arXiv:2302.02282v1 [math.OA] 5 Feb 2023

冯·诺伊曼代数中保持量子 Rényi 熵的映射

ANDRZEJ ŁUCZAK、HANNA PODS ̨EDKOWSKA 和 RAFAŁ WIECZOREK

摘要。我们研究这样一种情形：在半有限冯·诺伊曼代数上保持迹不变的正规正线性幺映射，不改变正规态的密度所具有的某个固定量子 Rényi 熵。我们还证明，这种映射不改变任意密度的熵，当且仅当它是该代数上的 Jordan *-同构。

引言

本文研究半有限冯·诺伊曼代数的情形，探讨正规正线性幺映射 Φ 作用下密度的量子 Rényi 熵是否保持不变。这可以看作对 [2] 中研究工作的后续；该文分析了 Segal 熵的这一问题。有趣的是，对于 Segal 熵和任意一种 Rényi 熵这两种情形，答案都相同，即，Φ 在密度算子生成的代数上的限制是 *-同构。本文还考察了对每个密度，Rényi 熵是否都保持不变；结果表明，当且仅当 Φ 是该代数上的 Jordan *-同构时，这一性质才成立。

在我们的分析中，我们力求保持最大的一般性，考虑可能无界的密度。对于这类密度，我们推导出若干特定的 Jensen 不等式。这些不等式以更一般的形式而言，对于有界算子早已为人熟知。

值得注意的是，从有界密度推广到无界密度，需要借助一些有关可测算子代数的论证；尤其是，我们广泛利用了这类算子的依测度收敛。

1. 预备知识与记号

设 $\mathcal{M}$ 是作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的算子所构成的半有限冯·诺伊曼代数，带有正规半有限忠实迹 τ、单位元 $\mathbb{1}$以及预对偶 $\mathcal{M}_*$。我们用 $\mathcal{M}^+$ 表示 $\mathcal{M}$中的正算子集合，用 $\mathcal{M}_*^+$ 表示 $\mathcal{M}_*$中的正泛函集合。这些泛函有时也称为（未归一化）态。

2010 数学主题分类。主要分类：46L53；次要分类：81P45。1

$\widetilde{}$可测算子 代数 $\mathcal{M}$ 定义为一个拓扑
*上稠密定义闭算子的代数，这些算子与 $\mathcal{H}$ 相关联，并配备强加法 $\dot{+}$和强乘法 $\dot{\cdot}$，即

$$x \dot{+} y = \overline{x+y}, \qquad x \dot{\cdot} y = \overline{xy}, \qquad x, y \in \widetilde{\mathcal{M}},$$

其中，$\overline{x+y}$和 $\overline{xy}$分别是由加法和复合定义的相应算子的闭包；这些算子分别定义在由 x 和 y 的定义域交集，以及 y 的值域与 x 的定义域交集所构成的自然定义域上。下文中，我们将省略这些运算符号中的圆点，简写为 $x+y$ 和 xy，分别表示 $x \dot{+} y$ 和 $x \dot{\cdot} y$。平移不变的测度拓扑由 0 的一个基本邻域系定义，$\{N(\varepsilon,\delta) : \varepsilon,\delta > 0\}$，其定义如下

$$\widetilde{N}(\varepsilon,\delta) = \{x \in \mathcal{M} : \text{存在一个投影 } p \text{ 属于 } \mathcal{M}, \text{ 使得} \\ xp \in \mathcal{M}, \quad \|xp\| \leqslant \varepsilon \quad \text{and} \quad \tau(\mathbb{1}-p) \leqslant \delta\}.$$

下面这种“技术性”的依测度收敛形式已在[6, 命题 2.7] 中证明，很有用。设

$$|x_n - x| = \int_0^\infty t\, e_n(dt)$$

为 $|x_n - x|$ 的谱表示，其谱测度 e_n取值于 $\mathcal{M}$，因为 $x_n - x$，因此 $|x_n - x|$都与$\mathcal{M}$相伴。于是，$x_n \to x$ 依测度收敛 当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$

$$\tau(e_n([\varepsilon, +\infty))) \to 0. \tag{1}$$

在 $\mathcal{H}$ 上的线性算子 x 的定义域记作 $\mathcal{D}(x)$。对每个 $\rho \in \mathcal{M}_*$，存在一个可测算子 h 使得

$$\rho(x) = \tau(xh) = \tau(hx), \quad x \in \mathcal{M}.$$

所有这类算子构成的空间记作 $L^1(\mathcal{M},\tau)$，上述对应关系是一一对应且等距的，其中$L^1(\mathcal{M},\tau)$上的范数记作 $\|\cdot\|_1$，定义为

$$\|h\|_1 = \tau(|h|), \quad h \in L^1(\mathcal{M},\tau).$$

（在半有限 von Neumann 代数的非交换L^p空间理论中，已证明 τ 可以扩展到上述的h；详细介绍可参见 [3, 5, 6]。）此外，$\mathcal{M}_*$ 中的厄米泛函对应于$L^1(\mathcal{M},\tau)$中的自伴算子，而 $\mathcal{M}_*$ 中的态对应于$L^1(\mathcal{M},\tau)$中的正算子。

切比雪夫不等式

$$\tau(e([\varepsilon, +\infty))) \leqslant \frac{\tau(|x|)}{\varepsilon} = \frac{\|x\|_1}{\varepsilon},$$

其中

$$|x| = \int_0^\infty t\, e(dt)$$

是谱表示，结合关系式 (1) 可得，$\|\cdot\|_1$-范数收敛蕴含依测度收敛。

对于 $\rho \in \mathcal{M}_*^+$，$L^1(\mathcal{M},\tau)$ 中的对应元素称为 ρ 的密度，记作 h_ρ。

设 Φ: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是正规正线性酉映射，满足 $\tau \circ \Phi = \tau$（此类映射称为量子通道，通常还要求其具有完全正性）。容易看出，此时 Φ 可扩张为 $L^1(\mathcal{M},\tau)$ 上的有界映射（参见 [2,引理 8]）。

设 $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$。 ρ 的 α-*Rényi* 熵记作$S_\alpha(\rho)$，定义为

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log \frac{\tau(h_\rho^\alpha)}{\tau(h_\rho)},$$

在假设$h_\rho^\alpha \in L^1(\mathcal{M},\tau)$成立的条件下，即对于$h_\rho$的谱表示

$$h_\rho = \int_0^\infty t\, e(dt), \tag{2}$$

我们有

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log \frac{\int_0^\infty t^\alpha\, \tau(e(dt))}{\int_0^\infty t\, \tau(e(dt))}.$$

因此，对于 $0 \leqslant h \in L^1(\mathcal{M},\tau)$，我们定义 α-Rényi 熵，使得 $h^\alpha \in L^1(\mathcal{M},\tau)$，其定义公式为

$$S_\alpha(h) = \frac{1}{1-\alpha} \log \frac{\tau(h^\alpha)}{\tau(h)} = \frac{1}{1-\alpha} \log \frac{\int_0^\infty t^\alpha\, \tau(e(dt))}{\int_0^\infty t\, \tau(e(dt))},$$

其中 h 具有如（2）所示的谱表示。对于前述映射 Φ，我们关注的问题是：该映射何时不改变密度h的 Rényi 熵，即何时等式

$$S_\alpha(h) = S_\alpha(\Phi(h))$$

成立。

2. 主定理

本节旨在证明本文的以下主要结果。

主定理。设 Φ 是 $\mathcal{M}$ 上的正规线性酉映射，满足$\tau \circ \Phi = \tau$；并设任意固定的 $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ 以及一个密度 h，使得 $h^\alpha \in L^1(\mathcal{M},\tau)$

$$S_\alpha(h) = S_\alpha(\Phi(h)).$$

那么 $\Phi|W^*(h)$ 是一个 *-同构，适用于 $\alpha \leqslant 2$；如果我们进一步假设存在 $1 < \gamma \leqslant 2$，则 $\alpha > 2$ 也同样成立，使得

$h^\gamma \in L^1(\mathcal{M},\tau)$ （对于有限代数，这一假设会自动满足）。

我们先说明证明的一般思路。熵的不变性显然等价于等式

$$\tau(\Phi(h^\alpha)) = \tau(h^\alpha) = \tau(\Phi(h)^\alpha). \tag{3}$$

由这个等式，试图推出等式

$$\Phi(h^\alpha) = \Phi(h)^\alpha \tag{4}$$

进而得到最终结论。应当注意，对于 $\alpha \in$ （0,1） $\cup$ （1,2] ，该等式意味着有界 h 可得我们的最终结论，而这由 [4] 推出。请注意，在某些情况下，由 (3) 推导关系 (4) 很简单。具体而言，对于 $0 < \alpha < 1$，函数 $[0,+\infty) \ni t \mapsto t^\alpha$ 是算子凹的，而对有界 算子应用詹森不等式可得不等式

$$\Phi(h^\alpha) \leqslant \Phi(h)^\alpha.$$

对于 $1 < \alpha \leqslant 2$ ，函数 $[0,+\infty) \ni t \mapsto t^\alpha$ 是算子凸的，再次对有界 算子应用詹森不等式可得不等式

$$\Phi(h^\alpha) \geqslant \Phi(h)^\alpha.$$

在上述两种情形中， τ 的忠实性与关系式 (3) 一起给出等式 (4)。对于密度h不一定有界的一般情形，我们可以尝试推导适当的 Jensen 不等式（实际上，我们对 $1 < \alpha \leqslant 2$ 就是这样做的），但有一种更简单的方法。也就是说，事实证明，在情形$0 < \alpha < 1$中，仅凭等式 (3) 就足以证明结论。对于$\alpha > 1$，我们沿用上文所述的方法，得到等式 (4)。由此可得

$$\Phi(h^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \Phi(h) = \Phi\big((h^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\big)$$

这就是将h^α 替换为h 、将 $\frac{1}{\alpha} < 1$替换为 α后的等式 (4)，因此我们得到形式如下的等式 (3)：

$$\tau\big(\Phi\big((h^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\big)\big) = \tau\big(\Phi(h^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\big).$$

如上所述，注意到$W^*(h^\alpha) = W^*(h)$，即可得到所述结论。因此，定理的证明分为三部分：1. 情形 $0 < \alpha < 1$，在此情形下证明结论；2. 情形 $1 < \alpha < 2$ ；以及 3. 情形 $\alpha \geqslant 2$，在这些情形下可得到等式$\Phi(h^\gamma) = \Phi(h)^\gamma$ ，其中某个 $\gamma > 1$ 。

证明 $0 < \alpha < 1$。令$t \geqslant 0$。我们有公式

$$t^\alpha = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}} \frac{t}{s+t}\, ds. \tag{5}$$

令 $0 \leqslant h \in L^1(\mathcal{M},\tau)$。由于对于$s > 0$，我们有

$$\|h(s\mathbb{1}+h)^{-1}\|_1 \leqslant \|h\|_1 \|(s\mathbb{1}+h)^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{\|h\|_1}{s},$$

对于每个 $m > 0$，存在 Bochner 积分

$$z_m(h) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}} h(s\mathbb{1}+h)^{-1}\,ds$$

其取值于 $L^1(\mathcal{M},\tau)$。令

$$h = \int_0^\infty t\, e(dt) \tag{6}$$

为 h 的谱表示。于是

$$\tau(h(s\mathbb{1}+h)^{-1}) = \int_0^\infty \frac{t}{s+t}\,\tau(e(dt)),$$

并且根据勒贝格单调收敛定理、富比尼定理以及 (5)，对于 $m \searrow 0$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\tau(z_m(h)) = \tau(\Phi(z_m(h))) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\tau(h(s\mathbb{1}+h)^{-1})\,ds \\
=&\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\int_0^\infty \frac{t}{s+t}\,\tau(e(dt)\,ds \\
\nearrow&\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\int_0^\infty \frac{t}{s+t}\,\tau(e(dt)\,ds \\
=&\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\frac{t}{s+t}\,ds\,\tau(e(dt) = \int_0^\infty t^\alpha \tau(e(dt)) = \tau(h^\alpha).
\end{aligned}$$

同理，我们得到

$$\tau(z_m(\Phi(h))) \nearrow \tau(\Phi(h)^\alpha).$$

由于

$$\frac{t}{s+t} = 1 - \frac{s}{s+t},$$

由此，利用 [2, 定理 7]，我们推得

$$\Phi(h(s\mathbb{1}+h)^{-1}) \leqslant \Phi(h)(s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1}, \tag{7}$$

thus

$$\begin{aligned}
&\tau(z_m(\Phi(h))) - \tau(z_m(h)) = \tau(z_m(\Phi(h))) - \tau(\Phi(z_m(h))) \\
=&\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\tau(\Phi(h)(s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1} - \Phi(h(s\mathbb{1}+h)^{-1}))\,ds,
\end{aligned}$$

并且被积函数非负，这意味着 $\tau(z_m(\Phi(h))) - \tau(z_m(h))$ 随$m \searrow 0$增大。但是

$$\tau(z_m(\Phi(h))) - \tau(z_m(h)) \nearrow \tau(\Phi(h)^\alpha) - \tau(h^\alpha) = 0,$$

因此，

$$\int_m^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\tau(\Phi(h)(s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1}-\Phi(h(s\mathbb{1}+h)^{-1}))\,ds=0$$

且被积函数的非负性可得

$$\tau(\Phi(h)(s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1}-\Phi(h(s\mathbb{1}+h)^{-1}))=0 \quad \textit{almost everywhere,}$$

根据不等式 (7) 可得

$$\Phi(h)(s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1}=\Phi(h(s\mathbb{1}+h)^{-1}) \quad \textit{almost everywhere,} \tag{8}$$

即根据连续性处处成立。由于

$$x(s\mathbb{1}+x)^{-1}=\mathbb{1}-s(s\mathbb{1}+x)^{-1}$$

对于$x \geqslant 0$，等式 (8) 可得

$$(s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1}=\Phi((s\mathbb{1}+h)^{-1}),$$

现在逐字重复 [2, 定理 12]中的推理，即可得到结论。□

证明 $1<\alpha\leqslant 2$。首先假设 $\alpha<2$，并令 $\beta=\alpha-1$。我们有

$$t^{1+\beta}=\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\beta}}\frac{t^2}{s+t}\,ds, \tag{9}$$

以及估计

$$\|h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1}\|_1\leqslant\|h\|_1\|h(s\mathbb{1}+h)^{-1}\|_\infty\leqslant\|h\|_1.$$

对于 $0<m<M$，令

$$z_m^M(h)=\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1}\,ds,$$

这是$L^1(\mathcal{M},\tau)$中的 Bochner 积分。暂且假设h 有界，$h\in\mathcal{M}$。那么，由于

$$\|h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1}\|_\infty=\frac{\|h\|_\infty^2}{s+\|h\|_\infty},$$

我们推知，$z_m^M(h)$ 也是 $\mathcal{M}$中的 Bochner 积分，并且对每个$\xi \in \mathcal{H}$，根据 Fubini 定理

$$\begin{aligned}\langle z_m^M(h)\xi|\xi\rangle &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\langle h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1}\xi|\xi\rangle\, ds \\ &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\int_0^\infty \frac{t^2}{s+t}\,\|e(dt)\xi\|^2\, ds \\ &\leqslant \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\beta}}\int_0^\infty \frac{t^2}{s+t}\,\|e(dt)\xi\|^2\, ds \\ &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\beta}}\frac{t^2}{s+t}\, ds\,\|e(dt)\xi\|^2 \\ &= \int_0^\infty t^{1+\beta}\,\|e(dt)\xi\|^2 = \langle h^{1+\beta}\xi|\xi\rangle,\end{aligned}$$

这表明

$$z_m^M(h) \leqslant h^{1+\beta}. \tag{10}$$

现在我们不再假设h 有界，并令

$$h_n = \int_0^n t\, e(dt).$$

我们有

$$h_n^2(s\mathbb{1}+h_n)^{-1} \leqslant h_{n+1}^2(s\mathbb{1}+h_{n+1})^{-1} \leqslant h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1},$$

因此，

$$z_m^M(h_n) \leqslant z_m^M(h_{n+1}) \leqslant z_m^M(h).$$

此外，利用 Fubini 定理和勒贝格单调收敛定理，我们得到，当$n \to \infty$

$$\begin{aligned}\tau(z_m^M(h_n)) &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\tau(h_n^2(s\mathbb{1}+h_n)^{-1})\, ds \\ &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\int_0^n \frac{t^2}{s+t}\,\tau(e(dt)\, ds \\ &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^n\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\frac{t^2}{s+t}\, ds\,\tau(e(dt) \\ &\nearrow \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^\infty\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\frac{t^2}{s+t}\, ds\,\tau(e(dt) \\ &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\int_0^\infty \frac{t^2}{s+t}\,\tau(e(dt)\, ds \\ &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\tau(h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1})\, ds = \tau(z_m^M(h)).\end{aligned}$$

这表明，对于$n \to \infty$，我们有

$$\begin{aligned}\|z_m^M(h) - z_m^M(h_n)\|_1 &= \tau(z_m^M(h) - z_m^M(h_n)) \\ &= \tau(z_m^M(h)) - \tau(z_m^M(h_n)) \to 0.\end{aligned} \tag{11}$$

此外，根据（10），我们有

$$z_m^M(h_n) \leqslant h_n^{1+\beta} \leqslant h^{1+\beta},$$

结合关系式 (11)，可得

$$z_m^M(h) \leqslant h^{1+\beta}.$$

现在，利用勒贝格单调收敛定理，取$m \searrow 0$、$M \nearrow \infty$,

$$\begin{aligned}\tau(z_m^M(h)) &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\tau(h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1})\,ds\\ &=\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\int_0^\infty \frac{t^2}{s+t}\,\tau(e(dt))\,ds\\ &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^\infty\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\frac{t^2}{s+t}\,ds\,\tau(e(dt)\\ &\nearrow \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\beta}}\frac{t^2}{s+t}\,ds\,\tau(e(dt)\\ &= \int_0^\infty t^{1+\beta}\,\tau(e(dt)) = \tau(h^{1+\beta}),\end{aligned}$$

这表明，取$m \searrow 0$、$M \nearrow \infty$

$$\|h^{1+\beta} - z_m^M(h)\|_1 = \tau(h^{1+\beta} - z_m^M(h)) = \tau(h^{1+\beta}) - \tau(z_m^M(h)) \to 0,$$

i.e.

$$z_m^M(h) \to h^{1+\beta} \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm.$$

在上述推理中用 $\Phi(h)$ 代替h，即可得到关系式

$$z_m^M(\Phi(h)) \to \Phi(h)^{1+\beta} \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm.$$

现在我们可以证明以下版本的詹森不等式

$$\Phi(h^{1+\beta}) \geqslant \Phi(h)^{1+\beta}.$$

由于对于 $x \geqslant 0$

$$x^2(s\mathbb{1}+x)^{-1} = x - s\mathbb{1} + s^2(s\mathbb{1}+x)^{-1},$$

根据 [2, 定理 7]，我们得到

$$\begin{aligned}&\Phi(h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1}) - \Phi(h)^2(s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1}\\ =&s^2(\Phi((s\mathbb{1}+h)^{-1}) - (s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1}) \geqslant 0.\end{aligned} \tag{12}$$

由不等式 (12)，我们得到

$$\begin{aligned}\Phi(z_m^M(h)) &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\Phi\Big(\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1}\,ds\Big)\\ &= \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\Phi(h^2(s\mathbb{1}+h)^{-1})\,ds\\ &\geqslant \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\beta}}\Phi(h)^2(s\mathbb{1}+\Phi(h))^{-1})\,ds = z_m^M(\Phi(h)),\end{aligned}$$

并考虑这些关系

$$z_m^M(h) \to h^{1+\beta} \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm$$

and

$$z_m^M(\Phi(h)) \to \Phi(h)^{1+\beta} \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm,$$

结合 Φ 在 $\|\cdot\|_1$-范数下的连续性，我们证明该结论。

现在令 $\alpha = 2$。我们要证明

$$\Phi(h^2) \geqslant \Phi(h)^2.$$

沿用前面的记号，我们有

$$h_n = \int_0^n t\,e(dt) \nearrow \int_0^\infty t\,e(dt) = h \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm,$$

and

$$h_n^2 = \int_0^n t^2\,e(dt) \nearrow \int_0^\infty t^2\,e(dt) = h^2 \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm,$$

thus

$$\Phi(h_n) \to \Phi(h) \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm$$

and

$$\Phi(h_n^2) \to \Phi(h^2) \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm.$$

特别地,

$$\Phi(h_n) \to \Phi(h) \quad in\ measure$$

and

$$\Phi(h_n^2) \to \Phi(h^2) \quad in\ measure.$$

由于乘法在测度拓扑下联合连续，我们得到

$$\Phi(h_n)^2 \to \Phi(h)^2 \quad in\ measure.$$

有界算子的詹森不等式给出

$$\Phi(h_n^2) \geqslant \Phi(h_n)^2,$$

对上述不等式两边取依测度收敛的极限，即可证明该结论。

综合以上考虑，我们得到关于 $1 < \alpha \leqslant 2$ 以及 $h \in L^1(\mathcal{M},\tau)$、$h^\alpha \in L^1(\mathcal{M},\tau)$ 的以下詹森不等式,

$$\Phi(h^\alpha) \geqslant \Phi(h)^\alpha. \tag{13}$$

因此，对于 $1 < \alpha \leqslant 2$，我们有

$$\tau\big(\Phi(h^\alpha) - \Phi(h)^\alpha\big) = \tau\big(\Phi(h^\alpha)\big) - \tau\big(\Phi(h)^\alpha\big) = 0,$$

以及 τ 的忠实性给出

$$\Phi(h^\alpha) = \Phi(h)^\alpha. \qquad \square$$

在讨论情形 $\alpha > 2$ 之前，我们需要一些辅助结果。

命题 1。 设 $0 < \alpha < 1$，并令 $0 \leqslant x_n \in L^1(\mathcal{M},\tau)$ 满足 $x_n \nearrow x \in L^1(\mathcal{M},\tau)$ 在 $\|\cdot\|_1$-范数下成立。则 $x_n^\alpha \nearrow x^\alpha$ 在 $\|\cdot\|_1$-范数下成立。

证明。 对于任意 $0 \leqslant u \in L^1(\mathcal{M},\tau)$，以及 $0 < m < M$，令

$$\tilde{z}_m^M(u) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\alpha}} u(s\mathbb{1}+u)^{-1}\,ds.$$

估计式

$$\|u(s\mathbb{1}+u)^{-1}\|_1 \leqslant \frac{\|u\|_1}{s} \qquad \text{and} \qquad \|u(s\mathbb{1}+u)^{-1}\|_\infty \leqslant 1$$

证明上述积分在$L^1(\mathcal{M},\tau)$ 以及 $\mathcal{M}$ 中都是 Bochner 积分。对于任意 $\xi \in \mathcal{D}(u^\alpha)$，根据其谱表示，我们有

$$u = \int_0^\infty t\,p(dt)$$

u的以下关系

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{z}_m^M(u)\xi|\xi\rangle &= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\alpha}}\langle u(s\mathbb{1}+u)^{-1}\xi|\xi\rangle\,ds \\
&= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\alpha}}\int_0^\infty \frac{t}{s+t}\,\|p(dt)\xi\|^2\,ds \\
&\leqslant \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\int_0^\infty \frac{t}{s+t}\,\|(p(dt)\xi\|^2\,ds \\
&= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\frac{t}{s+t}\,ds\,\|(p(dt)\xi\|^2 \\
&= \int_0^\infty t^\alpha \|(p(dt)\xi\|^2 = \langle u^\alpha\xi|\xi\rangle,
\end{aligned}$$

这表明

$$\tilde{z}_m^M(u) \leqslant u^\alpha. \tag{14}$$

此外，我们得到 $m \searrow 0, M \nearrow \infty$,

$$\begin{aligned}
&\tau(\widetilde{z}_m^M(u)) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\alpha}}\tau(u(s\mathbb{1}+u)^{-1})\,ds \\
=&\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_m^M \frac{1}{s^{1-\alpha}}\int_0^\infty \frac{t}{s+t}\,\tau(p(dt))\,ds \\
\nearrow&\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\int_0^\infty \frac{t}{s+t}\,\tau(p(dt))\,ds \\
=&\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{s^{1-\alpha}}\frac{t}{s+t}\,ds\,\tau(p(dt)) = \int_0^\infty t^\alpha\tau(p(dt)) = \tau(u^\alpha),
\end{aligned}$$

由此得到

$$\widetilde{z}_m^M(u) \to u^\alpha \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm.$$

当 $0\leqslant u_1 \leqslant u_2$ 时，我们有$s\mathbb{1}+u_1 \leqslant s\mathbb{1}+u_2$，因此

$$(s\mathbb{1}+u_1)^{-1} \geqslant (s\mathbb{1}+u_2)^{-1},$$

so

$$u_1(s\mathbb{1}+u_1)^{-1} = \mathbb{1}-s(s\mathbb{1}+u_1)^{-1} \leqslant \mathbb{1}-s(s\mathbb{1}+u_2)^{-1} = u_2(s\mathbb{1}+u_2)^{-1},$$

由此得到

$$\widetilde{z}_m^M(u_1) \leqslant \widetilde{z}_m^M(u_2).$$

令$m \searrow 0$、$M \nearrow \infty$趋于极限，得到

$$u_1^\alpha \leqslant u_2^\alpha, \tag{15}$$

这表明函数具有算子单调性

$[0,+\infty) \ni t \mapsto t^\alpha$对于来自$L^1(\mathcal{M},\ \tau)$的元素（这是有界算子的一个众所周知的结论）。

设x_n 和x 如假设中所述。则

$$\widetilde{z}_m^M(x_n) \leqslant \widetilde{z}_m^M(x).$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
&x_n(s\mathbb{1}+x_n)^{-1} - x(s\mathbb{1}+x)^{-1} \\
=&(s\mathbb{1}+x_n)^{-1}(x_n(s\mathbb{1}+x) - (s\mathbb{1}+x_n)x)(s\mathbb{1}+x)^{-1} \\
=&s(s\mathbb{1}+x_n)^{-1}(x_n-x)(s\mathbb{1}+x_n)^{-1},
\end{aligned}$$

thus

$$\begin{aligned}
&\|x_n(s\mathbb{1}+x_n)^{-1} - x(s\mathbb{1}+x)^{-1}\|_1 \\
\leqslant& s\|(s\mathbb{1}+x_n)^{-1}\|_\infty\|x_n-x\|_1\|(s\mathbb{1}+x_n)^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{\|x_n-x\|_1}{s},
\end{aligned}$$

这表明

$$x_n(s\mathbb{1}+x_n)^{-1} \nearrow x(s\mathbb{1}+x)^{-1} \quad in\ \|\cdot\|_1\text{-}norm.$$

由勒贝格单调收敛定理可得，随着$n \to \infty$

$$\tau(\widetilde{z}_m^M(x_n)) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_m^M \frac{1}{s^{1-\alpha}} \tau(x_n(s\mathbb{1} + x_n)^{-1})\, ds$$
$$\nearrow \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_m^M \frac{1}{s^{1-\alpha}} \tau(x(s\mathbb{1} + x)^{-1})\, ds = \tau(\widetilde{z}_m^M(x)),$$

i.e.

$$\widetilde{z}_m^M(x_n) \nearrow \widetilde{z}_m^M(x) \quad in \ \|\cdot\|_1\text{-}norm.$$

由关系式 **(14)** 和算子单调性可得

$$\tau(\widetilde{z}_m^M(x_n)) \leqslant \tau(x_n^\alpha) \leqslant \tau(x^\alpha),$$

由此得到

$$\tau(\widetilde{z}_m^M(x)) = \lim_{n\to\infty} \tau(\widetilde{z}_m^M(x_n)) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \tau(x_n^\alpha) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \tau(x_n^\alpha) \leqslant \tau(x^\alpha),$$

并在上述不等式中令 $m \searrow 0$、$M \nearrow \infty$趋于极限，可得

$$\tau(x^\alpha) = \lim_{\substack{m\to 0 \\ M\to\infty}} \tau(\widetilde{z}_m^M(x)) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \tau(x_n^\alpha) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \tau(x_n^\alpha) \leqslant \tau(x^\alpha),$$

这表明

$$\lim_{n\to\infty} \tau(x_n^\alpha) = \tau(x^\alpha),$$

由不等式 $x_n^\alpha \leqslant x^\alpha$ 即可证明该结论。 □

詹森不等式的另一种形式为

命题 2. 设 $\alpha > 1$，并设 $0 \leqslant h \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$ 满足 $h^\alpha \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$。则

$$\tau(\Phi(h^\alpha)) \geqslant \tau(\Phi(h)^\alpha).$$

证明。我们有

$$h_n = \int_0^n t\, e(dt) \nearrow \int_0^\infty t\, e(dt) = h \quad in \ \|\cdot\|_1\text{-}norm,$$

and

$$h_n^\alpha = \int_0^n t^\alpha\, e(dt) \nearrow \int_0^\infty t^\alpha\, e(dt) = h^\alpha \quad in \ \|\cdot\|_1\text{-}norm,$$

thus

$$\Phi(h_n) \nearrow \Phi(h) \quad in \ \|\cdot\|_1\text{-}norm$$

and

$$\Phi(h_n^\alpha) \nearrow \Phi(h^\alpha) \quad in \ \|\cdot\|_1\text{-}norm.$$

特别是,

$$\Phi(h_n) \to \Phi(h) \quad in\ measure$$

and

$$\tau(\Phi(h_n^\alpha)) \to \tau(\Phi(h^\alpha)).$$

设 $\alpha = r + \beta$，其中 $r = [\alpha], 0 \leqslant \beta < 1$。根据命题 1，我们有

$$\Phi(h_n)^\beta \to \Phi(h)^\beta \quad in \ \|\cdot\|_1\text{-}norm,$$

so

$$\Phi(h_n)^\beta \to \Phi(h)^\beta \quad in\ measure,$$

因此，由于乘法在测度拓扑中联合连续，

$$\Phi(h_n)^\alpha = \Phi(h_n)^r \Phi(h_n)^\beta \to \Phi(h)^r \Phi(h)^\beta = \Phi(h)^\alpha \quad in\ measure.$$

由于函数 $[0, +\infty) \ni t \mapsto t^\alpha$ 是凸函数，有界算子的詹森不等式推出

$$\tau(\Phi(h_n^\alpha)) \geqslant \tau(\Phi(h_n)^\alpha).$$

对于每个 n，我们有

$$\|\Phi(h_n)^\alpha\|_1 = \tau(\Phi(h_n)^\alpha) \leqslant \tau(\Phi(h_n^\alpha)) = \tau(h_n^\alpha) \leqslant \tau(h^\alpha) < +\infty,$$

而法图引理——定理 2.9]——推出

$$\begin{aligned}\tau(\Phi(h)^\alpha) = \|\Phi(h)^\alpha\|_1 &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|\Phi(h_n)^\alpha\|_1 \\ &= \varliminf_{n\to\infty} \tau(\Phi(h_n)^\alpha) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \tau(\Phi(h_n^\alpha)) = \tau(\Phi(h^\alpha)).\end{aligned} \qquad \square$$

对 $\alpha \geqslant 2$ 的证明。这里我们还假设存在$1 < \gamma \leqslant 2$，使得 $h^\gamma \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$。令

$$f(t) = t^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \quad t \in [0, +\infty).$$

根据命题 2 (，将h 替换为h^γ，并将 α 替换为$\frac{\alpha}{\gamma}$)，我们得到

$$\tau\big(\Phi(h^\alpha)\big) = \tau\big(\Phi\big((h^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\big)\big) \geqslant \tau\big(\big(\Phi(h^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\big) = \tau\big(f\big(\Phi\big(h^\gamma\big)\big)\big).$$

詹森不等式 (13) 为

$$\Phi\big(h^\gamma\big) \geqslant \Phi(h)^\gamma,$$

由于f 严格递增、连续、凸，且$f(0) = 0$，根据 [1, 定理 14]，我们得到

$$\tau\big(f\big(\Phi\big(h^\gamma\big)\big)\big) \geqslant \tau\big(f\big(\Phi(h)^\gamma\big)\big) = \tau(\Phi(h)^\alpha). \tag{16}$$

由于

$$\tau\big(\Phi(h^\alpha)\big) = \tau(\Phi(h)^\alpha),$$

我们在上面的不等式 (16) 中取等号；再次根据 [1, 定理 14]，可得等式

$$\Phi\big(h^\gamma\big) = \Phi(h)^\gamma. \qquad \square$$

备注。注意，若 Φ 是代数 $W^*(h)$ 上的 *-同构，且 τ 是 Φ-不变的，那么对每个有界连续函数 f，我们有 $\Phi(f(h)) = f(\Phi(h))$。容易证明，对于 $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$，若 $h^\alpha \in L^1(\mathcal{M},\tau)$，则有 $\Phi(h^\alpha) = \Phi(h)^\alpha$，因此 $S_\alpha(h) = S_\alpha(\Phi(h))$。

3. 附加结果

本节中，我们考虑映射 Φ 对每个密度都不改变任意一个固定熵的情形。

定理 3. 设 Φ 是作用于 $\mathcal{M}$ 上的正规线性酉映射，满足 $\tau \circ \Phi = \tau$，并设对于任意固定的 $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$S_\alpha(h) = S_\alpha(\Phi(h))$$

对每个满足 $h^\alpha \in L^1(\mathcal{M},\tau)$ 的密度 h，Φ 是 $\mathcal{M}$ 上的 *Jordan* *-同构。

证明。设 $h \in \mathcal{M}$ 是满足 $h^\alpha \in L^1(\mathcal{M},\tau)$ 的密度，并且在$\alpha > 2$的情况下，$h^\gamma \in L^1(\mathcal{M},\tau)$，其中某个 $1 < \gamma \leqslant 2$。由主定理可知，$\Phi|W(h)$ 是 *-同构，特别地，我们有

$$\Phi(h^2) = \Phi(h)^2.$$

根据 [2,命题 9]，，对所有 $x \in \mathcal{M}$，以下等式成立

$$\Phi(x \circ h) = \Phi(x) \circ \Phi(h), \tag{17}$$

其中，对于 u、$v \in \mathcal{M}$

$$u \circ v = \frac{uv + vu}{2},$$

是 Jordan 乘积。

由于上述这类 h 在 $\mathcal{M}^+$ 中关于 σ-弱拓扑稠密，且 Φ 是正规算子，因此等式 (17) 对 $\mathcal{M}^+$ 中所有 h 都成立，从而我们有

$$\Phi(x \circ y) = \Phi(x) \circ \Phi(y).$$

对所有 x、$y \in \mathcal{M}$，因此 Φ 是 Jordan *-同态。

若 $\Phi(x) = 0$，则

$$0 = \Phi(x)^*\Phi(x) + \Phi(x)\Phi(x)^* = \Phi(x^*x + xx^*) = \Phi(x^*x) + \Phi(xx^*)$$

thus

$$\Phi(x^*x) = \Phi(xx^*) = 0,$$

因此可得 $\tau(x^*x) = \tau(\Phi(x^*x)) = 0$，即 $x = 0$，这表明Φ 是一个同构。□

注记。若 Φ 是 Jordan *-同构，则它显然是阿贝尔代数 $W^*(h)$上的 *-同构，因此等式$S_\alpha(h) = S_\alpha(\Phi(h))$ 可如前一条注记所示推出。

最后，我们来讨论一般情形。在许多情况下，形如

$$H(h) = \tau(f(h)) \tag{18}$$

其中 h 是一个密度，f 是一个连续函数。我们考虑这类情形（典型例子包括 $f(t) = t\log t$，从而得到 Segal 熵；或$f(t) = t^{\alpha}$，从而得到 Rényi 熵）。于是，一个自然的问题是，H 相对于某个映射 Φ是否保持不变，即关系

$$H(h) = H(\Phi(h)). \tag{19}$$

暂且撇开技术问题（h 可能是无界的），我们注意到，原则上，如果 Φ 是一个正规 Jordan *-同构，那么 $\Phi(f(h)) = f(\Phi(h))$，因此附加假设 $\tau\circ\Phi = \tau$给出关系（19）。因此，条件“Φ 是一个满足以下条件的正规 *Jordan* *-同构：$\tau\circ\Phi = \tau$”对于不变性（19）而言是充分的。当我们处理两个密度时，也会出现类似情况。一个典型例子是两个密度h 和k 的相对熵；为简单起见，我们在有限维情形下将其定义为

$$D(h||k) = \begin{cases} \operatorname{tr} h(\log h - \log k), & \text{if } \operatorname{supp} h \leqslant \operatorname{supp} k \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

现在，如果 Φ 是保持迹‘tr’不变的正规 Jordan *-同构，则有 $\operatorname{supp}\Phi(h) = \Phi(\operatorname{supp} h)$ 且 $\operatorname{supp}\Phi(k) = \Phi(\operatorname{supp} k)$，因此，当且仅当 $\operatorname{supp} h \leqslant \operatorname{supp} k$ 时，$\operatorname{supp}\Phi(h) \leqslant \operatorname{supp}\Phi(k)$，在这种情况下我们得到等式

$$\begin{aligned} &D(\Phi(h)||\Phi(k)) = \operatorname{tr}\Phi(h)(\log\Phi(h) - \log\Phi(k)) \\ &= \operatorname{tr}(\Phi(h)\circ(\log\Phi(h) - \log\Phi(k))) \\ &= \operatorname{tr}(\Phi(h)\circ(\Phi(\log h) - \Phi(\log k))) \\ &= \operatorname{tr}(\Phi(h)\circ\Phi(\log h - \log k)) = \operatorname{tr}\Phi(h\circ(\log h - \log k)) \\ &= \operatorname{tr}(h\circ(\log h - \log k)) = \operatorname{tr} h(\log h - \log k) = D(h||k), \end{aligned}$$

这表明相同的条件：“Φ 是满足 $\tau\circ\Phi = \tau$ 的正规 Jordan *-同构”对于相对熵的不变性再次是充分的。上述推理表明，有些结果声称，例如，保持相对熵或式（18）中的 H 不变的映射必须具有 $\Phi(x) = uxu^*$ 的形式，其中u 是酉算子、反酉算子或等距算子，这些结果是不正确的（一个不改变熵但不具有上述形式的此类 Jordan *-同构的典型例子，是相对于给定正交归一基的 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 中的转置）。

参考文献

[1] T. Harada、H. Kosaki，半有限 *von Neumann* 代数中的迹 *Jensen* 不等式及相关弱主序，《J. Operator Theory》**63** (2010)，129–150。

[2] A. Łuczak，H. Pods̨edkowska，保持冯·诺伊曼代数中 *Segal* 熵的映射，芬兰科学院数学年刊**44** (2019)，1–21。[3] E. Nelson，非交换积分札记，《泛函分析杂志》**15** (1974)，103–116。[4] D. Petz，算子凸函数的詹森不等式等号情形，《积分方程与算子理论》**9** (1986)，744–747。[5] M. Takesaki，《算子代数理论》第二卷，《数学科学百科全书》第125卷，施普林格，柏林–海德堡–纽约，2003年。[6] F.J. Yeadon，非交换 L^p空间，《剑桥哲学学会数学会刊》**77** (1975)，91–102。

数学与计算机科学学院，ŁÓD ́Z 大学，S. Banacha 街 22 号，90-238 ŁÓD ́Z，波兰电子邮箱地址，Andrzej Łuczak：andrzej.luczak@wmii.uni.lodz.pl电子邮箱地址，Hanna Pods̨edkowska：hanna.podsedkowska@wmii.uni.lodz.pl电子邮箱地址，Rafał Wieczorek：rafal.wieczorek@wmii.uni.lodz.pl