[f(W(t))]| \leq E|f(W(t))| = E\left|\int_0^{W(t)} f'(s)\,ds\right| \leq E\int_0^{W(t)} |f'(s)|\,ds \leq \left(r + \frac{h}{\eta}\right) E[W(t)].$$

因此，根据可容许策略的定义，可得

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|E[f(W(t))]|}{t} \leq \left(r + \frac{h}{\eta}\right) \limsup_{t\to\infty} \frac{E[W(t)]}{t} = 0,$$

证明第 (ii) 部分。 ■

我们以定理 2 的证明结束本节。

定理 *2* 的证明。根据方程（80），注意对于可容许策略 θ,

$$dW(s) = d\chi(s) - \eta W(s)\,ds - \theta(W(s))\,ds + dL(s). \tag{92}$$

此外，由于 $L(s)$ 关于 s 单调不减，因此该过程几乎必然是 VF 函数；参见 Harrison（2013）的 B.2节。因此，

$$\begin{aligned}[dW(s)]^2 &= [d\chi(s)]^2 + 2\,d\chi(s)\,[-\eta W(s)\,ds - \theta(W(s))\,ds + dL(s)] \\ &\qquad + [-\eta W(s)\,ds - \theta(W(s))\,ds + dL(s)]^2 \\ &= \sigma^2\,ds.\end{aligned} \tag{93}$$

注意，方程（93）右侧的最后两项为零；参见 Harrison（2013）的第4章。于是，对于 $f \in C^2[0,\infty)$，Itô 引理给出

$$df(W(s)) = f'(W(s))dW(s) + \frac{1}{2}f''(W(s))\,[dW(s)]^2\,. \tag{94}$$

定义微分算子 $\Gamma_\theta : C^2[0,\infty) \to C[0,\infty)$ 如下：

$$(\Gamma_\theta f)(w) = \frac{1}{2}\sigma^2 f''(w) - [\eta w + \theta(w) - a]\,f'(w), \quad w \geq 0. \tag{95}$$

于是，结合方程（92）–（95）可得

$$df(W(s)) = f'(W(s))\,d\chi(s) + \Gamma_\theta f(W(s))\,ds + f'(W(s))\,dL(s). \tag{96}$$

对方程（96）的两边在 $[0,t]$ 上积分，得到

$$f(W(t)) = f(W(0)) + \int_0^t f'(W(s))\,d\chi(s) + \int_0^t \Gamma_\theta f(W(s))\,ds + \int_0^t f'(W(s))\,dL(s). \tag{97}$$

回顾一下，根据方程（83），过程 L 仅在 $W = 0$ 时增加。因此，对于满足 $f'(0) = -r$ 的 $f \in C^2[0,\infty)$，我们有

$$\int_0^t f'(W(s))\,dL(s) = f'(0)L(t) = -rL(t). \tag{98}$$

由引理5和方程（97）–（98），可得

$$f(W(t)) = f(W(0)) + \int_0^t \Gamma_\theta f(W(s))\,ds - rL(t). \tag{99}$$

特别地，对于贝尔曼方程（84）–（85）的解（β^*, f），可得

$$\beta^* - c(\theta(w)) - hw \le \frac{1}{2}\sigma^2 f''(w) - [\eta w + \theta(w) - a] f'(w), \quad w \ge 0, \tag{100}$$

等式成立 当 $\theta = \theta^*$ 时成立。因此，由方程 (95) 和 (99)–(100)，我们有 e

$$\begin{aligned} f(W(t)) - f(W(0)) + rL(t) &= \int_0^t \Gamma_\theta f(W(s))\, ds \\ &\ge \int_0^t [\beta^* - c(\theta(W(s))) - hW(s)]\, ds, \end{aligned} \tag{101}$$

当 $\theta = \theta^*$ 时等式成立。重排方程 (101) 中的各项，取期望，并除以 t，得到

$$\frac{1}{t} E\left[\int_0^t [c(\theta(s)) + hW(s)]\, ds + rL(t)\right] \ge \beta^* - \frac{1}{t} Ef(W(t)) + \frac{1}{t} Ef(W(0)), \tag{102}$$

当 $\theta = \theta^*$ 时等式成立。最后，对方程 (102) 两边取极限，并应用引理5，得到

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t [c(\theta(s)) + hW(s)]\, ds + rL(t)\right] \ge \beta^*,$$

当 $\theta = \theta^*$ 时等式成立。因此，策略 θ^* 对等价工作负荷表述是最优的，其长期平均成本为 β^*。

■

7 Bell 方程的解

本节通过考虑一个与贝尔曼方程密切相关的初值问题来证明定理 1。具体而言，对于每个固定的 $\beta \ge 0$，考虑以下初值问题，记为 IVP(β)：求函数 $v \in C^1[0,\infty)$，使得

$$\frac{\sigma^2}{2} v'(y) = \beta + \frac{\hat{\alpha}}{4} v^2(y) + \eta y \left(v(y) - \frac{h}{\eta}\right) - a v(y), \quad y \ge 0, \tag{103}$$

$$v(0) = -r. \tag{104}$$

以下结果是标准结论，其证明见附录B。

引理 6. 对于 $\beta \ge 0$，存在满足 *(103)-(104)* 的唯一解 $v_\beta \in C^1[0,\infty)$。

对于剩余部分 在本节的这一部分，我们分析方程 (103)–(104) 的（唯一）解 ,

重点考察解的行为如何随参数 β 变化。通过这种方法，我们最终找到一个 $\beta^* > 0$，以及相应的解 v_{β^*}，使得这一对 (β^*, v_{β^*}) 满足原始贝尔曼方程。具体而言，我们寻找 β^*，使得 v_{β^*} 满足方程 (88) 中的第二个条件，即 v_{β^*} 是递增的，且 $\lim_{y\to\infty} v_{\beta^*}(y) = h/\eta$。

在我们的大部分分析中，我们考虑满足假设 5 中所给两种情形之一的参数。为陈述该假设，令

$$\underline{\beta}_1 = 0, \text{ and } \underline{\beta}_2 = -ar - \frac{\hat{\alpha} r^2}{4}.$$

假设 5. 以下条件之一成立：

(a) 情形 *1*：$a > -\frac{\alpha}{4} r$ 和 $\beta \geq \underline{\beta}_1$；*(b)* 情形 *2*：$a \leq -\frac{\alpha}{4} r$ 和 $\beta > \underline{\beta}_2$。

注. 注意，在假设 5(b) 下，我们有 $\underline{\beta}_2 \geq 0$。

引理7–9有助于后续分析。

引理 7. 如果 $y > 0$ 是 $v_\beta(y)$的局部极大值点，那么 $v_\beta(y) \leq h/y$。

证明。 由于 y 是一个局部极大值点，因此我们有 $v'_\beta(y) = 0$，且 $v''_\beta(y) \leq 0$。对方程 (103) 两边求导，并利用 $v'_\beta(y) = 0$，可得

$$\frac{\sigma^2}{2} v''_\beta(y) = \eta \left(v_\beta(y) - \frac{h}{\eta} \right) \leq 0,$$

由此可得 $v_\beta(y) \leq h/y$。 ■

引理 8。 在假设 *5* 下， v_β 递增至其上确界。

证明。 首先注意，在假设 5 的两种情形下，$v'_\beta(0) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\alpha}{2\sigma^2} r^2 + \frac{2ar}{\sigma^2} > 0$。为导出矛盾，假设 v_β 没有增至其最大值。那么必有 $0 \leq x_1 < x_2 < x_3$，使得

$$v_\beta(x_1) = v_\beta(x_2) = v_\beta(x_3) = v,$$

$$v'_\beta(x_1) > 0, \quad v'_\beta(x_2) < 0, \quad v'_\beta(x_3) > 0.$$

具体而言，我们有以下方程:

$$v'_\beta(x_1) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}v^2 + \frac{2\eta}{\sigma^2}x_1\left(v - \frac{h}{\eta}\right) - \frac{2av}{\sigma^2} > 0, \tag{105}$$

$$v'_\beta(x_2) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}v^2 + \frac{2\eta}{\sigma^2}x_2\left(v - \frac{h}{\eta}\right) - \frac{2av}{\sigma^2} < 0, \tag{106}$$

$$v'_\beta(x_3) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}v^2 + \frac{2\eta}{\sigma^2}x_3\left(v - \frac{h}{\eta}\right) - \frac{2av}{\sigma^2} > 0. \tag{107}$$

另一方面，用 (105) 减去 (106) 得到

$$\frac{2\eta}{\sigma^2}(x_1 - x_2)\left(v - \frac{h}{\eta}\right) > 0. \tag{108}$$

由于 $x_1 - x_2 < 0$，由 (108) 可得

$$v - \frac{h}{\eta} < 0 \tag{109}$$

另一方面，用 (107) 减去 (106) 得到

$$\frac{2\eta}{\sigma^2}(x_3 - x_2)\left(v - \frac{h}{\eta}\right) > 0. \tag{110}$$

但是，由方程 (109) 和 $x_3 - x_2 > 0$ 可推知，方程 (110) 左边为负，这与假设矛盾。证明完毕。

■

引理 9. 设 $0 \le x_1 < x_2$。在假设 *5* 下，若 $v_\beta(x)$ 在 (x_1, x_2)上为常数，则以下条件是必要的:

$$\beta = a\frac{h}{\eta} - \frac{\hat{\alpha}}{4}\left(\frac{h}{\eta}\right)^2. \tag{111}$$

此外，若 v_β 在 (x_1, x_2)上为常数，则对于 $x \in (x_1, x_2)$，有 $v_\beta(x) = h/\eta$；令 $\hat{x} = \inf\{x \ge 0 : v_\beta(x) = h/\eta\}$，则可得 v_β 在 $[0, \hat{x}]$ 上单调不减，并在此后保持常数值 h/η。

另一方面，如果方程 *(111)* 不成立，则不存在 v_β 为常数的区间，即集合 $\{y \ge 0 : v'_\beta(y) = 0\}$ 的勒贝格测度为零。

证明。 假设方程 (111) 中的条件不成立，这意味着

$$\beta + \frac{\hat{\alpha}}{4}\left(\frac{h}{\eta}\right)^2 - a\frac{h}{\eta} \ne 0 \tag{112}$$

为了实现压缩，假设存在一个区间 (x_1, x_2)，使得 $v_\beta(y) = v$ 在该区间上成立。这意味着 $v'_\beta(y) = v''_\beta(y) = 0$ 在 (x_1, x_2) 上成立。对方程 (103) 两边求导，并利用

$v'_\beta(y) = 0$ 在 (x_1, x_2) 上成立，可得

$$\frac{\sigma^2}{2} v''_\beta(y) = \eta\left(v_\beta(y) - \frac{h}{\eta}\right), \quad y \in (x_1, x_2).$$

因此，$v_\beta(y) = h/\eta$ 在 (x_1, x_2) 上。将其代入方程 (103)，得到

$$\frac{\sigma^2}{2} v'_\beta(y) = \beta + \frac{\hat{\alpha}}{4}\left(\frac{h}{\eta}\right)^2 - a\frac{h}{\eta} \neq 0, \quad y \in (x_1, x_2),$$

这由 (112) 推出，并与 $v'_\beta(y) = 0$ 在 (x_1, x_2) 上相矛盾。因此，如果 (111) 不成立，那么不存在 v_β 为常数的区间。

现在，我们来证明引理的第一部分。如果 v_β 在 (x_1, x_2) 上为常数，那么 $v'_\beta(x) = v''_\beta(x) = 0$在 (x_1, x_2) 上。正如上文所述，这意味着 $v_\beta(x) = h/\eta$在 (x_1, x_2) 上。此外，由 (103) 和 $v'_\beta(x) = -h/\eta$ 在 (x_1, x_2) 上可得

$$\beta + \frac{\hat{\alpha}}{4}\left(\frac{h}{\eta}\right)^2 - a\frac{h}{\eta} = 0,$$

从而证明了必要条件 (112)。基于以上结果，由引理 7 可知，在任一局部最大值处，$v_\beta(x) \leq h/\eta$; 又由引理 8 可知，$\hat{x}$ 是 v_β 达到其最大值的最早时刻，因此我们得出 v_β 在 $[0, \hat{x}]$ 上非递减。为完成证明，考虑一个辅助初值问题：在 $[\hat{x}, \infty)$ 上，令其涉及 (103)，初始条件为 $v(\hat{x}) = h/\eta$。那么，令 $v(x) = h/\eta$ 即可得到该问题的解。此外，将其与 v_β 在 $[0, \hat{x})$ 上的部分结合，便构成初值问题 (103)-(104) 的一个解。根据引理 6，这是唯一解。

■

为便于进行下文的分析，我们定义以下四个集合。首先，考虑假设 5 中确定的情形 1（即假设 5(a)），并令

$\mathrm{I}_1 = \{\beta \geq 0 : v_\beta$ 在 $(0, \infty)$ 上非递减$\}$，

$\mathrm{D}_1 = \{\beta \geq 0 : \exists x_\beta \geq 0$ 使得 v_β 在 $(0, x_\beta)$ 上非递减，并在 (x_β, ∞) 上递减$\}$。

类似地，在假设 5 的情形 2（假设 5(b)）中，我们定义

$\mathrm{I}_2 = \{\beta > \beta_2 : v_\beta$ 在 $(0, \infty)$ 上非递减$\}$，$\mathrm{D}_2 = \{\beta > \beta_2 : \exists x_\beta \geq 0$ 使得 v_β 在 $(0, x_\beta)$ 上非递减，并在 $(\bar{x}_\beta, \infty)$ 上递减$\}$。

引理 10. 我们有如下结论：

(i) 在假设 *5(a)* 下，$\beta \in \mathcal{D}_1$ 当且仅当 $\exists x_0 \in (0, \infty)$ 使得 $v'_\beta(x_0) < 0$。

(ii) 在假设 *5(b)* 下，$\beta \in \mathcal{D}_2$ 当且仅当存在 $\exists x_0 \in (0, \infty)$ 使得 $v'_\beta(x_0) < 0$。

证明。 首先，根据引理 9，v_β 必须增加至 h/η，并在此后保持不变，才能在任意区间上保持不变。在这种情况下，我们有 $\beta \in \mathrm{I}_i$（在假设 5(a) 下为 $i = 1$，在假设 5(b) 下为 $i = 2$）。因此，在证明的其余部分，我们假设不存在 v_β 保持不变的区间。

我们同时证明情形 (i) 和 (ii)，因为它们的证明完全相同。对于 $i = 1, 2$，令 $\beta \in \mathrm{D}_i$。为导出矛盾，假设不存在 $x_0 > 0$ 使得 $v'_\beta(x_0) < 0$。那么，对于所有 $x \geq 0$，$v'_\beta(x) \geq 0$，即 v_β 在 $(0, \infty)$ 上非减。因此，$\beta \in \mathrm{I}_i$，这就产生了矛盾。因此，存在 $x_0 > 0$ 使得 $v'_\beta(x_0) < 0$。

对于另一个方向，假设存在 $x_0 > 0$ 使得 $v'_\beta(x_0) < 0$。由于 v_β 递增至其最大值（引理 8），它在任何区间上都不是常数（根据本证明开头段落中的论证），且 $v'_\beta(x_0) < 0$，因此它会在某个 $x^* < x_0$处达到最大值。于是，由引理 7可知

$$v_\beta(x) \leq v_\beta(x^*) \leq \frac{h}{\eta}, \quad x \geq 0. \tag{113}$$

为导出矛盾，假设 $\beta \notin \mathrm{D}_i$。那么 v_β 不可能在 $[x^*, \infty)$ 上递减。因此，存在 x_1 和 x_2 使得

$$\begin{aligned} &x^* < x_1 < x_2, \\ &v = v_\beta(x_1) = v_\beta(x_2) \leq \frac{h}{\eta}, \\ &v'_\beta(x_1) < 0 < v'_\beta(x_2). \end{aligned}$$

具体而言，以下结论成立：

$$v'_\beta(x_1) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2} v^2 + \frac{2\eta}{\sigma^2} x_1 \left(v - \frac{h}{\eta} \right) - av < 0, \tag{114}$$

$$v'_\beta(x_2) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2} v^2 + \frac{2\eta}{\sigma^2} x_2 \left(v - \frac{h}{\eta} \right) - av > 0. \tag{115}$$

将式（114）从式（115）中相减，得到

$$0 < v'_\beta(x_2) - v'_\beta(x_1) = \eta\,(x_2 - x_1)\left(v - \frac{h}{\eta}\right) \le 0,$$

其中，最后一个不等式由方程 (113) 中的 $x_2 - x_1 > 0$ 和 $v \le \frac{h}{\eta}$–得出，从而导致矛盾。因此， $\beta \in$ D_i。

■

推论 2. 在假设 *5* 下，我们有如下结论：

(i) 在 *C* 情形 *1* 下，假设 *5*（假设 *5 (a)*）中的集合 $\mathcal{I}_1$ 和 $\mathcal{D}_1$ 构成 $[0,\infty)$ 的划分 ;

(ii) 在假设 *5* 的情形 *2*（假设 *5(b)*）下，集合 $\mathcal{I}_2$ 和 $\mathcal{D}_2$ 构成 $(\beta_{2^*}\infty)$ 的划分。 _

证明。 考虑情形 (i)。对于 $\beta \ge 0$, 如果对某个 $x > 0$ 有 $v'_\beta(x) < 0$，那么根据引理 10， $\beta \in \mathrm{D}_1$。否则，对所有 $x > 0$, $v'_\beta(x) \ge 0$，此时根据定义， $\beta \in \mathrm{I}_1$。情形 (ii) 的证明类似。

■

推论3. 在假设 *5* 下，有如下结论。对于 $i = 1$ 的假设 *5* 的情形 i，2，如果 $\beta \in \mathcal{D}_i$，那么 v_β 达到其最大值，且

$$\sup_{x\ge 0} v_\beta(x) < \frac{h}{\eta}.$$

证明。对于 $i = 1$，根据 D_i 的定义，2，存在 $\exists x^* \ge 0$，使得 v_β 在 $(0, x^*)$ 上单调不减，并在 (x^*, ∞) 上递减。首先，注意到如果 $x^* = 0$，那么 $v_\beta(x)$ 处处递减，且 $v_\beta(0) = -r$，结论即得。因此，假设 $x^* > 0$。注意到 v_β 在 x^* 处达到其最大值。此外，由引理 7 可得 $v_\beta(x^*) \le h/\eta$。为导出矛盾，假设 $v_\beta(x^*) = h/\eta$。注意到 $v'_\beta(x^*) = 0$，因为 x^* 是极大值点。由此，对方程 (103) 两边求导，可得 $v''_\beta(x^*) = 0$。接着，我们可以像引理 9 的证明中那样论证，对于 $x \ge x^*$，有 $v_\beta(x) = h/\eta$，这意味着 $\beta \notin \mathrm{D}_i$，产生矛盾。因此，$v_\beta(x^*) \ne h/\eta$，证明完毕。■

引理 11。 在假设 *5* 的情形 i （$i = 1$，2）下，如果 $\beta \in \mathcal{D}_i$，则 极限$\lim_{x\to\infty} v_\beta(x) = -\infty$。

证明。 由推论3可知，v_β 存在一个极大值点 x^*，使得

$$v_\beta(x) \le v_\beta(x^*) < \frac{h}{\eta}, \quad x \ge 0. \tag{116}$$

另外定义

$$\epsilon = \frac{h}{\eta} - v_\beta(x^*) > 0. \tag{117}$$

为证明 $\lim_{x\to\infty} v_\beta(x) = -\infty$，我们采用矛盾法。为此，假设存在一个 $K_1 > 0$，使得 $v_\beta(x) \geq -K_1$ 对 $x \geq 0$ 成立。那么我们有

$$|v_\beta(x)| \leq K_2 = \max\left\{K_1, \frac{h}{\eta}\right\}. \tag{118}$$

回顾初值问题 β，利用 (116)–(118)，我们可对 $v'_\beta(\cdot)$ 作如下界定：

$$\frac{\sigma^2}{2} v'_\beta(y) \leq \beta + \frac{\hat{\alpha}}{4} K_2^2 + \eta y \left(v_\beta(x^*) - \frac{h}{\eta}\right) + |a| K_2 = \left[\beta + \frac{\hat{\alpha}}{4} K_2^2 + |a| K_2\right] - \epsilon\eta y, \quad y \geq 0. \tag{119}$$

对 (119) 两边在 $[0, y]$ 上积分，并利用初始条件 $v_\beta(0) = -r$，可得

$$\frac{\sigma^2}{2} v'_\beta(y) \leq -\frac{\sigma^2}{2} r + \left[\beta + \frac{\hat{\alpha}}{4} K_2^2 + |a| K_2\right] y - \frac{\eta\epsilon}{2} y^2, \quad y \geq 0. \tag{120}$$

由于 $\eta\epsilon/2 > 0$，(120) 右端在 $y \to \infty$ 时趋于 $-\infty$，这意味着 $v(y) \to -\infty$ 在$y \to \infty$时成立，产生矛盾。

■

Le引理 12. 在假设 *5* 的情形 i （$i = 1,2$）下，以下各项等价 *t:*

(i) $\beta \in \mathcal{D}_i$, *(ii)* 存在 $\exists x > 0$，使得 $v'_\beta(x) < 0$, *(iii)* 存在 $\exists x > 0$，使得 $v_\beta(x) < -r$, *(iv)* $\lim_{x\to\infty} v_\beta(x) = -\infty$。

证明。 根据引理 10，(i) 与 (ii) 等价。根据引理 11，(i) 蕴含 (iv)。显然，(iv) 蕴含 (iii)。因此，只需证明 (iii) 蕴含 (ii)。为此，设 $x_0 > 0$ 满足 $v_\beta(x_0) < -r$。由于 $v_\beta(0) = -r$，根据中值定理，存在一个 $\hat{x}_0 \in (0, x_0)$，使得

$$v'_\beta(\hat{x}_0) = \frac{v_\beta(x_0) - v_\beta(0)}{x_0 - 0} < 0,$$

证明第 (ii) 部分。

■

引理 13. 在假设 *5* 下，当且仅当存在一个$x_0 > 0$ 使得 $v_\beta(x_0) \geq \frac{h}{\eta}$ 时，我们有 $\lim_{x\to\infty} v_\beta(x) = \infty$ 。

–

证明。 首先，若 $\lim_{x\to\infty} v_\beta(x) = \infty$，则显然存在一个 $x_0 > 0$，使得 $v_\beta(x_0) > \frac{h}{\eta}$。为 –

证明反方向，假设存在 $x_0 > 0$，使得 $v_\beta(x_0) > \frac{h}{\eta}$，并定义

$$x_1 = \inf\left\{x > 0 : v_\beta(x) \geq \frac{h}{\eta}\right\},$$

由于 $v_\beta(0) = -r < \frac{h}{\eta} < v_\beta(x_0)$，根据介值定理，$v_\beta(x_1) = \frac{h}{\eta}$。接下来，我们论证对所有 $x > x_1$，$v_\beta(x) > \frac{h}{\eta}$。若不然，则存在一个 $x_2 > x_1$，使得 $v_\beta(x_2) \leq \frac{h}{\eta}$。然后令

$$x_3 = \inf\left\{x > x_1 : v_\beta(x) \leq \frac{h}{\eta}\right\}.$$

注意，由于 v_β 的连续性，$v_\beta(x_3) = \frac{h}{\eta}$。此外，注意到 $x_3 > x_1$，因为 $v_\beta(x_1) = \frac{h}{\eta}$，并且

$$v'_\beta(x_1) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}\left(\frac{h}{\eta}\right)^2 - a\frac{h}{\eta} > 0, \tag{121}$$

其中，最后一个不等式成立是因为

(i) 根据 x_1 的定义，$v'_\beta(x_1) \geq 0$，

(ii) $x_1 < x_0$，$v_\beta(x_0) > \frac{h}{\eta}$，并且 v_β 增至其最大值，

(iii) 根据引理 9，我们不能有 $v'_\beta(x_1) = 0$，因为 $v_\beta(x_0) > \frac{h}{\eta}$。

因此，式（121）成立。由此可得

$$v_\beta(x) > \frac{h}{\eta} \quad \text{for} \quad x \in (x_1, x_3). \tag{122}$$

由连续性可知，$v_\beta(x)$ 在某个 $\hat{x} \in (x_1, x_3)$ 处取得局部最大值，且 $v_\beta(\hat{x}) > \frac{h}{\eta}$，但这与引理 7 矛盾。因此，我们得出

$$v_\beta(x) > \frac{h}{\eta} \quad \text{for} \quad x \geq x_1. \tag{123}$$

特别地，$\beta \notin D_i$。相反，$\beta \in I_i$ 且 v_β 由推论（2）可知是非递减的。因此，我们有

$$v_\beta(x) \geq v_\beta(x_0) > \frac{h}{\eta} \quad \text{for } x > x_0. \tag{124}$$

为完成证明，我们考虑两种情况：情况（i） $a \leq 0$，情况（ii） $a > 0$。当 $a \leq 0$时，由（103）可知

$$\frac{\sigma^2}{2}v'_\beta(y) \geq \beta + \frac{\hat{\alpha}}{4}\left(\frac{h}{\eta}\right)^2 \quad \text{for } y \geq x_0. \tag{125}$$

对（125）两边在 $[x_0, y]$ 上积分，得

$$v_\beta(y) \geq \frac{h}{\eta} + \frac{2}{\sigma^2}\left[\beta + \frac{\hat{\alpha}}{4}\left(\frac{h}{\eta}\right)^2\right](y - x_1), \quad y \geq x_0, \tag{126}$$

其中右侧趋于 ∞，当 $a \leq 0$ 时证明完毕。

当 $a > 0$ 时，由 (103) 可知

$$v'_\beta(y) + \frac{2a}{\sigma^2}v_\beta(y) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}v_\beta^2(y) + \eta y\left(v_\beta(y) - \frac{h}{\eta}\right), \quad y \geq x_0. \tag{127}$$

令 $\epsilon = v_\beta(x_0) - h/\eta > 0$，由 (127) 可得

$$v'_\beta(y) + \frac{2a}{\sigma^2}v_\beta(y) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}\left(\frac{h}{\eta}\right) + \epsilon\eta y. \tag{128}$$

将两边乘以积分因子 $\exp\{\frac{2a}{\sigma^2}y\}$，得到：

$$\left(v_\beta(y)\exp\left\{\frac{2a}{\sigma^2}y\right\}\right)' \geq C\exp\left\{\frac{2a}{\sigma^2}y\right\} + \epsilon\eta y\exp\left\{\frac{2a}{\sigma^2}y,\right\}$$

其中 $C = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \hat{}\frac{\alpha}{\sigma^2}(h/\eta)^2 > 0$。对两边在 $[x_0, y]$ 上积分，得到

$$v_\beta(y) \geq v_\beta(x_0) + C\left(1 - \exp\left\{-\frac{2a}{\sigma^2}(y - x_0)\right\}\right) + \epsilon\eta\frac{\sigma^4}{4a^2}\left(\frac{2a}{\sigma^2}y - 1\right),$$

wh其中右侧在 $y \to \infty$ 时趋于 ∞，当 $a > 0$ 时证明完毕。 ■

引理 14. 对于 $0 \leq \beta_1 < \beta_2$，我们有 $v_{\beta_1}(x) < v_{\beta_2}(x)$ 对所有 $x > 0$ 均成立。也就是说，对于每个 $x > 0$，$v_\beta(x)$ 是 β 的递增函数。

证明。令 $\beta_2 > \beta_1 \geq 0$。我们通过反证法进行论证。假设对于某个 $x > 0$，$v_{\beta_1}(x) \geq v_{\beta_2}(x)$，并令

$$\hat{x} = \inf\left\{x > 0 : v_{\beta_1}(x) \geq v_{\beta_2}(x)\right\}.$$

那么存在一个收敛到 $\hat{}x$ 的递减序列 $\{x_n\}$，即当 $n \to \infty$ 时，$x_n \searrow \hat{}x$，使得对所有 n，$v_{\beta_1}(x_n) \geq v_{\beta_2}(x_n)$。回想一下，$v_{\beta_1}(0) = v_{\beta_2}(0) = -r$，且 $v'_{\beta_2}(0) > v'_{\beta_1}(0)$。因此，在零附近的一个邻域内，$v_{\beta_2} > v_{\beta_1}$ 成立。根据这一点以及v_{β_1} 和v_{β_2} 的连续性，可得

$$v_{\beta_1}(\hat{x}) = v_{\beta_2}(\hat{x}). \tag{129}$$

因此，我们可以写成

$$\frac{v_{\beta_1}(x_n) - v_{\beta_1}(\hat{x})}{x_n - \hat{x}} \geq \frac{v_{\beta_2}(x_n) - v_{\beta_2}(\hat{x})}{x_n - \hat{x}}, \quad n \geq 1.$$

令 $n \to \infty$ 趋于极限，可得

$$v'_{\beta_1}(\hat{x}) \geq v'_{\beta_2}(\hat{x}). \tag{130}$$

然而，请注意，根据初值问题(β)，对于 $\beta = \beta_1,\ \beta_2$ 我们有

$$\frac{\sigma^2}{2} v'_{\beta_1}(\hat{x}) = \beta_1 + \frac{\hat{\alpha}}{4} v^2_{\beta_1}(\hat{x}) + \eta\hat{x}\left(v_{\beta_1}(\hat{x}) - \frac{h}{\eta}\right) - a v_{\beta_1}(\hat{x}), \tag{131}$$

$$\frac{\sigma^2}{2} v'_{\beta_2}(\hat{x}) = \beta_2 + \frac{\hat{\alpha}}{4} v^2_{\beta_2}(\hat{x}) + \eta\hat{x}\left(v_{\beta_2}(\hat{x}) - \frac{h}{\eta}\right) - a v_{\beta_1}(\hat{x}). \tag{132}$$

将 (131) 从 (132) 中相减，并利用 (129)，可得

$$\frac{\sigma^2}{2}\left[v'_{\beta_2}(\hat{x}) - v'_{\beta_1}(\hat{x})\right] = \beta_2 - \beta_1 > 0,$$

这与 (130) 矛盾。因此，我们得出结论：对于 $x > 0$，$v_{\beta_2}(x) > v_{\beta_1}(x)$。 ■

引理 15. 对于 $x > 0$，我们有 $v_\beta(x)$ 在 β 上关于 $[0, \infty)$连续。也就是说，对于 $x > 0$，给定 $\beta \geq 0$ 和 $\epsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得 $|v_\beta(x) - v_{\tilde{\beta}}(x)| < \epsilon$，对所有 $\beta \in (\beta - \delta, \beta + \delta) \cap [0, \infty)$均成立。

证明。设 $x > 0$ 和 $\beta_2 > \beta_1 \geq 0$。对 $\beta = \beta_1,\ \beta_2$，在 $[0, x]$ 上对初值问题(β)积分，可得以下两个方程：

$$\frac{\sigma^2}{2} v_{\beta_1}(x) = -\frac{\sigma^2}{2} r + \beta_1 x + \frac{\hat{\alpha}}{4}\int_0^x v^2_{\beta_1}(y)\,dy + \eta\int_0^x y\left(v_{\beta_1}(y) - \frac{h}{\eta}\right)dy - \int_0^x a v_{\beta_1}(y)dy, \tag{133}$$

$$\frac{\sigma^2}{2} v_{\beta_2}(x) = -\frac{\sigma^2}{2} r + \beta_2 x + \frac{\hat{\alpha}}{4}\int_0^x v^2_{\beta_2}(y)\,dy + \eta\int_0^x y\left(v_{\beta_2}(y) - \frac{h}{\eta}\right)dy - \int_0^x a v_{\beta_2}(y)dy. \tag{134}$$

用 (134) 减去 (133)，得到：

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{2}\left[v_{\beta_2}(x) - v_{\beta_1}(x)\right] &= (\beta_2 - \beta_1)\,x + \frac{\hat{\alpha}}{4}\int_0^x \left[v^2_{\beta_2}(y) - v^2_{\beta_1}(y)\right]dy \\ &\quad + \eta\int_0^x y\left[v_{\beta_2}(x) - v_{\beta_1}(x)\right]dy - a\int_0^x \left[v_{\beta_1}(y) - v_{\beta_2}(y)\right]dy.\end{aligned} \tag{135}$$

为便于推导该界，令 $\beta > \beta_2 > \beta_1 \geq 0$，并注意到根据引理 14,

$$v_0(y) \leq v_{\beta_1}(y) \leq v_{\beta_2}(y) \leq v_{\bar{\beta}}(y), \quad y \geq 0.$$

因此，对于 $y \geq 0$，我们有

$$2v_0(y) \leq v_{\beta_1}(y) + v_{\beta_2}(y) \leq 2v_{\bar{\beta}}(y),$$

由此我们得出

$$|v_{\beta_1}(y) + v_{\beta_2}(y)| \le 2\max\left(|v_0(y)| + |v_{\bar{\beta}}(y)|\right).$$

因此，令

$$K\left(\bar{\beta}\right) = 2\sup_{0\le y\le x}\left\{\max\left(|v_0(y)| + |v_{\bar{\beta}}(y)|\right)\right\},$$

可得关于 $y \in [0,x]$ 的以下结果：

$$|v_{\beta_2}^2(y) - v_{\beta_1}^2(y)| = |v_{\beta_2}(y) + v_{\beta_1}(y)| \cdot |v_{\beta_2}(y) - v_{\beta_1}(y)| \le K\left(\bar{\beta}\right)|v_{\beta_2}(y) - v_{\beta_1}(y)|.$$

结合式 (135)，并令

$$h(y) = |v_{\beta_2}(y) - v_{\beta_1}(y)| \quad \text{for} \quad y \in [0,x],$$

可得以下不等式：

$$h(x) \le \frac{2x}{\sigma^2}|\beta_2 - \beta_1| + \left[\frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}K\left(\bar{\beta}\right) + \eta x + |a|\right]\int_0^x h(y)\,dy.$$

然后根据 Gronw all 不等式（例如，参见 Ethier 和 Kurtz (2005) 第 498 页），我们得出结论：t

$$h(x) \le \frac{2x}{\sigma^2}|\beta_2 - \beta_1|\exp\left\{-\left(\eta x + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}K\left(\bar{\beta}\right) + |a|\right)x\right\}.$$

因此，给定 $\epsilon > 0$，我们可以令

$$\delta = \frac{\epsilon\sigma^2}{2x}\exp\left\{-\left(\eta x + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}K\left(\bar{\beta}\right) + |a|\right)x\right\},$$

使得 $|\beta_2 - \beta_1| < \delta$ 意味着 $h(x) = |v_{\beta_2}(x) - v_{\beta_1}(x)| < \epsilon$。证明至此完成。 ■

引理 16. 在假设 *5* 下，我们有如下结论：

(i) 在假设 *5* 的情形 *1*（假设 *5(a)*）中，对于 $0 \le \beta_1 < \beta_2$，如果 $\beta_2 \in \mathcal{D}_1$，，那么 $\beta_1 \in \mathcal{D}_1$。也就是说，只要 $\beta_2 \in \mathcal{D}_1$，就有 $[0,\beta_2] \subseteq \mathcal{D}_1$。

(ii) 在假设 *5* 的情形 *2*（假设 *5(b)*）中，对于 $\beta_2 < \beta_1 < \underline{\beta_2}$，如果 $\beta_2 \in \mathcal{D}_2$，，那么 $\beta_1 \in \mathcal{D}_2$。也就是说，只要 $\beta_2 \in \mathcal{D}_2$，就有 $(\beta_2, \beta_2] \subseteq \mathcal{D}_2$。

证明。考虑 p art (i)，并令 $\beta_2 > \beta_1 \ge 0$。根据引理 12，存在 $x_0 > 0$ 使得 t

$v_{\beta_2}(x_0) < -r$。进而，根据引理 14，我们有

$$v_{\beta_1}(x_0) < v_{\beta_2}(x_0) < -r,$$

因此，根据引理 12，$\beta_1 \in D_1$。第 (ii) 部分的证明类似。 ■

引理 17. 在假设 *5* 下，我们有如下结论：

(i) 在假设 *5* 的情形 *1*（假设 *5(a)*）中，$\mathcal{D}_1 \neq \varnothing$。特别地，$0 \in \mathcal{D}_1$，并且存在一个 $\beta_1 > 0$，使得 $[0, \beta] \subseteq \mathcal{D}_1$。

(ii) 在假设 *5* 的情形 *2*（假设 *5(b)*）中，$\mathcal{D}_2 \neq \varnothing$。特别地，存在 $\beta_2 > \beta_2$，使得 $(\beta_2, \beta_2] \subseteq \mathcal{D}_2$。

证明。考虑第 (i) 部分。我们首先证明 $0 \in D_1$。为导出矛盾，假设 $0 \notin D_1$，于是根据推论 2，$0 \in I_1$。我们考虑以下两种情形：

- 情形 A：$v_0(y) \leq 0$ 对所有 $y > 0$均成立。
- 情形 B：$v_0(y) > 0$ 对某些 $y > 0$成立。

考虑情形 A。由于 $0 \in I_1$，$v_0'(y) \geq 0$ 对所有 $y \geq 0$均成立。因此，我们有 $-r \leq v_0(y) \leq 0$ 对所有 $y \geq 0$均成立。将其代入 $\beta = 0$ 的初值问题 IVP(β)，我们考虑情形 A 的以下两个子情况：$a \geq 0$ 和 $a \in (-\frac{\alpha r}{4}, 0)$。

对于 $a \geq 0$，我们得出

$$0 \leq \frac{\sigma^2}{2} v_0'(y) \leq \frac{\hat{\alpha}}{4} r^2 - hy + ar,$$

其中右侧趋于 $-\infty$。因此，存在 $y > 0$ 使得 $v_0'(y) < 0$，这与$0 \in I_1$矛盾。

对于 $a \in (-\frac{\alpha r}{4}, 0)$，我们得出

$$0 \leq \frac{\sigma^2}{2} v_0'(y) \leq \frac{\hat{\alpha}}{4} r^2 - hy,$$

其中右侧趋于 $-\infty$。再次，存在 $y > 0$ 使得 $v_0'(y) < 0$，这与 $0 \in I_1$ 矛盾。

考虑情形 B。在这种情况下，我们令 $y_0 = \inf\{y > 0 : v_0(y) > 0\}$。根据 v_0 and $v_0(0) = -r < 0$ 的连续性，我们有 $v_0(y_0) = 0$ and $y_0 > 0$。将其代入 $\beta = 0$ at $y = y_0$ 的初值问题(β)中

得到

$$\frac{\sigma^2}{2}v_0'(y_0) = -hy_0 < 0.$$

因此，根据引理 12，$0 \in \mathbf{D}_1$，这就产生了矛盾。结合情形 A 和情形 B，我们得出 $0 \in \mathbf{D}_1$。然后由引理 12 可知，当 $y \to \infty$ 时，$v_0(y) \to -\infty$。因此，存在一个 $x_0 > 0$，使得 $\tilde{v}_0(x_0) < -2r$。然后，根据 $v_\beta(x_0)$ 关于 β 的连续性（见引理 15），存在一个 $\beta_1 > 0$，使得

$\tilde{v}_{\tilde{\beta}}(x_0) < -r$。根据引理 12，我们得出 $\beta_1 \in \mathbf{D}_1$。

接着，由引理 16 可知，$[0, \beta_1] \subseteq \mathbf{D}_1$。

考虑第 (ii) 部分。回顾一下，在假设 5 的情形 2 中，$a \le -\hat{\alpha}r/4$ 且 $\beta_2 = -ar - \hat{\alpha}r^2/4 \ge 0$。考虑 v_{β_2}，并注意到 $v_{\beta_2}(0) = -r$。由 (103) 可得 $v'_{\beta_2}(0) = 0$。此外，对 (103) 两边求导，并利用 $v'_{\beta_2}(0) = 0$，我们得出

$$v''_{\beta_2}(0) = -\frac{2\eta}{\sigma^2}\left(r + \frac{h}{\eta}\right) < 0.$$

因此，v_{β_2} 在零的邻域内递减且低于 $-r$。接下来，我们证明对所有 $x > 0$，$v_{\beta_2}(x) \le -r$。

反设不然，令 $x_1 = \inf\{x > 0 : v_{\beta_2}(x) > -r\}$。由 v_β 的连续性可知，$v_{\beta_2}(x_1) = -r$。根据其定义，还有 $v'_{\beta_2}(x_1) \ge 0$ 且 $x_1 > 0$。然后将这些结果与（103）结合，可得

$$\begin{aligned} 0 \le v'_{\beta_2}(x_1) &= -ar - \frac{\hat{\alpha}}{4}r^2 + \frac{\hat{\alpha}}{4}r^2 - \eta x_1\left(r + \frac{h}{\eta}\right) + ar \\ &= -\eta x_1\left(r + \frac{h}{\eta}\right) < 0, \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。因此，对所有 $x \ge 0$，$v_{\beta_2}(x) \le -r$。

接下来，我们证明 $\lim^{x\to\infty} v_{\beta_2}(x) = -\infty$。反设不然（注意，按照引理 8 证明中的相同方法，可以排除振荡行为）。那么，存在 $k > r$ 使得

$$v_{\beta_2}(x) \ge -k, \quad x \ge 0.$$

但利用（103），我们得出

$$\frac{\sigma^2}{2}v'_{\beta_2}(x) \le \beta_2 + \frac{\hat{\alpha}}{4}K^2 - \eta x\left(r + \frac{h}{\eta}\right) - ar.$$

两边从 0 积分到 y，得到

$$\frac{\sigma^2}{2}v_{\underline{\beta}_2}(y) \le -r\frac{\sigma^2}{2} + \left[\underline{\beta}_2 - ar + \frac{\hat{\alpha}}{4}\right]y - \frac{\eta}{2}\left(r + \frac{h}{\eta}\right)\frac{y^2}{2},$$

其中，右端趋于 $-\infty$，当 $y \to \infty$时。因此，$v_{\beta_2}(x) \to -\infty$，当 $x \to \infty$ 时，并且存在$\tilde{x}_2$ 使得$v_{\beta_2}(x_2) < -2r$。接着，根据引理 14，存在 $\beta_2 > \underline{\beta}_2$ 使得 $v_{\tilde{\beta}_2}(x_2) < -r$。特别地，在 $\tilde{}$ 中，根据引理 12，$\beta_2 \in \mathrm{D}_2$。接着，根据引理 16，我们得出$(\underline{\beta}_2, \beta_2] \subset \mathrm{D}_2$。■

引理 18。 在假设 *5* 下，对于 $i = 1$，$\mathcal{I}_i \neq \varnothing$ 成立。特别是，

$$\left(\frac{\sigma^2 h}{2\eta} + 2\sigma\left(r + \frac{h}{\eta}\right)\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\exp\left\{-\frac{\sigma^2 a^2}{4\eta}\right\}, \infty\right) \subseteq \mathcal{I}_i, \quad i = 1, 2.$$

证明。 我们通过证明当 $\beta > 0$充分大时，对 $x \to \infty$ 有$v_\beta(x) \to \infty$，来确立该结论。由推论 2 以及引理 12 和引理 14，即可得到该结论。为此，我们将初值问题(β)改写如下：

$$v_\beta'(y) - \frac{2\eta}{\sigma^2}y v_\beta(y) + a v_\beta(y) = \frac{2\beta}{\sigma^2} + \frac{\hat{\alpha}}{2\sigma^2}v_\beta^2(y) - \frac{2h}{\sigma^2}y, \quad y \ge 0.$$

两边相乘 h，并乘以积分因子 $\exp\{-\frac{\eta}{\sigma^2}y^2 + ay\}$，得到以下界：

$$\left[\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}y^2 + ay\right\}v_\beta(y)\right]' \ge \frac{2\beta}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}y^2 + ay\right\} - \frac{2h}{\sigma^2}y\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}y^2 + ay\right\}.$$

对上述不等式两边在 $[0, x]$ 上积分，并利用 $v_\beta(0) = -r$，得到：

$$\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax\right\}v_\beta(x) \ge -r + \frac{2\beta}{\sigma^2}I_1 - \frac{2h}{\sigma^2}I_2, \tag{136}$$

其中

$$I_1 = \int_0^x \exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}y^2 + ay\right\}dy \text{ and } I_2 = \int_0^x y\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}y^2 + ay\right\}dy.$$

首先，考虑 I_1，并写出

$$I_1 = \exp\left\{\frac{\sigma^2}{4\eta}a^2\right\}\int_0^x \exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}\left(y - \frac{a\sigma^2}{2\eta}\right)^2\right\}dy.$$

应用变量替换 $u = \frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}(y - \frac{\sigma^2}{2\eta})$ 可得

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\sigma\exp\left\{\frac{\sigma^2}{4\eta}a^2\right\}\int_{-\frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}}^{\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}(x - \frac{\sigma^2}{2\eta})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\sigma \exp\left\{\frac{\sigma^2}{4\eta}a^2\right\}\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}\left(x - \frac{\sigma^2}{2\eta}\right)\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right)\right], \tag{137}$$

其中， Φ 是标准正态分布的累积分布函数。接下来，我们转向 I_2 ，并通过先推导以下内容来简化其导数计算

$$I_3 = \int_0^x \left(y - \frac{\sigma^2 a}{2\eta}\right)\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}y^2 + ay\right\}dy.$$

注意到 $I_3 = I_2 - \frac{\sigma^2 a}{2\eta}I_1$。通过变量替换 $u = -\frac{\eta}{\sigma^2}y^2 + ay$，我们可以写成

$$I_3 = \int_0^{-\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax} -\frac{\sigma^2}{2u}e^u du = \frac{\sigma^2}{2\eta}\left[1 - \exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax\right\}\right].$$

然后，利用 $I_2 = I_3 + \frac{a\sigma^2}{2\eta}I_1$，可得

$$I_2 = \frac{\sigma^2}{2\eta} - \frac{\sigma^2}{2\eta}\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax\right\} + \frac{\sigma^2 a^2}{2\eta}\exp\left\{\frac{a^2\sigma^2}{4\eta}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\sigma\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}x - \frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right)\right]. \tag{138}$$

将 (137)–(138) 代入 (136)，得到

$$\begin{aligned}\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax\right\}v_\beta(x) \geq\ & -r - \frac{h}{\eta} + \frac{h}{\eta}\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax\right\} \\ & + \frac{2\beta}{\sigma^2}\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\exp\left\{\frac{\sigma^2}{4\eta}a^2\right\}\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}x - \frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right)\right] \\ & - \sigma\frac{h}{\eta}\exp\left\{\frac{a^2\sigma^2}{4\eta}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}x - \frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right)\right].\end{aligned} \tag{139}$$

注意，存在足够大的 $x_0 > 0$ ，使得

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}x - \frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\eta}}\right) \geq \frac{1}{4}. \tag{140}$$

那么，对于 $x \geq x_0$ 和 $\beta > \frac{\sigma^2 h}{2\eta}$ ，结合 (139) 和 (140)，可写为，

$$\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax\right\}v_\beta(x) \geq -r + \left(\frac{2\beta}{\sigma} - \frac{\sigma h}{\eta}\right)\exp\left\{\frac{\sigma^2 a^2}{4\eta}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\frac{1}{\eta} - \frac{h}{\eta} + \frac{h}{\eta}\exp\left\{-\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax\right\}.$$

因此，我们得到 $v_\beta(\cdot)$ 的如下下界：

$$v_\beta(x) \geq \left[\frac{1}{4}\left(\frac{2\beta}{\sigma} - \frac{\sigma h}{\eta}\right)\exp\left\{\frac{\sigma^2 a^2}{4\eta}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{\eta}} - \left(r + \frac{h}{\eta}\right)\right]\exp\left\{\frac{\eta}{\sigma^2}x^2 + ax\right\} + \frac{h}{\eta}, \quad x > x_0. \tag{141}$$

特别地，我们注意到，对于 $\beta > \frac{\sigma^2 h}{2\eta} + 2\sigma(r + \frac{h}{\eta})\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\exp\{-\frac{\sigma^2 a^2}{4\eta}\}$，当 $x \to \infty$ 时，(141) 式右端趋于 ∞。因此，只要 $i = 1, 2$ 且其值高于 $\frac{\sigma^2 h}{2\eta} + 2\sigma(r + \frac{h}{\eta})\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\exp\{-\frac{\sigma^2 a^2}{4\eta}\}$， $\beta \in \mathrm{I}_i$，证明完毕。

■

为便于分析，在假设 5 的情形 i 下，我们定义 $\beta_i^* = \inf \mathrm{I}_i$，其中 $i = 1,2$。其余结果将证明，在情形 i 下，β_i^* 及其对应的 $v_{\beta_i^*}$ 满足贝尔曼方程，其中 $i = 1,2$。

引理 19. 在假设 *5* 的情形 i 下，对于 $i = 1$，有 $\beta_i^* > 0$ 2。

~ ~证明。 回顾引理 17，可知存在一个 $\beta_i > 0$，使得对于 $i = 1,2$， $\beta_i \in \mathrm{D}_i$。显然，对于 $\beta \in \mathrm{I}_i$ 和 $i = 1,2$，必有 $\beta \geq \beta_i$。因此，我们得出，对于 $i = 1, 2$， $\beta_i^* = \inf \mathrm{I}_i \geq \beta_i > 0$。■

引理 20. 在假设 *5* 的情形 i 下，我们有 $\beta_i^* \in \mathrm{I}_i$，且 $v_{\beta_i^*}$ 对于 $i = 1,2$ 有界。证明。 考虑 $i = 1,2$ 对应的假设 5 的情形 i。我们用反证法。假设 $\beta_i^* \notin \mathrm{I}_i$。那么，根据推论 2， $\beta_i^* \in \mathrm{D}_i$。特别地，根据引理 12，存在一个 $x_0 > 0$，使得 $v_{\beta_i^*}(x) < -r$。由于 $v_\beta(x_0)$ 关于 β 连续（见引理 15），存在一个 $\delta > 0$，使得

$$v_\beta(x_0) < -r \quad \text{for} \quad \beta \in (\beta_i^* - \delta, \beta_i^* + \delta)\,. \tag{142}$$

ˆ ˆ 然而，根据 β_i^* 的定义，存在一个 $\beta_i \in (\beta_i^*, \beta_i^* + \delta)$，使得 $\beta_i \in \mathrm{I}_i$。再次应用引理 12，可知对于所有 $x \geq 0$， $v_{\hat{\beta}_i}(x) \geq -r$，这与（142）矛盾。因此， $\beta_i^* \in \mathrm{I}_i$。

现在我们证明 $v_{\beta_i^*}$ 有界。为导出矛盾，假设它无界。那么存在一个 $x_0 > 0$，使得 $v_{\beta_i^*}(x_0) > 2h/\eta$。由于 $v_\beta(x_0)$ 关于 β （由引理 15）和 $\beta_i^* > 0$（由引理 19）连续，因此存在一个 $\epsilon > 0$，使得 $v_{\beta_i^* - \epsilon}(x_0) \geq h/\eta$。由引理 13 可知， $v_{\beta_i^* - \epsilon}$ 无界，进而由推论 2 和引理 11 得出 $\beta_i^* - \epsilon \in \mathrm{I}_i$。然而， $\beta_i^* - \epsilon \in \mathrm{I}_i$ 与 β_i^* 的定义矛盾。

■

引理21。 在假设 *5* 下，以下结论成立：

(i) $\mathcal{D}_1 = [0, \beta_1^*)$ 和 $\mathcal{I}_1 = [\beta_1^*, \infty)$；
(ii) $\mathcal{D}_2 = (\beta_2, \beta_2^*)$ 和 $\mathcal{I}_2 = [\beta_2^*, \infty)$。

—

证明。 考虑假设 5 的情形 i。假设存在一个 $\beta > \beta_i^*$，使得 $\beta \in \mathrm{D}_i$。那么，根据引理 16，可得 $\beta_i^* \in \mathrm{D}_i$，这与引理 20 矛盾。因此，不存在这样的 β。结合引理 20 和 β_i^* 的定义，即得证。

■

引理 22。 在假设 *5* 的情形 i 下，对于 $i = 1$, $v_{\beta_i^*}$ 是非递减的，且$\lim_{x\to\infty} v_{\beta_i^*}(x) = h/\eta$, 2。

证明。 考虑假设 5 中 $i = 1$, 2 的情形 i 。由于 $\beta_i^* \in \mathrm{I}_i$ ，根据引理 20, $v_{\beta_i^*}$ 是非递减的。此外，根据引理 20，我们有 $v_{\beta_i^*}$ 有界。因此，根据引理 13，我们有

$$v_{\beta_i^*}(x) \le \frac{h}{\eta} \quad \text{for} \quad x \ge 0.$$

此外，由于$v_{\beta_i^*}$ 是非递减的，其极限有定义且满足

$$\lim_{x\to\infty} v_{\beta_i^*}(x) \le \frac{h}{\eta}.$$

现在令 $v = \lim_{x\to\infty} v_{\beta_i^*}(x)$，并假设 $v < \frac{h}{\eta}$。考虑初值问题(β_i^*):

$$\frac{\sigma^2}{2} v'_{\beta_i^*}(y) = \beta_i^* + \frac{\hat{\alpha}}{4} v^2_{\beta^*}(y) + \eta y \left(v_{\beta_i^*}(y) - \frac{h}{\eta} \right) - a v_{\beta_i^*}(y), \quad y \ge 0.$$

对两边取极限，并注意到 $v < \frac{h}{\eta}$ ，可得:

$$\frac{\sigma^2}{2} \lim_{y\to\infty} v'_{\beta_i^*}(y) = \beta_i^* + \frac{\hat{\alpha}}{4} v^2 - a v + \lim_{y\to\infty} \eta y \left(v_{\beta_i^*}(y) - \frac{h}{\eta} \right) = -\infty.$$

因此，存在一个 $x_0 > 0$ ，使得 $v'_{\beta_i^*}(x_0) < 0$。根据引理 12，我们得出 $\beta_i^* \in \mathrm{D}_i$，这与矛盾。因此，

$$v = \lim_{x\to\infty} v_{\beta_i^*}(x) = h/\eta.$$

■

本节最后给出定理 1 的证明:

ˆ定理 *1* 的证明。 首先，考虑由假设 5 的情形 1–（假设 5(a)）涵盖的情形 $a > -\frac{\alpha}{4} r$。在此情形下，$(\beta_1^*, v_{\beta_1^*})$ 是方程 (103)–(104) 的解，且根据引理 6，该解唯一。此外，根据引理 22，我们有 $\lim_{x\to\infty} v_{\beta_1^*}(x) = h/\eta$。最后，根据引理 19，我们有 $\beta_1^* > 0$。因此，在此情形下，$(\beta_1^*, v_{\beta_1^*})$ 满足贝尔曼方程 (89)–(90)。当ˆ$a \le -\frac{\alpha}{4} r$时，适用假设 5 的情形 2，证明步骤与第一种情形相同。

–

■

8 拟议策略

本节通过在原控制问题的背景下解释等价工作负荷表述 (79)–(83) 的解，为第3节中引入的问题提出一种动态定价与派单策略。为描述该策略，回顾一下：我们考虑了一个按作业数量 n索引的系统序列，其形式极限是在扩散缩放下的布朗控制问题 (48)– (52)。为阐述拟议策略，我们固定系统参数 n，并用它对所关注的过程进行反缩放。我们将（未缩放的）工作负载过程 $W^n = \{W^n(t)\ t \geq 0\}$ 定义如下：

$$W^n(t) = \sum_{i=1}^{I} Q_i^n(t) \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

拟议 **定价策略：** 给定工作负载过程 W^n，我们选择需求率 s

$$\lambda_i^n(t) = n\lambda_i^* + \frac{\sqrt{n}}{2\alpha_i} v\left(\frac{W^n(t)}{\sqrt{n}}\right), \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0,$$

其中， v 是贝尔曼方程 (89)–(90) 的解。这可由方程 (43) 和 (91)、引理 4 及定理 2 推得。相应的拟议定价策略如下：

$$p_i^n(t) = \Lambda_i^{-1}(\lambda_i^*) + \frac{\left(\Lambda_i^{-1}\right)'(\lambda_i^*)}{2\alpha_i\sqrt{n}} v\left(\frac{W^n(t)}{\sqrt{n}}\right), \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0, \tag{143}$$

其中， Λ_i^{-1}是区域 i 的需求率函数的逆函数。方程（143）由附录 A 推导得出。

拟议调度策略： 我们提出两种调度策略，分别称为调度策略 1（DP1）和调度策略2（DP2）。调度策略 1（DP1）的依据是以下观察：在完全资源池化假设下的布朗控制问题中，我们将除一个库存水平外的所有库存水平都设为零。（库存非零的缓冲区对应于持有成本最低的缓冲区。）然而，正如 Harrison（1996）所阐述的，在布朗控制问题中库存为零，对应于原始系统中的少量正库存。因此，我们在各个缓冲区中设置少量安全库存，并且只有当库存水平达到或超过阈值时才为其提供服务。为此，记 s_i 为缓冲区 i的安全库存。

¯更具体地，令 $\mathsf{A}_i = \mathsf{A}_i \cap \{1, \ldots, b\}$ 表示由服务器执行的基本活动集合

¯由服务器 i 执行，并令 $\mathsf{C}_i = \mathsf{C}_i \cap \{1, \ldots, b\}$ 表示服务缓冲区 i的基本活动集合，我们提出的派遣策略如下：如果服务器 i 在时刻 t变为空闲，它就从 $\{b(j) : j \in \bar{\mathsf{A}}_i, \ Q^n_{b(j)}(t) \geq s_{b(j)}\}$ 中持有成本最大的缓冲区取出一个作业进行服务。也就是说，服务器 i变为空闲时，会查看所有通过基本活动为其提供服务的缓冲区，并为安全库存以上且持有成本最大的缓冲区提供服务。为了完整描述该策略，假设在时刻 t，缓冲区 i 的库存从 $s_i - 1$ 增加到 s_i，即达到安全库存。系统管理者会从 $\{s(j) : j \in \bar{\mathsf{C}}_i\}$ 中选择有效空闲成本最大的空闲服务器来服务缓冲区 i，见方程（78）。也就是说，当缓冲区 i 达到安全库存，即该缓冲区具备接受服务的条件时，系统管理者会选择一台有效空闲成本最大的空闲服务器，通过基本活动为该缓冲区提供服务。

调度策略2（DP2）受到最大压力策略的启发，例如参见 Stolyar（2004）、Dai 和 Lin（2005）、Dai 和 Lin（2008）以及 Ata 和 Lin（2008）。在该策略下，每台服务器优先处理自己的（本地）缓冲区。如果自己的缓冲区为空，则检查其他可以通过基本活动服务的缓冲区。如果有多个这样的缓冲区，服务器将处理队列长度最大的缓冲区。如果服务器自己的（本地）缓冲区为空，且无法通过基本活动服务任何其他缓冲区，则会考虑其能够服务的所有剩余缓冲区（通过非基本活动），并优先处理队列长度最大的缓冲区。

9 仿真研究

本节通过仿真研究展示拟议策略的有效性。仿真设置及其参数的灵感（尽管并非严格照搬）来自曼哈顿的出租车市场，参见 Ata 等人（2019）及其中的参考文献。我们将汽车数量（即系统参数）设为 $n = 10,000$。与 Ata 等人（2019）的做法一致，我们将曼哈顿划分为 $I = 4$ 个区域，参见图 2。

我们假设汽车既可以在所属区域接载顾客，也可以在相邻区域接载顾客



图 2：划分为四个区域的曼哈顿地区。

。由此得到以下容量消耗矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

使用 Ata 等人（2019）的同一数据集，我们将需求率（每小时）向量设为：

$$\lambda^n = (\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n, \lambda_4^n)' = (3678, 10723, 6792, 345)'.$$

相关　　相应的极限速率向量 λ^* 随后计算为 $\lambda^* = \lambda^n/n$，结果为

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*)' = (0.367, 1.072, 0.679, 0.0345)'. \tag{144}$$

为简化起见，我们使用 Ata 等人（2019）的初步结果来估计 λ^n 和 q（基于 2010年1月至2013年12月的四年数据集）。在此过程中，我们关注非节假日工作日的白班。

利用这一结果和公式（25），我们推导出投入产出矩阵 R 如下：

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^* & 0 & 0 & \lambda_1^* & 0 & 0 & \lambda_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^* & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^* & 0 & 0 & \lambda_4^* \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Ata 等人（2019）报告的平均行程时间为 13.2 分钟。为计入接客时间以及模型中未纳入的其他低效因素，我们将其乘以 2，因此将平均行程时间设为 26.4 分钟。因此，每小时 $\eta^n = 2.2727$ 。此外，由于我们在重交通假设（假设 3）下研究该系统，因此设定 $\eta = e'\lambda^* = 2.1539$。因此，我们有 $\hat{}\eta = \sqrt{n}(\eta^n - \eta) = 11.88$。

–

我们根据数据估计路由概率向量 q ，得到

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)' = (0.1647, 0.5408, 0.2724, 0.0221)',$$

由此得到流向各缓冲区的极限到达率向量 ν 如下：

$$\nu = \eta q = (0.3529, 0.1159, 0.5837, 0.0474)'.$$

因此，利用数据 A， R 和 γ，可以计算出唯一的名义处理计划 x^*，即假设 3 中所述的计划。该计划见图 3。在刻画了 x^* 后，接下来我们计算布朗运动 $\chi(\cdot)$ 的漂移参数 a 和方差参数 σ^2 ，见方程 (72)。为此，首先注意到布朗运动$B(\cdot)$ 的漂移向量 γ 和协方差矩阵 Σ （见方程 (49)、(55) 和 (56)）如下：

$$\gamma = \hat{\eta}' q = (1.9566, 6.4247, 3.2361, 0.2625)', \text{ and}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.7097 & 0.1918 & 0.0966 & 0.0078 \\ 0.1918 & 2.3302 & 0.3173 & 0.0257 \\ 0.0966 & 0.3173 & 1.1742 & 0.0130 \\ 0.0078 & 0.0257 & 0.0130 & 0.0937 \end{bmatrix}.$$

因此，我们有 $a = e'\gamma = 11.88$ 和 $\sigma^2 = e'\Sigma e = 5.6125$。

接下来，我们描述示例中的经济基本要素：需求函数及其

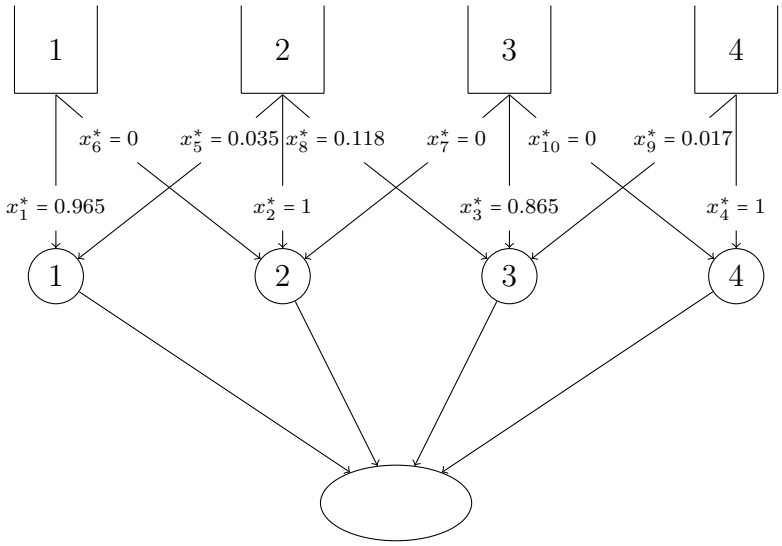


图 3：方程 (28)–(30) 中静态问题的唯一解 $x^* \in \mathbb{R}^{10}$。我们看到，活动 6、7 和 10 是非基变量，其余活动均为基变量。

相关的利润函数、持有成本率和闲置成本。我们假设需求函数是线性的。也就是说，

$$\Lambda_i(p_i) = a_i - b_i p_i \quad \text{for} \quad p_i \in [0, \frac{a_i}{b_i}] \text{ and } i = 1, \ldots, 4,$$

其中 a_i，$b_i > 0$ 为常数。此外，其逆函数为

$$\Lambda_i^{-1}(\lambda_i) = \frac{a_i - \lambda_i}{b_i}, \quad \lambda_i \in [0, a_i], \quad i = 1, \ldots, 4.$$

利润函数由方程 (7) 得出，如下所示：

$$\pi(\lambda) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i}{b_i} (a_i - \lambda_i), \quad \lambda_i \in [0, a_i], \quad i = 1, \ldots, 4.$$

我们将所有区域 i 的最优静态价格设为 $p_i^* = 10$，该价格约等于数据中的乘车平均价格，参见 Ata 等人（2019）。此外，回顾一下，极限需求率向量 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots\ldots, \lambda_4^*)$ 由 (144) 给出。关键假设是，这些值就是最优需求率和价格。这等价于假设 $a_i = 2\lambda_i^*$ 且 $b^* = \lambda_i^*/p_i$ 对于 $i = 1, \ldots\ldots, 4$。也就是说，我们设定

$$a = 2\lambda^* = (0.7356, 2.1446, 1.3584, 0.0691)',$$

$$b = \lambda^*/p^* = (0.0367, 0.1072, 0.0679, 0.0035)'.$$

根据这些结果，我们计算参数 α_i 为 $\alpha_i = -(\Lambda_i^{-1})'(\lambda_i^*) - (\lambda_i^*/2)(\Lambda_i^{-1})''(\lambda_i^*) = 1/b_i$ for

$i = 1, \ldots, 4$。因此，我们得到 $\alpha = (27.18,\ 9.32,\ 14.72,\ 289.55)$ 和 $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{4} 1/\alpha_i = 0.2154$。

Ata 等人（2019）指出，出租车行驶时的持有成本为每小时 $h_0^n = 1$ 美元（可根据其燃油成本估算得出）。为了估算其他缓冲区的持有成本率，我们考虑司机的机会成本。司机每小时大约可以完成两趟行程，收益约为每小时 $2 \times 10 = 20$ 美元。因此，我们设定 $h_i^n = 20$，适用于 $i = 1$、……、4。因此，我们有 $h^n = \min_{i=1,\ \ldots\ldots,\ 4} h_i^n - h_0^n = 19$。经过缩放后，我们得出等价工作负荷表述的极限持有成本率 h 为 $h = \sqrt{n} h^n = 1900$。闲置成本参数设为收入损失，即对于 $i = 1$、……、4，$c_i^n = p_i^* = 10$。重新缩放后，极限闲置成本为 $c_i = c_i^n/\sqrt{n} = 0.1$。因此，最适合闲置的服务器为 $k^* = \arg\min_{i=1,\ \ldots\ldots,\ 4} c_i/\lambda_i^* = 2$，其闲置成本为 $r = c_{k^*}/\lambda_{k^*}^* = 0.0933$。

计算出参数 a, σ^2, h, r, η 和 $\hat{\alpha}$ 后，我们针对该示例数值求解贝尔曼方程。基于该解，接下来我们介绍拟议策略。

定价策略。 由方程（143）可得

$$p_i^n(t) = 10 - \frac{1}{200} v\left(\frac{W^n(t)}{100}\right), \quad i = 1, \ldots, 4, \quad t \geq 0.$$

这对应于以下需求率：

$$\lambda_i^n = 10000\lambda_i^* + \frac{50}{\alpha_i} v\left(\frac{W^n(t)}{100}\right), \quad i = 1, \ldots, 4, \quad t \geq 0.$$

调度策略。 如第8节所述，我们提出了两种调度策略。在第一种拟议策略（调度策略 1）下，服务器 2 和 4 始终只处理各自的缓冲区。服务器 1 和 3 优先处理各自的缓冲区，但如果缓冲区 1 为空且缓冲区 2 超过阈值 s，服务器 1 就处理缓冲区 2。同样，只有当缓冲区 3 为空，且缓冲区 2 或 4 超过阈值 s 时，服务器 3 才处理缓冲区 2 或 4。如果两个队列都超过 s，则服务器 3 处理较长的队列。我们通过穷举搜索确定阈值 s。具体而言，我们设定 $s = 1$。

在调度策略2下，每个服务器优先处理自己的（本地）缓冲区。如果自己的缓冲区为空，则检查可通过基本活动服务的其他缓冲区。如果有多个这样的缓冲区，服务器就处理队列长度最大的缓冲区。如果服务器自己的（本地）缓冲区为空，且无法通过基本活动服务任何其他缓冲区，则会考虑所有其余可服务的缓冲区（通过非基本活动），并接下来处理队列长度最大的缓冲区。

队列长度。

为了比较我们策略的表现，我们将向每位已服务客户收取的价格相加，计算总收入。这也计入了闲置成本。此外，我们还记录产生的持有成本。最后，我们使用

$$\tilde{V}^n(t) = \left(n\pi(\lambda^*) - \sqrt{n}h_0\right)t = \left(n\sum_{i=1}^{4}\frac{\lambda_i^*}{b_i}(a_i - \lambda_i^*) - \sqrt{n}h_0\right)t, \text{ for } t \geq 0$$

ˆ（见方程（45））来计算归一化成本 $V^n(t)$，见方程（46）。

我们将自己的策略与以下结合了其他定价和调度策略的基准策略进行比较。在定价方面，除了我们的动态定价策略外，我们还考虑静态定价策略，该策略对所有 $i = 1$、.....、4 和 $t \geq 0$ 设置 $p_i^n(t) = p_i^* = 10$。在派单方面，除了我们提出的两种策略外，我们还考虑 (i) 静态调度策略，以及 (ii) 下文所述的最近司机策略。

静态调度策略。服务器 2 和 4 始终服务于各自的缓冲区。如果缓冲区 1 和 2 都非空，则服务器 1 以 $x_1^*/(x_1^* + x_5^*) = 0.965$ 的概率处理缓冲区 1，并以 $x_5^*/(x_1^* + x_5^*) = 0.035$ 的概率处理缓冲区 2。如果缓冲区 1 和 2 中只有一个非空，则服务器 1 处理该缓冲区。服务器 3 以类似方式将工作量分配给缓冲区 2、3 和 4，即分别按 x_3^*、x_8^* 和 x_9^* 的比例分配。

最近司机策略。令 D 为距离矩阵，即当 $i \neq j$ 和 $D_{ii} = 0$ 时，D_{ij} 对应于区域 i 和 j 之间的距离（以英里计）。使用 Ata 等人（2019）的数据，我们有

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2.6414 & 4.8132 & 8.2689 \\ 2.6414 & 0 & 1.9993 & 6.1969 \\ 4.8132 & 1.9993 & 0 & 3.9073 \\ 8.2689 & 6.1969 & 3.9073 & 0 \end{bmatrix}.$$

服务器 i 在时间 t 执行活动 $\arg\min_{j \in \mathcal{A}_i} D_{ib(j)}(t)$。换言之，在最近司机策略下，每台服务器都会优先处理距离自身最近的缓冲区。

数值研究结果见表1。仿真结果基于1000小时的运行时长获得，平均成本的估计值通过排除前200小时预热期内的统计数据计算得出。相应的置信区间根据

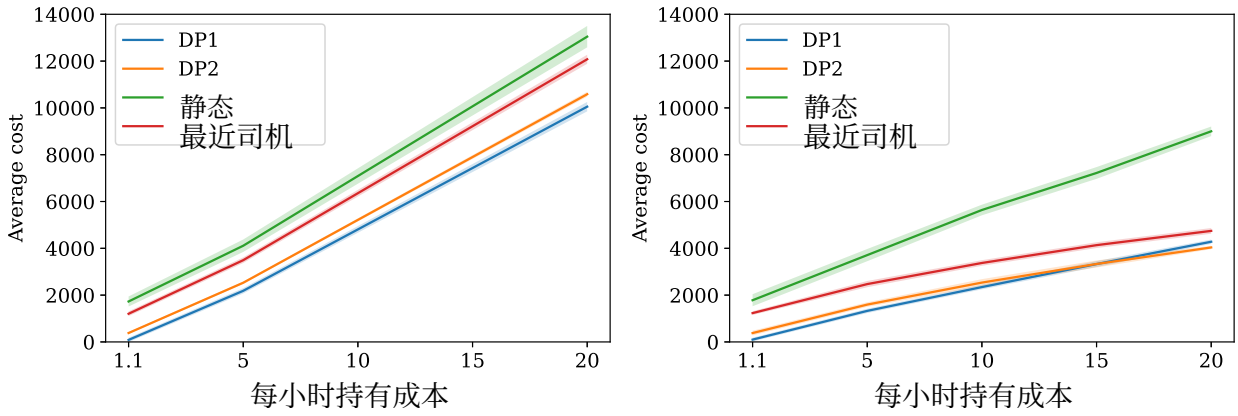
10次宏观重复实验计算得出。我们观察到，所提出的调度策略（DP1、DP2）相较于基准策略有显著改进（9.74%–55.01%）。更重要的是，我们观察到，对于所考虑的每种派遣策略，动态定价都能带来显著改进（30.96%–61.73%）。在所考虑的策略中，采用调度策略2（DP2）的动态定价表现最佳。

表1：基于10次宏观重复实验估算的平均成本及其95%置信区间。

派遣策略	静态定价策略	动态定价策略
DP1	10075.23 ± 201.59	4302.59 ± 94.09
DP2	10607.19 ± 103.18	4059.35 ± 73.73
静态策略	13066.83 ± 457.31	9021.89 ± 204.19
最接近的驾驶员策略	12100.53 ± 193.57	4766.96 ± 122.19

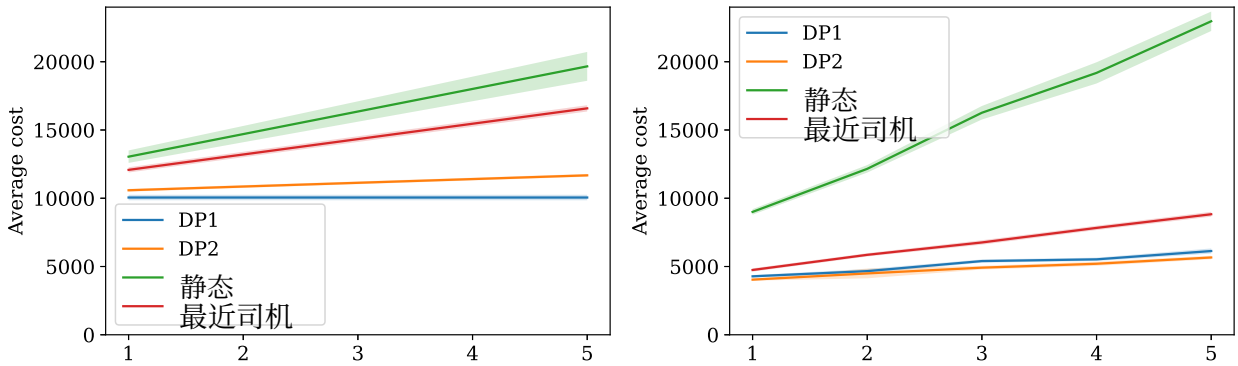
遗憾的是，我们没有数据来直接估计持有成本和闲置成本。对于前者，实际持有成本可能更低，因为我们估计的机会成本很可能是一个上界。另一方面，目前后者尚未考虑商誉损失。因此，我们进行了敏感性分析，其中一项考察较低的持有成本率（图4），另一项则考察计入商誉损失后较高的闲置成本[7]（图5）。这些分析共同表明，表1中的发现对于持有成本和闲置成本参数的变化具有稳健性。

[7]敏感性分析的估计性能及相应置信区间也基于 10 次宏观重复实验得出，每次重复实验的运行时长为 1000 小时（前 200 小时的统计数据作为预热期被舍弃）。



（a）静态定价　　（b）动态定价

图4：不同持有成本下的平均成本。每条线周围的阴影区域表示基于 10 次宏观重复实验得出的 95%置信区间。



（a）静态定价　　（b）动态定价

图5：不同闲置成本下的平均成本。每条线周围的阴影区域表示基于 10 次宏观重复实验得出的 95%置信区间。

10 结论

我们研究了一个受网约车系统启发的动态定价与调度控制问题。我们提出的模型的新颖之处在于纳入了旅行时间。我们在完全资源池化条件下，对重交通状态下的问题进行了解析求解。基于该解，我们提出了一种闭式动态定价策略和一种派遣策略。我们通过仿真研究将拟议策略与基准方法进行比较，并表明该策略行之有效。

我们的公式　n 也存在一些局限。具体而言，我们假设只有一个出行节点，并且

完全资源池化条件成立。未来有趣的研究方向包括放宽这些假设。

参考文献

Abramowitz, M. 和 Stegun, I.A.（2003），《数学函数手册：公式、图表和数学表格》，多佛出版社，纽约。Adusumilli, K.M. 和 Hasenbein, J.J.（2010），《队列的动态准入与服务率控制》，排队系统，**66** (2) 131–154。Af˙eche, P.、Liu, Z. 和 Maglaras, C.（2018），《具有策略性司机的网约车网络：平台控制能力对绩效的影响》，工作论文。Af˙eche, P.、Liu, Z. 和 Maglaras, C.（2020），《网约车网络中针对热点需求冲击的动态加价与动态匹配》，工作论文。Ata, B.（2005），《受服务质量约束的无线静态信道中的动态功率控制》，运筹学，**53** (5) 842–851。Ata, B.（2006），《稀疏到达流下多类别队列的动态控制》，运筹学，**54** (5) 876–892。Ata, B. 和 Barjesteh, N.（2020），《备货型多类别排队系统的动态定价》，工作论文。Ata, B.、Barjesteh, N. 和 Kumar, S.（2019），《空间定价：纽约市出租车行程的实证分析》，工作论文。Ata, B.、Barjesteh, N. 和 Kumar, S.（2020），《拼车平台中的动态匹配与集中式调度》，工作论文。Ata, B. 和 Kumar, S.（2005），《完全资源池化开放式加工系统的重交通分析：离散审查策略的渐近最优性》，应用概率年刊，**15** (1A) 331–391。Ata, B.、Harrison, J.M. 和 Shepp, L.A.（2005），《布朗加工系统的漂移率控制》，应用概率年刊，**15** (2) 1145–1160。Ata, B.、Field, J.、Lee, D. 和 Tongarlak, M.H.（2021），《志愿者参与管理的动态模型》，工作论文。Ata, B.、Lee, D. 和 S¨onmez, E.（2019），《多作物拾穗作业中的动态志愿者人员配置》，运筹学，**67** (2) 295–314。Ata, B. 和 Lin, W.（2008），《具有多个瓶颈的随机处理网络中最大压力策略的重交通分析》，排队系统，**59** 191—235。Ata, B. 和 Olsen, T.L.（2009），《凸凹型客户延迟下近似最优的动态交货提前期报价与调度》，运筹学，**57** (3) 753–768。Ata, B. 和 Olsen, T.L.（2013），《基于拥堵的交货期报价与定价：异质客户下的收益最大化》，排队系统，**73** (1) 35–78。Ata, B. 和 Shneorson, S.（2006），《具有可调到达率与服务率的 $M/M/1$ 服务系统动态控制》，管理科学，**52** (11) 1778–1791。

Ata, B. 和 Tongarlak, M.H.（2013），《一般延迟成本下带弃队行为的多类别队列调度》，排队系统，**74** (1) 65–104。Ata, B. 和 Zachariadis, K.E.（2007），《受能量约束的衰落下行信道中的动态功率控制》，排队系统，**55** (1) 41–69。Banerjee, S.、Freund, D. 和 Lykouris, T.（2021），《共享车辆系统中的定价与优化：近似框架》，运筹学，即将出版。Banerjee, S.、Kanoria, Y. 和 Qian, P.（2020），《完全资源池化下闭合排队网络的动态分配控制》，工作论文。Banerjee, S.、Riquelme, C. 和 Johari, R.（2015），《拼车平台中的定价：一种排队论方法》，第十六届 *ACM* 经济学与计算会议论文集，639–639。Bateman, H. 和 Erd´elyi, A.（1953），《高等超越函数：第一卷》，麦格劳-希尔，纽约。Bell, S.L. 和 Williams, R.J.（2001），《重交通下采用资源池化的双并行服务器系统的动态调度：阈值策略的渐近最优性》，应用概率年刊，**11** (3) 608–649。Bell, S.L. 和 Williams, R.J.（2005），《完全资源池化的并行服务器系统在重交通下的动态调度：阈值策略的渐近最优性》，概率电子期刊，**10** 1044–1115。Bertsimas, D.、Jaillet, P. 和 Martin, S.（2019），《在线车辆路径规划：大规模应用中优化的边界》，运筹学，**67** (1) 143–162。Besbes, O.、Castro, F. 和 Lobel, I.（2021），《动态加价及其空间供给响应》，管理科学，**67** (3) 1350–1367。Besbes, O.、Castro, F. 和 Lobel, I.（2021），《空间容量规划》，运筹学，**70**(2) 1271–1291。Billingsley, P.（1999），《概率测度收敛（第二版）》，John Wiley & Sons, Inc.，纽约州纽约市。Bimpikis, K.、Candogan, O. 和 Saban, D.（2019），《网约车网络中的空间定价》，运筹学，**67** (3) 744–769。Bramson, M. 和 Dai, J.G.（2001），《若干排队网络的重交通极限》，应用概率年刊，**11** (1) 49–90。Braverman, A.、Dai, J.G.、Liu, X. 和 Ying, L.（2019），《拼车系统中的空车调度》，运筹学，**67** (5) 1437–1452。Browne, S. 和 Whitt, W.（1995），《分段线性扩散过程》，载于《排队论进展：理论、方法与未决问题》，J.H. Dshalalow（编），463–480，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿。Budhiraja, A. 和 Ghosh, A.P.（2005），《重交通下交叉网络渐近最优控制的大偏差方法》，应用概率年刊，**15** (3) 1887–1935。

Budhiraja, A., Liu, X. 和 Saha, S.（2018），《由自由边界问题构造交叉网络的渐近控制》，随机系统，**6**（2）459–518。Cachon, G., Daniels, K. 和 Lobel, R.（2017），《自调度能力下动态加价在服务平台中的作用》，《制造与服务运营管理》，**19**（3）337–507。Castillo, J.C., Knoepfle, D. 和 Weyl, G.（2021），《网约车中的匹配：徒劳追逐及其解决方法》，工作论文。C¸elik, S. 和 Maglaras, C.（2008），《多类别按订单生产队列的动态定价与交货提前期报价》，管理科学，**54**（6）1132–1146。Chen, Q., Lei, Y. 和 Jasin, S.（2020），《用于平衡网络供需的实时空间—时间动态定价》，工作论文。Chen, H., Yang, P. 和 Yao, D.D.（1994），《双站排队网络中的控制与调度：最优策略与启发式方法》，排队系统，**18**（3–4）301–331。Chen, M.K. 和 Sheldon, M.（2016），《劳动力市场中的动态定价：Uber 平台上的动态加价与灵活工作》，*2016*年 *ACM* 经济学与计算会议论文集。Dai, J. G. 和 Lin, W.（2005），《随机处理网络中的最大压力策略》，运筹学，**53**（2）197-218。Dai, J. G. 和 Lin, W.（2008），《随机处理网络中最大压力策略的渐近最优性》，应用概率年刊，**18**（6）2239–2299。Ethier, S. 和 Kurtz, T.（2005），《马尔可夫过程：刻画与收敛》，John Wiley & Sons, Inc.，纽约州纽约市。Garg, N. 和 Nazerzadeh, H.（2021），《司机高峰定价》，管理科学，**68**（5）3219–3235。George, J.M. 和 Harrison, J.M.（2001），《可调服务率队列的动态控制》，运筹学，**49**（5）720–731。Gokpinar, B. 和 Selcuk, C.（2019），《网约车空间模型中的价格与佣金选择》，工作论文。Ghosh, A.P. 和 Weerasinghe, A.P.（2007），《重载下随机处理网络的最优缓冲区大小》，排队系统，**55**（3）147–159。Ghosh, A.P. 和 Weerasinghe, A.P.（2010），《重载下含不耐烦顾客的排队系统的最优缓冲区大小与动态速率控制》，随机过程及其应用，**120**（11）2103–2141。Guda, H. 和 Subramanian, U.（2019），《您的 Uber 即将抵达：通过动态加价、预测信息传达和工作者激励管理按需工作者》，管理科学，**65**（5）1995–2014。Harrison, J.M.（1988），《异质顾客群体排队网络的布朗模型》，载于随机微分系统、随机控制理论及其应用，

W. Fleming 和 P.-L. Lions（编），IMA 数学及其应用丛书，**10**147–186，施普林格出版社，纽约州纽约市。Harrison, J.M.（1996），《随机处理网络流量管理的 BIGSTEP 方法》，载于随机网络：理论与应用，F. P. Kelly、I. Ziedins 和 S. Zachary（编），57–90，牛津大学出版社。Harrison, J.M.（1998），《并行服务器系统的重交通分析：离散审查策略的渐近最优性》，应用概率年刊，**8**（3）822–848。Harrison, J.M.（2000），《开放处理网络的布朗模型：工作负荷的规范表示》，应用概率年刊，**10**（1）75–103。Harrison, J.M.（2003），《布朗网络的更广阔视角》，应用概率年刊，**13**（3）1119–1150。Harrison, J.M.（2013），《性能与控制的布朗模型》，剑桥大学出版社，英国剑桥。Harrison, J.M. 和 Wein, L.M.（1989），《排队网络调度：简单开放网络的重交通分析》，排队系统，**5**（4）265–280。Harrison, J.M. 和 Van Mieghem, J.A.（1997），《布朗网络的动态控制：状态空间塌缩与等价工作负荷表述》，应用概率年刊，**7**（3）747–771。Harrison, J.M. 和 L´opez, M.J.（1999），《并行服务器系统中的重交通资源池化》，排队系统，**33**（4）339–368。He, L., Hu, Z. 和 Zhang, M.（2020），《车辆共享的稳健重新配置》，《制造与服务运营管理》，**22**（2）241–256。Hosseini, M., Milner, J. 和 Romero, G.（2021），《汽车共享网络中的动态调度》，工作论文。Hu, B., Hu, M. 和 Zhu, H.（2022），《网约车中的动态加价与双边时间响应》，《管理与服务运营管理》，**24**（1）91–109。Hu, M. 和 Zhou, Y.（2021），《动态类型匹配》，《管理与服务运营管理》，**24**（1）125–142。Jacob, J. 和 Roet-Green, R.（2021），《独乘或拼车：为拼车平台设计价格—服务选项》，《欧洲运筹学杂志》，**295**（3）1008—1024。Karlin, S. 和 Taylor, H.M.（1981），《随机过程第二课程》，学术出版社，纽约。Kim, J. 和 Ward, A.R.（2013），《具有多个顾客类别的 $GI/GI/1+GI$ 队列的动态调度》，排队系统，**75**（2–4）339–384。Kogan, Y. 和 Lipster, R.（1993），《具有瓶颈的大型闭合排队网络的极限非平稳行为》，排队系统，**14**（1–2）33–55。

Kogan, Y., Liptser, R., 和 Smorodinskii, A.V.（1986年），《计算机网络闭合马尔可夫模型的高斯扩散近似》，信息传输问题，**22**（1），38–51。Korolko, N., Woodard, D., Yan, C., 和 Zhu, H.（2020），《网约车平台中的动态定价与匹配》，海军研究后勤，**67**（8），705–724。Krichagina, A.A. 和 Puhalskii, E.V.（1997年），《带有 GI/∞ 服务中心的闭合排队系统的重交通分析》，排队系统，**25**（1–4），235–280。Kumar, S.（2000年），《重载下的双服务器闭合网络：扩散极限与渐近最优性》，应用概率年刊，**10**（3），930–961。Kumar, R., Lewis, M.E., 和 Topaloglu, H.（2013年），《马尔可夫调制到达下单服务器队列的动态服务率控制》，海军研究后勤，**60**（8），661–677。Kushner, H.J. 和 Martins, L.F.（1996），《通过弱收敛方法分析受控多类别排队网络的重交通》，*SIAM*控制与优化期刊，**34**（5），1781–1797。Lu, A., Frazier, P., 和 Kislev, O.（2018），《动态加价推动 Uber 司机合作伙伴》，*2018*年*ACM*经济学与计算会议论文集。Mandl, P.（1968年），《一维马尔可夫过程的解析处理》，施普林格出版社, 纽约。Martins, L.F., Shreve, S.E., 和 Soner, H.M.（1996），《受控多类别排队系统的重交通收敛》，*SIAM*控制与优化期刊，**34**（6），2133–2171。¨Ozkan, E.（2020），《拼车系统中的联合定价与匹配》，欧洲运筹学杂志，**287**（3），1149–1160。¨Ozkan, E. 和 Ward, A.R.（2020），《实时拼车的动态匹配》，随机系统，**10**（1），29–70。Polyanin, A.D. 和 Zaitsev, V.F.（2003），《常微分方程精确解手册（第二版）》，Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿。Rubino, M. 和 Ata, B.（2009），《带取消的按订单生产并行服务器系统的动态控制》，运筹学，**57**（1），94–108。Smorodinskii, A.V.（1986年），《单服务系统队列长度的渐近分布》（俄文），自动化与遥测技术，**2** 92–99。Stidham, S. 和 Weber, R.R.（1989年），《未折现成本下队列控制的单调且不敏感的最优策略》，运筹学，**37**（4），611–625。Stolyar, A.L.（2004），《广义交换机中的最大权重调度：重载下的状态空间塌缩与工作负载最小化》，应用概率年刊，**14**（1），1–53。Talluri, K. 和 van Ryzin, G.（2004），《收益管理理论与实践》，施普林格出版社，纽约州纽约市。Varma, S. M., Bumpensanti, P., Maguluri, S. T., 和 Wang, H.（2022），《双边队列的动态定价与匹配》，运筹学。

Wang, X., Agatz, N., 和 Erera, A.（2017年），《动态拼车系统的稳定匹配》，交通科学，**52**（4），850–867。Williams, R.J.（1998），《开放多类排队网络的扩散近似：涉及状态空间塌缩的充分条件》，排队系统，**30**（1–2），27–88。Yang, P., Iyer, K., 和 Frazier, P.（2018），《空间环境中资源竞争的平均场均衡》，随机系统，**8**（4），307–334。Zhang, R. 和 Pavone, M.（2016），《机器人按需出行系统的控制：排队理论视角》，《国际机器人研究杂志》，**35**（1–3），186–203。

附录

A 推导

A.1 布朗控制问题的形式推导

本节对第4节中引入的近似布朗控制问题作形式推导。我们不提供严格的弱收敛极限定理。不过，为近似提供支持的论证可视为此类证明的大致纲要；类似的推导可参见 Harrison（1988、2000年、2003年）。

我们在重交通假设下，考虑由系统参数 n 索引的系统序列。随后，我们将各个过程减去其均值，并按系统参数 n 进行适当缩放，最后形式上令 $n \to \infty$ 趋于极限。为此，我们首先定义以下（扩散）缩放过程：

$$\hat{\Psi}_i^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\Psi_i \left(\lfloor nt \rfloor \right) - q_i nt \right), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \ldots, I, \tag{145}$$

$$\hat{N}_j^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(N_j(nt) - nt \right), \qquad t \geq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, J, \tag{146}$$

其中，$\lfloor x \rfloor$ 是小于或等于 x 的最大整数。我们还定义以下（流体）缩放过程：

$$\bar{N}_0^n(t) = \frac{1}{n} N_0(nt), \quad t \geq 0, \tag{147}$$

$$\bar{Q}_0^n(t) = \frac{1}{n} Q_0^n(t), \qquad t \geq 0, \tag{148}$$

$$\bar{\mu}_j^n(t) = \frac{1}{n} \mu_j^n(t), \qquad j = 1, \ldots, J, \quad t \geq 0. \tag{149}$$

根据 Donsker定理、更新过程的泛函中心极限定理以及随机原始过程的独立性，过程 Ψ_i^n 和 N_j^n 弱收敛到相互独立的标准布朗运动，参见 Billingsley （1999 年）。

正如 Kogan和Lipster（1993 年）所观察到的，在重交通假设下，我们预计无限服务器节点中的作业数量将为 n 一阶近似。也就是说，我们预计 $Q_0^n(t) \approx 1$ 对于 $t \geq 0$，当 n 变大时。同样，我们预计缓冲区中的队列长度

1，……，I将为 $\sqrt{n}$ 阶。因此，我们预计价格，或等价地说，需求率，仅在二阶上偏离其名义值。也就是说，我们预计 $\lambda_i^n - \lambda_i^* n = O(\sqrt{n})$。由于需求率决定服务率（见方程（9）），我们预计 $\bar{\mu}_j^n(t) \approx \mu_j^*$对于 $t \geq 0$，当 n 变大时。

结合方程 (145)–(149) 与方程 (38)–(44)，可以直接推导出以下针对 $i = 1, \ldots, I$ 的缩放系统动态方程：

$$\begin{aligned} Z_i^n(t) &= B_i^n(t) + q_i \eta^n \int_0^t Z_0^n(s)\, ds - \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \int_0^t \kappa_j^n(s)\, dT_j^n(s) + \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \mu_j^* Y_j^n(t) + t\sqrt{n}\left[q_i \eta - \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \mu_j^* x_j^* \right] \\ &= B_i^n(t) + q_i \eta^n \int_0^t Z_0^n(s)\, ds - \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \int_0^t \kappa_j^n(s)\, dT_j^n(s) + \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \mu_j^* Y_j^n(t), \end{aligned}$$

其中，第二个等式由假设 3 得出，过程 B_i^n 定义为

$$\begin{aligned} B_i^n(t) = Z_i^n(0) + q_i \hat{\eta} t + q_i \hat{N}_0^n\left(\eta^n \int_0^t \bar{Q}_0^n(s)\, ds \right) + \hat{\Psi}_i^n\left(\bar{N}_0^n\left(\eta^n \int_0^t \bar{Q}_0^n(s)\, ds \right) \right) \\ - \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \hat{N}_j^n\left(\int_0^t \bar{\mu}_j^n(s)\, dT_j^n(s) \right). \end{aligned}$$

假设对于较大的 n，$Z_i^n(0) \approx Z_i(0)$，则同样可以直接论证，B_i^n 可由一个布朗运动 B_i 近似，该布朗运动的初始状态为 $Z_i(0)$，漂移参数为 $\gamma_i = \hat{}\eta q_i$，方差参数为

$$\sigma_i^2 = \left[q_i^2 + q_i(1 - q_i) \right] \eta + \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \mu_j^* x_j^* = q_i \eta + \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \mu_j^* x_j^*.$$

此外 more，极限布朗运动过程之间的协方差为

$$\operatorname{Cov}(B_i, B_{i'}) = q_i q_{i'} \eta \quad \text{for} \quad i \neq i'.$$

因此，将 Z^n、Y^n 和 κ^n 替换为它们的形式极限 Z、Y 和 κ，即可得到近似布朗控制问题中针对 $i = 1, \ldots, I$ 的以下系统动态方程：

$$Z_i(t) = B_i(t) + q_i \eta \int_0^t Z_0(s)\, ds - \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \int_0^t x_j^* \kappa_j(s)\, ds + \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \mu_j^* Y_j(t), \quad t \geq 0.$$

系统状态方程（19）和（39）还意味着 $Z_0^n(t) = -\sum_{i=1}^I Z_i^n(t)$，且 $Z_i^n(t) \geq 0$对于 $i = 1, \ldots, I$和 $t \geq 0$。因此，在近似的布朗控制问题中，对于 $t \geq 0$，以下关系成立：

$$Z_0(t) = -\sum_{i=1}^I Z_i(t) \quad \text{and} \quad Z_i(t) \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1 \ldots, I.$$

同样显然，方程（9）和（43）–（44）导出了布朗控制问题中的方程（52）；方程（17）和（41）导出了方程（54）；而方程（42）导出了方程（51）。

ˆ 为完成布朗控制问题的形式推导，我们论证当 $V^n \approx \xi$ 足够大时， n，其中 V^n 和 ξ 分别由方程（46）和（47）给出。首先，根据泰勒定理，我们有

$$\pi\left(\lambda^* + \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n(s)\right) = \pi(\lambda^*) + \nabla\pi(\lambda^*)'\,\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n(s) + \frac{1}{2n}\zeta^n(s)'\nabla^2\pi(\lambda^*)\,\zeta^n(s) + R_{\lambda^*,3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n(s)\right),$$

其中 $R_{\lambda^*,3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n(s)\right) = O(n^{-3/2})$ 是三阶余项。[8] 此外，注意到项 $\nabla\pi(\lambda^*)'\,\zeta^n(s)/\sqrt{n}$ 为零，因为 λ^* 是 $\pi(\lambda)$的极大值点，且位于可行域 L 的内部（见假设2），这意味着 $\nabla\pi(\lambda^*) = 0$。因此，我们有

$$\pi\left(\lambda^* + \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n(s)\right) = \pi(\lambda^*) - \frac{1}{n}\zeta^n(s)'H\zeta^n(s) + O\left(n^{-3/2}\right),$$

其中 $H = -\frac{1}{2}\nabla^2\pi(\lambda^*)$。利用这一点以及方程（35）和（43），可得

$$\pi^n(\lambda^n(s)) = n\pi(\lambda^*) - \zeta^n(s)'H\zeta^n(s) + O\left(n^{-1/2}\right). \tag{150}$$

最后，利用方程（39）、（41）–（46）和（150），可以直接推导出以下结果:

$$\begin{aligned}\hat{V}^n(t) &= n\left(\pi(\lambda^*) - h_0^n\right)t - \left[\int_0^t \pi^n(\lambda^n(s))\,ds - \int_0^t \sum_{i=0}^{I} h_i^n Q_i^n(s)\,ds - (c^n)'\,I^n(t)\right] \\ &= \int_0^t \left[\zeta^n(s)'H\zeta^n(s) + O\left(n^{-1/2}\right)\right]ds + \int_0^t \sum_{i=0}^{I} h_i Z_i^n(s)\,ds + c'U^n(t).\end{aligned}$$

ˆ 因此，将 V^n、 Z^n、 ζ^n 和 U^n 替换为它们的形式极限 ξ、 Z、 ζ 和 U 后，我们得到如下近似布朗控制问题的成本过程:

$$\xi(t) = \int_0^t \zeta(s)'H\zeta(s)\,ds + \int_0^t \sum_{i=0}^{I} h_i Z_i(s)\,ds + c'U(t), \quad t \geq 0.$$

注意，这是一个对角矩阵，即 $H = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_I)$，其中

$$\alpha_i = -\left(\Lambda_i^{-1}\right)(\lambda_i^*) - \frac{\lambda_i^*}{2}\left(\Lambda_i^{-1}\right)''(\lambda_i^*), \quad i = 1, \ldots, I.$$

[8]特别地，余项为

$$R_{\lambda^*,3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n(s)\right) = \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_I \in \{0,1,2,3\} \\ \text{s.t. } \alpha_1+\cdots+\alpha_I=3}} \frac{\partial^3\pi\left(\lambda^* + \frac{C}{\sqrt{n}}\zeta^n(s)\right)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_I^{\alpha_I}} \prod_{i=1}^{I} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta_i^n(s)\right)^{\alpha_i}}{\alpha_i!} \quad \text{for some} \quad C \in (0,1).$$

利用这一点，我们进一步将极限成本过程 $\xi(t)$ 简化如下：

$$\xi(t) = \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{I} \alpha_i \zeta_i^2(s) + \sum_{i=0}^{I} h_i Z_i(s) \right] ds + c'U(t), \quad t \geq 0.$$

A.2 方程（143）的推导

回顾一下，所提出的选定需求率为

$$\lambda_i^n = n\lambda_i^* + \sqrt{n} q(t), \quad i = 1, \ldots, I, \quad t \geq 0,$$

其中 $q(t) = \frac{1}{2\alpha_i} v\left(\frac{W^n(t)}{\sqrt{n}} \right)$。因此，区域 i 的定价策略如下：

$$\begin{aligned} p_i^n(t) &= (\Lambda_i^n)^{-1} (\lambda_i^n(t)) \\ &= (\Lambda_i^n)^{-1} \left(n\lambda_i^* + \sqrt{n} q(t) \right) \\ &= \Lambda_i^{-1} \left(\lambda_i^* + \frac{q(t)}{\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

其中，第三个等号是由以下事实得出的：对于 $x \in \mathrm{L}$，$(\Lambda_i^n)^{-1}(nx) = \Lambda_i^{-1}(x)$。然后注意，根据泰勒定理，我们有

$$p_i^n(t) = \Lambda_i^{-1} (\lambda_i^*) + \left(\Lambda_i^{-1} \right)' (\lambda_i^*) \frac{q(t)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \left(\Lambda_i^{-1} \right)'' \left(\lambda_i^* + \frac{c \cdot q(t)}{\sqrt{n}} \right) \left(\frac{q(t)}{\sqrt{n}} \right)^2 \quad \text{for some} \quad c \in (0,1),$$

这意味着

$$\begin{aligned} p_i^n(t) &= \Lambda_i^{-1} (\lambda_i^*) + \left(\Lambda_i^{-1} \right)' (\lambda_i^*) \frac{q(t)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n} \right) \\ &= \Lambda_i^{-1} (\lambda_i^*) + \frac{\left(\Lambda_i^{-1} \right)' (\lambda_i^*)}{2\alpha_i \sqrt{n}} v\left(\frac{W^n(t)}{\sqrt{n}} \right) + O\left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

另外，注意通过重新排列各项，我们有

$$\sqrt{n} \left(p_i^n(t) - \Lambda_i^{-1} (\lambda_i^*) \right) = \frac{\left(\Lambda_i^{-1} \right)' (\lambda_i^*)}{2\alpha_i} v\left(\frac{W^n(t)}{\sqrt{n}} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

这意味着，我们提出的动态定价策略在一阶近似下与静态价格一致，但在二阶上偏离静态价格，即偏离量为 $1/\sqrt{n}$ 阶。 –

B 杂项证明

引理 *1* 的证明。 该证明与 Ata et al. (2020) 中引理 2 的证明几乎完全相同，但为完整起见，我们仍将其列出。证明分为四个步骤。我们用 e^n 表示适当维度的欧几里得空间中的第 n 个单位基向量。也就是说， e^n 的第 n 个分量为 1，其余分量均为 0。此外，回顾假设 3 后的讨论，对于向量 $y \in \mathbb{R}^J$，我们写作 $y = (y_B, y_N)$，其中 $y_B \in \mathbb{R}^b$ 和 $y_N \in \mathbb{R}^{J-b}$。

步骤 1： 考虑不会导致任何服务器闲置的基本活动率集合，即 $\bar{}\{y \in \mathbb{R}^J : By_B = 0, \ y_N = 0\}$。首先，我们证明该集合是 $\bar{C}$的张成空间，其定义如下：

$$\bar{\bar{C}} = \left\{ e^j - e^{j'} : (j, j') \in \bar{C},\, e^j,\, e^{j'} \text{ are unit basis vectors in } \mathbb{R}^J \right\}, \tag{151}$$

$\bar{}$ $\bar{}$其中， $C = \{(j, \ j') : j, \ j' \in \{1, \ldots\ldots, \ b\}$，满足 $s(j) = s(j')\}$。也就是说， C是由同一服务器执行的所有成对基本活动的集合。请注意，方程（151）中的差值 $e^j - e^{j'}$ 体现了服务器 $s(j)$在提高活动 j 的执行速率（从其名义值 x_j^* 开始）时所做出的权衡，代价是降低活动 j'的执行速率。通过对名义基本活动率 x_B^*进行此类调整，系统管理者可以在缓冲区 $b(j)$和 $b(j')$之间重新分配工作负载，而不会造成任何闲置。因此，我们直观地预期，对 C 中的此类活动率取$\bar{}$线性组合，应得到不会导致任何闲置的活动率集合，即集合$\{y \in \mathbb{R}^J : By_B = 0, \ y_N = 0\}$。总之，在步骤 1 中，我们证明

$$\operatorname{span}\left(\bar{\bar{C}}\right) = \left\{ y \in \mathbb{R}^J : By_B = 0,\, y_N = 0 \right\}.$$

为证明这一点，我们证明两个集合彼此包含。首先，设 $y \in \{y \in \mathbb{R}^J : By_B = 0, y_N = 0\}$。要证明$y \in$ 张成空间 $(\bar{\bar{C}})$，我们证明存在常数 $a_{jj'}$, $(j, j') \in \bar{C}$，使得 $y = \sum_{(j,j') \in \bar{C}} a_{jj'}(e^j - e^{j'})$.为了求出这些常数，定义以下集合会很方便

$$\bar{\mathcal{A}}_i = \mathcal{A}_i \cap \{1, \ldots, b\},$$

$\bar{}$其中，A_i 是服务器 i 执行的活动集合，见方程 (3)。更具体地说，A_i由服务器 i执行的所有基本活动组成。经过可能的重新编号后，假设这些

基本活动按如下顺序排列：

$$\bar{\mathcal{A}}_i = \{b_{i-1}+1, \ldots, b_i\} \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, I,$$

where $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_I = b$. 我们定义常数 $a_{jj'}$，对于 $(j, j') \in C$ 如下：

$$a_{jj'} = \begin{cases} \sum_{l=b_{i-1}+1}^{k} y_l, & \text{if } (j,j') = (k,k+1) \text{ for } k = b_{i-1}+1, \ldots, b_i - 1 \text{ and } i = 1, \ldots, I, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{(j,j')\in\bar{C}} a_{jj'}\left(e^j - e^{j'}\right) &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=b_{i-1}+1}^{b_i-1} a_{k,k+1}\left(e^k - e^{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=b_{i-1}+1}^{b_i-1}\left[\left(\sum_{l=b_{i-1}+1}^{k} y_l\right)\left(e^k - e^{k+1}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{I}\Big[y_{b_{i-1}+1}\left(e^{b_{i-1}+1} - e^{b_{i-1}+2}\right) + \left(y_{b_{i-1}+1} + y_{b_{i-1}+2}\right)\left(e^{b_{i-1}+2} - e^{b_{i-1}+3}\right) \\
&\qquad + \cdots + \left(\sum_{l=b_{i-1}+1}^{b_i-2} y_l\right)\left(e^{b_i-2} - e^{b_i-1}\right) + \left(\sum_{l=b_{i-1}+1}^{b_i-1} y_l\right)\left(e^{b_i-1} - e^{b_i}\right)\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{I}\Big[y_{b_{i-1}+1}e^{b_{i-1}+1} + \left(y_{b_{i-1}+2} + y_{b_{i-1}+1} - y_{b_{i-1}+1}\right)e^{b_{i-1}+2} \\
&\qquad + \cdots + \left(\sum_{l=b_{i-1}+1}^{b_i-1} y_l - \sum_{l=b_{i-1}+1}^{b_i-2} y_l\right)e^{b_i-1} - \left(\sum_{l=b_{i-1}+1}^{b_i-1} y_l\right)e^{b_i}\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{I}\left[y_{b_{i-1}+1}e^{b_{i-1}+1} + y_{b_{i-1}+2}e^{b_{i-1}+2} + \cdots + y_{b_i-1}e^{b_i-1} - \left(\sum_{l=b_{i-1}+1}^{b_i-1} y_l\right)e^{b_i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{I}\left[y_{b_{i-1}+1}e^{b_{i-1}+1} + y_{b_{i-1}+2}e^{b_{i-1}+2} + \cdots + y_{b_i-1}e^{b_i-1} - \left(-y_{b_i}\right)e^{b_i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=b_{i-1}+1}^{b_i} y_k e^k \\
&= \sum_{j=1}^{J} y_j e^j,
\end{aligned}$$

前两个等式由 $a_{jj'}$ 的定义得出，第四个等式通过代数变换得到，第五个等式则通过消去项得到。为推导第六个等式，注意到y 满足 $By_B = 0$，由此可得

$$\sum_{l=b_{i-1}+1}^{b_i} y_l = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, I.$$

等价地，我们有

$$\sum_{l=b_{i-1}+1}^{b_i-1} y_l = -y_{b_i} \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, I.$$

将其代入第五个等式的最后一项，得到第六个等式。最后，由于 $y_N = 0$ 且集合 A_i, $i = 1$，……， I 将基本活动划分为若干部分，因此得到第八个等式。由于 $y = \sum_{j=1}^{J} y_j e^j$，我们得出 $y \in$ 张成空间（$\bar{C}$）。

反过来，设 $y \in$ 张成空间（$\bar{C}$）。那么存在常数 $a_{jj'}$，$(j,\ j') \in \bar{C}$，使得

$$y = \sum_{(j,j')\in\bar{C}} a_{jj'} \left(e^j - e^{j'}\right).$$

由于 C 仅由基本活动对组成，因此可得 $y_N = 0$。此外，对于 $(j,\ j') \in C$ 和 $i \in \{1,\ \ldots\ldots,\ I\}$，有

$$\left[A\left(e^j - e^{j'}\right)\right]_i = \sum_{l=1}^{b} A_{il}\left(e_l^j - e_l^{j'}\right) = \sum_{l=1}^{b} \mathbf{1}_{\{s(l)=i\}}\left(e_l^j - e_l^{j'}\right) = \mathbf{1}_{\{s(j)=i\}} - \mathbf{1}_{\{s(j')=i\}} = 0,$$

第二个等式由方程 (1) 得出，第四个等式则是因为 $s(j) = s(j')$。因此，对于所有 $(j,\ j') \in \bar{C}$，都有 $A(e^j - e^{j'}) = 0$，这意味着根据线性性，$Ay = 0$。所以，$y \in \{y \in \mathbb{R}^J : Ay = 0,\ y_N = 0\}$。

步骤 2： 在此步骤中，我们证明 $\mathbf{N}$ = 张成空间 $(\tilde{C})$，其中 $\tilde{C} = \{Ry : y \in \bar{\bar{C}}\}$。为此，回顾 $\mathbf{N} = \{Hy_B : By_B = 0,\ y_B \in \mathbb{R}^b\} = \{Ry : Ay = 0,\ y_N = 0\}$。因此，根据步骤 1 和 $\tilde{C}$ 的定义，可得 $\mathbf{N}$ = 张成空间 $(\tilde{C})$。

步骤 3： 在此步骤中，我们证明 $\tilde{C} = \{\mu_j^*(e^{b(j)} - e^{b(j')}) : (j,j') \in \bar{C},\ e^{b(i)},\ e^{b(j')} \in \mathbb{R}^I\}$。为此，注意，对于 $(j,j') \in C$ 以及 $i \in \{1,\ldots,I\}$，有

$$\begin{aligned}\left[R\left(e^j - e^{j'}\right)\right]_i &= \sum_{l=1}^{J} R_{il}\left(e_l^j - e_l^{j'}\right) = \sum_{l=1}^{J} \mu_l^* \mathbf{1}_{\{b(l)=i\}}\left(e_l^j - e_l^{j'}\right) = \mu_j^* \mathbf{1}_{\{b(j)=i\}} - \mu_{j'}^* \mathbf{1}_{\{b(j')=i\}} \\ &= \mu_j^*\left(\mathbf{1}_{\{b(j)=i\}} - \mathbf{1}_{\{b(j')=i\}}\right) = \mu_j^*\left(e_i^{b(j)} - e_i^{b(j')}\right),\end{aligned}$$

第二个等式由方程 (2) 和 (25) 得出，第四个等式则由以下事实得出：$s(j) = s(j')$（因为 $(j,\ j') \in \bar{C}$），以及方程 (24)。也就是说，

$$R\left(e^j - e^{j'}\right) = \mu_j^*\left(e^{b(j)} - e^{b(j')}\right) \quad \text{for} \quad (j,j') \in \bar{C}. \tag{152}$$

_¯然后根据 C 的定义，我们写作

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \left\{Ry : y \in \bar{\bar{C}}\right\} \\ &= \left\{Ry : y = e^j - e^{j'} \text{ such that } (j,j') \in \bar{C},\ e^j, e^{j'} \text{ are unit basis vectors}\right\} \\ &= \left\{R\left(e^j - e^{j'}\right) : (j,j') \in \bar{C},\ e^j, e^{j'} \text{ are unit basis vectors}\right\} \\ &= \left\{\mu_j^*\left(e^{b(j)} - e^{b(j')}\right) : (j,j') \in \bar{C},\ e^j, e^{j'} \text{ are unit basis vectors}\right\},\end{aligned}$$

其中，最后一个等号由公式（152）得出。因此，结论成立。特别地，根据缓冲区通信的定义，注意到

$$\tilde{C} = \left\{\mu_j^*\left(e^i - e^{i'}\right) : \text{buffers } i \text{ and } i' \text{ communicate directly, } e^i, e^{i'} \in \mathbb{R}^I\right\}.$$

步骤4： 我们考虑引理 1 中定义的矩阵 M （见公式（59）），并证明其各行构成 M 的一个基。为此，令 $M^l, l = 1,\ldots,L$ 为公式（59）中给出的矩阵 M 的各行。由于缓冲区池将服务器划分为若干组， M 的各行线性无关。因此，为完成证明，只需证明 M = 张成空间（$M^1,\ldots,M^L$）。回顾 M =N $^\perp$ 且 N = 张成空间（$\tilde{C}$），可知 $a \in$ M 当且仅当对所有 $z \in \tilde{C}$ 都有 $a \cdot z = 0$。此外，由于对所有 $j \in$ {1,...,b} 都有 $\mu_j^* > 0$，由步骤 3 可得

$$\mathcal{N} = \text{span}\left(\left\{e^i - e^{i'} : \text{buffers } i \text{ and } i' \text{ communicate directly, } e^i, e^{i'} \in \mathbb{R}^I\right\}\right).$$

因此， $a \in$M 当且仅当 $a_i = a_{i'}$ 对于所有直接通信的缓冲区 i 和 i' 均成立。

为证明 M =张成空间 ($M^1,\ldots,M^L$)，我们证明这两个集合互相包含。一方面，设$a \in$M。则 $a_i = a_{i'}$ 对于所有直接通信的缓冲区 i 和 i' 均成立。根据缓冲区通信的定义，立即可得，对于所有相互通信的缓冲区 i 和 i'， $a_i = a_{i'}$ 均成立。也就是说，对于所有属于同一缓冲池的缓冲区 i 和 i'， $a_i = a_{i'}$均成立。因此， $a \in$张成空间 ($M^1,\ldots,M^L$)，这意味着 M $\subseteq$张成空间 ($M^1,\ldots,M^L$)。另一方面，为证明张成空间 ($M^1,\ldots,M^L$) $\subseteq$M，只需证明对每个 $l = 1,\ldots,L$， $M^l \in$M。为此，只需证明对于所有直接通信的缓冲区 i 和 i' ，$M_i^l = M_{i'}^l$ 。然而，根据公式（59），这显然成立，因为直接通信的缓冲区 i 和 i' 属于同一缓冲池。因此，张成空间 ($M^1,\ldots,M^L$) $\subseteq$M.

■

引理2的证明。 只需证明，对于所有 $l = 1,\ldots,L$ 和 $j = 1,\ldots,J$， $(MR)_{lj} = (GA)_{lj}$ ，

其中 G 由方程 (60) 给出。事实上，根据方程 (2)、(25) 和 (59)，

$$(MR)_{lj} = \sum_{i=1}^{I} M_{li} R_{ij} = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{1}_{\{i \in \mathcal{P}_l\}} \mu_j^* \mathbf{1}_{\{b(j)=i\}} = \mu_j^* \mathbf{1}_{\{b(j) \in \mathcal{P}_l\}}. \tag{153}$$

另一方面，由方程（1）和（60），

$$(GA)_{lj} = \sum_{i=1}^{I} G_{li} A_{ij} = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i^* \mathbf{1}_{\{i \in \mathcal{S}_l\}} \mathbf{1}_{\{s(j)=i\}} = \lambda_{s(j)}^* \mathbf{1}_{\{s(j) \in \mathcal{S}_l\}}. \tag{154}$$

注意，由方程（24）可得 $\mu_j^* = \lambda_{s(j)}^*$，由方程（58）可知，$b(j) \in \mathcal{P}_l$ 当且仅当 $s(j) \in \mathcal{S}_l$。因此，由方程（153）–（154）即可得出所需结果。 ■

引理*3*的证明。 当 $L = 1$时，所有缓冲区都位于同一个缓冲池中。因此，由方程（59）可立即得出 $M = e'$。此外，根据缓冲区通信的定义和方程（58），存在一个服务器池。由此可由方程（60）得出 $G = (\lambda^*)'$。

为证明方程（69）中的第一个关系，注意到

$$M\eta q = \eta M q = \eta e' q = \eta \sum_{i=1}^{I} q_i = \eta,$$

其中，第二个等号由 $M = e'$ 得出，第四个等号则由 q 是一个概率向量这一事实得出。为证明方程（69）中的第二个关系，首先注意到$MC = e' \in \mathbb{R}^J$。这由 $M = e' \in \mathbb{R}^I$、方程（2）中 C的定义，以及C 每列恰有一个非零元素这一事实得出。因此，

$$MC\mathrm{diag}(x^*)A' = e'\mathrm{diag}(x^*)A' = (x^*)'A' = (Ax^*)' = e' \in \mathbb{R}^I,$$

the 第四个等号由重交通假设得出，见方程（29） . ■

引理 *4* 的证明。 这是一个直接的凸优化问题。构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(\zeta, \nu) = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \zeta_i^2 - \nu \sum_{i=1}^{I} \zeta_i + \nu x,$$

whe其中 ν 是拉格朗日乘子，因此必要的一阶条件给出

$$\zeta_i^* = \frac{\gamma}{2\alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, I.$$

将其代入常数中，$e'\zeta = x$ 得到 $\nu = 2x/\hat{\alpha}$ 并且

$$\zeta_i^* = \frac{x}{\alpha_i \hat{\alpha}}, \quad i = 1, \ldots, I. \tag{155}$$

该解的最优性可由目标函数的凸性得出。将 (155) 代入目标函数，得到 $c(x) = x^2/\alpha$，符合预期。
■

命题 *1* 的证明。 设 (Y,ζ) 是满足 (48)-(54) 的一个可容许控制，其对应的状态过程为 Z，闲置过程为 U。令 $W(t) = MZ(t)$，其中 $t \geq 0$，则由 (48) 可知 (65) 成立，而 (64) 根据定义成立。类似地，由 (53)-(54) 可得 (66)-(67)，而由 (52) 可得 (68)。因此，BCP表述 (48)-(54) 中的 (Z,U,ζ) 是 RBCP (63)-(68) 的一个可容许策略。由于两个表述具有相同的过程 Z,U,ζ，它们具有相同的成本。

反向结论的证明与 Harrison and Van Mieghem (1997) 中定理 1 的证明（第二部分）完全相同（见第 753-754 页），唯一实质性的区别（除显而易见的符号差异外）是，他们第 755 页方程 (36) 中的过程 X 被替换为

$$B(t) - \eta q \int_0^t e'Z(s)ds - C\mathrm{diag}(x^*) \int_0^t \kappa(s)ds$$

在我们的设定中。随后，按照他们证明中的相同步骤，可以证明：按他们的方程 (35) 定义的过程 Y（在我们的设定中）以及 ζ，对于我们的布朗控制问题 (48)-(54) 是可容许的。此外，由于 (Y, ζ) 产生相同的队列长度过程 Z，其成本与 RBCP (63)-(68) 中策略 (Z, U, ζ) 的成本相同。

■

命题 *2* 的证明。 给定 EWF 的一个可容许策略 θ 及相应的过程 W，L，我们令 $Z_{i^*} \equiv W$ 和 $Z_i \equiv 0$ 分别对应于 $i \neq i^*$，并令 $U_{k^*} \equiv L$ 和 $U_k \equiv 0$ 分别对应于 $k \neq k^*$。此外，我们令$\zeta_i(s) = \theta(s)/(\alpha_i \alpha_i)$ 对应于 $i = 1, \ldots\ldots, I$，由引理 4 可得 $\sum_{i=1}^I \alpha_i \zeta_i^2(s) = c(\theta(s))$。于是由 (77)-(78) 可知，$(Z, U, \zeta)$ 在 RBCP 中的成本与 θ 在 EWF 中的成本相同。

为证明逆命题，设 Z,U,ζ 是 RBCP 的一个可容许策略，并设

$$\theta(s) = e'\zeta(s),\ W(s) = e'Z(s),\ \text{and}\ \ L(s) = (\lambda^*)'U(s), \quad s \geq 0.$$

容易验证， $\theta(\cdot)$ 是 EWF 的可容许策略。此外，根据引理 4，有 $c(\theta(s)) \leq \sum_{i=1}^I \alpha_i \zeta_i^2(s)$，且对于 $s \geq 0$， $hW(s) \leq \sum_{i=1}^I (h_i - h_0) Z_i(s)$，以及 $rL(s) \leq c'U(s)$。因此，EWF 的 θ 的成本小于或等于 RBCP 的策略 (Z,U,ζ) 的成本。■

命题 *3* 的证明。考虑定义在 $[0,\infty)$ 上的辅助平稳反射扩散，记为 $\{\tilde{W}(t)\ \ t \geq 0\}$，其漂移率函数为 $-(\eta y - a + \theta^*(y))$，方差参数为 σ^2。

正如 Browne 和 Whitt（1995）第 470–471 页所述（另见 Mandl（1968年）和 Karlin 和 Taylor（1981年）），其概率密度函数记为 φ，如下所示：

$$\varphi(x) = \frac{\exp\left\{-\int_0^x \frac{2}{\sigma^2}\left(\eta y - a + \theta^*(y)\right)\, dy\right\}}{\int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^y \frac{2}{\sigma^2}\left(\eta s - a + \theta^*(s)\right)\, ds\right\} dy}, \quad x \in [0,\infty) \tag{156}$$

只要所有积分均有限，这一点我们将在下文验证。为此，令 $k = \inf\{y \geq 0 : v(y) \geq 0\}$，其中 (v, β^*) 满足贝尔曼方程 (89)–(90)。注意，由方程 (90) 可知，对于 $y \leq k$，$-r \leq v(y) \leq 0$；对于 $y \geq k$，$0 \leq v(y) \leq h/\eta$。为验证上述积分有限，利用方程 (91) 可知

$$\begin{aligned}
\exp\left\{-\int_0^y \frac{2}{\sigma^2}\left(\eta s - a + \theta^*(s)\right)\, ds\right\} &= \exp\left\{-\int_0^y \frac{2}{\sigma^2}\left(\eta s - a + \frac{\hat{\alpha}}{2} v(s)\right) ds\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{\eta y^2 - a y}{\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{\hat{\alpha}}{\sigma^2}\left[\int_0^k v(s)\, ds + \int_k^y v(s)\, dy\right]\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{\eta y^2 - a y}{\sigma^2}\right\} \exp\left\{\frac{\hat{\alpha}}{\sigma^2} r k\right\},
\end{aligned} \tag{157}$$

由此我们还可以推得，方程 (156) 右侧分母中的积分有限。此外，由方程 (157) 可知，平稳扩散过程 W 的矩有限。特别地，

$$E\left[\tilde{W}(0)\right] = E\left[\tilde{W}(t)\right] < \infty, \quad t < \infty. \tag{158}$$

Ne $\tilde{x}$t，我们定义另一个辅助平稳扩散过程，记为 W^*，如下：

$$\tilde{W}^*(t) = W^*(0) + \tilde{W}(t).$$

注意到 $W^*(0) < W^*(0)$ 几乎必然成立，我们定义停时 τ 如下：

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 : W^*(t) \geq \tilde{W}^*(t)\right\}$$

并引入以下过程：

$$\hat{W}^*(t) = \begin{cases} W^*(t), & t < \tau, \\ \tilde{W}^*(t), & t > \tau. \end{cases}$$

ˆ 根据扩散过程的强马尔可夫性质， W^* 与 W^*具有相同的分布。此外，

$$\hat{W}^*(t) \le \tilde{W}^*(t), \quad t \ge 0.$$

因此，我们得出

$$\begin{aligned} E[W^*(t)] &= E\left[\hat{W}^*(t)\right] \\ &\le E\left[\tilde{W}^*(t)\right] \\ &= W^*(0) + E\left[\tilde{W}(t)\right] \\ &= W^*(0) + E\left[\tilde{W}(0)\right] \\ &< \infty, \end{aligned} \tag{159}$$

˜其中，第二个等式根据 W^* 的定义得出，第三个等式根据 W 的平稳性得出，最后一个等式根据方程 (158) 得出。因此，根据 $W^*(t) \ge 0$（其中 $t \ge 0$）和方程 (159)，我们得出

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[W^*(t)]}{t} \le \lim_{t\to\infty} \frac{W^*(0) + E\left[\tilde{W}(0)\right]}{t} = 0,$$

正如所需。 ■

下一个引理有助于证明引理 6。为陈述该结果，先将方程 (103)–(104) 改写如下会更方便：

$$v'(x) = q_2 v^2(x) + q_1(x)v(x) + q_0(x), \quad x \ge 0, \tag{160}$$

$$v(0) = -r, \tag{161}$$

其中 $q_0(x) = \frac{2}{\sigma^2}(\beta - hx)$， $q_1(x) = \frac{2}{\sigma^2}(\eta x - a)$，且 $q_2 = \hat{\frac{\sigma}{2\sigma^2}} \ge 0$，其中 $x \ge 0$。

引理 23. 对于每个满足方程 *(160)–(161)* 的 $v \in C^1[0,\infty)$， $y(x) = \exp\left\{-q_2 \int_0^x v(t)\,dt\right\}$满足

$$y''(x) - q_1(x)y'(x) + q_2 q_0(x)y(x) = 0, \quad x \ge 0, \tag{162}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = rq_2. \tag{163}$$

反过来，对于满足方程 *(162)–(163)* 的每个 $y \in C^2[0,\infty)$， $v = -y'/(q_2 y)$ 满足方程

(160)–(161)。

引理 *23* 的证明。 设 $v \in C^1[0,\infty)$ 满足方程 (160)–(161)，且 $y(x) = \exp\{-q_2 \int_0^x v(t)\,dt\}$。于是可得

$$
\begin{aligned}
&y''(x) - q_1(x)y'(x) + q_2 q_0(x)y(x) \\
&\quad = \left[\exp\left\{-q_2\int_0^x v(t)\,dt\right\}\cdot(-q_2 v(x))\right]' - q_1(x)\left[\exp\left\{-q_2\int_0^x v(t)\,dt\right\}\cdot(-q_2 v(x))\right] \\
&\qquad\quad + q_2 q_0(x)\exp\left\{-q_2\int_0^x v(t)\,dt\right\} \\
&\quad = \left[\exp\left\{-q_2\int_0^x v(t)\,dt\right\}\cdot(-q_2 v(x))^2 + \exp\left\{-q_2\int_0^x v(t)\,dt\right\}\cdot\left(-q_2 v'(x)\right)\right] \\
&\qquad\quad + q_2 q_1(x)v(x)\exp\left\{-q_2\int_0^x v(t)\,dt\right\} + q_2 q_0(x)\exp\left\{-q_2\int_0^x v(t)\,dt\right\} \\
&\quad = q_2\exp\left\{-q_2\int_0^x v(t)\,dt\right\}\left[q_2 v^2(x) - v'(x) + q_1(x)v(x) + q_0(x)\right] \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

此外，$y(0) = \exp\{-q_2\cdot 0\} = 1$，且 $y'(0) = -q_2\exp\{-q_2\cdot 0\}v(0) = rq_2$。

另一方面，设 $y \in C^2[0,\infty)$ 满足方程 (162)–(163)，且 $v = -y'/(q_2 y)$。于是可得

$$
\begin{aligned}
v'(x) &= \left[-\frac{y'(x)}{q_2 y(x)}\right]' = -\frac{1}{q_2}\left[\frac{y''(x)}{y(x)} - \left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)^2\right] = -\frac{y''(x)}{q_2 y(x)} + q_2 v^2(x) \\
&= -\frac{q_1(x)y'(x)}{q_2 y(x)} + q_0(x) + q_2 v^2(x) = q_2 v^2(x) + q_1(x)v(x) + q_0(x).
\end{aligned}
$$

Mo此外，$v(0) = -y'(0)/(q_2 y(0)) = -(rq_2)/(q_2\cdot 1) = -r$。证明至此完成 f. ■

引理 *6* 的证明。众所周知，方程 (162)–(163) 可转化为一种称为库默尔方程的退化超几何方程；参见 Polyanin 和 Zaitsev（2003年）。已知这类方程的解为合流超几何函数；参见 Bateman 和 Erd´elyi（1953年）以及 Abramowitz 和 Stegun（2003年）。由此可根据引理 23 得出，方程 (160)–(161) 存在一个解 v。为了完成证明，我们必须证明方程 (160)–(161) 的解 v 唯一。为此，定义函数 f 为

$$
f(x,u) = q_2 v^2 + q_1(x)v + q_0(x), \quad (x,v) \in [0,\infty)\times(-\infty,\infty).
$$

要证明唯一性，只需证明 f 关于 v 局部利普希茨连续，即当限制在紧域 $[0,N]\times[-M,M]$ 上时，f 关于 v 满足利普希茨条件，其中 N， $M>0$。更具体地说，局部利普希茨连续性将证明每个紧区间上的唯一性，而后可轻易将其推广至正实数轴。为此，对于 $x\in[0,N]$ 和 v_1，$v_2\in[-M,M]$，有

$$\begin{aligned}
|f(x,v_1)-f(x,v_2)| &= \left|q_2v_1^2+q_1(x)v_1-q_2v_2^2-q_1(x)v_2\right| \\
&\le q_2\left|v_1^2-v_2^2\right|+|q_1(x)|\,|v_1-v_2| \\
&= \left[q_2|v_1+v_2|+\frac{2}{\sigma^2}\left(\eta x+|a|\right)\right]\cdot|v_1-v_2| \\
&\le \left[2Mq_2+\frac{2}{\sigma^2}\left(\eta N+|a|\right)\right]|v_1-v_2|\,.
\end{aligned}$$

因此， f 关于 v是局部利普希茨的。证明至此完成。 ■