arXiv:2302.02271v1 [math.AG] 5 Feb 2023

复单阿贝尔簇自同构的动力学次数与 Salem 数

YUTARO SUGIMOTO

Abstract. 我们证明，每个 Salem 数都可以实现为复单阿贝尔簇某个自同构的第一动力次数。此外，运用类似的技巧，我们证明：固定复单阿贝尔簇的维数后，复单阿贝尔簇自同构的第一动力次数（不包括 1）构成的集合具有最小值。此外，我们证明存在一个复单阿贝尔簇的自同构，其第一动力次数尽可能接近 1。这些结果受到 Nguyen-Bac Dang 和 Thorsten Herrig 的工作的启发。

1. 引言

对于一个 g 维紧致 K¨ahler 流形 X 以及一个主导亚纯映射$f\colon X \dashrightarrow X$， f的第 k 阶动力次数 $\lambda_k(f)$ 定义为

$$\lambda_k(f) := \lim_{n\to+\infty} ||(f^n)^* : \mathrm{H}^{k,k}(X) \to \mathrm{H}^{k,k}(X)||^{\frac{1}{n}}$$

其中 $||\cdot||$ 是线性变换的范数，而 $\mathrm{H}^{k,\,k}(X)$（$0 \le k \le g$）是（k， k）-Dolbeault上同调。动力次数总是不小于 1（例如参见 [DS05]或 [DS17]）。

如第2.1节所述，若 f是全纯映射，则 $\lambda_k(f) = \rho(f^*)$，其中 ρ是谱半径， f^* 是 $\mathrm{H}^{k,\,k}(X)$ 上的算子。

关于第一动力次数与 Salem 数以及皮索数之间关系的一些结果（参见第 2.2 节）。

定理 1.1（[DF01，定理 5.1(1)]）。设 X 是紧致 K¨ahler 曲面，且 $f\colon X \dashrightarrow X$是一个双亚纯映射，其在 $\mathrm{H}^{1,1}(X)$ 上的算子 f^*的谱半径为 $\rho(f^*) > 1$，其中 ρ是谱半径。

那么，算子 f^* 恰有一个特征值 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$，其模为 $|\lambda| > 1$，事实上 $\lambda = \rho(f^*)$。

备注 1.2. 该定理表明，复数域上的射影曲面的双有理映射的第一动力次数为 1、Salem 数或皮索数（参见 [BC16, 定理 1.2]）。

定理 1.3（[DH22，定理 2.1 (i)]）。设 λ 是次数为 g的 Salem 数。那么，存在一个 g 维简单阿贝尔簇 X 的自同构 f，其具有全不定四元数乘法（即， X 的自同态代数是全不定四元数代数），其动力学次数为

$$\lambda_1(f) = \cdots = \lambda_{g-1}(f) = \lambda^2 \quad and \quad \lambda_0(f) = \lambda_g(f) = 1.$$

该定理得出结论：存在某个简单阿贝尔簇的自同构，使每个 Salem 数的平方（它仍是 Salem 数）成为第一动力次数。

定理 1.3 的推广是本文的主要结果，如下所示。

定理 A. 设 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个不可约首一多项式，其所有根均为实数或模为 1。假设至少有一个根的模为 1。设 g 是多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 的次数，且 $z_1, z_2, \ldots, z_g$ 是 $P(x)$ 的根，按如下方式排列：$|z_1| \geq |z_2| \geq \cdots \geq |z_g|$。

那么，存在一个维数为 g 的简单阿贝尔簇 X，以及一个自同构 $f\colon X \longrightarrow X$，其动力次数为

$$\lambda_0(f) = 1, \lambda_k(f) = \prod_{i=1}^{k} |z_i|^2 \, (1 \leq k \leq g).$$

此定理在第 5 节中得到证明，并在第 6 节中导出以下推论。

推论 B. 任意 Salem 数都可以实现为 $\mathbb{C}$ 上某个简单阿贝尔簇自同构的第一动力次数。

第 7 节致力于探讨除 1 以外的较小第一动力次数，以下定理将在第 7.1 节中得到证明。（这或许是一个众所周知的事实，证明也很简单，但我们未能找到相关文献。）

定理 C。对于整数 $g \geq 2$,

$$\mathcal{A}_g := \left\{ \begin{array}{l} \textit{first dynamical degrees of surjective endomorphisms} \\ \textit{of abelian varieties over } \mathbb{C} \textit{ whose dimension is } g \end{array} \right\} \backslash \{1\},$$

$$\mathcal{B}_g := \left\{ \begin{array}{l} \textit{first dynamical degrees of automorphisms} \\ \textit{of simple abelian varieties over } \mathbb{C} \textit{ whose dimension is } g \end{array} \right\} \backslash \{1\}$$

具有最小值。

但是，若不限制（简单）阿贝尔簇的维数，除 1 以外，第一动力次数的集合不存在最小值。此结果在第 8 节中证明。

定理 D。以下集合不存在最小值：

$$\Delta := \{\text{第一个 } \mathbb{C}\text{上简单阿贝尔簇自同构的动力次数}\}\backslash\{1\}.$$

致谢。作者感谢 Keiji Oguiso 教授提出了有关动力次数的一些问题，并对本文提出意见。他还感谢 Long Wang 在研讨会上指出证明中的一个错误。

2. Preliminaries

2.1. 动力学次数

设 X 是一个 g 维紧致 K¨ahler 流形，并设 $f\colon X \dashrightarrow X$ 是第 1 节中所述的主导亚纯映射。若 f 是一个全纯映射，则

$$(f^n)^* = (f^*)^n : \mathrm{H}^{k,k}(X) \to \mathrm{H}^{k,k}(X)$$

对每个 $0 \leq k \leq g$ 均成立，因此 f 的动力学次数计算为

$$\begin{aligned} \lambda_k(f) = \lim_{n\to+\infty} ||(f^n)^* : \mathrm{H}^{k,k}(X) \to \mathrm{H}^{k,k}(X)||^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty} ||(f^*)^n : \mathrm{H}^{k,k}(X) \to \mathrm{H}^{k,k}(X)||^{\frac{1}{n}} \\ &= \rho(f^* : \mathrm{H}^{k,k}(X) \to \mathrm{H}^{k,k}(X)) \end{aligned}$$

其中， $\rho(f^*)$ 是 $f^*\colon \mathrm{H}^{k,k}(X) \to \mathrm{H}^{k,k}(X)$ 的谱半径。在此条件下，$\lambda_g(f)$ 等于一般点 a 在 X 中的像 $f^{-1}(a)$ 所含的点数。因此，若 f 是复射影簇 X 的一个 g 维自同构，则 $\lambda_g(f) = 1$ (参见 [DS17])。

特别地，设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的 g 维阿贝尔簇，并写作 V/Λ，其中 $V = \mathbb{C}^g$，且 Λ 是 V 中的一个 $\mathbb{Z}$ 格。在本文中，所有阿贝尔簇均视为定义在 $\mathbb{C}$ 上，以下省略基域。若阿贝尔簇 X 除了 0 和 X 外不包含任何阿贝尔子簇，则称其为简单的。

设 $f\colon X \longrightarrow X$ 是阿贝尔簇 X 的一个态射。那么， f 可分解为 $f = t \circ f'$，其中 t 是一个平移映射， $f'\colon X \longrightarrow X$ 是 X 的一个态射，满足 $f'(0) = 0$，并且对于任意 x、$y \in X$，有 $f'(x+y) = f'(x) + f'(y)$。本文将保持 X 群结构的 X 态射称为自同态。此外，若 X 的自同态存在逆映射，且其逆映射也是自同态，则称其为自同构。对于复环面 X 上的平移映射 t，在奇异同调上有 $t_* = \mathrm{id} : \mathrm{H}_1(X) \longrightarrow \mathrm{H}_1(X)$，这意味着在 $\mathrm{H}^{k,\,k}(X)$ 上有 $(t \circ f')^* = f'^* \circ t^* = f'^*$，因此

$$\lambda_k(t \circ f') = \lambda_k(f').$$

因此， X 的态射的动力学次数计算可归结为 X 的自同态的动力学次数计算，因此从这里开始，我们只考虑 X的自同态的动力学次数。

将 X 的自同态集合记为 $\mathrm{End}(X)$，其具有自然的环结构，称为 X的自同态环。此外， X 的自同态代数定义为 $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) := \mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。若 X 是简单阿贝尔簇，则自同态代数 $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ 是 $\mathbb{Q}$上的有限维除代数。

定理 2.1（庞加莱完全可约定理（[BL04，定理 5.3.7]））。设X 为复阿贝尔簇。则存在一个同源

$$X \to X_1^{n_1} \times \cdots \times X_r^{n_r},$$

其中每个 X_i 都是简单阿贝尔簇，且 $n_i \in \mathbb{Z}_{>0}$。
此外， X_i 和 n_i 在同源与置换意义下唯一。

注2.2（参见 [BL04, 推论 5.3.8]）。利用简单阿贝尔簇的自同态代数是除环这一事实，上述同源诱导出

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \simeq \mathrm{M}_{n_1}(F_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{n_r}(F_r),$$

其中 F_i =$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X_i)$ 是一个除环。
此外，对于阿贝尔簇 X，$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ 是除环，当且仅当 X 是一个简单阿贝尔簇。

对于阿贝尔簇 $X = V/\Lambda$， $f \in \mathrm{End}(X)$ 诱导出自然的解析表示$\rho_a(f)\colon V \longrightarrow V$，以及自然的有理表示 $\rho_r(f)\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda$。 $\rho_a(f)$ 被视为 $\mathrm{M}_g(\mathbb{C})$ 中的一个元素，而 $\rho_r(f)$ 被视为 $\mathrm{M}_{2g}(\mathbb{Z})$ 中的一个元素。

设 ρ_1、ρ_2、…、ρ_g 是 $\rho_a(f)$ 的特征值。那么 ρ_1、$\overline{\rho_1}$、…、ρ_g、$\overline{\rho_g}$ 是 $\rho_r(f)$ 的特征值。

假设 f 是一个自同构，或者更一般地说，是一个满射自同态。那么，$\rho_a(f)$ 是一个同构，因此重新编号 $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_g$为 $|\rho_1| \geq |\rho_2| \geq \cdots \geq$

$|\rho_g| > 0$, f 的第 k 个动力次数 $\lambda_k(f)$ 等于 $\prod_{i=1}^{k}|\rho_i|^2$ （例如参见 DH22 第 1.3] 节）。

以下定理对相关讨论很有用。

定理 2.3（[BL04，第 13.1]章）。设 X 为阿贝尔簇，f 为 X的一个自同态。则

$$\#\mathrm{Fix}(f) = |\det(\mathrm{id}_V - \rho_a(f))|^2 = \det(\mathrm{id}_\Lambda - \rho_r(f)) = \prod_{i=1}^{g}(1-\rho_i)(1-\overline{\rho_i}).$$

注 2.4（参见 [BL04，第 13.1]章）。对于复环面 X 上的全纯映射f，此处将 #Fix(f) 定义为

$$\#\mathrm{Fix}(f) := \begin{cases} \text{cardinarity of } \mathrm{Fix}(f) & \dim(\mathrm{Fix}(f)) = 0, \\ 0 & \dim(\mathrm{Fix}(f)) > 0, \end{cases}$$

其中，Fix(f) 是 X中由 f的不动点构成的解析子簇。#Fix(f) 在平移映射下保持不变（参见 [BL04，引理 13.1.1]）。

对于 $f \in$End(X)，如果 Fix(f) 的维数为正，那么 ρ_r(f) 的某个特征值等于 1，因此 #Fix(f) $= 0$。

假设 X 是简单阿贝尔簇，因此自同态代数 B :=End$_{\mathbb{Q}}$(X) 如上所述，是关于 $\mathbb{Q}$ 的有限维除环。除环 B 以域 F为中心，且 $[B\colon F] = d^2$（参见 [Dra83，§5]），$[F\colon \mathbb{Q}] = e$。在此记号下，有如下定理。

定理 2.5（[BL04，第 13.1] 章）。将简单阿贝尔簇 X 的 $f \in$ End(X) 视为 B :=End$_{\mathbb{Q}}$(X) 中的一个元素。那么，

$$\#\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Nrd}_{B/\mathbb{Q}}(\mathrm{id}_X - f)^{\frac{2g}{de}},$$

其中 Nrd$^{B/\mathbb{Q}}$: $B \to \mathbb{Q}$ 是中心单代数的约化范数映射。

注 2.6。对于域 K 上的有限维中心单代数 B，约化范数 Nrd$^{B/K}$ 的计算如下（参见 [Dra83, §22]）。存在一个有限域扩张$K' \supset K$，使得 $B \otimes_K K' \simeq$ M$_n$(K')，并固定一个同构 ϕ: $B \otimes_K K' \to$ M$_n$(K')。那么 Nrd$^{B/K}$: $B \to K$ 定义为

$$\mathrm{Nrd}_{B/K}(a) := \det(\phi(a \otimes 1))\ (a \in B),$$

a而且这与域扩张 K 及同构的选择无关

此外，对于有限域扩张 $K \supset k$，约化范数 Nrd$^{B/k}$ 定义为

映射 · s

$$\mathrm{Nrd}_{B/k}(a) := \mathrm{N}_{K/k}(\mathrm{Nrd}_{B/K}(a))\ (a \in B),$$

其中，N$^{K/k}$ 是域扩张 $K \supset k$ 的域范数，这里将 K 视为 k上的向量空间。关于约化范数的详细说明见第 2.2 节。

2.2. 代数预备知识

本小节介绍后续第 3 节将用到的记号和性质。

Salem 数、Pisot 数

定义 2.7（[BDGGH+92，第 5.2]章）。Salem 数是大于 1 的实代数整数λ，其余共轭的模均不大于 1，且至少有一个的模等于 1。皮索数是大于 1 的实代数整数 λ，其余所有共轭的模都小于 1。

对于 Salem 数 λ， $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是 λ 的最小多项式，称为 λ的 Salem 多项式。经过一些推导可知，$\frac{1}{\lambda}$ 是 $P(x)$中模小于 1 的唯一根，而 $P(x)$的根集可写为 $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\} \cup \{z_1, \overline{z_1}, \dots z_k, \overline{z_k}\}$，其中 z_i 的模均为 1（参见 [BDGGH+92，第 84] 页）。

因此，Salem 数的定义可以改写如下。

定义 2.8. Salem 数是次数至少为 4 的实代数整数 $\lambda > 1$，其最小多项式 $P(x)$ 的根包括 λ、$\frac{1}{\lambda}$，且所有其他根的模均为 1。

注 2.9. 设 λ 是一个 Salem 数， g 是 λ的次数。由上文可知， g 始终为偶数，因此 Salem 数的次数始终为偶数。

根据这个定义，Salem 数的幂仍然是 Salem 数。

CM 域

如果数域 K 的每个 $\mathbb{Q}$嵌入 $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ 的像都包含在 $\mathbb{R}$内，则称其为全实数域。此外，如果数域 K 的每个 $\mathbb{Q}$嵌入$\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ 的像都不包含在 $\mathbb{R}$内，则称其为全复数域。

定义 n 2.10. CM 域是满足以下条件的数域 K ns.

(1) K 是全复域。(2) K 是某个全实数域的二次扩张。

四元数代数

对于特征不为 2 的域 F，定义域 F 上的四元数代数为域 F 上的代数 B，其在 F 上有一组基 1、i、j、ij，满足 $i^2 = a$、$j^2 = b$、$ij = -ji$（a、$b \in F^\times$）。在此条件下，B 记作 $\left(\frac{a,b}{F}\right)$，而 1、$i$、$j$、$ij$ 称为 B 的一个 F-基（参见 [Voi21，第 2] 章）。

四元数代数具有一些性质。

- $\left(\frac{a,b}{F}\right) \simeq \left(\frac{b,a}{F}\right)$
- $\left(\frac{a,b}{F}\right) \simeq \left(\frac{aa',b}{F}\right)$ $(a' \in F^{\times 2})$
- 对于域扩张 $F \subset K$， $\left(\frac{a,b}{F}\right) \otimes_F K \simeq \left(\frac{a,b}{K}\right)$。
- 当 $F = \mathbb{R}$、 $\left(\frac{1,1}{\mathbb{R}}\right) \simeq \left(\frac{1,-1}{\mathbb{R}}\right) \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 且 $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) \simeq \mathbb{H}$。

设 B 是定义在全实数域 F 上的四元数代数。若对每个嵌入 σ: $F \hookrightarrow \mathbb{R}$，都有 $B \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$，则称 B 为全不定。另一方面，若对每个嵌入 σ: $F \hookrightarrow \mathbb{R}$，都有 $B \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$，则称 B 为全定。根据上述性质， $B = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ 是全不定，当且仅当对于任意 $\mathbb{Q}$-嵌入 σ: $F \hookrightarrow \mathbb{C}$， $\sigma(a) > 0$ 或 $\sigma(b) > 0$ 成立。

特别地，若 $a \in \mathbb{Q}_{>0}$，则 $B = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ 是全不定的。

反对合

定义 2.11（[Voi21，定义 3.2.1]）。设 F 为一个域， B 为一个 F上的代数。满足以下条件的F-线性映射 ϕ: $B \to B$ 称为 F上的反对合。

(1) $\phi(1) = 1$(2) $\phi(\phi(x)) = x$ (
$x \in B$) (3) $\phi(xy) = \phi(y)\phi(x)$ (x,
$y \in B$)

定义 2.12（参见 [Voi21，定义 8.4.1]）。对于子域 $F \subset \mathbb{R}$ 以及其上的有限维代数 B（域为 F），反对合 $\phi: B \to B$（域为 F）称为在 F 上正的，若对任意非零 $x \in B$，均有 $\mathrm{Tr}(\phi(x)x) > 0$。这里，对于元素 $a \in B$，$\mathrm{Tr}(a)$定义为左乘映射 $a: B \to B$ 的迹，其中将 B 视为域 F上的向量空间。

注 2.13。设 B 是数域 F 上的代数，且 $\phi: B \to B$ 是域 F上的反对合。那么，$\phi: B \to B$ 也是域 $\mathbb{Q}$上的反对合。但是，在 F 上为正的反对合未必在 $\mathbb{Q}$上也为正。本文中，反对合的正性始终是指在 $\mathbb{Q}$上的正性。

例 2.14。对于四元数代数 $B = \left(\frac{a}{F}, \frac{b}{F}\right)$，其 F-基为 1、i、j、ij，B 上的四元数共轭是映射

$$x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \longmapsto x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 ij \ (x_i \in F)$$

它是一个关于 F 的反对合，并将此映射记作 $x \mapsto \overline{x}$ ([Voi21，第 3 章。2]).

设 B 是域 K 上的中心单代数，且 σ 是 B 上的一个反对合，其定义在某个域上，该域未必是 K。对于 $a \in K$，$\sigma(a)$ 是 K 的一个元素，因为对于所有 $b \in B$,

$$\sigma(a)b = \sigma(\sigma^{-1}(b)a) = \sigma(a\sigma^{-1}(b)) = b\sigma(a),$$

因此 σ 可以限制到 K上。

定义 2.15. 设 B 是域 K上的中心单代数。
B 上的反对合 σ 称为第一类，如果 σ 逐点固定 K。否则，σ 称为第二类。

定理 2.16（参见 [BL04，定理 5.5.3]）。设 B 是中心为全实数域 K的、定义在 $\mathbb{Q}$ 上的有限维全不定四元数代数。假设 B 是除环。那么，正反自同构 $\phi: B \to B$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可写为

$$\phi(x) = c^{-1}\overline{x}c$$

其中 $c \in B \backslash K$ 其中 $c^2 \in K$ 全负（即其共轭均为实数且为负）。

定理 2.17（参见 [Mum70，第 21], [章；BL04，定理 5.5.6]）。设 B 是中心为 CM 域 K 的、定义在 $\mathbb{Q}$ 上的有限维除代数。
假设 B 存在第二类反对合 $x \mapsto \tilde{x}$。那么存在一个第二类正反自同构 $x \mapsto x'$。

序

定义 2.18. 设 R 是一个整环，并定义 $K = \mathrm{Frac}(R)$。对于 K 上的有限维代数 B，满足以下条件的子集 $\mathcal{O} \subset B$ 称为一个 R-序。

(1) $\mathcal{O}$ 是 B的有限生成 R-子模(2) $\mathcal{O}$ 在 K 上张
成 B

(3) $\mathcal{O}$ 在由 B诱导的乘法下封闭

通常， R-序的定义适用于情形 $R=\mathbb{Z}, K=\mathbb{Q}$。

例 2.19。以下是一些 $\mathbb{Z}$-序的例子（参见 [Voi21，第 10], [BL04 章，第 1]）。

- 对于数域 K，整数环 $\mathcal{O}_K$ 是 K的一个 $\mathbb{Z}$-序。此外， $\mathcal{O}_K$ 是关于包含关系的极大 $\mathbb{Z}$-序。
- 对于具有 $\mathbb{Q}$-基 $1, i, j, ij$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}ij$ 的四元数代数 $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$ $(a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, 它是 $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$的一个 $\mathbb{Z}$-序。
- 对于阿贝尔簇 X，End(X) 是 End$_{\mathbb{Q}}$(X) 的一个 $\mathbb{Z}$-序。

约化范数，约化特征多项式

设 B 是数域 K 上的有限维中心单代数，且 $[B:K]=d^2$，其中 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$为某个整数。

如备注 2.6 所述，对于某个域 K' 及其有限伽罗瓦扩张 K'/K，可导出一个同构

$$\phi\colon B \otimes_K K' \xrightarrow{\simeq} \mathrm{M}_d(K')$$

对于 $\alpha \in B$， Nrd$^{B/K}$(α) 可计算为 det(ϕ($\alpha \otimes 1$))。定义

$$p_\alpha(n) = \mathrm{Nrd}_{B/K}(n-\alpha) = \det(nI - \phi(\alpha \otimes 1))$$

为关于 n的多项式。 p_α(n) 在所有 $\sigma \in$Gal(K'/K)作用下保持不变，因此 p_α(n)的系数全都属于 K。于是， p_α(x) $\in K[x]$ ，这个多项式称为 α的约化特征多项式。设 P(x) $\in K[x]$ 是 α 在 K上的最小多项式，它也是 $\alpha \otimes 1 \in B \otimes_K K'$ 的最小多项式，因此也是 ϕ($\alpha \otimes 1$) $\in$ M$_d$(K')的最小多项式。由线性代数定理，约化特征多项式 p_α(x) $\in K[x]$ 的根与最小多项式 P(x)的根相同。此外，由于其最小性，约化特征多项式可写为 p_α(x) $= P$(x)^s，其中 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$为某个

戴德金整环

设 R 是一个整环， K 是其分式域。

R 的分式理想是 K 的一个非零 R-子模 I，满足存在 $a \in R$ 使得 $aI \subset R$。如果存在 J 的一个分式理想 R 使得 $IJ = R$，则称 R 的分式理想 I 是可逆的。

定义 2.20（参见 [Coh89，第 2 卷，第 9 章5]）。戴德金整环是满足以下等价条件的整环 R。

(i) 每个非零理想 $I \subsetneq R$ 都是可逆的。(ii) 每个非零理想 $I \subsetneq R$ 都能唯一地表示为素理想的有限乘积。(iii) R 是诺特整环、整闭的，并且所有非零素理想都是极大理想。

设 $\mathcal{O}$ 是一个戴德金整环， F 是其分式域。设 K/F 是一个有限可分域扩张， $\mathcal{O}'$ 是 $\mathcal{O}$ 在 K 中的整闭包。那么 $\mathcal{O}'$ 是一个戴德金整环，其分式域为 K （参见 [Neu99，第一章，命题 8.1]）。

对于刚刚构造的四元组 $(\mathcal{O}, F, \mathcal{O}', K)$ 以及一个非零素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$，有如下因子分解：$\mathfrak{p}\mathcal{O}' = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}$，因为 $\mathcal{O}'$ 是一个戴德金整环。

下面的条件彼此等价；当它们成立时，我们称 $\mathfrak{P}$ 在 $\mathfrak{p}$上。

- $\mathfrak{P} \cap \mathcal{O} = \mathfrak{p}$
- $\mathfrak{P}$ 出现在 $\mathfrak{p}\mathcal{O}'$的素理想分解中

再次取这一对（$\mathcal{O}$， F， $\mathcal{O}'$， K），并假设 K/F是次数为 n的可分扩张。对于一个非零素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$，其素理想分解为 $\mathfrak{p}\mathcal{O}' = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}$，其中 $f_i = [\mathcal{O}'/\mathfrak{P}_i : \mathcal{O}/\mathfrak{p}]$，于是

$$n = \sum_{i=1}^{g} e_i f_i.$$

U在此条件下，可以定义一些记号（参见 [Neu99，第一章，§8]）。

定义 2.21。(1) 若 $e_i = 1$、 $f_i = 1$ 且 $g = n$，则称 $\mathfrak{p}$ 在 K 中完全分裂。

(2) 若 $g = 1$，则称 $\mathfrak{p}$ 在 K 中不分裂。(3) 若 $e_i = 1$ 且域扩张 $\mathcal{O}'/\mathfrak{P}_i \supset \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 可分，则称 $\mathfrak{P}_i$ 在 F 上非分歧。(4) 若所有 $\mathfrak{P}_i$ 都在 F上非分歧，则称 $\mathfrak{p}$ 在 K 中非分歧。

此外，假设 K/F 是伽罗瓦扩张，

$$e_1 = \cdots = e_g = e, f_1 = \cdots = f_g = f$$

成立，因此可得 $n = efg$。这个定理称为希尔伯特分歧理论（参见 [Neu99，第一章，第 9] 节）。

在同样的假设下，

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{P}} := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F) \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}$$

称为 $\mathfrak{P}$ 的分解群，其序为 ef。

此外，若 $\mathfrak{P}$ 位于素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ 之上，则 $(\mathcal{O}'/\mathfrak{P})/(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$ 是正规扩张，并且存在一个自然的满群同态

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{P}} \to \mathrm{Aut}\left((\mathcal{O}'/\mathfrak{P})/(\mathcal{O}/\mathfrak{p})\right).$$

假设 $(\mathcal{O}'/\mathfrak{P})/(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$ 可分，则当且仅当 $\mathfrak{P}$ 在 F 之上非分歧时，这个态射是同构。

分圆多项式

本文中，对于正整数 n，令 ζ_n 为辐角最小的本原 n 次单位根。

令 $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为 ζ_n 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式。这称为分圆多项式。$\Phi_n(x)$ 的次数为欧拉函数 $\varphi(n)$。再令 $\Psi_n(x)$ 为 $\zeta_n + \frac{1}{\zeta_n} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式（定义 $\Psi_4(x) = x$，适用于情形 $n = 4$）。

根据定义，对于 $n \geq 3$，等式

$$\Phi_n(x) = x^{\frac{\varphi(n)}{2}} \Psi_n\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

成立，因此 $\Psi_n(x)$ 的次数为 $\frac{\varphi(n)}{2}$。

此外，关于 $\Psi_n(x)$ 的常数项，还有一个定理。

定理 2.22（参见 [ACR16]）。除以下情形外， $\Psi_n(x)$ 的常数项的绝对值等于 1。

(i) $|\Psi_n(0)| = 0$，如果 $n = 4$ (ii) $|\Psi_n(0)| = 2$，如果 $n = 2^m$，其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\backslash\{2\}$ (iii) $|\Psi_n(0)| = p$，如果 $n = 4p^k$，其中 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，p 为奇素数

狄利克雷密度，切博塔廖夫密度定理

对于数域 K 及其整数环 $\mathcal{O}_K$，$\mathcal{O}_K$ 的素理想通常也称为域 K的素理想。

定义 2.23（[Neu99，第三章 §1，第七章定义 13.1]）。设 M 是数域 K的非零素理想集合。记

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = p^f$$

对于素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$，其中 $p\mathbb{Z} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ 和 $f = [\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$。

在此记号下，极限

$$d(M) = \lim_{s \to 1+0} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p}} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}},$$

其中分母是对所有非零素理想求和，称为 M 的狄利克雷密度（若其存在）。

注记 2.24. 在上述定义中，分母 $\sum_{\mathfrak{p}} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}$ 发散至 $+\infty$，正如 [Neu99, 第 VII 章 §13] 所述。

因此，若 M 是 K的一个素理想有限集，则 $d(M) = 0$。

定义 2.25（参见 [Sam70, 第 6 章.3]）。设 K/F 是数域的一个伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$，并设 $\mathfrak{P}$ 是 K 的一个在 F上非分歧的素理想。记 $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_F$。

则存在唯一的 $\sigma \in G$，使得 σ 在 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}$上诱导映射 $a \mapsto a^s$，其中 $s = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$。将此 σ记为 $\left(\frac{K/F}{\mathfrak{P}}\right)$，并称其为弗罗贝尼乌斯自同构。

注记 2.26. 关于定义 2.25 中的记号，$\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$；通过考虑同构 $\mathcal{D}_{\mathfrak{P}} \to \mathrm{Aut}\left((\mathcal{O}_K/\mathfrak{P})/(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})\right)$，$\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}$由 σ生成。

定义 2.27（[Neu99，第 VII 章 §13]）。设 K/F 是数域的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G，并取 $\sigma \in G$。

定义 $P_{K/F}(\sigma)$ 为 F 的素理想 $\mathfrak{p}$ 的集合，其中这些素理想在 K 中非分歧，并且存在 K 的一个位于 $\mathfrak{p}$ 之上的素理想 $\mathfrak{P}$，使得弗罗贝尼乌斯自同构 $\left(\frac{K/F}{\mathfrak{P}}\right)$ 等于 σ。

ˇ $P_{K/F}(\sigma)$ 的密度由切博塔廖夫密度定理计算。

定理 2.28（参见 [Neu99，第 VII 章定理 13.4]）。设 K/F 是数域的伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G。那么对于每个 $\sigma \in G$，集合 $P_{K/F}(\sigma)$ 都具有密度，且该密度为

$$d(P_{K/F}(\sigma)) = \frac{\#\langle\sigma\rangle}{\#G},$$

其中 $\langle\sigma\rangle := \{\tau^{-1}\sigma\tau \mid \tau \in G\}$。

特别地，根据注记 2.24，$P_{K/F}(\sigma)$ 由无限多个素理想组成。

3. Endomorphisms of simple abelian varieties

本节将详细考察简单阿贝尔簇的自同态及其动力学次数。

3.1. 单阿贝尔簇的自同态代数

设 X 是一个 g 维简单阿贝尔簇，并按照第2.1节定义 $B := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) := \mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。$B$ 是一个关于 $\mathbb{Q}$ 的有限维除环，而 Rosati 对合 $'$ 在 $B = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ 上是一个正反自同构。此外，B 的中心是一个域 K，且反对合 $'$ 可限制到 K 上。令 $K_0 := \{x \in K \mid x' = x\}$，则 K_0 是一个全实数域，而 $K = K_0$ 或 K 是 K_0 的全复二次扩张。记 $[B : K] = d^2$、$[K : \mathbb{Q}] = e$ 以及 $[K_0 : \mathbb{Q}] = e_0$。总之，自同态代数 $B = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ 可分类如下（参见 [BL04，第5章。5]）。

Table 1. 端omorphism环$_{\mathbb{Q}}(X)$的分类

	B =端omorphism环$_{\mathbb{Q}}(X)$	K	d	e_0	限制
类型 1	K	全实 1		e	$e \mid g$
类型 2:	K上的全不定四元数代数	全实 2		e	$2e \mid g$
类型 3	K 上的全定四元数代数	全实 2		e	$2e \mid g$
第4型	中心为 K 的除环	CM 域	d	$\frac{e}{2}$	$\frac{d^2 e}{2} \mid g$

3.2. 自同构

在本小节中，我们利用上述分类，分析简单阿贝尔簇 X 在各类型下的自同构。

X 的任意自同态都可视为 $B = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ 中的一个元素，而且它是 B 的一个整元素。因此，X 的任意自同构都可视为满足 α 和 α^{-1} 均为 B 的整元素的一个元素 $\alpha \in B$。

B =End$_{\mathbb{Q}}(X)$、K、K_0、d 和 e 均如第3.1节所述。定义

$$U_K := \{x \in \mathcal{O}_K \backslash \{0\} \mid x^{-1} \in \mathcal{O}_K\}$$

为 $\mathcal{O}_K$ 中可逆元构成的群。

类型 1

X 的任意自同构都被视为元素 $\alpha \in \mathcal{O}_K$，而其逆也属于 $\mathcal{O}_K$，因此 α 属于 U_K。

设 $F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ 为 α的最小多项式，那么$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + 1$ 以 α^{-1}为根。这个多项式乘以某个常数后将成为 α^{-1} 的最小多项式，因此 $a_n = \pm 1$。

因此，α 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的一个首一多项式的根，该多项式的常数项为 ± 1，且其所有根都是实数。

类型 2、类型 3、第4型

X 的任意自同构都可以视为一个元素 $\alpha \in B$，使得 α 和 α^{-1}都是 B中的整元。这意味着，α（分别为 α^{-1}）在 K 上的最小多项式的系数全都属于 $\mathcal{O}_K$，因此常数项属于 U_K，且该最小多项式的次数至多为 d。

α 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式也具有与类型 1 中相同的形式 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots \pm 1 \in \mathbb{Z}[x]$。

3.3. 动力次数的计算

本小节旨在计算简单阿贝尔簇的满射自同态的第一动力次数。

设 X 是一个 g 维简单阿贝尔簇。 K、 K_0、 d、 e 和 e_0 与第3.1节中的定义相同。

类型 1

对于满射自同态 $\alpha \in$End$(X) \subset$ End$_{\mathbb{Q}}(X) = K$， α 的次数为 d' 的最小多项式$F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 只有实根。设 ρ_1、 ρ_2、……、 ρ_g 是 $\rho_a(\alpha)$ 的特征值，并定义自同态 $\phi := 1 - (n - \alpha) : X \to X$，其中 n 是某个整数。

将定理 2.3 和定理 2.5 应用于 ϕ: $X \to X$,

$$\#\mathrm{Fix}(1 - (n - \alpha)) = \prod_{i=1}^{g} (n - \rho_i)(n - \overline{\rho_i})$$

$$\#\mathrm{Fix}(1 - (n - \alpha)) = \mathrm{Nrd}_{K/\mathbb{Q}}(n - \alpha)^{\frac{2g}{1 \cdot e}} = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(n - \alpha)^{\frac{2g}{e}} = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(n - \alpha)^{\frac{e}{d'} \cdot \frac{2g}{e}} = F(n)^{\frac{2g}{d'}}.$$

由于这两个公式对任意整数 $n \in \mathbb{Z}$ 都相等,

$$\prod_{i=1}^{g} (x - \rho_i)(x - \overline{\rho_i}) = F(x)^{\frac{2g}{d'}}$$

作为关于 x 的多项式。因此， α 的每个共轭在 ρ_1、……、 ρ_g、 $\overline{\rho_1}$、……、 $\overline{\rho_g}$ 中出现 $\frac{2g}{d'}$ 次，并据此计算动力学次数。

特别地， α: $X \to X$ 的第一动力次数是 $F(x)$ 的根的最大绝对值的平方。

类型 2、类型 3、第4型

满射自同态 $\alpha \in$End(X) 可视为一个元素，其最小多项式在 K 上具有 $G(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ 的形式。此外，令 $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式。记 $G(x)$ 的次数为 $d' \leq d$ ， $F(x)$ 的次数为 d''。

记 $\alpha \in B$ 的约化特征多项式为 $G'(x)$，其次数为 d ；如第 2.2 节所述， $G'(x)$ 可写为 $G'(x) = G(x)^{\frac{d}{d'}}$。令 ρ_1、 ρ_2、……、 ρ_g 为 $\rho_a(\alpha)$ 的特征值，并定义自同态 $\phi := 1 - (n - \alpha) : X \to X$，其中 n 为某个整数。

对 ϕ: $X \to X$ 应用定理 2.3 和定理 2.5,

$$\#\mathrm{Fix}(1 - (n - \alpha)) = \prod_{i=1}^{g} (n - \rho_i)(n - \overline{\rho_i})$$

$$\#\mathrm{Fix}(1-(n-\alpha)) = \mathrm{Nrd}_{B/\mathbb{Q}}(n-\alpha)^{\frac{2g}{de}} = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathrm{Nrd}_{B/K}(n-\alpha))^{\frac{2g}{de}} = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(G'(n))^{\frac{2g}{de}}$$
$$= \prod_{i=1}^{e}(\sigma_i(G'(n)))^{\frac{2g}{de}}$$
$$= \prod_{i=1}^{e}(\sigma_i(G(n)))^{\frac{2g}{d'e}}$$

其中 $\{\sigma_i\}_{1\le i\le e}$ 是所有 $\mathbb{Q}$-嵌入 $K\hookrightarrow\mathbb{C}$ 的集合。由于这两个公式对任意整数 $n\in\mathbb{Z}$ 都相等,

$$\prod_{i=1}^{g}(x-\rho_i)(x-\overline{\rho_i}) = \prod_{i=1}^{e}(\sigma_i(G(x)))^{\frac{2g}{d'e}} = F(x)^{\frac{2g}{d'}}$$

作为关于 x 的多项式。因此， α 的每个共轭在 ρ_1 中出现 $\frac{2g}{d'}$ 次，……， ρ_g、 $\overline{\rho_1}$、……、 $\overline{\rho_g}$，据此计算动力学次数。

特别地，第一动力次数是关于 $\sigma_i(G(x))$ 的所有多项式的根的最大绝对值的平方。

作为第3.2节和第3.3节的结论，简单阿贝尔簇 X 上的自同构 f 可识别为有理数域 K 上的中心单除代数 B =端omorphism环$\mathbb{Q}(X)$ 的一个元素。将该元素记为 α ，考虑扩张塔 $K(\alpha)\supset K\supset\mathbb{Q}$， α 在 $\mathbb{Q}$ 上有一个最小多项式 $F(x)\in\mathbb{Z}[x]$ ，其常数项为 ±1。

此外， f 的第一动力次数可计算为 $F(x)$ 的根的最大绝对值的平方。

4. Constructions of simple abelian varieties

在第 5 节中， [DH22] 提出的下一个引理是关键。该引理可由 [BL04, 第9.4章, 第9.9]与注2.2合成后立即推出。

引理 4.1（[DH22, 命题 2.3]）。设 B 是全实数域 F 上的全不定四元数代数，满足 $[F:\mathbb{Q}]=e$ ，且 $'$ 是 B上的正反自同构。固定 B 中的一个序 $\mathcal{O}$ ，并假设 B 是除环。则存在一个 $2e$维简单阿贝尔簇 X ，其自同态环 End(X) 包含 $\mathcal{O}$。

由此定理可知，下列定理可由 [BL04, 第 9]章推出。

引理 4.2（参见 [BL04, 第9.2]章）。设 F 是全实数域，满足 $[F:\mathbb{Q}]=e$，且 $'$ 是 F 上的正反自同构（例如， $'=\mathrm{id}_F$）。固定 F 中的一个序 $\mathcal{O}$ ，并令m 为正整数。则存在一个 em维简单阿贝尔簇 X，以及一个同构 $F\xrightarrow{\simeq}$ End$_{\mathbb{Q}}(X)$，该同构诱导出一个单射环同态$\mathcal{O}\hookrightarrow$End$(X)$。

注4.3. 考虑情形 $\mathcal{O}=\mathcal{O}_F$。由于 F 的整数环 $\mathcal{O}_F$ 是 F 的极大$\mathbb{Z}$-序，且 End(X) 是 End$_{\mathbb{Q}}(X)$ 的一个序，引理 4.2 中的 em 维简单阿贝尔簇 X 满足 End$(X)\simeq\mathcal{O}_F$。

引理 4.4（参见 [BL04, 第 9 章4]）。设 B 是全实数域 F 上的全不定四元数代数，满足 $[F:\mathbb{Q}]=e$ ，且 $'$ 是 B 上的正反自同构。固定 B 中的一个序 $\mathcal{O}$ ，并设 B 为除环，令 m 为正整数。那么

存在一个 $2em$ 维的简单阿贝尔簇 X，带有同构 $B \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$，该同构诱导出一个单射环同态 $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}(X)$。

引理 4.5（参见 [DH22，命题 2.4], [BL04，第 9.6]章）。设 K 是一个 CM 域，满足$[K:\ \mathbb{Q}] = e = 2e_0$，其中 $e_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$为整数。设 B 是K 上的中心单除代数，满足 $[B:K] = d^2$，且设 $'$ 是 B上的正反自同构。

固定 B 中的一个序 $\mathcal{O}$，令 m 为正整数，并假设满足以下条件之一。

(1) $dm \geq 3$ (2)

$dm = 2$ 且 $e_0 \geq 2$

那么存在一个 d^2e_0m维简单阿贝尔簇 X，带有同构$B \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$，该同构诱导出一个单射环同态 $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}(X)$。

注 4.6。关于 d、e_0、$m \in \mathbb{Z}_{>0}$的条件，源于存在满足 [BL04、第 9.6 章、第 9.9] 章中条件的 r_v、$s_v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$（$1 \leq v \leq e_0$），如下所述。

- $r_v + s_v = dm$
- $\sum_{v=1}^{e_0} r_v s_v \neq 0$
- $(r_v, s_v) \neq (1, 1)$，其中某个 v

5. Main Theorem

本节旨在证明下一个定理，它类似于定理 1.3。证明思路与 [DH22] 类似。

定理 5.1（主定理）。设 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个不可约首一多项式，其根均为实数或模为 1。假设至少有一个根的模为 1。设 g 为多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 的次数，且 $z_1, z_2, \ldots, z_g$ 为 $P(x)$ 的根，按 $|z_1| \geq |z_2| \geq \cdots \geq |z_g|$ 排序。

那么，存在一个维数为 g 的简单阿贝尔簇 X，以及一个自同构 $f\colon X \longrightarrow X$，其动力学次数为

$$\lambda_0(f) = 1, \lambda_k(f) = \prod_{i=1}^{k} |z_i|^2 \ (1 \leq k \leq g).$$

注 5.2. 若 $g = 1$，则 $P(x) = x + 1$ 或 $P(x) = x - 1$ 至少有一个成立，并且存在一个 1 维简单阿贝尔簇 X，其恒等映射 id_X 满足 $\lambda_0(\mathrm{id}_X) = \lambda_1(\mathrm{id}_X) = 1$。因此，值得考虑 $g \geq 2$ 这一情形。

对于 $g \geq 2$ 的情形，设 $\gamma \neq 1, -1$ 是 $P(x)$ 的一个根，且其绝对值为 1。那么，$\gamma^{-1} = \overline{\gamma}$ 也是 $P(x)$ 的一个根。这意味着最小多项式 $P(x) = a_g x^g + a_{g-1} x^{g-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_g = 1)$ 满足 $a_i = a_{g-i} (0 \leq i \leq g)$。特别地，$a_0 = 1$，因此 $\lambda_g(f) = 1$，这与自同构性相容。

为证明定理 5.1，假设 $g \geq 2$，并取上文注记中的 γ。那么，$K = \mathbb{Q}(\gamma)$ 是全实数域 $F = \mathbb{Q}(\gamma + \gamma^{-1})$ 的二次扩张，且 $[F:\ \mathbb{Q}] = \frac{g}{2}$。

引理 5.3（[DH22，引理 2.11]）。存在一个代数整数 $a \in \mathcal{O}_F$，使得 $F(\sqrt{a}) = K$。

注 5.4。 $K = F\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$ 因此， a 可以取为 $a = \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)^2$，我们采用这一记号。

满足此条件时，可以应用下一个定理。

定理 5.5（[DH22，定理 2.5]）。设 F 是全实数域，且 $K = F(\sqrt{a})$ 是 $a \in \mathcal{O}_F$ 的二次扩张。那么存在一个素数 p，使得四元数代数 $B = \left(\frac{a,\ p}{F}\right)$ 是除环。

由于 $p \in \mathbb{Z}_{>0}$, $B = \left(\frac{a,\ p}{F}\right)$ 是全不定的。为了将引理 4.1 应用于 $\left(\frac{a,\ p}{F}\right)$，我们应构造 $\left(\frac{a,\ p}{F}\right)$ 的序。取 $\left(\frac{a,\ p}{F}\right)$ 的一个 F-基 $1, i, j, ij$，其中 $i^2 = a$, $j^2 = p$ 和 $ij = -ji$。根据嵌入 $K = F(\sqrt{a}) \hookrightarrow \left(\frac{a,\ p}{F}\right)$，在 $\left(\frac{a,\ p}{F}\right)$ 中存在一个 $\mathbb{Z}$-序 $\mathcal{O} := \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K j$，因为 $\mathcal{O}_K$ 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-子模，包含于 K 中，并且在 $\mathbb{Q}$ 上张成 K，而 $j^2 = p$ 使得 $\mathcal{O}$ 在乘法下封闭。此外，下一个引理成立。

引理 5.6. 存在一个正反自同构 $B = \left(\frac{a,\ p}{F}\right)$ 在 $\mathbb{Q}$上。

注 5.7. 在 [DH22], 中，这部分在 [DH22，引理 2.12], 的证明中有说明，但我们无法理解这部分，因此在此补充证明。

引理 5.6 的证明。由定理 2.16，只需证明存在 $c \in B \backslash F$，使得 $c^2 \in F$是全负的。为寻找 c，记 $c = xi + yj + zij (x, y, z \in F)$，其中 $1,\ i, j, ij$ 是 B的一个 F-基。经过计算，
$c^2 = x^2 a + y^2 p - z^2 ap \in F$并代入

$$x = pX\left(\gamma^n + \frac{1}{\gamma^n}\right),\ y = Y\left(\gamma^{n+1} + \frac{1}{\gamma^{n+1}}\right),\ z = Z\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n \sum_{i=0}^{n} \gamma^{2i}$$

其中 $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_{>0}$和 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$。于是，

$$\begin{aligned}
&c^2 = x^2 a + y^2 p - z^2 ap \\
&= p^2 X^2 \left(\gamma^n + \frac{1}{\gamma^n}\right)^2 \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)^2 + pY^2 \left(\gamma^{n+1} + \frac{1}{\gamma^{n+1}}\right)^2 - pZ^2 \left(\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n \sum_{i=0}^{n} \gamma^{2i}\right)^2 \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)^2 \\
&= p^2 X^2 \left(\gamma^{2n+2} + \frac{1}{\gamma^{2n+2}} - 2\left(\gamma^{2n} + \frac{1}{\gamma^{2n}}\right) + \left(\gamma^{2n-2} + \frac{1}{\gamma^{2n-2}}\right) + 2\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) - 4\right) \\
&\quad + pY^2 \left(\gamma^{2n+2} + \frac{1}{\gamma^{2n+2}} + 2\right) - pZ^2 \left(\gamma^{2n+2} + \frac{1}{\gamma^{2n+2}} - 2\right).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\frac{c^2}{p} =& (X^2 p + Y^2 - Z^2)\left(\gamma^{2n+2} + \frac{1}{\gamma^{2n+2}}\right) \\
&- X^2 p \left(2\left(\gamma^{2n} + \frac{1}{\gamma^{2n}}\right) - \left(\gamma^{2n-2} + \frac{1}{\gamma^{2n-2}}\right) - 2\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right)\right) \\
&+ (-4X^2 p + 2Y^2 + 2Z^2)
\end{aligned}$$

且 $\frac{c^2}{p}$ 的一个共轭可以写作

$$\begin{aligned}
&(X^2 p + Y^2 - Z^2)\left(\tau^{2n+2} + \frac{1}{\tau^{2n+2}}\right) \\
&- X^2 p \left(2\left(\tau^{2n} + \frac{1}{\tau^{2n}}\right) - \left(\tau^{2n-2} + \frac{1}{\tau^{2n-2}}\right) - 2\left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)\right) + (-4X^2 p + 2Y^2 + 2Z^2) \qquad (*)
\end{aligned}$$

其中 τ 是 γ 的一个共轭。定义

$$S := \{\text{conjugates of } \gamma \text{ whose modulus is } 1\}$$
$$T := \{\text{conjugates of } \gamma \text{ which is real}\}$$

其中 $S \cap T = \emptyset$，因为 $P(x) \neq x+1, x-1$。

对于任意实数 $\tau \neq \pm 1$,

$$2\left(\tau^{2N} + \frac{1}{\tau^{2N}}\right) - \left(\tau^{2N-2} + \frac{1}{\tau^{2N-2}}\right) - 2\left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)$$

当 $N \to +\infty$ 时，发散至 $+\infty$。因此，存在充分大的 $N_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得对于任意整数 $N \geq N_0$,

$$2\left(\tau^{2N} + \frac{1}{\tau^{2N}}\right) - \left(\tau^{2N-2} + \frac{1}{\tau^{2N-2}}\right) - 2\left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) > -2$$

对所有 $\tau \in T$ 均成立。定义

$$\alpha := \max_{\tau \in S} \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2}\right).$$

现在，由 $-1, 1 \notin S$, $\alpha < 2$。应用下文证明的引理 5.8，对于 1 的任意小邻域，都存在无穷多个 n，使得所有 $\tau^n (\tau \in T)$ 都可以位于该邻域内。因此，存在 $N \geq N_0$ 使得

$$2\left(\tau^{2N} + \frac{1}{\tau^{2N}}\right) > 2\alpha$$

然后

$$2\left(\tau^{2N} + \frac{1}{\tau^{2N}}\right) - \left(\tau^{2N-2} + \frac{1}{\tau^{2N-2}}\right) - 2\left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) > 2\alpha - 2 - 2\alpha = -2$$

对所有 $\tau \in S$均成立。因此，存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$2\left(\tau^{2N} + \frac{1}{\tau^{2N}}\right) - \left(\tau^{2N-2} + \frac{1}{\tau^{2N-2}}\right) - 2\left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) > -2 + \epsilon$$

对所有 $\tau \in S \cup T$均成立。对于这个 N，$(*)$ 小于

$$(X^2 p + Y^2 - Z^2)\left(\tau^{2N+2} + \frac{1}{\tau^{2N+2}}\right) + (2-\epsilon)X^2 p + (-4X^2 p + 2Y^2 + 2Z^2)$$
$$= (X^2 p + Y^2 - Z^2)\left(\tau^{2N+2} + \frac{1}{\tau^{2N+2}}\right) + (-(2+\epsilon)X^2 p + 2Y^2 + 2Z^2). \qquad (**)$$

代入 $Y = 1$ 后，该方程有无穷多个解:

$$1 = Z^2 - X^2 p \quad (X, Z \in \mathbb{Z})$$

因为这是一个佩尔方程。代入该方程的一个解后,

$$(**) = -(2+\epsilon)X^2 p + 2Y^2 + 2Z^2 = -\epsilon X^2 p + 4$$

并且由于 $|X| \to \infty$，$(**)$ 对所有 $\tau \in S \cup T$都可能为负，因此对于这些 X，Y，Z和 N，$c^2 \in F$ 是全负的。现在只需证明下面的引理即可完成证明。

引理 5.8. 设 M 是一个模为 1 的复数有限集，$\epsilon > 0$是任意小的正数。

那么，存在无穷多个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得对所有 $z \in M$，都有 $|1 - z^n| < \epsilon$。

通过该同构，此引理可归结为下一个引理

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

引理 5.9。取 $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$，并任意固定 $\epsilon > 0$。

那么，存在无穷多个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得对每个 $1 \le i \le m$，$\{nr_i\} < \epsilon$ 或 $\{nr_i\} > 1-\epsilon$ 至少有一个成立。这里，$\{x\}$ 表示 $x \in \mathbb{R}$ 的小数部分，因此 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$。

证明。定义

$$A := \{(\{nr_1\}, \{nr_2\}, \ldots, \{nr_m\}) \in [0,1)^m\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$$

作为 $[0,1)^m$ 的子集。令 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ 为满足 $\frac{1}{N} < \epsilon$ 的一个整数。将超立方体 $[0,1)^m$ 划分为 N^m 个小超立方体，每个小超立方体的边长为 $\frac{1}{N}$。

由鸽巢原理可知，存在 $k, k' \in \mathbb{Z}_{>0}$ $(k < k')$，使得 $(\{kr_1\}, \{kr_2\}, \ldots, \{kr_m\})$ 和 $(\{k'r_1\}, \{k'r_2\}, \ldots, \{k'r_m\})$ 包含在同一个小超立方体中。根据超立方体的定义，$n = k' - k$ 满足引理中的条件。

此外，对于任意充分大的正整数 n_0，定义

$$A_{n_0} := \{(\{nr_1\}, \{nr_2\}, \ldots, \{nr_m\}) \in [0,1)^m\}_{n=1, n_0+1, 2n_0+1, \ldots}$$

由与上文相同的推导可知，存在满足该条件的 $n \ge n_0$。因此，证明得证。□

□

因此，对于 $B = \left(\frac{a,\ p}{F}\right)$ 及其序 $\mathcal{O}$，引理 4.1 的假设成立，故存在一个 g 维简单阿贝尔簇 X，使得 $\mathcal{O}$ 嵌入 End(X)。这个简单阿贝尔簇属于表 1 中的类型 2。

定理 5.1 的证明。γ 和 $\overline{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 的元素，因此它们属于 $\mathcal{O}$，所以 $\gamma \in$End(X) 是 X 的一个自同构。

设 ρ_1、ρ_2、……、ρ_g 是 $\rho_a(\gamma)$ 的特征值。对 g 维简单阿贝尔簇 X 应用第 3.3 节，$B = \text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \left(\frac{a,\ p}{F}\right)$、$\alpha = \gamma$、$d = d' = 2$、$d'' = g$、$e = \frac{g}{2}$ 和 $F(x) = P(x)$，

$$\prod_{i=1}^{g} (x - \rho_i)(x - \overline{\rho_i}) = P(x)^2 = \prod_{i=1}^{g} (x - z_i)^2$$

作为关于 x 的多项式。

因此，ρ_1、……、ρ_g、$\overline{\rho_1}$、……、$\overline{\rho_g}$ 是 z_1、……、z_g、z_1、……、z_g 的一个置换。

因此，我们可以假设 $|\rho_i| = |z_i|$ $(1 \le i \le g)$，这意味着 $\lambda_0(\gamma) = 1$，$\lambda_k(\gamma) = \prod_{i=1}^{k} |z_i|^2$ $(1 \le k \le g)$。□

下一个类似定理可以用类似的方法证明。

定理 5.10。设 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个不可约首一多项式，其常数项为 ± 1，且其根全部为实数。设 g 为多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 的次数，并设 z_1、z_2、……、$z_g \in \mathbb{R}$ 为 $P(x)$ 的根，它们按 $|z_1| \ge |z_2| \ge \cdots \ge |z_g|$ 排列。

于是，存在一个维数为 g 的简单阿贝尔簇 X，以及一个自同构 $f\colon X \longrightarrow X$，其动力学次数为

$$\lambda_0(f) = 1, \lambda_k(f) = \prod_{i=1}^{k} |z_i|^2 \ (1 \le k \le g).$$

证明。设 δ 是 $P(x)$ 的一个根，因此 δ 是代数整数。δ 的共轭全为实数，因此 $F := \mathbb{Q}(\delta)$ 是一个全实数域。F 上的恒等映射是一个正反自同构，因此由引理 4.2，取 $m = 1$，存在一个维数为 g 的简单阿贝尔簇 X，使得 $\mathrm{End}(X)$ 包含 $\mathcal{O}_F$。这个简单阿贝尔簇属于表 1 中的类型 1。

由于 $P(x)$ 的常数项是 $\mathbb{Z}$ 中的一个单位，δ^{-1} 也是一个整元素，因此 δ、δ^{-1} 属于 $\mathcal{O}_F$。于是，δ、δ^{-1} 可以视为简单阿贝尔簇 X 的自同态，因而它们是自同构。设 ρ_1、ρ_2、...、ρ_g 为 $\rho_a(\delta)$ 的特征值。将第 3.3 节应用于 g 维简单阿贝尔簇 X，得到 $K = F$、$\alpha = \delta$、$d = 1$、$e = g$、$d' = g$ 和 $F(x) = P(x)$，

$$\prod_{i=1}^{g}(x-\rho_i)(x-\overline{\rho_i}) = P(x)^2 = \prod_{i=1}^{g}(x-z_i)^2$$

作为关于 x 的多项式。

因此，ρ_1、...、ρ_g、$\overline{\rho_1}$、...、$\overline{\rho_g}$ 是 z_1、...、z_g、z_1、...、z_g 的一个置换。

因此，我们可以假设 $|\rho_i| = |z_i|$ $(1 \le i \le g)$，这意味着 $\lambda_0(\delta) = 1$、$\lambda_k(\delta) = \prod_{i=1}^{k}|z_i|^2$ $(1 \le k \le g)$。□

6. Corollaries

本节将讨论定理 5.1 的推论。

引理 6.1. 对于 Salem 数 $\lambda > 0$ 和正整数 $n \in \mathbb{Z}$，$\sqrt[n]{\lambda}$ 有一个模为 1 的代数共轭。

证明. 设 $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是 $\mu = \sqrt[n]{\lambda}$的最小多项式。

多项式 $R(x) = Q(x)Q(\zeta_n x)\cdots Q(\zeta_n^{n-1}x)$ 在伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ 作用下保持不变，因此 $R(x)$ 的系数属于 $\mathbb{Q}$，且仅在 (an) 次幂处有非零系数 $(a \in \mathbb{Z}_{>0})$，因为 $R(x) = R(\zeta_n x)$。此外，$R(x)$ 的所有系数都是整数，因为它们属于 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$，所以它们是 $\mathbb{Q}$中的代数整数。

因此，$S(x) = R(x^{\frac{1}{n}})$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的一个多项式，且 λ是该多项式的一个根。因此，$S(x)$ 可被 λ的 Salem 多项式整除，所以 $S(x)$ 有一个模为 1 的根。这意味着 $Q(x)$ 有一个模为 1 的根，引理得证。□

推论 6.2. 任意 Salem 数都可以实现为复数域 $\mathbb{C}$上的某个简单阿贝尔簇自同构的第一动力次数。

证明. 设 λ 是一个 Salem 数，$P(x)$是 λ 的最小多项式，而 $Q(x)$是$\sqrt{\lambda}$的最小多项式。

由引理 6.1 可知，在 $n = 2$的情形下，$\sqrt{\lambda}$ 有一个模为 1 的共轭。$Q(x)$是 $P(x^2)$的一个因子 $\in \mathbb{Z}[x]$，并且由于 $P(x^2)$的根要么是实数，要么模为 1，因此 $Q(x)$的根也如此。因此，$\sqrt{\lambda}$ 的最小多项式满足定理 5.1 中的条件，且存在一个简单阿贝尔簇的自同构，其最小多项式就是该多项式。现在，元素$\sqrt{\lambda}$ 在该最小多项式的根中具有最大绝对值，因此该自同构的第一动力次数为 $\sqrt{\lambda}^2 = \lambda$。□

下一个引理用于证明推论 6.4，以分析$\sqrt{\lambda}$的最小多项式。

引理 6.3（克罗内克定理）。设 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个首一多项式，其所有根的模均为 1。那么， $P(x)$的根都是单位根。

证明。设 z_1，...， z_n 是 $P(x)$ 的根，并记

$$P(x) = \prod_{l=1}^{n}(x - z_l).$$

将 $P_k(x)$ 定义为

$$P_k(x) = \prod_{l=1}^{n}(x - {z_l}^k)$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 均成立。现在，首一多项式 $P_k(x)$ 的次数为 n，其第 i 个系数是一个整数，根据三角不等式，其绝对值至多为 $\binom{n}{i}$，因此 $P_k(x)$ 的系数候选数是有限的。

因此， $\{P_k(x)\}_{k=1,\ 2.....}$ 是一个有限的多项式集，并且存在某些 i、 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ $(i \neq j)$，使得 $P_i(x) = P_j(x)$。

因此，$\{{z_l}^i\}_{1\le l\le n} = \{{z_l}^j\}_{1\le l\le n}$，并且对于每个 l，对于某些 l'、l''、.....，存在关系 ${z_l}^i = {z_{l'}}^j$、${z_{l'}}^i = {z_{l''}}^j$、.....。这意味着对于某个 $m > 0$，${z_l}^{i^m} = {z_l}^{j^m}$，并且由于 $i \neq j$，对每个 l， z_l 都是单位根。□

推论 6.4. 对于一个次数为 g 的 Salem 数 λ，存在一个简单阿贝尔簇的自同构，其维数为 g 或 $2g$，且其第一动力次数等于 λ。

证明. 设 $P(x)$ 是 λ 的最小多项式。根据定义 2.8， $P(x)$ 的根包括 λ、 $\frac{1}{\lambda}$，且所有其他根的模均为 1。现在，$\sqrt{\lambda}$ 的最小多项式 $Q(x)$ 是 $P(x^2)$ 的一个因子；根据引理 6.1，$Q(x)$ 有一个模为 1 的根。因此， $Q(x)$ 的根集在映射 $z \mapsto \frac{1}{z}$ 下保持不变。假设 $P(x^2)$ 可约，则 $Q(x)$ 的根集是以下情况之一。

1. $\sqrt{\lambda}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_n, \overline{z_n}$（其中对于所有 i， z_i 的模均为 1） 2. $\sqrt{\lambda}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $-\sqrt{\lambda}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_n, \overline{z_n}$（其中对于所有 i， z_i 的模均为 1）

在情形 2 中， $P_{(x^2)}\ Q(x)$ 的~~根~~的模均为 1，因此根据克罗内克定理，它们都是单位根，这就产生了矛盾。

在情形 1 中， $Q(-x)$ 也是 $P(x^2)$ 的因子，而 $Q(x)$ 与 $Q(-x)$ 没有公根。此外，$P_{(x^2)}$ $Q(x)Q(-x)$ ~~是常数，~~或是一个根的模均为 1 的多项式。后一种情况与上文同样矛盾，因此通过考察首项系数可得 $P(x^2) = Q(x)Q(-x)$ 成立。

因此，对于 $Q(x)$，要么 $Q(x) = P(x^2)$ 成立，要么 $Q(x)Q(-x) = P(x^2)$ 成立。这意味着 $\sqrt{\lambda}$ 的最小多项式的次数为 g 或 $2g$，这对应于简单阿贝尔簇的维数（参见定理 5.1 ）。□

注记 6.5. 结合引理 4.4，任意次数为 g 的 Salem 数都可以实现为一个 $2g$ 维简单阿贝尔簇的自同构的第一动力次数。

通过观察推论 6.4 的证明可知，$\sqrt{\lambda}$ 的最小多项式的次数为g，当且仅当 λ 是某个 Salem 数的平方。

因此可以说，当 λ 是某个 Salem 数的平方时，次数为 g 的 Salem 数 λ 可实现为一个 g维简单阿贝尔簇的自同构的第一动力次数。

设 λ 是次数为 g的 Salem 数。

若 λ是某个 Salem 数的平方，则推论 6.4 中构造的 g维简单阿贝尔簇的自同构 f 满足

$$\lambda_0(f) = \lambda_g(f) = 1, \lambda_i(f) = \lambda \ (1 \leq i \leq g-1)$$

如定理 1.3 所示。若 λ 不是任何 Salem 数的平方，则推论 6.4 中构造的$2g$维简单阿贝尔簇的自同构 f 满足

$$\lambda_0(f) = \lambda_{2g}(f) = 1, \lambda_1(f) = \lambda_{2g-1}(f) = \lambda, \lambda_i(f) = \lambda^2 \ (2 \leq i \leq 2g-2).$$

综合定理 5.1 和定理 5.10，可得以下推论 .

推论 6.6。设 λ 是次数为 g 的代数整数，其共轭均为实数或模为 1，并且$\frac{1}{\lambda}$ 也是代数整数。

那么，存在一个 g维简单阿贝尔簇的自同构，该自同构对应于 λ ，且其第一动力次数等于 λ的共轭的最大绝对值的平方。

注 6.7. 结合推论、引理 4.2 和引理 4.4，对于任意$m \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在一个 gm维简单阿贝尔簇的自同构，对应于 λ。

7. Small first dynamical degrees

在 [DH22], 中，分析了简单阿贝尔簇自同构的各动力学次数之间的大小关系。

从这里开始，我们考察简单阿贝尔簇自同构的第一动力学度会取哪些值。

本节旨在考察在某些限制条件下，简单阿贝尔簇自同构的较小第一动力学度。

7.1. 限制维数时的较小第一动力学度

固定一个正整数 $g \geq 2$ ，并令 X 为一个维数为 g 的阿贝尔簇。

记 $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$ ，则奇异同调计算如下

$$\mathrm{H}_1(X) \simeq \pi^{-1}(0) \simeq \Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2g}$$

其万有覆盖为 $\pi\colon \mathbb{C}^g \to X$。

设 f 是 X 的一个满射自同态。根据第2.1节， $\rho_r(f)$ 的特征值可写为 $\rho_1, \cdots, \rho_g, \overline{\rho_1}, \ldots, \overline{\rho_g}$，它们也是同构 $f_* : \mathrm{H}_1(X) \longrightarrow \mathrm{H}_1(X)$ 的特征值，且重数相同。线性变换 f_* 的特征多项式是一个系数属于 $\mathbb{Z}$ 的方程，可写为 $p(x) = x^{2g} + a_1 x^{2g-1} + \cdots + a_{2g} \in \mathbb{Z}[x]$。

设 $c > 1$ 是一个实数。假设 f 的第一动力次数小于 c^2 ，则 $p(x)$ 的所有根的绝对值都小于 c。这一限制给出

$$|a_i| < c^i \binom{2g}{i} \quad (1 \leq i \leq 2g)$$

因此，最小多项式的候选数量有限。由此，所有小于 c^2 的第一动力次数的候选数量也有限。

取一个实数 $c > 1$，使得存在一个 g 维阿贝尔簇上的满射自同态，其第一动力次数不为 1 且小于 c^2。于是，开区间 $(1, c^2)$ 内的第一动力次数集合可以非空。因此，除 1 之外的第一动力次数存在最小值，故有下面的定理。

定理 7.1. 定义

$$\mathcal{A}_g := \left\{ \begin{array}{l} \textit{first dynamical degrees of surjective endomorphisms} \\ \textit{of abelian varieties over } \mathbb{C} \textit{ whose dimension is } g \end{array} \right\} \backslash \{1\}.$$

其中 $g \geq 2$ 为整数。此集合有最小值。

通过类似的推导，下面的定理也成立。

定理 7.2. 对于整数 $g \geq 2$,

$$\mathcal{B}_g := \left\{ \begin{array}{l} \textit{first dynamical degrees of automorphisms} \\ \textit{of simple abelian varieties over } \mathbb{C} \textit{ whose dimension is } g \end{array} \right\} \backslash \{1\}$$

有最小值。

注 7.3. 固定一个整数 $g \geq 2$。g 维简单阿贝尔簇的自同构中大于 1 的第一动力次数的最小值，可以通过较低维数的情形确定。

例如，若 $g = 2$，则大于 1 的最小第一动力次数为 $4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2.6180\cdots$。

若 $g = 3$，则大于 1 的最小第一动力次数为 $4\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) = 3.2469\cdots$。

若 $g = 4$，则大于 1 的最小第一动力次数为 $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180\cdots$。

若 $g = 5$，则大于 1 的最小第一动力次数为 $4\cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right) = 3.6825\cdots$。

7.2. 可能的较小第一动力次数

从这里开始，我们考虑每种类型中接近于 1 的简单阿贝尔簇自同构的第一动力次数的可能取值。对于一个简单阿贝尔簇 X，$B =$端omorphism环$\mathbb{Q}(X)$ 和 K 如第3.1节所述。下面的引理将在后文使用。

引理 7.4. 设 $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个次数为 $n \geq 2$、仅有实根的不可约首一多项式，并记 $P(x)$ 的根的最大绝对值为 μ。如果 $\mu < 2$，则 $P(x)$ 是一个满足 $x^n P\left(x + \frac{1}{x}\right) = \Phi_N(x)$ 的多项式，其中 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ 是某个数，且 $\Phi_N(x)$ 是第 N 个分圆多项式。此外，$P(x)$ 的根可以写成 $2\cos\left(\frac{2m\pi}{N}\right)$，其中 $m \in \mathbb{N}$。

按照上述记号，$P(x)$ 的根的最大绝对值可写为

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & (N : even) \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) & (N : odd) \end{array} \right. .$$

证明。根据条件 $\mu < 2$，首一多项式 $Q(x) = x^n P(x + \frac{1}{x}) \in \mathbb{Z}[x]$ 的所有根的模均为1。因此，根据克罗内克定理，$Q(x)$ 是若干分圆多项式的乘积；又由于 $P(x)$ 的不可约性，$Q(x)$ 是不可约的。因此，$Q(x)$ 是一个分圆多项式，可写为 $Q(x) = \Phi_N(x)$，其中 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$。

于是， $P(x)$ 的根可写为 $\zeta_N^m + \frac{1}{\zeta_N^m}$，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 与 N 互素。因此， $P(x)$ 的根可改写为

$$\zeta_N^m + \frac{1}{\zeta_N^m} = 2\cos\left(\frac{2m\pi}{N}\right).$$

并且， $P(x)$ 的根的最大绝对值为

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & (N:\text{even}) \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) & (N:\text{odd}) \end{cases}.$$

□

类型 1

设 α 是形如 $P(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots \pm 1 \in \mathbb{Z}[x]$ 的不可约多项式的一个根，且该多项式只有实根。

这些涵盖了类型 1 的简单阿贝尔簇的所有自同构。

根据定理 5.10，任何作为此类多项式的根的 α ，都对应于某个 nm 维简单阿贝尔簇上的自同构（$n \in \mathbb{Z}_{>0}$），依据引理 4.2。

为了寻找较小的第一动力次数（如第 3.3 节所述，它等于 $P(x)$ 的根的最大绝对值的平方），假设 $P(x)$ 的所有根的绝对值都小于 2。

If $m = 1$，那么 $P(x)$ 的根的最大绝对值的平方为 1.

若 $m \geq 2$，根据引理 7.4， $P(x)$ 的根的最大绝对值为

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & (N:\text{even}) \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) & (N:\text{odd}) \end{cases}.$$

由于 $P(x)$ 的常数项为 ± 1，通过与定理 2.22 比较， N 的可能取值为 $N = 3$、5、6、7、9、10、11、.....因此，这一类型的第一动力次数按升序排列为

$$1,\ 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right),\ 4\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right),\ 4\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right),\ 4\cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right).\ 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right),\ldots$$

类型 2、类型 3

设 K 是一个全实数域，且 $[K:\ \mathbb{Q}] = m$。另外，设 α 是 U_K 的一个元素，或是 B 的一个元素，其在 K 上的最小多项式具有形式 $x^2 + sx + t$ ($s \in \mathcal{O}_K$,$t \in U_K$)。这些涵盖了类型 2 和类型 3 的简单阿贝尔簇的所有自同构。

不考虑可实现性的情况下，前一种情形中自同构可能的第一动力次数与类型 1 中的相同。

考虑后一种情形时，与 α 对应的自同构的第一动力次数，如第 3.3 节所述，是其根的最大绝对值的平方

$$\prod_{i=1}^{m}(x^2 + \sigma_i(s)x + \sigma_i(t))$$

其中 $\{\sigma_i\}_{1\leq i\leq m}$ 是所有 $\mathbb{Q}$-嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{C}$的集合。现在，每个 $\sigma_i(t)$ 都是 $t \in U_K$ 的一个共轭元素，而这些元素是同一个不可约多项式的根

形式为 $P(x) = x^{m'} + a_1 x^{m'-1} + \cdots \pm 1 \in \mathbb{Z}[x]\,(m' \le m)$。因此，$\sigma_i(t)$ 的绝对值中至少有一个不小于 1，所以我们可以假设 $|t| \ge 1$。

如果 $|t| > 1$，则 $x^2 + \sigma_i(s)x + \sigma_i(t)$ 的根的最大绝对值不小于$\sqrt{|\sigma_i(t)|}$。根据类型 1 中的推论，$|\sigma_i(t)|$ 的最大绝对值下界为 $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。因此，在此情形下，除 1 以外的第一动力次数的下界是$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

如果 $|t| = 1$，由于 K 是全实的，因此 $t = \pm 1$。

如果 $t = 1$，则所有 $x^2 + \sigma_i(s)x + 1$ 的根的最大绝对值由 $x^2 + \sigma_i(s)x + 1$ 的某个根取得，其中 $|\sigma_i(s)|$ 为最大值。现在，所有 $\sigma_i(s)$ 都是同一个不可约多项式的根，并且它们全都是实数。因此，$x^2 + \sigma_i(s)x + 1$ 的根要么是实数，要么模为 1，所以在此情形下可能出现的第一动力次数都包含在推论 6.6 中。

若 $t = -1$，$x^2 + \sigma_i(s)x - 1$ 的所有根中的最大绝对值由 $x^2 + \sigma_i(s)x - 1$ 的某个根取得，其中 $|\sigma_i(s)|$ 最大。假设最大绝对值不为 1，因此 $s \ne 0$。所有 $\sigma_i(s)$ 都是某个公共多项式的根，且该多项式的根全为实数。现在，$\prod_{i=1}^m \sigma_i(s)$ 是一个整数，并且由 $\sigma_i(s)$ 可知 $\ne 0$，$\prod_{i=1}^m |\sigma_i(s)| \ge 1$，因此对于某个 i_0，有 $|\sigma_{i_0}(s)| \ge 1$。多项式 $x^2 + \sigma_{i_0}(s)x - 1$ 的根可记为 z_{i_0}、$-\frac{1}{z_{i_0}}(z_i \in \mathbb{R})$，其中 $\left|z_{i_0} - \frac{1}{z_{i_0}}\right| = |\sigma_{i_0}(s)| \ge 1$。因此，$\max\left\{|z_{i_0}|, \frac{1}{|z_{i_0}|}\right\}$ 不小于 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。所以在这种情况下，α 的第一动力次数至少为 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$，且不等于 1。

第4型

设 K 是一个 CM 域，满足 $[K:\ \mathbb{Q}] = 2m$，并设 α 是一个元素，其最小多项式具有如下形式：$P(x) \in \mathcal{O}_K[x]$，其常数项属于 U_K，且次数不超过 d。这些涵盖了第4型简单阿贝尔簇的所有自同构。

不考虑可实现性，与 α 对应的自同构的第一动力次数计算为以下多项式的根的最大绝对值的平方：

$$\prod_{i=1}^{2m}(\sigma_i(P(x))) = \prod_{j=1}^{m}(\sigma'_j(P(x)\overline{P(x)})) \in \mathbb{Z}[x]$$

其中，$\{\sigma_i\}_{1\le i\le 2m}$（分别为 $\{\sigma'_j\}_{1\le j\le m}$）是所有 $\mathbb{Q}$-嵌入 $K \hookrightarrow \mathbb{C}$（分别为 $K_0 \hookrightarrow \mathbb{C}$）的集合。

第 8 节将讨论此类型下较小的第一动力度可能取值。

8. First dynamical degrees close to 1

本节中，我们考虑下一个问题。

问题8.1. 不固定简单阿贝尔簇的维数时，自同构的第一动力次数是否存在最小值?

记

$\Delta = \{$复数域 $\mathbb{C}\}\backslash\{1\}$上简单阿贝尔簇的自同构的第一动力次数

为了方便起见。

如果不存在最小的 Salem 数，那么这个问题便可立即得到否定的答案，因为根据推论 6.2，所有 Salem 数都包含在 Δ 中。不过，这个问题目前尚未解决，而且人们还猜想存在最小的 Salem 数（[Bor02，第 3] 章），因此还需要另一种证明。

上述问题在定理 8.10 中得到了否定的解答，并被归结为下一个定理。

定理 8.2。对于一个素数 $p > 3$ 和一个整数 $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$，存在一个 CM 域 K、一个形如 $B = \oplus_{i=0}^{p-1} u^i L$ 、带有符号u的中心单除代数 B（定义在 K 上）、一个次数为 p的循环扩张 L/K，以及 $[B\colon K] = p^2$，使得 $\sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}} \in L$。

为了证明这个定理，下面的命题很有用。

命题 8.3（参见 [Pie82，第 15.1 章，推论d]）。设 E/F 是域的一个循环扩张（即伽罗瓦群为循环群的伽罗瓦扩张），其次数为 n，并记$G = \mathrm{Gal}(E/F)$，其生成元为 σ。

设 $a \in F^\times$ 是一个元素，并假设 a 在 $F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ 中的序恰为 n。取符号 u 作为 $u^n = a$。

定义 $B = \oplus_{i=0}^{n-1} u^i E$，并将 B 上的乘法构造为：对 $e \in E$，有 $e \cdot u = u \cdot \sigma(e)$。于是 B 是一个除环，也是一个以 F 为中心的中心单代数，且 $[B\colon F] = n^2$。

注记 8.4. 假设 $a \in \mathcal{O}_F$，则命题 8.3 中构造的除环 B 有一个序 $\mathcal{O} = \oplus_{i=0}^{n-1} u^i \mathcal{O}_E$，因为 σ 将 $\mathcal{O}_E$ 投影到 $\mathcal{O}_E$ 中。

在继续证明之前，需要一些引理。

引理 8.5. 设 p 是一个奇素数。

那么，$\mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right)$ 是一个全实数域，而 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是 $\mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right)$ 的一个全复二次扩张。

证明。

$$\left[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right)\right] = 2, [\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$$

意味着

$$\left[\mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right) : \mathbb{Q}\right] = \frac{p-1}{2}.$$

对于$1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$，定义

$$\begin{array}{rccccc} \sigma_i\colon & \mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right) & \hookrightarrow & \mathbb{Q}(\zeta_p) & \hookrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & z & & \\ & & & \zeta_p & \mapsto & \zeta_p^i \end{array}.$$

这些都各不相同，因此它们是 $\mathbb{Q}$-嵌入的 $\frac{p-1}{2}$ 数。

$\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}$ 通过 σ_i 映射到 $\zeta_p^i + \frac{1}{\zeta_p^i} \in \mathbb{R}$，因此 $\mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right)$ 是一个全实数域。

$\mathbb{Q}(\zeta_p) \supset \mathbb{Q}(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p})$ 是二次扩张，且 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是全复的，因此该引理成立。□

引理 8.6. 设 F 是一个域。

For 一个素数 p 和 $a \in F^\times \backslash F^{\times p}$, $x^p - a \in F[x]$, 是一个不可约多项式 l.

证明。设 F' 是 $x^p - a \in F[x]$的一个分裂域。

假设 $x^p - a \in F[x]$ 可约，并记 $x^p - a = f(x)g(x) \in F[x]$，其中 $f(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_n)$ $g(x) = (x - z_{n+1}) \cdots (x - z_p) \in F[x]$，对 $z_1, z_2, \ldots, z_p \in F'(1 \le n < p)$。

那么 $z_1 \cdots z_n \in F^\times$，因此 $(z_1 \cdots z_n)^p = a^n \in F^{\times p}$，故由 $\gcd(n, p) = 1$, $a \in F^{\times p}$，矛盾。□

引理 8.7. 对于素数 $p > 3$ 和整数 $1 \le k \le \frac{p-1}{2}$，$\mathbb{Q}\left(\zeta_p, \sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}\right)/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是次数为 p 的循环扩张。

证明. 扩张 $\mathbb{Q}\left(\zeta_p, \sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}\right)/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是可分的，因为 $\mathbb{Q}$ 的特征为 0。

$x^p - \left(\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}\right)$ 的任意一个根都可写为 $\zeta_p^i \sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}$，其中 i 是某个整数，且该根属于 $\mathbb{Q}\left(\zeta_p, \sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}\right)$，因此扩张 $\mathbb{Q}\left(\zeta_p, \sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}\right)/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是正规扩张。为证明 $\mathbb{Q}\left(\zeta_p, \sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}\right)/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是次数为 p 的域扩张，根据引理 8.6，只需证明 $\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k} \notin \mathbb{Q}(\zeta_p)^{\times p}$。

假设 $\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k} \in \mathbb{Q}(\zeta_p)^{\times p}$，并记 $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_p)^\times$ 为 $\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k} = \alpha^p$。由于 $\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}$ 是代数整数，因此 α 也是代数整数。$\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的整数环为 $\mathbb{Z}[\zeta_p]$（参见 [Sam70, 第 2.9] 章），因此 α 可写成 $\alpha = a_{p-2}\zeta_p^{p-2} + \cdots + a_1\zeta_p + a_0$，其中 $a_i \in \mathbb{Z}$。方程

$$(a_{p-2}\zeta_p^{p-2} + \cdots + a_1\zeta_p + a_0)^p - (\zeta_p^{p-k} + \zeta_p^k) = 0 \qquad (*)$$

成立，且左边经过变形后得到

$$b_{p-1}\zeta_p^{p-1} + \cdots + b_1\zeta_p + b_0$$

with

$$\begin{aligned} b_0 &\equiv a_{p-2}^p + \cdots + a_0^p \pmod p \\ b_k &\equiv -1 \pmod p \\ b_{p-k} &\equiv -1 \pmod p \\ b_i &\equiv 0 \pmod p \quad (1 \le i \le p-1, i \ne k, p-k) \end{aligned}$$

通过计算组合数可得。

ζ_p 的最小多项式为 $x^{p-1} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$，因此结合 $p > 3$，方程（$*$）不可能成立，矛盾。

因此，$\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k} \notin \mathbb{Q}(\zeta_p)^{\times p}$，所以扩张 $\mathbb{Q}\left(\zeta_p, \sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}\right)/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的次数为 p，且伽罗瓦群是循环群。□

引理 8.8。设 p 为奇素数，并记 $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$，$F = \mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right)$。设 $L = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a})$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的一个循环扩张，对于 $a \in \mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right)$，满足 $[\mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a}) : \mathbb{Q}(\zeta_p)] = p$。定义映射

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a}) & \to & \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a}) \\ & \zeta_p & \mapsto & \zeta_p \\ & \sqrt[p]{a} & \mapsto & \zeta_p \sqrt[p]{a} \end{array}$$

由于伽罗瓦群(L/K)由 ρ 生成。对于符号 u，定义 $B=\oplus_{i=0}^{p-1}u^iL$，其中 $u^p\in\mathbb{Q}(\zeta_p)^\times$，并将 B 上的乘法定义为 $s\cdot u=u\cdot\rho(s)$，对于 $s\in L$。

在此条件下，存在一个 B 上的第二类反对合。此外，假设 B 是除环，则存在一个 B 上的第二类正反自同构。

证明。定义映射

$$\begin{array}{rccc}\phi\colon & B & \to & B\\ & u^i\zeta_p^j\sqrt[p]{a^k} & \mapsto & u^i\zeta_p^{ik-j}\sqrt[p]{a^k}\quad (0\le i,k\le p-1,\ 0\le j\le p-2)\end{array}$$

为一个 $\mathbb{Q}$上的线性映射。 ϕ 限制在 K 上为

$$\begin{array}{rccc}\phi|_K\colon & K & \to & K\\ & \zeta_p^j & \mapsto & \zeta_p^{-j}\quad (0\le j\le p-1)\end{array}$$

并且 ϕ 逐点固定域 F，因此 $\phi(a)=a$。于是，由以下等式

$$\begin{aligned}&\phi(1)=1,\\ &\phi(\phi(u^i\zeta_p^j\sqrt[p]{a^k}))=\phi(u^i\zeta_p^{ik-j}\sqrt[p]{a^k})=u^i\zeta_p^j\sqrt[p]{a^k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(u^i\zeta_p^j\sqrt[p]{a^k}\cdot u^{i'}\zeta_p^{j'}\sqrt[p]{a^{k'}})&=\phi(u^iu^{i'}\cdot\rho^{i'}(\zeta_p^j\sqrt[p]{a^k})\zeta_p^{j'}\sqrt[p]{a^{k'}})\\ &=\phi(u^{i+i'}\zeta_p^{i'k+j}\sqrt[p]{a^k}\zeta_p^{j'}\sqrt[p]{a^{k'}})\\ &=\phi(u^{i+i'}\zeta_p^{i'k+j+j'}\sqrt[p]{a^{k+k'}})\\ &=u^{i+i'}\zeta_p^{(i+i')(k+k')-(i'k+j+j')}\sqrt[p]{a^{k+k'}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\phi(u^{i'}\zeta_p^{j'}\sqrt[p]{a^{k'}})\phi(u^i\zeta_p^j\sqrt[p]{a^k})&=u^{i'}\zeta_p^{i'k'-j'}\sqrt[p]{a^{k'}}\cdot u^i\zeta_p^{ik-j}\sqrt[p]{a^k}\\ &=u^{i'}u^i\cdot\rho^i(\zeta_p^{i'k'-j'}\sqrt[p]{a^{k'}})\zeta_p^{ik-j}\sqrt[p]{a^k}\\ &=u^{i+i'}\zeta_p^{i'k'-j'+ik'}\sqrt[p]{a^{k'}}\zeta_p^{ik-j}\sqrt[p]{a^k}\\ &=u^{i+i'}\zeta_p^{i'k'-j'+ik'+ik-j}\sqrt[p]{a^{k+k'}},\end{aligned}$$

ϕ 是 B上的反对合。

如上所述， $\phi|_K$ 仅逐点固定 F 中的元素，因此 ϕ 属于第二类（参见定义 2.15）。此外，若 B 是除环，根据定理 2.17，存在一个 B 上的第二类正反自同构。□

引理 8.9. 设 L/K 是数域的伽罗瓦扩张，满足 $[L:K]=n$，且令 $\mathfrak{q}\subset\mathcal{O}_L$ 为一个素理想，并取 $\alpha\in L^\times\backslash U_L$ （U_L 是 $\mathcal{O}_L$ 的可逆元集合）。

假设对所有 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$，均有 $\sigma(\mathfrak{q})=\mathfrak{q}$。那么，在 $\mathcal{O}_L$ 中，由 $\mathrm{N}^{L/K}(\alpha)$ 生成的理想的素理想分解中， $\mathfrak{q}$ 的重数是 n 的倍数。

证明. 将 $\alpha\mathcal{O}_L$ 的素理想分解写为

$$\alpha\mathcal{O}_L=\mathfrak{q}_1{}^{e(\mathfrak{q}_1)}\cdots\mathfrak{q}_g{}^{e(\mathfrak{q}_g)}\quad(\mathfrak{q}_i\text{ are all different})$$

然后

$$\sigma(\alpha)\mathcal{O}_L=\sigma(\mathfrak{q}_1)^{e(\mathfrak{q}_1)}\cdots\sigma(\mathfrak{q}_g)^{e(\mathfrak{q}_g)}$$

对于每个 $\sigma \in$伽罗瓦群(L/K)。

此外，下一个等式成立。

$$\left(\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)\right)\mathcal{O}_L = \left(\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)}\sigma(\alpha)\right)\mathcal{O}_L = \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)}\prod_{i=1}^{g}\sigma(\mathfrak{q}_i)^{e(\mathfrak{q}_i)}$$

根据假设，对于所有 $\sigma \in$ 伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 中的 $= \mathfrak{q}$ ， $\mathfrak{q}$ 出现在 $\left(\mathrm{N}^{L/K}(\alpha)\right)\mathcal{O}_L$ 的因子分解中，当且仅当它出现在 $\alpha\mathcal{O}_L$ 的因子分解中。

此外，若 $\mathfrak{q}$ 出现在 $\alpha\mathcal{O}_L$ 中，并令 $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}$，则

$$\left(\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)\right)\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}^{e(\mathfrak{q})\cdot n}\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)}\prod_{i=2}^{g}\sigma(\mathfrak{q}_i)^{e(\mathfrak{q}_i)},$$

因此， $\mathfrak{q}$ 的重数是 n 的倍数。 □

结合这些引理，即可证明定理 8.2。

定理 8.2 的证明。记 $\gamma = \zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}$。考虑域的伽罗瓦扩张序列$\mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{\gamma}) \supset \mathbb{Q}(\zeta_p) \supset \mathbb{Q}$ ，并记 $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ 、 $L = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{\gamma})$。根据引理 8.12， L/K 是一个次数为 p 的循环扩张。

另记 $K_0 = \mathbb{Q}\left(\zeta_p + \frac{1}{\zeta_p}\right)$ 和 $G =$Gal(L/K)。根据引理 8.5， K 是全实数域 K_0 的全复二次扩张，因此， K 满足 CM 域的条件。

定义

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & L & \to & L \\ & \zeta_p & \mapsto & \zeta_p \\ & \sqrt[p]{\alpha} & \mapsto & \sqrt[p]{\alpha}\zeta_p \end{array} .$$

利用伽罗瓦扩张 L/K 和 ρ的定理 2.28，存在无穷多个素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ 与其上的素理想 $\mathfrak{q} \subset \mathcal{O}_L$ 组成的对 $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$，满足以下条件。

1. $\mathfrak{p}$ 在 L中非分歧。2. 弗罗贝尼乌斯自同构 $\left(\frac{K/F}{\mathfrak{q}}\right)$ 是 ρ。

固定一对 $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$，并定义素数 q 为 $q\mathbb{Z} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$。

根据希尔伯特分歧理论，它可以写成

$$q\mathcal{O}_K = \prod_{i=1}^{g}{\mathfrak{p}_i}^{e} \quad (\mathfrak{p}_i \text{ are all different}),$$

$$\mathfrak{p}_i\mathcal{O}_L = \prod_{j=1}^{g_i}{\mathfrak{q}_{ij}}^{e_i} \quad (\mathfrak{q}_{ij} \text{ are all different}).$$

那么，

$$q\mathcal{O}_L = \prod_{i=1}^{g}\prod_{j=1}^{g_i}{\mathfrak{q}_{ij}}^{e\cdot e_i}$$

并再次根据分歧理论，将 $f = [\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i$ 记作： $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}]$, $f_i = [\mathcal{O}_L/\mathfrak{q}_{ij}$： $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i]$，其中 $efg = p-1$, $e_i f_i g_i = p$。

将上述素理想分解中的 $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}_{11} = \mathfrak{q}$ 记作。条件 1 意味着 $e_1 = 1$，并且由 $e \leq p-1$, ee_1 不是 p 的倍数。条件 2 意味着$\rho(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$，因此分解群 $\mathcal{D}_\mathfrak{q}$ 等于 G。分解群 $\mathcal{D}_\mathfrak{q}$ 的序为 $e_1 f_1$，因此 $f_1 = p$，这意味着 $g_1 = 1$。所以，数对 $(q, \mathfrak{q})$ 满足以下条件。

- $\sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ 对所有 $\sigma \in G$

理想 $q\mathcal{O}_L$ 的素理想分解中，$\mathfrak{q}$ 的重数不是 p的倍数。

由于 q 不是 $\mathcal{O}_L$中的可逆元，$q \notin \mathrm{N}^{L/K}(U_L)$。因此，根据引理 8.9，$q$ 不能写成 $q = \mathrm{N}^{L/K}(\alpha)$，对任意 $\alpha \in L^\times$均如此。

此外，$q^p = \mathrm{N}^{L/K}(q) \in \mathrm{N}^{L/K}(L^\times)$，且由于 p是素数，q在$K^\times/\mathrm{N}^{L/K}(L^\times)$中的序恰好为 p。

根据命题 8.3，存在一个形如$B = \oplus_{i=0}^{p-1} u^i L$ 的中心单除代数 B，其符号为 u，并满足 $u^p = q$。现在，除代数 B 满足定理 8.2 中的所有条件。□

现在，$\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}$是一个代数整数，并且根据定理 2.22，$\left(\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}\right)^{-1}$ 也是一个代数整数。因此，$\sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}$和 $\sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}^{-1}$ 都是代数整数，由此得到下一个结果。

定理 8.10. Δ不存在最小值。

证明. 对于素数 $p > 3$ 和整数$1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$，由定理 8.2，存在一个包含 $\sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}$ 的 CM 域 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 上的有限维中心单除代数。定理 8.2 中构造的除代数 $B = \oplus_{i=0}^{p-1} u^i L$ 由注记 8.4 可知有一个序$\mathcal{O} = \oplus_{i=0}^{p-1} u^i \mathcal{O}_L$，且 $\mathcal{O}$包含 $\sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}$和 $\sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}^{-1}$，因为它们都是整元。结合针对 $d = p$、$e_0 = \frac{p-1}{2}$ 和 $m = 1$的引理 8.8 与引理 4.5，可得一个 $p^{2\,(p-1)}_{\ 2}$ 维简单阿贝尔簇的自同构，它对应于 $\sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}$。

$\sqrt[p]{\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k}}$在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式为

$$\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(x^p - \left(\zeta_p^k + \frac{1}{\zeta_p^k} \right) \right)$$

因此，其第一动力次数为 $\sqrt[p]{\left| \zeta_p^{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\zeta_p^{\frac{p-1}{2}}} \right|^2}$，如第 3.3 节所示。

现在，$1 < \sqrt[p]{\left| \zeta_p^{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\zeta_p^{\frac{p-1}{2}}} \right|^2} < \sqrt[p]{4}$在 $p \to \infty$时收敛于 1。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一个简单阿贝尔簇的自同构的第一动力次数 λ，使得$1 < \lambda < 1 + \epsilon$。□

去掉自同构条件后，下面的定理仍然成立。

定理 8.11. 对任意 $\epsilon > 0$，存在一个简单阿贝尔簇 X 和一个不是自同构的端omorphism f: $X \to X$，使得 $1 < \lambda_1(f) < 1 + \epsilon$。

该定理通过使用下面的引理而非引理 8.7 得到证明。

引理 8.12. 对于正整数 a 和素数 p，使得 $\sqrt[p]{a} \notin \mathbb{Z}$， $\mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a})/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是次数为 p 的循环扩张。

证明。扩张 $\mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a})/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 如引理 8.7 的证明中所述，是可分且正规的。

假设 $a \in \mathbb{Q}(\zeta_p)^{\times p}$，并记 $a = \alpha^p$ 为 $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_p)^{\times}$。由 $\sqrt[p]{a} \notin \mathbb{Z}$ 中 $x^p - a \in \mathbb{Z}[x]$ 的不可约性， $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = p$，因此这与 $\mathbb{Q}(\zeta_p) \supset \mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ 矛盾。

因此，根据引理 8.6， $x^p - a$ 在 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 上不可约，所以扩张 $\mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a})/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的次数为 p。

因此， $\mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a})/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是伽罗瓦扩张，且伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a})/\mathbb{Q}(\zeta_p)\right)$ 的序为 p，这是由 $\sqrt[p]{a} \mapsto \zeta_p \sqrt[p]{a}$ 生成的循环群。□

定理 8.13. 对于奇素数 p，以及满足 $\sqrt[p]{a} \notin \mathbb{Z}$ 的正整数 a，存在一个 CM 域 K、一个中心单除代数 B（在 K 上），其形式为 $B = \oplus_{i=0}^{p-1} u^i L$ 且带有符号 u，一个次数为 p 的循环扩张 L/K，以及 $[B : K] = p^2$，使得 $\sqrt[p]{a} \in L$。

证明。按照定理 8.2 的证明，记 $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$、 $L = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{a})$。根据引理 8.12， $L \supset K \supset \mathbb{Q}$ 是伽罗瓦扩张序列，而 L/K 是次数为 p 的循环扩张。

与定理 8.2 的证明一样，通过对伽罗瓦扩张 L/K应用定理 2.28，存在一对由素数 q 和素理想 $\mathfrak{q} \subset \mathcal{O}_L$ 组成的元素 $(q, \mathfrak{q})$，使得

- $\sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ 对所有 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$均成立
- 理想 $q\mathcal{O}_L$ 的素理想分解中， $\mathfrak{q}$ 的重数不是 p的倍数。

因此，与定理 8.2 的证明一样，由引理 8.9 可知， q 在 $K^{\times}/\mathrm{N}^{L/K}(L^{\times})$ 中的序恰为 p。

由命题 8.3， $B = \oplus_{i=0}^{p-1} u^i L$ 带有满足 $u^p = q$ 的符号 u，是定义在 K 上、具有 $[B$ 的中心单除代数： $K] = p^2$，并满足定理 8.13 的所有条件。□

定理 8.11 的证明。对于整数 a 和满足 $\sqrt[p]{a} \notin \mathbb{Z}$ 的奇素数 p，定理 8.13 中构造的定义在 CM 域 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 上的中心单除代数有一个序，根据注记 8.4，该序包含 $\sqrt[p]{a}$ 。此外，由引理 8.8 和引理 4.5，对于$d = p$、$e_0 = \frac{p-1}{2}$ 和 $m = 1$，存在一个自同态，它对应于一个 $p^{2}{}_{(p-1)\ 2}$ 维简单阿贝尔簇上的态射，且其第一动力次数如第 3.3 节所示为 $\sqrt[p]{a^2}$。

代入 $a = 2$ 后， $\sqrt[p]{a} \notin \mathbb{Z}$ 成立，且当 $p \to \infty$ 时，$\sqrt[p]{a^2}$ 收敛于 1。因此，这类自同态的第一动力学度不为 1，且没有最小值。

此外，这类自同态不可能是自同构，因为$\frac{1}{\sqrt[p]{a}}$ 不是代数整数，因此证明完成。□

References

[ACR16] Adigaa, C., Cangul, I.N., Ramaswamy, H.N.: 关于 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 在 $\mathbb{Q}$上的最小多项式常数项, Filomat，30(2016)，第4期，1097-1102。

[BC16] Blanc, J., Cantat, S.：射影曲面双有理变换的动力次数，《美国数学会杂志》，29(2016)，415-471。[BDGGH+92]Bertin, M.J., Decomps-Guilloux, A., Grandet-Hugot, M., Pathiaux-Delefosse, M., Schreiber, J.P.：Pisot 数与 Salem 数，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1992。[BL04] Birkenhake, C., Lange, H.：复阿贝尔簇，第二版，《数学科学基础丛书》302，施普林格出版社，柏林，2004。[Bor02] Borwein, P.：分析与数论中的计算漫游，《CMS 数学丛书》，施普林格，纽约，2002。[Coh89] Cohn, P.M.：代数（第2卷），第二版，约翰·威立父子出版公司，1989。[DF01] Diller, J., Favre, C.：曲面的双亚纯映射动力学，《美国数学杂志》，123(2001)，第6期，1135-1169。[DH22] Dang, N.-B., Herrig, T.：阿贝尔簇自同构的动力次数，《数学进展》，395(2022)，108082。[Dra83] Draxl, P.K.：斜域，剑桥大学出版社，81，1983。[DS05] Dinh, T.-C., Sibony, N.：有理映射拓扑熵的一个上界，《数学年刊》，161(2005)，1637–1644。[DS17] Dinh, T.-C., Sibony, N.：高维复动力系统中的等分布问题，《国际数学杂志》，28(2017)，第07期，1750057。[Mum70] Mumford, D.：阿贝尔簇，《塔塔基础研究所数学研究》，5，牛津大学出版社，1970。[Neu99] Neukirch, J.：代数数论，《数学科学基础丛书》322，施普林格出版社，柏林，1999。[Pie82] Pierce, R.S.：结合代数，《数学研究生教材》88，施普林格，纽约，1982。[Sam70] Samuel, P.：代数数论，Allan J. Silberger 从法文译出，Hermann，巴黎，法国，1970。[Voi21] Voight, J.：四元数代数，《数学研究生教材》288，施普林格，2021。