无名稿件编号（将由编辑插入）

巴拿赫空间中半无限凸约束系统误差界稳定性的原始刻画

周伟 · 米歇尔·泰´拉 · Jen-Chih Yao

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要 本文研究巴拿赫空间中半无限凸约束系统的误差界（局部和全局）的稳定性。当系统受到小扰动时，我们给出了局部和全局误差界稳定性的原始刻画。这些刻画是根据参与定义这些系统的函数的方向导数给出的。我们证明，误差界的稳定性实质上等价于验证：根据定义这些系统的函数的方向导数所定义的若干极小极大问题的最优值均位于某个零点邻域之外。此外，这种稳定性只要求系统中的所有分量函数具有相同的线性扰动。将这些稳定性结果应用于半无限线性系统的霍夫曼常数灵敏度分析，可得到关于在问题数据扰动下霍夫曼常数保持一致有界的原始判据。

关键词 稳定性 · 误差界 · 半无限凸约束 · 方向导数 ·霍夫曼常数。

数学主题分类（2000）90C31 · 90C25 · 49J52 · 46B20

第一作者的研究得到国家自然科学基金资助（项目编号：11971422 和 12171419），并获得河北省教育厅科学技术研究项目（项目编号：ZD2022037）和河北省自然科学基金（A2022201002）的资助。第二作者的研究得益于 FMJH 计划 PGMO 和 EDF 的支持。周伟 河北省机器学习与计算智能重点实验室 & 河北大学数学与~~信息科学学院，中国保定，邮编~~ 071002 电子邮箱：weizhou@hbu.edu.cn Michel Th´era ORCID 0000-0001-9022-6406 XLIMUMR-CNRS 7252，利摩日大学，法国利摩日，以及澳大利亚联邦大学，巴拉瑞特 电子邮箱：michel.thera@unilim.fr Jen-Chih Yao 中国医药大学附设医院神经网络计算研究中心，中国医药大学，台湾台中 电子邮箱：yaojc@mail.cmu.edu.tw

arXiv:2302.02279v1 [math.OC] 5 Feb 2023

1 引言

本文致力于研究巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中半无限凸系统在数据扰动下误差界的稳定性。所谓半无限凸系统，是指寻找满足下列条件的 $\mathrm{x} \in \mathbb{X}$

$$f_t(x) \leq 0 \ \text{ for all } \ t \in T, \tag{1.1}$$

其中T 是一个紧的、可能为无限的豪斯多夫空间，$f_t\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}, t \in T$ 是凸函数，且$(t,x) \mapsto f_t(x)$ 在$T \times \mathbb{X}$上连续。本文旨在研究系统（1.1）的误差界在其数据受到扰动时的变化。

误差界的研究可追溯到 Hoffman 的开创性工作 [1]。更确切地说，给定一个 $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ 矩阵 A 和一个 m 维向量 b，为了估计点 x 到多面体集 $\{\mathrm{u} : \mathrm{Au} \leq \mathrm{b}\}$ 中最近点的欧几里得距离，Hoffman [1] 证明，该距离的上界为某个常数（仅依赖于 A）乘以残差误差 $\|(\mathrm{Ax} - \mathrm{b})_+\|$ 的欧几里得范数，其中 $(\mathrm{Ax} - \mathrm{b})_+$ 表示 $\mathrm{Ax} - \mathrm{b}$ 的正部。Hoffman 的工作广受认可，并被许多学者深入研究和拓展，其中包括 Robinson [2], Mangasarian [3], Auslender 与 Crouzeix [4], Pang [5], Lewis 与 Pang [6], Klatte 与 Li [7], Jourani [8] , Abassi 与 Th´era [9, 10], Ioffe [11] 等。关于误差界的大量文献表明，这一理论在以下领域具有重要应用：线性规划/整数规划的灵敏度分析（参见 [12, 13]）、线性约束最小化中下降法的收敛性分析（参见 [14–18]）、求有限个闭凸集交集中一点的可行性问题（参见 [19–22]），以及图像重建领域（参见[23]）。关于理论研究和实际应用的更多细节，读者可参阅文献目录 [21, 24–40] 及其中的参考文献。

由于现实问题中的数据存在不准确性，因此有必要研究扰动问题数据时误差界的行为；从实际和理论角度来看，人们希望误差界在数据扰动下具有稳定性。1994年，Luo 和 Tseng [41] 研究了线性系统条件数的扰动分析。1998年，Deng [42] 进一步讨论了凸不等式系统条件数的扰动分析。2002年，Az´e 和 Corvellec [43] 研究了半无限线性约束系统中 Hoffman 常数的灵敏度分析。2010年，Ngai、Kruger 和 Th´era [44] 研究了欧几里得空间中半无限凸约束系统误差界的稳定性，并建立了此类稳定性的次微分特征刻画。随后，Kruger、Ngai 和 Th´era [45] 研究了巴拿赫空间中半无限凸约束系统误差界的稳定性，并给出了关于系统中函数扰动的对偶特征刻画。2012年，Zheng 和 Wei [46] 放宽了凸性假设，讨论了由拟次光滑（不一定是凸）不等式定义的半无限约束系统误差界的稳定性，并给出了该稳定性的 Clarke 次微分特征刻画。2018年，Kruger、Lop´ez 和 Th´era [47] 进一步发展了文献 [44, 45]中给出的误差界稳定性的次微分特征刻画。最近，作者 [48] 根据凸函数的方向导数，证明了欧几里得空间中凸不等式约束系统误差界稳定性的特征刻画。本文继续研究文献 [48] 中关于巴拿赫空间中半无限凸约束系统误差界稳定性的工作，重点考察在扰动所研究问题数据时该稳定性的原始刻画。我们证明，在一定程度上，验证此类系统误差界的稳定性等价于求解一类由系统中分量函数的方向导数所确定的极小极大优化问题。将这些稳定性结果应用于半无限线性系统中 Hoffman 常数的灵敏度分析后，我们得到原始判据，用以判断 Hoffman 常数在问题数据扰动下是否一致有界。

本文组织如下。第2节给出文中使用的一些定义和预备结果。第3节主要讨论巴拿赫空间中半无限凸约束系统局部与全局误差界的稳定性。根据分量函数的方向导数，我们给出了小扰动下误差界稳定性的原始刻画（见 定理3.1 和 3.2）。第4节将这些稳定性结果应用于半无限线性系统中 Hoffman 常数的灵敏度分析，并给出 Hoffman 常数在扰动下保持一致有界的原始判据（见 定理4.1）。第5节给出本文的总结与展望。

2 预备知识

设 $\mathbb{X}$ 是一个巴拿赫空间，其拓扑对偶为 $\mathbb{X}^*$。我们用 $\mathbb{B}_{\mathbb{X}}$ 表示 $\mathbb{X}$ 的闭单位球；对于任意 $x \in \mathbb{X}$ 和 $\delta > 0$，用 $B(x, \delta)$ 表示以 x 为中心、半径为 δ 的开球。

设 D 是 $\mathbb{X}$ 的一个子集。我们分别用 $\mathrm{int}(D)$ 和 $\mathrm{bdry}(D)$ 表示 D 的内部和边界。点 $x \in \mathbb{X}$ 到集合 D 的距离定义为

$$\mathbf{d}(x, D) := \inf_{u \in D} \|x - u\|,$$

并约定当 $D = \emptyset$ 时，$d(x, D) = +\infty$。

设 $\varphi: \mathbb{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个真下半连续凸函数，并且 $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\varphi) := \{x \in \mathbb{X}: \varphi(x) < +\infty\}$。对于任意 $h \in \mathbb{X}$，我们用 $d^+\varphi(\bar{x}, h)$ 表示 φ 在 $\bar{x}$ 处沿方向 h 的方向导数，其定义为

$$d^+\varphi(\bar{x}, h) := \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(\bar{x} + th) - \varphi(\bar{x})}{t}. \tag{2.1}$$

例如，根据 [49]，我们知道

$$t \mapsto \frac{\varphi(\bar{x} + th) - \varphi(\bar{x})}{t}$$

随 $t \to 0^+$ 非递增，因此

$$d^+\varphi(\bar{x}, h) = \inf_{t > 0} \frac{\varphi(\bar{x} + th) - \varphi(\bar{x})}{t}. \tag{2.2}$$

我们将 $\partial\varphi(\bar{x})$ 记为 φ 在 $\bar{x}$ 处的次微分，其定义为

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \{x^* \in \mathbb{X}^* : \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \le \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \ \text{ for all } x \in \mathbb{X}\}.$$

由 [49, 命题 2.24] 可知，若 φ 在 $\bar{x}$ 处连续，则 $\partial\varphi(\bar{x}) \neq \emptyset$，

$$\partial\varphi(\bar{x}) = \{x^* \in \mathbb{X}^* : \langle x^*, h \rangle \le d^+\varphi(\bar{x}, h) \ \text{ for all } h \in \mathbb{X}\}, \tag{2.3}$$

and

$$d^+\varphi(\bar{x}, h) = \sup\{\langle x^*, h \rangle : x^* \in \partial\varphi(\bar{x})\}. \tag{2.4}$$

给定一个映射 $\phi: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$，它从 $\mathbb{X}$ 映射到赋范线性空间 $\mathbb{Y}$，我们记

$$\mathrm{Lip}(\phi) := \sup_{u, v \in \mathbb{X}, u \neq v} \frac{\|\phi(u) - \phi(v)\|_{\mathbb{Y}}}{\|u - v\|_{\mathbb{X}}}.$$

ϕ的利普希茨常数。

3 半无限凸约束系统误差界的稳定性

本节致力于研究半无限凸约束系统局部和全局误差界的稳定性，并旨在通过方向导数建立其原始刻画。我们首先回顾一些记号和定义。

设 T 是一个紧致的、可能是无限的豪斯多夫空间，并考虑 $\mathscr{C}$(T $\times\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$) 上定义的连续函数空间。设 F $\in\mathscr{C}$(T $\times\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$) 满足：对每个 t $\in$T，F(t ·) 都是凸集。我们把在 $\mathbb{X}$ 中寻找满足以下条件的 x $\in\mathbb{X}$的问题称为半无限凸约束系统：

$$f_t(x)\le 0 \ \text{ for all } t\in T, \tag{3.1}$$

其中 $f_t:=F(t\ \cdot)$ 对所有 $t\in T$。令 S_F 表示 (3.1) 的解集；即

$$S_F:=\{x\in X: f_t(x)\le 0 \ \text{ for all } t\in T\}. \tag{3.2}$$

Set

$$f(x):=\max\{f_t(x): t\in T\} \ \text{ and } \ T_f(x):=\{t\in T: f_t(x)=f(x)\}, \ \text{ for each } x\in\mathbb{X}. \tag{3.3}$$

Re称该系统 (3.1) 具有全局误差界，如果存在实数 $c\in(0,+\infty)$
su以至于

$$c\mathbf{d}(x,S_F)\le [f(x)]_+, \ \forall x\in\mathbb{X}, \tag{3.4}$$

其中 $[f(x)]_+:=\max\{f(x)\ 0\}$。记

$$\mathrm{Er}F:=\inf_{x\notin S_F}\frac{f(x)}{\mathbf{d}(x,S_F)}$$

（3.1）的全局误差界模

设 $\bar{}x\in$属于（S_F）。若存在常数使得系统（3.1）在x 处具有局部误差界，即 $\bar{}x$，存在c $\delta\in(0,+\infty)$ 满足

$$c\mathbf{d}(x,S_F)\le [f(x)]_+, \ \forall x\in\mathbf{B}(\bar{x},\delta). \tag{3.5}$$

记

$$\mathrm{Er}F(\bar{x}):=\liminf_{x\to\bar{x},x\notin S_F}\frac{f(x)}{\mathbf{d}(x,S_F)}$$

（3.1）在x 处的局部误差界模 $\bar{}$。

现在，我们可以介绍关于巴拿赫空间中半无限凸约束系统的局部和全局误差界稳定性的主要研究成果。下面的定理给出了半无限凸约束系统（3.1）局部误差界稳定性的原始刻画。

定理 3.1 设 F $\in\mathscr{C}$(T $\times\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$) 满足：对所有 t $\in$T，函数 f_t:=F(t ·) 都是凸的，$\bar{}$x $\in$ bdry(S_F)，且 f、Tf(x) 如 (3.3) 中所示。则以下命题等价：
(i) 极小极大问题 $\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in T_f(\bar{}x)} d^+f_t(\bar{}x,h)$ 的最优值非零。

(ii) 存在 cε >0，使得如果

$$G\in\mathscr{C}(T\times\mathbb{X},\mathbb{R}), g_t(x):=G(t,x), g_t \textit{ is convex};$$
$$g(x):=\sup_{t\in T}g_t(x), T_g(x):=\{t\in T: g_t(x)=g(x)\};$$
$$g(\bar{x})=0;$$

$$T_g(\bar{x}) \subseteq T_f(\bar{x}) \ whenever \ \inf_{\|h\|=1} \sup_{t\in T_f(\bar{x})} d^+ f_t(\bar{x},h) < 0;$$

$$T_f(\bar{x}) \subseteq T_g(\bar{x}) \ whenever \ \inf_{\|h\|=1} \sup_{t\in T_f(\bar{x})} d^+ f_t(\bar{x},h) > 0;$$

$$\limsup_{x\to\bar{x}} \frac{|f_t(x)-g_t(x)-(f_t(\bar{x})-g_t(\bar{x}))|}{\|x-\bar{x}\|} \le \varepsilon, \ \forall t \in T_f(\bar{x}) \cap T_g(\bar{x}),$$

ErG(¯x) ≥ c。

(iii) 存在 cε > 0，使得对于所有 u* ∈ $\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*}$，都有 ErG$_{u^*}$(¯x) ≥c，其中 G$_{u^*}$ ∈ $\mathscr{C}$(T × $\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$) 定义如下：

$$G_{u^*}(t,x) := f_t(x) + \varepsilon\langle u^*, x-\bar{x}\rangle, \ for\ all\ (t,x) \in T\times\mathbb{X}. \tag{3.6}$$

下述定理给出了半无限凸约束系统（3.1）全局误差界稳定性的原始刻画。

定理 3.2 设 F ∈ $\mathscr{C}$($T\times\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$) 满足：对于所有 t ∈T，f $_t$:=$F(t\ \cdot)$均为凸函数；并设 f $_{Tf}(x)$如(3.3)所示。则下列命题等价：

(i) 存在 τ ∈(0,+∞)，使得

$$\inf\left\{ \left| \inf_{\|h\|=1} \sup_{t\in T_f(\bar{x})} d^+ f_t(\bar{x},h) \right| : \bar{x} \in \mathrm{bdry}(S_F) \right\} \ge \tau, \tag{3.7}$$

and

$$\liminf_{k\to\infty} \left| \inf_{\|h\|=1} \sup_{t\in T_f(z_k)} d^+ f_t(z_k,h) \right| \ge \tau \tag{3.8}$$

对于所有 {(z$_k$, x$_k$)} ⊆int(S$_F$) × 边界(S$_F$)，均成立，且 lim$_{k\to\infty}$f (z$_k$)−f (x$_k$)/‖z$_k$−x$_k$‖ =0。

(ii) 存在 c ε > 0，使得

$$G \in \mathscr{C}(T\times\mathbb{X},\mathbb{R}), g_t(x) := G(t,x), g_t \ is\ convex;$$

$$g(x) := \sup_{t\in T} g_t(x), T_g(x) := \{t\in T : g_t(x) = g(x)\};$$

$$\{z \in \mathrm{bdry}(S_F) : f_t(z) = g_t(z) \ \ for\ all\ t \in T\} \neq \emptyset;$$

$$\sup_{t\in T} \mathrm{Lip}(f_t - g_t) < \varepsilon;$$

$$T_g(x) \subseteq T_f(x) \ \ whenever \ \inf_{\|h\|=1} \sup_{t\in T_f(x)} d^+ f_t(x,h) < 0;$$

$$T_f(x) \subseteq T_g(x) \ \ whenever \ \inf_{\|h\|=1} \sup_{t\in T_f(x)} d^+ f_t(x,h) > 0,$$

ErG ≥c。

(iii) 存在 cε > 0，使得对所有 ¯x ∈边界(S$_F$) 和 u* ∈ $\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*}$，均有 ErG$_{u^*,\ \bar{x}}$ ≥c，其中 G$_{u^*,\ \bar{x}}$ ∈ $\mathscr{C}$(T × $\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$) 定义如下：

$$G_{u^*,\bar{x}}(t,x) := f_t(x) + \varepsilon\langle u^*, x-\bar{x}\rangle, \ for\ all\ (t,x) \in T\times\mathbb{X}. \tag{3.9}$$

接下来，我们将重点关注以下定理的完整证明：定理3.1 和 3.2。容易验证，系统(3.1)的误差界等价于式(f 中给出的误差界3.3)。因此，为了证明定理3.1 和 3.2，有必要研究连续函数f的误差界稳定性。回顾一下，函数f的误差界性质由以下不等式定义：

$$c\mathbf{d}(x,S_f) \le [f(x)]_+ \tag{3.10}$$

其中 $Sf := \{x \in \mathbb{X} : f(x) \le 0\}$ 表示函数f的下水平集。如果对于某个$c > 0$ 以及所有$x \in \mathbb{X}$, 不等式(3.10)成立，那么就称f 具有全局误差界。在这种情况下，我们记作

$$\mathrm{Er}f := \inf_{f(x)>0} \frac{f(x)}{\mathbf{d}(x, S_f)} \tag{3.11}$$

f 的全局误差界模f。给定 $\bar{x} \in X$，且$f(\bar{x}) = 0$，若不等式（3.10）对某个$c > 0$ 在所有x 靠近 $\bar{x}$时成立，则f称为在 $\bar{x}$处具有局部误差界。在这种情况下，我们记作

$$\mathrm{Er}f(\bar{x}) := \liminf_{x\to\bar{x}, f(x)>0} \frac{f(x)}{\mathbf{d}(x, S_f)} \tag{3.12}$$

f 在 $\bar{x}$ 处的局部误差界模。

3.1 f 的误差界的稳定性

我们首先证明以下关于式（f中给出的连续凸函数3.3）的误差界原始刻画命题。这是证明本文主要结果的关键工具。

命题 3.1 设 f 由(3.3) 给出，且下水平集 S_f 非空。

(i) f 具有全局误差界，当且仅当

$$\beta(f) := \inf_{f(x)>0} \left(- \inf_{\|h\|=1} d^+ f(x,h) \right) > 0.$$

此外，Er f $= \beta($ f $)$。

(ii) f 在 $\bar{x} \in$ 边界(S_f) 处具有局部误差界，当且仅当

$$\beta(f, \bar{x}) := \liminf_{x\to\bar{x}, f(x)>0} \left(- \inf_{\|h\|=1} d^+ f(x,h) \right) > 0.$$

此外，Er f $(\bar{x}) = \beta($ f $\bar{x})$。

证明。我们首先证明

$$- \inf_{\|h\|=1} d^+ f(x,h) = \mathbf{d}(0, \partial f(x)), \ \forall x : f(x) > 0. \tag{3.13}$$

设 $x \in \mathbb{X}$ 满足 f $(x) > 0$。则 ∂f $(x) \neq /0$ 且 $0 \notin \partial$f (x)（由 f $(x) > 0$ 且 $S_f \neq /0$ 可知）。记 r $:=$ d$(0, \partial$f $(x)) > 0$。任取充分小的 $\varepsilon > 0$s，使得 $(r - \varepsilon)\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*} \cap \partial$f $(x) = /0$。注意到 $\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*}$和 ∂f (x) 是弱*-紧的，由 [50, 定理 3.4] 中的分离定理可知，存在 $h_0 \in \mathbb{X}$ 满足 $\|h_0\| = 1$ 和 $\gamma_1 \in \mathbb{R}$，使得

$$\sup\{\langle x^*, h_0\rangle : x^* \in \partial f(x)\} < \gamma_1 < \inf\{\langle x^*, h_0\rangle : x^* \in (r-\varepsilon)\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*})\} = -(r-\varepsilon).$$

这与（2.4）意味着

$$\inf_{\|h\|=1} d^+ f(x,h) \le d^+ f(x,h_0) < -(r-\varepsilon) \to -r \ \ (\text{as } \varepsilon \to 0^+). \tag{3.14}$$

另一方面，令 $\varepsilon > 0$。我们可以选取 $u_\varepsilon^* \in (r + \varepsilon)\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*} \cap \partial$f (x)。那么对于任意 $h \in \mathbb{X}, \|h\| = 1$，有

$$d^+ f(x,h) \ge \langle u_\varepsilon^*, h\rangle \ge -(r+\varepsilon),$$

因此

$$\inf_{\|h\|=1} d^+f(x,h) \geq -(r+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，则由（3.13）式可得（3.14）。

根据 [45, 定理 1 和定理 22], ，可得关于 f 的误差界模数的以下等式：

$$\mathrm{Er}f = \inf_{f(x)>0} \mathbf{d}(0,\partial f(x)) \text{ and } \mathrm{Er}f(\bar{x}) = \liminf_{x\to\bar{x},f(x)>0} \mathbf{d}(0,\partial f(x)). \tag{3.15}$$

由此及（3.13）可知，（i）和（ii）中的结论成立。证明完毕。 □

下面的命题给出了函数 f 的局部误差界的原始判据。

命题 3.2 设 f 如（3.3）中所定义，$\bar{x} \in$ 边界（S_F），且 下确界$_{\|h\|=1} d^+f(\bar{x}, h) \neq 0$。

(i) 若 inf$_{\|h\|=1}$ d$^+$f ($\bar{x}$, h) > 0，则 $S_F = \{\bar{x}\}$，且 Er f ($\bar{x}$) $\geq$inf$_{\|h\|=1}$ d$^+$f ($\bar{x}$,h)。(ii) 若 inf$_{\|h\|=1}$ d$^+$f ($\bar{x}$, h) < 0，则 Er f ($\bar{x}$) $\geq -$inf$_{\|h\|=1}$ d$^+$f ($\bar{x}$,h)。

证明。 (i) 容易验证 $S_F = Sf$ 且 $f(\bar{x}) = 0$。令 $x \in \mathbb{X}\backslash\{\bar{x}\}$。由（2.2），可得

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &= f\Big(\bar{x} + \|x-\bar{x}\|\frac{x-\bar{x}}{\|x-\bar{x}\|}\Big) - f(\bar{x}) \\ &\geq d^+f\Big(\bar{x}, \frac{x-\bar{x}}{\|x-\bar{x}\|}\Big)\|x-\bar{x}\| > 0. \end{aligned}$$

这意味着 $S_f = \{\bar{x}\}$，且 Er f ($\bar{x}$) $\geq$inf$_{\|h\|=1}$ d$^+$f ($\bar{x}$,h)。

(ii) 根据（3.13）和（3.15），可得

$$\mathrm{Er}f(\bar{x}) = \liminf_{x\to\bar{x},f(x)>0} \mathbf{d}(0,\partial f(x)) \geq \mathbf{d}(0,\partial f(\bar{x})) = -\inf_{\|h\|=1} d^+f(\bar{x},h).$$

因此结论成立。证明完毕。 □

注 3.1 命题 3.2 中的不等式可能是严格的。例如，令 $\mathbb{X} := \mathbb{R}$，且对所有 (t, x) $\in$T $\times\mathbb{R}$，F(t, x) $\equiv 0$。则 f 在任意 $\bar{x} \in \mathbb{R}$ 处都有局部误差界，并且 Er f ($\bar{x}$) $= +\infty$。然而，可以验证 inf$_{\|h\|=1}$ d$^+$ f ($\bar{x}$, h) $= 0$，因此 Er f ($\bar{x}$) $>$inf$_{\|h\|=1}$ d$^+$f ($\bar{x}$, h)。

下面的定理表明，条件

$$\inf_{\|h\|=1} d^+f(\bar{x},h) \neq 0$$

对于 f 在 $\bar{x}$ 处的局部误差界的稳定性而言是充分且必要的。

定理 3.3 设 f 如 (3.3) 所示，且 $\bar{x} \in$ 边界(S_F)。则以下陈述等价：

(i) inf$_{\|h\|=1}$ d$^+$f ($\bar{x}$,h) $\neq 0$。 (ii) 存在 c$\varepsilon > 0$，使得对于所有满足 $\bar{x} \in S_g$ 的 g $\in \mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$，以及

$$\limsup_{x\to\bar{x}} \frac{|(f(x)-g(x)) - (f(\bar{x})-g(\bar{x}))|}{\|x-\bar{x}\|} \leq \varepsilon, \tag{3.16}$$

有 Erg($\bar{x}$) $\geq$ c。

(iii) 存在 c $\varepsilon > 0$，使得对所有 $u^* \in \mathbb{B}_{\mathbb{X}^*}$，都有 Erg$_{u^*,\,\varepsilon}$($\bar{x}$) $\geq$c，其中 $g_{u^*,\,\varepsilon}(\cdot)$:=f $(\cdot) + \varepsilon\langle u^*, \cdot - \bar{x}\rangle$。

证明。我们记

$$\gamma := \inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x},h).$$

(i) $\Rightarrow$(ii)：令 $\varepsilon > 0$ 满足 $\varepsilon < |\gamma|$ 且 $c := |\gamma| - \varepsilon$。任取 $g \in \mathscr{C}(\mathbb{X},\ \mathbb{R})$ 满足 $\bar{x} \in Sg$ 且满足（3.16）。若 $\gamma > 0$，则对于任意满足 $h \in \mathbb{X}$ 的 $\|h\| = 1$，有

$$d^+ g(\bar{x},h) \geq d^+ f(\bar{x},h) - \varepsilon,$$

从而

$$\inf_{\|h\|=1} d^+ g(\bar{x},h) \geq \inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x},h) - \varepsilon = \gamma - \varepsilon.$$

利用 命题 3.2，可得 $\mathrm{Er}g(\bar{x}) \geq \gamma - \varepsilon$。

若 $\gamma < 0$，则对于任意满足 $\in \mathbb{X}$ 的 h，有

$$d^+ g(\bar{x},h) \leq d^+ f(\bar{x},h) + \varepsilon,$$

因此

$$\inf_{\|h\|=1} d^+ g(\bar{x},h) \leq \inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x},h) + \varepsilon = \gamma + \varepsilon.$$

再次利用命题 3.2，可得 $\mathrm{Er}g(\bar{x}) \geq -\gamma - \varepsilon = c$。因此 (ii) 成立。

注意到 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 可直接推出，接下来证明 (iii) $\Rightarrow$ (i)。

令 $\varepsilon > 0$。反设 $\gamma = 0$。那么存在一个序列 $\{h_k\} \subseteq \mathbb{X}$，使得 $\|h_k\| = 1$ 且

$$\alpha_k := d^+ f(\bar{x},h_k) \to \gamma = 0 \ \text{ as } k \to \infty.$$

不失一般性，可以假设对所有 k，$|\alpha_k| < \varepsilon$都成立（必要时考虑充分大的 k）。那么对任意 k，根据哈恩-巴拿赫定理，存在 $h_k^* \in \mathbb{X}^*$，使得

$$\|h_k^*\| = 1 \ \text{ and } \ \langle h_k^*, h_k \rangle = \|h_k\|.$$

现在考虑以下函数：

$$g_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon \langle h_k^*, x - \bar{x} \rangle, \forall x \in \mathbb{X}.$$

注意到 $\gamma = 0$，因此对任意 $x \neq \bar{x}$，都有 $f(x) \geq f(\bar{x})$。根据方向导数的定义，存在 $\delta_k \to 0^+$，使得

$$f(\bar{x} + \delta_k h_k) < f(\bar{x}) + (\varepsilon + \alpha_k)\delta_k = \inf_{x \in \mathbb{X}} f(x) + (\varepsilon + \alpha_k)\delta_k. \tag{3.17}$$

根据Ekeland变分原理（参见 [51]），存在一个 $z_k \in \mathbb{X}$ 使得

$$\|z_k - (\bar{x} + \delta_k h_k)\| < \frac{\delta_k}{2}, f(z_k) \leq f(\bar{x} + \delta_k h_k)$$

and

$$f(x) + 2(\varepsilon + \alpha_k)\|x - z_k\| > f(z_k),\ \forall x : x \neq z_k. \tag{3.18}$$

这意味着 $z_k \to \bar{x}$、$g_\varepsilon(\bar{x}) = f(\bar{x}) = 0$ 以及

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(z_k) &= f(z_k) + \varepsilon \langle h_k^*, z_k - \bar{x} \rangle \\ &\geq f(\bar{x}) + \varepsilon \langle h_k^*, z_k - \bar{x} \rangle \\ &= \varepsilon \langle h_k^*, z_k - \bar{x} - \delta_k h_k \rangle + \varepsilon \delta_k \\ &> \varepsilon \delta_k - \frac{1}{2}\varepsilon \delta_k = \frac{1}{2}\varepsilon \delta_k > 0. \end{aligned}$$

我们断言

$$\inf_{\|h\|=1} d^+ g_\varepsilon(z_k,h) < 0, \tag{3.19}$$

sin否则，$\inf_{\|h\|=1} d^+ g_\varepsilon(z_k, h) \geq 0$，因此 $g_\varepsilon(z_k) = \inf_{x\in\mathbb{X}} g_\varepsilon(x)$，这与 $g_\varepsilon(\bar{x}) =$ 矛盾 0.

对于任意 $h \in \mathbb{X}$，$\|h\| = 1$ 以及任意 $t > 0$，由（3.18），可得

$$\frac{g_\varepsilon(z_k+th)-g_\varepsilon(z_k)}{t} = \frac{f(z_k+th)-f(z_k)}{t} + \varepsilon\langle h_k^*, h\rangle \geq -2(\varepsilon+\alpha_k)\|h\| - \varepsilon = -5\varepsilon.$$

因此，

$$\inf_{\|h\|=1} d^+ g_\varepsilon(z_k,h) \geq -5\varepsilon.$$

结合（3.19）与 命题 3.1 可得 $\mathrm{Er} g_\varepsilon(\bar{x}) \leq 5\varepsilon \to 0^+$，这与 (iii) 矛盾，因为 ε 是任意的。证明完毕。□

注 3.2 根据 [45, 定义， 5], 条件 (3.16) 称为 f 在 $\bar{x}$ 附近的 ε-扰动。定理 3.3 表明，条件 $\inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x},h) \neq 0$ 是 f 在 $\bar{x}$ 附近所有 ε-扰动的局部误差界模一致有界的充分必要条件。此外，f 在扰动下的这种稳定性只要求考虑 f 在 $\bar{x}$ 附近的所有线性 ε-扰动。

以下推论可直接由定理 3.3得到。

推论 3.1 设 f 如（3.3）中所给定，且 $\bar{x} \in$ 边界（S_F）。则 $\inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x}, h) \neq 0$ 成立，当且仅当存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\inf\left\{\mathrm{Er} g(\bar{x}) : g \in \mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R}) \text{ satisfying } \bar{x} \in S_g \text{ and } (3.16)\right\} > 0.$$

推论 3.2 设 f 如（3.3）中所给定， $\bar{x} \in$ 边界（S_F）且 $\varepsilon > 0$。

(i) 以下不等式成立:

$$\inf\left\{\mathrm{Er} g(\bar{x}) : g \in \mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R}) \text{ satisfying } \bar{x} \in S_g \text{ and } (3.16)\right\} \geq \left|\inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x},h)\right| - \varepsilon.$$

(ii) 如果 $\inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x}, h) = 0$，则

$$\inf\left\{\mathrm{Er} g(\bar{x}) : g \in \mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R}) \text{ satisfying } \bar{x} \in S_g \text{ and } (3.16)\right\} = 0.$$

以下命题给出了连续凸函数 f 的全局误差界稳定性的原始判据。

定理 3.4 设 f 如 (3.3)所示。

(i) 若存在 $\tau \in (0,+\infty)$ 使得

$$\inf\left\{\left|\inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x},h)\right| : \bar{x} \in \mathrm{bdry}(S_f)\right\} \geq \tau, \tag{3.20}$$

则存在 c $\varepsilon \in (0,+\infty)$，使得对所有满足以下条件的 $g \in \mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$

$$S_f \subseteq S_g \text{ and } \mathrm{Lip}(f-g) < \varepsilon, \tag{3.21}$$

有 $\mathrm{Er} g \geq c$。

(ii) 如果存在 cε ∈(0,+∞)，使得对所有满足条件的 g ∈𝒞(𝕏,ℝ)，均有 Erg ≥c

$$\mathrm{bdry}(S_f)\cap g^{-1}(0)\neq\emptyset \ \ and \ \ \mathrm{Lip}(f-g)<\varepsilon, \tag{3.22}$$

则存在τ ∈(0, +∞) 使得(3.20) 成立

证明。注意到 f 连续，因此 bdry(Sf) ⊆f $^{-1}$(0)。

(i) 假设存在某个 $\bar{x}\in\mathrm{bdry}(S_f)$ 使得 $\inf_{\|h\|=1} d^+f(\bar{x},\ h)>0$。根据命题 3.2，下水平集$S_f$是单元素集，因此$S_f=\{\bar{x}\}$。这意味着，利用定理 3.3及其证明即可得到 (i) 中的结论。

接下来，我们假设对于所有 $\bar{x}\in$bdry(S$_f$)，都有 inf$_{\|h\|=1}$d$^+$f($\bar{x}$,h) ≤0。我们断言

$$\tau\mathbf{d}(x,S_f)\le[f(x)]_+,\ \ \forall x\in\mathbb{X}. \tag{3.23}$$

令 x ∈𝕏\S$_f$且充分小。取 x$_\nu$ ∈bdry(Sf) 使得

$$\|x-x_\nu\|<(1+\nu)\mathbf{d}(x,S_f). \tag{3.24}$$

由 命题 3.1 和（3.13），可得

$$\mathrm{Er}f(x_\nu)=\liminf_{u\to x_\nu,u\notin S_f}\Big(-\inf_{\|h\|=1}d^+f(u,h)\Big)\ge-\inf_{\|h\|=1}d^+f(x_\nu,h)\ge\tau.$$

于是存在 λ ∈(0, 1)，使得

$$\tau\le\frac{f(\lambda x_\nu+(1-\lambda)x)}{\mathbf{d}(\lambda x_\nu+(1-\lambda)x,S_f)}+\nu\le\frac{\lambda f(x_\nu)+(1-\lambda)f(x)}{\mathbf{d}(x,S_f)-\|\lambda x_\nu+(1-\lambda)x-x\|}+\nu,$$

并且由（3.24）可得

$$\tau\le\frac{(1-\lambda)f(x)}{(1-\lambda(1+\nu))\mathbf{d}(x,S_f)}+\nu=\frac{f(x)}{\mathbf{d}(x,S_f)}+\frac{\nu\lambda f(x)}{\mathbf{d}(x,S_f)}+\nu\to\frac{f(x)}{\mathbf{d}(x,S_f)}\ \text{as}\ \nu\to0^+.$$

这意味着（3.23）成立。

设 ε ∈(0,τ)和 $g\in\mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$ 满足（3.21）。任取满足 $x\in\mathbb{X}$的 $g(x)>0$。于是$f(x)>0$（根据 $S_f\subseteq Sg$）。

我们断言

$$\inf_{\|h\|=1}d^+f(x,h)\le-\tau. \tag{3.25}$$

由此可知，根据利普希茨常数$(f-g)<\varepsilon$ 在 (3.21) 中，有

$$\inf_{\|h\|=1}d^+g(x,h)\le\inf_{\|h\|=1}d^+f(x,h)+\varepsilon\le-(\tau-\varepsilon).$$

根据命题 3.2，可得 Erg ≥τ−ε。

还需证明 (3.25)。对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们可以取 $z_n\in$边界(S_f) 使得

$$\|x-z_n\|<(1+\frac{1}{n})\mathbf{d}(x,S_f).$$

于是，(3.23) 意味着

$$f(x)\ge\tau\mathbf{d}(x,S_f)>\frac{n}{n+1}\tau\|x-z_n\|.$$

对于任意 t ∈(0, 1)，有

$$f(x+t(z_n-x))\le tf(z_n)+(1-t)f(x),$$

因此

$$\frac{f(x+t(z_n-x))-f(x)}{t} \le -f(x) \le -\frac{n}{n+1}\tau\|x-z_n\|.$$

这意味着

$$\inf_{\|h\|=1} d^+f(x,h) \le d^+f\Big(x, \frac{z_n-x}{\|x-z_n\|}\Big) \le -\frac{n}{n+1}\tau.$$

因此

$$\inf_{\|h\|=1} d^+f(x,h) \le -\frac{n}{n+1}\tau.$$

令 $n\to\infty$，则有 (3.25) 成立。

(ii) 反设存在一个序列 $\{x_k\}\subseteq$ 边界(Sf)，使得

$$\alpha_k := \inf_{\|h\|=1} d^+f(x_k,h) \to 0^- \ \text{ as } k\to\infty.$$

令 $\varepsilon>0$ 并取充分大的 k，使得

$$\frac{3}{2}\alpha_k + \frac{\varepsilon}{2} > 0. \tag{3.26}$$

注意，对于任意 $x \neq x_k$，都有

$$\frac{f(x)-f(x_k)}{\|x-x_k\|} = \frac{f\big(x_k+\|x-x_k\|\cdot\frac{x-x_k}{\|x-x_k\|}\big)-f(x_k)}{\|x-x_k\|} \ge d^+f\Big(x_k, \frac{x-x_k}{\|x-x_k\|}\Big) \ge \alpha_k,$$

因此

$$f(x)-\alpha_k\|x-x_k\| \ge f(x_k), \ \ \forall x\in\mathbb{X}. \tag{3.27}$$

根据 α_k 的定义，存在 $h_k\in\mathbb{X}$ 使得

$$\|h_k\|=1 \ \text{ and } \ d^+f(x_k,h_k) < \alpha_k + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.28}$$

于是可以选取 $r_k\to 0^+$ （令 $k\to\infty$）使得

$$f(x_k+r_kh_k) < f(x_k) + (\alpha_k+\varepsilon)r_k. \tag{3.29}$$

这与（3.27）可推出

$$f(x_k+r_kh_k)-\alpha_k\|x_k+r_kh_k-x_k\| < \inf_{x\in X}(f(x)-\alpha_k\|x-x_k\|)+\varepsilon r_k.$$

应用 Ekeland变分原理（参见 [51]），存在 $y_k\in\mathbb{X}$ 使得

$$\|y_k-(x_k+r_kh_k)\| < \frac{r_k}{2}, f(y_k)-\alpha_k\|y_k-x_k\| \le f(x_k+r_kh_k)-\alpha_kr_k, \tag{3.30}$$

and

$$f(x)-\alpha_k\|x-x_k\|+2\varepsilon\|x-y_k\| > f(y_k)-\alpha_k\|y_k-x_k\|, \ \ \forall x: x\neq y_k. \tag{3.31}$$

Then

$$\|y_k-x_k\| > r_k-\frac{r_k}{2}=\frac{r_k}{2} \ \text{ and } \ \|y_k-x_k\| < r_k+\frac{r_k}{2}=\frac{3}{2}r_k,$$

因此，$y_k\neq x_k$。

对于任意 h_k，根据哈恩-巴拿赫定理，存在 $h_k^*\in\mathbb{X}^*$ 使得

$$\|h_k^*\|=1 \ \text{ and } \ \langle h_k^*, h_k\rangle = \|h_k\|.$$

我们考虑以下函数 g_ε:

$$g_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon\langle h_k^*, x - x_k\rangle \ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

于是 $g_\varepsilon \in \mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$。由（3.26）、（3.27）、（3.28）和（3.31），可得

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(y_k) = f(y_k) + \varepsilon\langle h_k^*, y_k - x_k\rangle &= f(y_k) + \varepsilon\langle h_k^*, y_k - (x_k + r_k h_k)\rangle + \varepsilon r_k \\ &\geq \alpha_k\|y_k - x_k\| - \varepsilon\|y_k - (x_k + r_k h_k)\| + \varepsilon r_k \\ &\geq \alpha_k \cdot \frac{3}{2} r_k + \frac{\varepsilon}{2} r_k > 0. \end{aligned}$$

若 $\inf_{\|h\|=1} d^+ g_\varepsilon(y_k, h) \geq 0$，则对任意 $x \neq y_k$，有

$$g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y_k) \geq d^+ g_\varepsilon\Big(y_k, \frac{x - y_k}{\|x - y_k\|}\Big)\|x - y_k\| \geq \inf_{\|h\|=1} d^+ g_\varepsilon(y_k, h)\|x - y_k\| \geq 0.$$

这与 $g_\varepsilon(y_k) > 0$ 一起意味着 $S_{g_\varepsilon} = \emptyset$，因此 $\mathrm{Er} g_\varepsilon = 0$，这与（ii）矛盾。

接下来，我们考虑 $\inf_{\|h\|=1} d^+ g_\varepsilon(y_k, h) < 0$。对于任意 $h \in \mathbb{X}$ 满足 $\|h\| = 1$ 以及任意 $t > 0$，由（3.31），可得

$$\begin{aligned} \frac{g_\varepsilon(y_k + th) - g_\varepsilon(y_k)}{t} &= \frac{f(y_k + th) - f(y_k)}{t} + \varepsilon\langle h_k^*, h\rangle \\ &\geq \frac{1}{t}\big(\alpha_k\|y_k + th - x_k\| - \alpha_k\|y_k - x_k\| - 2\varepsilon\|y_k + th - y_k\|\big) + \varepsilon\langle h_k^*, h\rangle \\ &\geq \alpha_k - 2\varepsilon - \varepsilon, \end{aligned}$$

因此

$$0 > \inf_{\|h\|=1} d^+ g_\varepsilon(y_k, h) \geq \alpha_k - 2\varepsilon - \varepsilon \geq -4\varepsilon.$$

应用 命题 3.1，可推出 $\mathrm{Er}(g_\varepsilon) \leq 4\varepsilon$，这与 (ii) 矛盾，因为 ε是任意的。证明完毕。□

以下推论可由 定理 3.4 的证明得到。

推论 3.3 设 f 如 (3.3) 中所给。则

$$\mathrm{Er} f \geq \inf\left\{\Big|\inf_{\|h\|=1} d^+ f(\bar{x}, h)\Big| : \bar{x} \in \mathrm{bdry}(S_f)\right\}. \tag{3.32}$$

注 3.3 定理 3.4 表明，条件 (3.20) 足以保证 (i) 中所述的 f 的全局误差界的稳定性，同时也是 (ii) 中所述的 f 的全局误差界稳定性的必要条件。然而，条件 (3.20) 对于 (ii) 中所述的全局误差界稳定性未必是充分的。例如，令 $\mathbb{X} := \mathbb{R}$ 且对所有 $(t, x) \in T \times \mathbb{R}$，$F(t, x) := e^x - 1$。则 $f(x) = e^x - 1$，$S_f = (-\infty, 0]$，$\mathrm{bdry}(S_f) = \{0\}$ 且 $|\inf_{\|h\|=1} d^+ f(0, h)| = 1 > 0$。令 $\varepsilon \in (0, +\infty)$，并考虑 $g_\varepsilon(x) := f(x) - \varepsilon x \ \forall x \in \mathbb{R}$。则可验证，$g_\varepsilon$ 有两个不同的零点 0 和 $\bar{x} < 0$。此外，可验证 $S_{g_\varepsilon} = [\bar{x}, 0]$，因此 $S_f \not\subseteq S_{g_\varepsilon}$。然而，对于任意 $x < \bar{x}$，有

$$\frac{g_\varepsilon(x)}{\mathbf{d}(x, S_{g_\varepsilon})} = \frac{e^x - 1 - \varepsilon x}{\bar{x} - x} \to \varepsilon \ \text{ as } x \to -\infty.$$

这意味着

$$\mathrm{Er} g_\varepsilon \leq 2\varepsilon,$$

因此，对于 f，(ii) 中所述的全局误差界稳定性不成立（因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的）。

下面的定理表明，3.20) 加上一个温和的约束条件，可以刻画 f 的全局误差界稳定性，如定理 3.4的 (ii) 所述。

定理 3.5 设 f 如 (3.3)。则以下命题等价:

(i) 存在 $\tau \in (0,+\infty)$ 使得 (3.20) 成立，且

$$\liminf_{k\to\infty}\left|\inf_{\|h\|=1} d^+f(z_k,h)\right| \geq \tau,\ \forall\{(z_k,x_k)\}\subseteq \mathrm{int}(S_f)\times \mathrm{bdry}(S_f)\ with\ \lim_{k\to\infty}\frac{f(z_k)-f(x_k)}{\|z_k-x_k\|}=0. \tag{3.33}$$

(ii) 存在 $c\varepsilon\in(0,+\infty)$，使得对所有满足 (3.22) 的 $g\in\mathscr{C}(T\times\mathbb{X},\mathbb{R})$，均有 $\mathrm{Erg}\geq c$；(iii) 存在 $c\varepsilon>0$，使得对于任意 $\bar{x}\in$边界(S f) 以及任意 $u^*\in\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*}$，均有 $\mathrm{Erg}_{u^*,\varepsilon}\geq c$，其中 $g_{u^*,\varepsilon}(\cdot):=f(\cdot)+\varepsilon\langle u^*,\cdot-\bar{x}\rangle$。

证明。 (i)⇒(ii)：若存在 $\bar{x}\in$边界(S_f) 使得 $\inf_{\|h\|=1} d^+f(\bar{x},h)>0$，则由 命题 3.2 以及定理 3.3 中 (i)⇒ (ii) 的证明定理 3.3可得结论。

接下来，我们考虑对所有 $\bar{x}\in$边界(S_f)，$\inf_{\|h\|=1} d^+f(\bar{x},h)\leq 0$。我们首先证明以下断言:

存在 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意 $x_0\in$边界(S_f)，都有

$$\inf\left\{\left|\inf_{\|h\|=1} d^+f(z_0,h)\right| : z_0\in\mathbb{X}, f(z_0)\geq -\varepsilon_0\|z_0-x_0\|\right\}\geq\tau. \tag{3.34}$$

反设存在 $\varepsilon_k\to 0^+$、$x_k\in$边界(S_f) 和 $z_k\in\mathbb{X}$，使得

$$f(z_k)\geq -\varepsilon_k\|z_k-x_k\| \ \text{ and }\ \left|\inf_{\|h\|=1} d^+f(z_k,h)\right|<\tau,\ \forall k. \tag{3.35}$$

那么，$f(z_k)\leq 0$ 对所有 k，否则，利用（3.25）的证明，可得

$$\left|\inf_{\|h\|=1} d^+f(z_k,h)\right|>\tau,$$

这与（3.35）矛盾。

由（3.20），有 $z_k\in S_f\backslash$边界(S_f)，于是（3.35）推出

$$0\geq\frac{f(z_k)-f(x_k)}{\|z_k-x_k\|}=\frac{f(z_k)}{\|z_k-x_k\|}\geq-\varepsilon_k.$$

由（3.33），可得

$$\liminf_{k\to\infty}\left|\inf_{\|h\|=1} d^+f(z_k,h)\right|>\tau,$$

这与（3.35）矛盾。因此该断言成立。

设 $\varepsilon>0$ 使得 $\varepsilon<\min\{\varepsilon_0,\tau\}$，并令 $g\in\mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$ 满足（3.22）。任取$\bar{x}\in\in$边界$(S_f)\cap g^{-1}(0)$。那么，对于任意满足 $g(x)>0$ 的 $x\in\mathbb{X}$，有

$$f(x)\geq g(x)+(f(\bar{x})-g(\bar{x}))-\varepsilon\|x-\bar{x}\|>-\varepsilon\|x-\bar{x}\|.$$

由（3.34），有

$$\inf_{\|h\|=1} d^+f(x,h)<-\tau,$$

因此

$$\inf_{\|h\|=1} d^+g(x,h)<\inf_{\|h\|=1} d^+f(x,h)+\varepsilon<-(\tau-\varepsilon).$$

那么 命题 3.2 推出 $\mathrm{Er}g\geq\tau-\varepsilon$。

注意，(ii)⇒(iii) 可直接得出，接下来只需证明 (iii)⇒(i)。

反设 (i) 中的结论不成立。根据定理 3.4 及其证明，只需假设对任意 $\tau>0$，(3.33) 均不成立。于是，存在 $(z_k, x_k) \in \mathrm{int}(S_f) \times \mathrm{bdry}(S_f)$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)-f(x_k)}{\|z_k-x_k\|}=0 \ \text{ and } \ \alpha_k := \inf_{\|h\|=1} d^+f(z_k,h) \to 0^- \ \text{ as } k\to\infty. \tag{3.36}$$

设 $\varepsilon>0$。对任意 k，由哈恩-巴拿赫定理，存在 $h_k^* \in \mathbb{X}^*$，使得

$$\|h_k^*\|=1 \ \text{ and } \ \langle h_k^*, z_k-x_k\rangle = \|z_k-x_k\|.$$

那么，当 k 充分大时，有

$$\alpha_k+\varepsilon>0 \ \text{ and } \ \frac{f(z_k)-f(x_k)}{\|z_k-x_k\|}+\varepsilon\left\langle h_k^*, \frac{z_k-x_k}{\|z_k-x_k\|}\right\rangle>0. \tag{3.37}$$

考虑函数 $g_{k,\varepsilon}$，定义如下：

$$g_{k,\varepsilon}(x) := f(x)+\varepsilon\langle h_k^*, x-x_k\rangle \ \ \forall x\in\mathbb{X}.$$

于是 $g_{k,\varepsilon}\in\mathscr{C}(\mathbb{X},\mathbb{R})$，由式 (3.37) 可得

$$g_{k,\varepsilon}(z_k)=f(z_k)+\varepsilon\langle h_k^*, z_k-x_k\rangle>0.$$

Thus

$$0>\inf_{\|h\|=1} d^+g_{k,\varepsilon}(z_k,h)\ge \inf_{\|h\|=1} d^+f(z_k,h)-\varepsilon=\alpha_k-\varepsilon>-2\varepsilon.$$

应用 命题 3.1 可得 $\mathrm{Erg}_{k,\ \varepsilon}\le 2\varepsilon$，这与 (iii) 矛盾，因为 $\varepsilon>0$ 是任意的。证明完毕。□

注 3.4 需要指出的是，如果条件 (3.33) 被违反，f 在定理 3.5中的全局误差界的稳定性可能不成立。再次考虑注 3.3中给出的例子。则$f(x)=e^x-1$，$S_f=(-\infty,\ 0]$，边界$(S_f)=\{0\}$，且定理 3.5 中的全局误差界稳定性不成立。此外，对任意$z_k\to-\infty$，可以验证

$$\left|\inf_{|h|=1} d^+f(z_k,h)\right| = e^{z_k}\to 0 \ \text{ as } k\to\infty,$$

这意味着 (3.33) 不成立。 □

3.2 定理 3.1 和3.2的证明

本小节将证明定理 3.1 和3.2。我们首先证明定理 3.1 .

证明定理 3.1 应用 [52, 定理 4.2。3]（或 [53, 命题 4.5。2]），对于任意$x\in\mathbb{X}$，有

$$d^+f(x,h)=\sup_{t\in T_f(x)} d^+f_t(x,h), \ \ \forall h\in\mathbb{X}. \tag{3.38}$$

记

$$\gamma := \inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in T_f(\bar{x})} d^+f_t(\bar{x},h).$$

(i)⇒(ii)：我们首先考虑 $\gamma>0$ 的情形。根据命题 3.2，可得 $S_F=\{\bar{x}\}$。令$\varepsilon>0$满足 $\varepsilon<\gamma$，并取 $c:=\gamma-\varepsilon>0$。假设 G、g_t，且 g 满足 (ii) 的所有条件。那么对于任意 $t\in T_f(\bar{x})\subseteq T_g(\bar{x})$，有

$$d^+g_t(\bar{x},h)\geq d^+f_t(\bar{x},h)-\varepsilon.$$

利用（3.38）和 $T_f(\bar{x})\subseteq T_g(\bar{x})$，可得

$$\begin{aligned}\inf_{\|h\|=1}d^+g(\bar{x},h)=\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in T_g(\bar{x})}d^+g_t(\bar{x},h)&\geq\inf_{\|h\|=1}\sup_{i\in T_f(\bar{x})}d^+g_t(\bar{x},h)\\&\geq\Big(\inf_{\|h\|=1}\sup_{i\in T_f(\bar{x})}d^+f_t(\bar{x},h)\Big)-\varepsilon\\&=\inf_{\|h\|=1}d^+f(\bar{x},h)-\varepsilon=c>0.\end{aligned}$$

利用 命题 3.2，可得

$$\mathrm{Er}G(\bar{x})=\mathrm{Er}g(\bar{x})\geq c.$$

接下来考虑 $\gamma<0$ 的情形。设 $\varepsilon>0$ 满足 $c:=-\gamma-\varepsilon>0$。那么对于任意 $t\in T_g(\bar{x})\subseteq T_f(\bar{x})$，有

$$d^+g_t(\bar{x},h)\leq d^+f_t(\bar{x},h)+\varepsilon.$$

由此以及 $T_g(\bar{x})\subseteq T_f(\bar{x})$，可得

$$\begin{aligned}\inf_{\|h\|=1}d^+g(\bar{x},h)=\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in T_g(\bar{x})}d^+g_t(\bar{x},h)&\leq\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in T_g(\bar{x})}(d^+f_t(\bar{x},h)+\varepsilon)\\&\leq\Big(\inf_{\|h\|=1}\sup_{i\in T_f(\bar{x})}d^+f_t(\bar{x},h)\Big)+\varepsilon\\&=\inf_{\|h\|=1}d^+f(\bar{x},h)+\varepsilon=-c<0.\end{aligned}$$

利用 命题 3.2，可得

$$\mathrm{Er}G(\bar{x})=\mathrm{Er}g(\bar{x})\geq c.$$

注意，(ii)⇒(iii) 由 $T_f(\bar{x})=T_g(\bar{x})$ 立即可得。因此，只需证明 (iii)⇒(i)。

设 $u^*\in\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*}$和 $G_{u^*}\in\mathscr{C}(T\times\mathbb{X},\mathbb{R})$ 如（3.6）中所给定。注意到

$$g_t(x)=G_{u^*}(t,x)=f_t(x)+\varepsilon\langle u^*,x-\bar{x}\rangle,$$

因此

$$g(x)=\sup_{t\in T}g_t(x)=\sup_{t\in T}(f_t(x)+\varepsilon\langle u^*,x-\bar{x}\rangle)=f(x)+\varepsilon\langle u^*,x-\bar{x}\rangle.$$

利用（iii）中的证明⇒（i）和定理 3.3，即可得出结论。证明完毕 e. □

定理 3.2 的证明 (i)⇒(ii)：根据命题 3.2 和定理 3.1的证明，我们只需考虑 $\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in T_f(\bar{x})}d^+f_t(\bar{x},h)\leq 0$对所有 $\bar{x}\in\mathrm{bdry}(S_F)$ 均成立的情形。

利用（3.34）中断言的证明，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任意 $x_0\in\mathrm{bdry}(S_F)$，有

$$\inf\left\{\Big|\inf_{\|h\|=1}d^+f(x,h)\Big|:x\in\mathbb{X},f(x)\geq-\varepsilon_0\|x-x_0\|\right\}\geq\tau.\tag{3.39}$$

令 $\varepsilon>0$ 满足 $\varepsilon<\min\{\varepsilon_0,\tau\}$。假设 G、$g_t$ 和 g 满足 (ii) 中的所有条件。令 $\bar{x}\in\mathbb{X}$ 满足 $g(\bar{x})>0$。

我们断言

$$\inf_{\|h\|=1} d^+ f(x,h) \le -\tau. \tag{3.40}$$

由此，利用 $\sup_{t\in T}$利普希茨常数($f_t - g_t) < \varepsilon$ and $T_g(x) \subseteq T_f(x)$，可得

$$\begin{aligned}
\inf_{\|h\|=1} d^+ g(x,h) = \inf_{\|h\|=1} \Big(\sup_{t\in T_g(x)} d^+ g_t(x,h) \Big) &\le \inf_{\|h\|=1} \Big(\sup_{t\in T_g(x)} d^+ f_t(x,h) + \varepsilon \Big) \\
&\le \inf_{\|h\|=1} \Big(\sup_{t\in T_f(x)} d^+ f_t(x,h) \Big) + \varepsilon \\
&= \inf_{\|h\|=1} d^+ f(x,h) + \varepsilon \\
&\le -(\tau - \varepsilon).
\end{aligned}$$

应用命题 3.2，得到 $\mathrm{Er}G = \mathrm{Er}g \ge \tau - \varepsilon$。

下面证明 (3.40)。若$f(x) > 0$，则利用 (3.25) 的证明即可得到 (3.25)。接下来考虑$f(x) \le 0$的情形。

由 (ii) 中的条件，存在 $z_0 \in \mathrm{bdry}(S_F)$，使得

$$f_t(z_0) = g_t(z_0), \ \forall t \in T.$$

那么，对任意 $t \in T_g(x) \subseteq T_f(x)$，有

$$f_t(x) \ge g_t(x) - (f_t(z_0) - g_t(z_0)) - \varepsilon\|x - z_0\| = g(x) - \varepsilon\|x - z_0\| > -\varepsilon\|x - z_0\|.$$

这意味着 $f(x) > -\varepsilon_0\|x - z_0\|$，因此由（3.39）可得（3.40）成立。

注意到，由于对所有 $x \in \mathbb{X}$ 都有 $T_f(x) = T_g(x)$，(ii)⇒(iii) 可立即得出。接下来只需证明 (iii) ⇒ (i)。

任取 $\bar{x} \in$边界(S_F)以及任意 $u^* \in \mathbb{B}_{\mathbb{X}^*}$，并令 $G \in \mathscr{C}(T \times \mathbb{X}, \mathbb{R})$按（3.9）定义。注意到

$$g_t(x) = G(t,x) = f_t(x) + \varepsilon\langle u^*, x - \bar{x}\rangle,$$

因此

$$g(x) = \sup_{t\in T} g_t(x) = \sup_{t\in T}(f_t(x) + \varepsilon\langle u^*, x - \bar{x}\rangle) = f(x) + \varepsilon\langle u^*, x - \bar{x}\rangle.$$

因此，由证明 ⇒定理 3.5.中的 (iii)⇒(i) 可得结论。证明完毕。

□

4 半无限线性系统的 Hoffman 常数灵敏度分析

本节利用上一节的结果，研究巴拿赫空间中半无限线性系统的 Hoffman 常数的灵敏度分析。我们的目的是给出原始判据，以判断问题数据发生扰动时 Hoffman 常数是否一致有界。

设 T 是一个紧致且可能为无限的度量空间（度量为 ρ），且 $a^* : T \to \mathbb{X}^*, b : T \to \mathbb{R}$ 是 T 上的连续函数。现在我们考虑由以下条件定义的 $\mathbb{X}$ 中的半无限线性系统

$$\langle a^*(t), x\rangle \le b(t), \ \text{for all } t \in T. \tag{4.1}$$

记$\mathscr{S}_{a^*,\ b}$为系统（4.1）的解集。我们使用以下记号：

$$\begin{aligned}
f_{a^*,b}(x) &:= \max_{t\in T}(\langle a^*(t), x\rangle - b(t)), \\
J_{a^*,b}(x) &:= \{t \in T : \langle a^*(t), x\rangle - b(t)) = f_{a^*,b}(x)\} \ \text{ for each } x \in \mathbb{X}.
\end{aligned}$$

容易验证，对于每个 x ∈ 𝕏，J$_{a^*,\ b}$(x) 是 T 的紧子集。

回顾一下，若存在 σ > 0 使得 $\mathscr{S}_{a^*,\ b}$ 满足全局误差界，

$$\sigma \mathbf{d}(x, \mathscr{S}_{a^*,b}) \le [f_{a^*,b}(x)]_+, \text{ for all } x \in \mathbb{X}. \tag{4.2}$$

半无限线性系统（4.1）的霍夫曼常数记为 σ（a^*，b），其定义如下：

$$\sigma(a^*,b) := \sup\{\sigma > 0 : \text{such that (4.2) holds}\}. \tag{4.3}$$

容易验证，

$$\sigma(a^*,b) = \inf_{x \notin \mathscr{S}_{a^*,b}} \frac{f_{a^*,b}(x)}{\mathbf{d}(x, \mathscr{S}_{a^*,b})}.$$

注意，

$$\mathscr{S}_{a^*,b} = \text{int}(\mathscr{S}_{a^*,b}) \cup \text{bdry}(\mathscr{S}_{a^*,b}).$$

我们首先通过以下命题刻画 $\mathscr{S}_{a^*,\ b}$ 的内部和边界。

命题 4.1 设由下式定义半无限线性系统 (4.1)。则

$$\text{int}(\mathscr{S}_{a^*,b}) = \{x \in \mathscr{S}_{a^*,b} : \langle a^*(t), x\rangle < b(t) \ \ for\ all\ t \in T\}. \tag{4.4}$$

因此，x ∈bdry($\mathscr{S}_{a^*,\ }$b) 当且仅当 x∈ $\mathscr{S}_{a^*,\ }$b，并且存在某个非空紧子集 J$_x$ ⊆ T，使得

$$\langle a^*(t), x\rangle = b(t), \forall t \in J_x \ \ and \ \ \langle a^*(t), x\rangle < b(t), \forall t \in T \backslash J_x. \tag{4.5}$$

证明。设 ¯x ∈int($\mathscr{S}_{a^*,\ b}$)。则存在 δ > 0使得 B(¯x δ) ⊆ $\mathscr{S}_{a^*,\ b}$。

反设存在某个 t ∈ T，使得

$$\langle a^*(t), \bar{x}\rangle = b(t).$$

取 u$_t$ ∈ 𝕏使得 ‖u$_t$‖ = 1且 ⟨a*(t)，u$_t$⟩ > 0。则对于任意 r ∈(0,δ)，有

$$\langle a^*(t), \bar{x} + ru_t\rangle > b(t)$$

这与 ¯x + ru$_t$ ∈B(¯x δ) ⊆ $\mathscr{S}_{a^*,\ b}$ 矛盾。

另一方面，设 ¯x ∈ $\mathscr{S}_{a^*,b}$ 使得对于所有 t ∈ T，都有 ⟨a*(t) ¯x⟩ < b(t)。对于任意 t ∈ T，根据 a* 和 b 的连续性，存在 δ$_t$ > 0 使得

$$\langle a^*(s), x\rangle \le b(s), \ \ \forall x \in \mathbf{B}(\bar{x}, \delta_t) \text{ and } \forall s \in \mathbf{B}_\rho(t, \delta_t) := \{t' \in T : \rho(t', t) < \delta_t\}. \tag{4.6}$$

利用 T 的紧致性，存在 t1、⋯、t$_m$ ∈T，使得

$$T \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{B}_\rho(t_i, \frac{\delta_{t_i}}{2}). \tag{4.7}$$

令 δ :=min{$\frac{\delta_1}{2}$,⋯, $\frac{\delta_{\ }}{2}$}。我们断言

$$\mathbf{B}(\bar{x}, \delta) \subseteq \mathscr{S}_{a^*,b}.$$

事实上，对于任意 x ∈B(¯x δ) 以及任意 s ∈T，根据 (4.7)，存在 j ∈ {1,⋯,m} 使得 s ∈$\mathbb{B}_\rho$(t$_i$, δtj 2)。注意到 x ∈B(¯xδ) ⊆B(¯xδ$_{t_j}$)，由 (4.6) 可得

$$\langle a^*(s), x\rangle \le b(s).$$

这意味着该断言成立。证明完毕。 □

以下定理给出了在问题数据受到扰动时，系统（4.1）的霍夫曼常数的原始判据。

定理4.1 考虑以下陈述:

(a) 假设

$$\inf\left\{\left|\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in J}\langle a^*(t),h\rangle\right| : J\subseteq T \text{ is compact}\right\}>0. \tag{4.8}$$

~则存在 c $\varepsilon>0$，使得对于所有 ~x $\in$ 边界($\mathscr{S}_{a^*}$, b) 和 ~u$^*\in\mathbb{B}_{\mathbb{X}^*}$，都有 σ(~a*, b) $\geq$c，~其中 ~a* : T $\to\mathbb{X}^*$ 和 b : T $\to\mathbb{R}$ 定义如下:

$$\widetilde{a}^*(t):=a^*(t)+\varepsilon\widetilde{u}^* \text{ and } \widetilde{b}(t):=b(t)+\varepsilon\langle\widetilde{u}^*,\widetilde{x}\rangle \text{ for all } t\in T. \tag{4.9}$$

此外，Hoffman 常数 σ(a*, b) 满足以下不等式:

$$\sigma(a^*,b)\geq\inf\left\{\left|\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in J}\langle a^*(t),h\rangle\right| : J\subseteq T \text{ is compact}\right\}. \tag{4.10}$$

(b) 假设存在一个序列 {x$_k$} $\subseteq$ 边界($\mathscr{S}_{a^*}$, b)，使得

$$\inf_{k\geq1}\left|\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in J_{a^*,b}(x_k)}\langle a^*(t),h\rangle\right|=0. \tag{4.11}$$

那么对于任意 $\varepsilon>0$，存在 x$_\varepsilon\in$ 边界($\mathscr{S}_{a^*}$, b) 和 u$^*_\varepsilon\in\mathbb{X}^*$，满足 $\|u^*_\varepsilon\|\leq\varepsilon$，使得 σ(a$^*_\varepsilon$, b$_\varepsilon$) <ε，其中 a$^*_\varepsilon$(t): =a*(t) +u$^*_\varepsilon$，以及 b$_\varepsilon$(t): =b(t) +⟨u$^*_\varepsilon$，x$_\varepsilon$⟩对所有 t $\in$T 均成立。

证明。记

$$\tau:=\inf\left\{\left|\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in J}\langle a^*(t),h\rangle\right| : J\subseteq T \text{ is compact}\right\}>0.$$

设 F : T $\times\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$F(t,x):=\langle a^*(t),x\rangle-b(t),\ \forall(t,x)\in T\times\mathbb{X},$$

并令 $f_t(x):=F(t,x)$ 对所有 $(t,x)\in T\times\mathbb{X}$ 且 f 在（3.3）中给出。于是 f =f$_{a^*,b}$, F $\in\mathscr{C}$(T $\times\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$)，且每个 f$_t$ 都是凸函数。

(a) 首先证明 f$_t$, f 和 τ满足 定理 3.2 中（3.7）和（3.8）给出的假设。事实上，对每个 x $\in\mathscr{S}_{a^*,b}$，J$_{a^*,b}$(x) 都是 T 的紧子集，因此

$$\inf\left\{\left|\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in J_{a^*,b}(x)}\langle a^*(t),h\rangle\right| : x\in\mathscr{S}_{a^*,b}\right\}\geq\tau.$$

注意到

$$\inf_{\|h\|=1}d^+f(x,h)=\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in T_f(x)}d^+f_t(x,h)=\inf_{\|h\|=1}\sup_{t\in J_{a^*,b}(x)}\langle a^*(t),h\rangle$$

由（4.8）可知 f_t,f和 τ 满足（3.7）和（3.8）中的假设。

根据 定理 3.2 中 (i) 与 (iii) 的等价性，可得结论。

下面证明 (4.10)。利用 ⇒定理 3.2 中 (i)⇒(ii) 的证明，对于任意充分小的 $\varepsilon\in(0,\tau)$，定理 3.2 中给出的 (ii) 对 c： =τ −ε成立，由此可得

$$\sigma(a^*,b)\geq c=\tau-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$，即可得到 (4.10)。

(b) 假设存在一个序列 $\{x_k\}\subseteq$ 边界($\mathscr{S}_{a^*,b}$) 使得 (4.11) 成立。于是，利用 ⇒定理 3.2 中 (iii)⇒(i) 的证明，可得结论。证明完毕。□

作为定理 4.1的应用，我们给出一个例子，在该例子中可以验证所给线性系统的霍夫曼常数具有一致有界性。

例4.1 设 $\mathbb{X}:=\mathbb{R}^2$，$\mathrm{T}:=\{1,2,3\}$，设 $\mathrm{a}^*:\mathrm{T}\to\mathbb{R}^2$，$\mathrm{b}:\mathrm{T}\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$a^*(1):=(1,1),a^*(2):=(-2,1),a^*(3):=(1,-2),b(1):=1,b(2):=2,b(3):=2.$$

考虑以下线性系统：

$$\langle a^*(t),x\rangle\le b(t),\ \ t\in T. \tag{4.12}$$

取 $\mathrm{J}_1:=\{1,2\}$, $\mathrm{J}_2:=\{2,3\}$, $\mathrm{J}_3:=\{1,3\}$,$\mathrm{J}_4:=\{1,2,3\}$。考虑以下四个极小极大优化问题：

$$OP(J_k)\quad \min_{\|h\|=1}\max_{t\in J_k}\langle a^*(t),h\rangle, k=1,2,3,4. \tag{4.13}$$

对于每个 k，我们分别用 θ_k 和 h_k 表示 $\mathrm{OP}(\mathrm{J}_k)$ 的最优值和最优解。求解这四个问题可得

$$\theta_1=-1,h_1=(0,-1);\theta_2=-\frac{\sqrt{2}}{2},h_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2});$$
$$\theta_3=-1,h_3=(-1,0);\theta_4=\sqrt{2},h_4=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

这意味着

$$\min\left\{\left|\min_{\|h\|=1}\max_{t\in J}\langle a^*(t),h\rangle\right|:J\subseteq T\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0,$$

进而定理4.1 意味着，系统（$\sigma(\cdot)$）的霍夫曼常数（4.12）在问题数据 (a^*,b)的扰动下是一致有界的。

最后，我们说明，如果 4.8 中的条件被违反，则 定理4.1 中关于霍夫曼常数的一致有界性可能不成立。

例4.2 令 $\mathbb{X}:=\mathbb{R}^2$，$\mathrm{T}:=\{1,2\}$，并令 $\mathrm{a}^*:\mathrm{T}\to\mathbb{R}^2$，$\mathrm{b}:\mathrm{T}\to\mathbb{R}$ 按如下方式定义：

$$a^*(1):=(1,1),a^*(2):=(-1,-1),b(1)=b(2):=0.$$

考虑以下线性系统：

$$\langle a^*(t),x\rangle\le b(t),\ \ t\in T. \tag{4.14}$$

则 $\mathscr{S}(\mathrm{a}^*,\mathrm{b})=\{\mathrm{x}=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\in\mathbb{R}^2:\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2=0\}$。注意到

$$\min_{\|h\|=1}\max_{t\in T}\langle a^*(t),h\rangle=0$$

因此，根据 定理4.1，系统（4.14）的霍夫曼常数在问题数据 （a^*，b）的扰动下并非一致有界。

事实上，对于任意 $\varepsilon>0$，选取 $\mathrm{u}_\varepsilon^*:=(0,\varepsilon)$，$\mathrm{x}_\varepsilon:=(0,0)$，并定义 $\mathrm{a}_\varepsilon^*(\mathrm{t}):=\mathrm{a}^*(\mathrm{t})+\mathrm{u}_\varepsilon^*$，$\mathrm{b}_\varepsilon(\mathrm{t}):=\mathrm{b}(\mathrm{t})$，其中 t = 1，2。于是 $\mathrm{f}_{a_\varepsilon^*,\,b_\varepsilon}(\mathrm{x}):=\max\{\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\varepsilon\mathrm{x}2,-\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2+\varepsilon\mathrm{x}_2\}$对所有 $\mathrm{x}=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\in\mathbb{R}^2$均成立，并且

$$\mathscr{S}(a_\varepsilon^*,b_\varepsilon)=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_1+(1+\varepsilon)x_2\le 0,x_1+(1-\varepsilon)x_2\ge 0\}.$$

取 $\mathrm{u}_\varepsilon:=(-\varepsilon,\varepsilon)$，因此

$$\frac{f_{a_\varepsilon^*,b_\varepsilon}(u_\varepsilon)}{\mathbf{d}(u_\varepsilon,\mathscr{S}(a_\varepsilon^*,b_\varepsilon))}=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

这意味着 $\sigma(\mathrm{a}_\varepsilon^*,\mathrm{b}_\varepsilon)<\varepsilon$。

5 总结与展望

本文致力于研究巴拿赫空间中半无限凸约束系统的局部和全局误差界的稳定性。我们利用方向导数建立了误差界稳定性的原始刻画。研究证明，验证半无限凸约束系统的误差界稳定性，等价于求解若干由分量函数的方向导数定义的极小极大问题。问题数据发生扰动时的稳定性只要求所有分量函数具有相同的线性扰动。将这些稳定性结果应用于半无限线性系统的 Hoffman 常数的灵敏度分析，可得到确保 Hoffman 常数一致有界的条件。

未来，我们计划研究这些结果在变分问题灵敏度分析和计算算法收敛性分析中的应用。我们还将考虑由非凸函数定义的不等式系统的误差界稳定性的原始判据。

参考文献

1. 标准，49:263–265，1972。2. S. M. Robinson. 线性空间中凸规划误差界的一个应用。SIAM 控制期刊，13:271–273，1975。3. O. L. Mangasarian. 可微凸不等式的一个条件数。数学运筹研究，10 179，1985 2 175( ): – . 4. A. Auslender 和 J.-P. Crouzeix. 全局正则性定理。数学运筹研究，13(2):243–253，1988。5. J S. Pang. 数学规划中的误差界。第79卷，第299–332页。1997。数学规划讲义（ismp97）（洛桑，1997）。6. A. S. Lewis 和 J S. Pang. 凸不等式系统的误差界。载于《广义凸性、广义单调性：最新成果》（吕米尼，1996），非凸优化及其应用第27卷，第75–110页。克吕韦尔学术出版社，多德雷赫特，1998。7. D. Klatte 和 W. Li. 凸不等式的渐近约束资格条件与全局误差界。数学规划，84(1, Ser. A):137–160，1999。8. A. J ourani. 勘误：“Hoffman 误差界、局部可控性与灵敏度分析” [SIAM 控制与优化期刊，38 (2000)，第3期，947–970；MR1756902 (2001d:49039)]。SIAM 控制与优化期刊，39(5):1650，2000。9. M. Abbasi 和 M. Th´era. 映射的强正则点。不动点理论、算法与科学工程，第14篇论文，13页，2021。10. M. Abbasi 和 M. Th´era. 关于可度量化拓扑向量空间中的误差界。集值变分分析，30(4):1291–1311，2022。11. A. D. Ioffe. 正则映射的变分分析。施普林格数学专著。施普林格，查姆，2017。理论与应用。12. S. M. Robinson. 扰动线性规划解集的误差界。线性代数及其应用，6 81，1973 69: – . 13. S. M. Robinson. 线性规划中稳定性的一种刻画。运筹学，25(3):435–447，1977。14. O. G¨uler. 线性规划的增广拉格朗日算法。优化理论与应用期刊，75(3):445–470，1992。15. D. R. Hesse, R.and Luke. 可行性问题基本算法的非凸正则性概念与收敛性。SIAM 优化期刊，23(4):2397–2419，2013。16. A. N. Iusem 和 A. R. De Pierro. 关于 Hildreth 二次规划算法的收敛性质。数学规划，47(1, (Ser. A)):37–51，1990。17. Z-Q. Luo 和 P. Tseng. 关于一类单调仿射变分不等式问题的全局误差界。运筹学快报，11(3):159–165，1992。18. P. Tseng 和 D. P. Bertsekas. 关于凸规划指数乘子法的收敛性。数学规划，60(1, Ser. A):1–19，1993。19. H. H. Bauschke 和 J. M. Borwein. 关于求解凸可行性问题的投影算法。SIAM 评论，38(3):367–426，1996。20. A. Beck 和 M. Teboulle. 凸可行性问题中投影算法的收敛速度分析与误差界。第18卷，第377–394页。2003。第二届日中优化会议，第二部分（京都，2002）。21. E.M. Bednarczuk 和 A.Y. Kruger. 向量值函数误差界的充要条件。非线性分析，75(3):1124–1140，2012。22. J. V. Burke 和 S. Deng. 弱尖锐极小值再探。I. 基本理论。控制与控制论，31(3):439–469，2002。《优化及相关主题中的适定性》（华沙，2001）。

23. P. L. Combettes. 希尔伯特空间凸可行性问题：投影方法的收敛性。应用数学与优化，35(3):311–330，1997。24. D. Az´e. 下半连续函数误差界综述。载于《2003年 MODE-SMAI 会议论文集》，ESAIM 会议论文集第13卷，第1–17页。EDP Sci.，莱于利，2003。25. D. Az´e. 多值函数度量正则性的一种统一理论。凸分析杂志，13(2):225–252，2006。26. D. Az´e 和 J-N. Corvellec. 度量空间中下半连续函数误差界的刻画。ESAIM 控制、优化与变分法，10(3):409–425，2004。27. M. J. C´anovas, A.Y. Kruger, M. A. L´opez, J. Parra, 和 M. A. Th´era. 线性半无限规划的平静模。SIAM 优化期刊，24(1):29–48，2014。28. J-N. Corvellec 和 V. V. Motreanu. 度量空间中下半连续函数的非线性误差界。数学规划，114(2, Ser. A):291–319，2008。29. A. L. Dontchev, A. S. Lewis, 和 R. T. Rockafellar. 度量正则性半径。美国数学会汇刊，355(2):493–517，2003。30. M. J. Fabian, R. Henrion, A.Y. Kruger, 和 J.V. Outrata. 误差界：充要条件。集值变分分析，18(2):121–149，2010。31. A. D. Ioffe. 度量正则性综述（第一部分）：理论。澳大利亚数学会杂志，101(2):188–243，2016。32. A. D. Ioffe. 度量正则性综述（第二部分）：应用。澳大利亚数学会杂志，101(3):376–417，2016。33. A.Y. Kruger. 误差界与度量次正则性。优化，64(1):49–79，2015。34. D. R. Luke, Nguyen H. Thao, 和 M.K. Tam. 希尔伯特空间中皮卡迭代的隐式误差界。越南数学杂志，46(2):243–258，2018。35. K. F. Ng 和 X.Y. Zheng. 赋范空间中下半连续函数的误差界。SIAM 优化期刊，12(1):1–17，2001。36. Huynh Van Ngai 和 M. Th´era. 阿斯普伦德空间中下半连续函数系统的误差界。数学规划，Ser. B，116(1-2):397–427，2009。37. J-P. Penot. 无导数微积分，数学研究生教材第266卷。施普林格，纽约，2013。38. Z. Wu 和 J. J. Ye. 关于下半连续函数的误差界。数学规划，92 314，2002 2, 301 (Ser. A): – . 39. Z. Wei, M. Th´era, 和 J-C. Yao. 复合凸不等式误差界的原始刻画。凸分析杂志，30(2):XX，2023。40. J.-C. Yao 和 X. Y. Zheng. 关于容许函数的误差界与适定性。应用分析，95(5):1070–1087，2016。41. Z-Q. Luo 和 P. Tseng. 线性系统条件数的扰动分析。SIAM 矩阵分析与应用杂志，15(2):636–660，1994。42. S. Deng. 凸不等式系统条件数的扰动分析及解析系统的全局误差界。数学规划，83(2, Ser. A):263–276，1998。43. D. Az´e 和 J.-N. Corvellec. 线性不等式系统霍夫曼常数的灵敏度分析。SIAM 优化期刊，12(4):913–927，2002。44. Huynh Van Ngai, A. Y. Kruger, 和 M. Th´era. 半无限凸约束系统误差界的稳定性。SIAM 优化期刊，20(4):2080–2096，2010。45. A. Y. Kruger, Huynh Van Ngai., 和 M. Th´era. 巴拿赫空间中凸约束系统误差界的稳定性。SIAM 优化期刊，20(6):3280–3296，2010。46. X. Y. Zheng 和 Z. Wei. 准次光滑不等式与半无限约束系统误差界的扰动分析。SIAM 优化期刊，22(1):41–65，2012。47. A. Y. Kruger, M. A. L´opez, 和 M. A. Th´era. 误差界的扰动。数学规划，168(1-2, Ser. B):533–554，2018。48. Z. Wei, M. Th´era, 和 J-C. Yao. 凸不等式约束系统误差界稳定性的刻画。开放数学优化杂志，3:第2号论文，17页，2022。49. R. R. Phelps. 凸函数、单调算子与可微性，数学讲义第1364卷。施普林格出版社，柏林，第二版，1993。50. W. Rudin. 泛函分析。纯粹与应用数学国际丛书。麦格劳-希尔公司，纽约，第二版，1991。51. I. Ekeland. 关于变分原理。数学分析与应用杂志，47:324–353，1974。52. A. D. Ioffe 和 V. M. Tihomirov. 极值问题理论，数学及其应用研究第6卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1979。Karol Makowski 从俄文译出。53. W. Schirotzek. 非光滑分析。大学教材丛书。施普林格，柏林，2007。