arXiv:2302.02296v1 [math.AG] 5 Feb 2023

线性作用的等变双有理几何

Yuri Tschinkel、Kaiqi Yang 和 ZHIJIA ZHANG

Abstract. 我们研究低维空间中有限群的线性作用，并考察其等变双有理性。

1. Introduction

有限群在有理曲面上的作用，按等变双有理性分类，既有悠久的历史，也仍是一个活跃的研究领域。其源头至少可以追溯到 Bertini、Castelnuovo、Kantor 和 Segre 的经典工作，这些工作聚焦于对合及其不动点集；也可以追溯到 Manin、Iskovskikh 和 Sarkisov 的研究，这些研究强调群在皮卡群上的作用、初等双有理变换的分类以及等变双有理刚性。Dolgachev–Iskovskikh 的基础性工作 [11] 在一定程度上总结并完成了这一庞大计划：它列出了能够作用于有理曲面的有限群，并提出了一种算法，在许多情况下可以区分一个群的不同双有理作用。

更准确地说，等变极小模型纲领（MMP）表明，有限群 G 在有理曲面上的作用，可以实现为德尔佩佐曲面上的正则作用，或实现为 $\mathbb{P}^1$上的圆锥丛上的正则作用。可以假设该曲面是极小的，即不存在可进行的等变吹下。低次数极小德尔佩佐曲面上的作用具有刚性，并可通过本原皮卡格上的诱导作用来识别，也就是说，它们是相应韦伊群的子群。

最重要的“还剩下什么？”[11, 部分 9]是对高次数德尔佩佐曲面上的作用进行双有理分类，例如射影平面上的线性作用和射影线性作用。

回顾一下，有限群的线性作用和射影线性作用分别由一个（$n+1$）维表示的射影化 $\mathbb{P}(V)$ 得到，

日期：2023年2月7日。

该表示 V 属于 G，或者分别属于 G 的中心扩张。用经典术语来说，它们称为：

- 非传递：如果表示 V 可约，
- 传递但非本原：如果该作用不是非传递的，但存在一个非平凡正规子群 G 以非传递方式作用；
- 本原：以上两种情况均不属于。

本原作用的情形通过等变极小模型纲领，基本上已在 [28] 中解决。与之相反，阿贝尔群的线性作用的双有理分类已在所有维数下得到解决，见[27, 定理 7.1]。一般而言，$\mathbb{P}^2$上正则作用在双有理意义下的分类仍是一个开放问题。

三维簇的情形复杂得多。与维数 2 的情形一样，$\mathbb{P}^3$ 上的线性作用的双有理分类仍是一个开放问题。对于分析本原作用[10], [6], 或克雷莫纳群 $\mathbf{Cr}_3$ 中的对合（见 [25]），已取得重要进展。

新的等变双有理不变量在 [17]和 [21]中定义。这些定义假设基域的特征为零，且包含阶数整除 G的阶数的单位根。这些不变量在适当的双有理模型 X （标准形式）上计算，取值于 Burnside 群

$$\mathrm{Burn}_n(G),$$

它定义为符号群对显式关系取商。符号编码了关于具有非平凡阿贝尔稳定子群的轨迹、这些轨迹的法丛中诱导作用的权，以及相应函数域上的诱导作用的信息。定义和示例参见 [12]。论文 [22] 将这一形式体系应用于对 $\mathbb{P}^2$ 上作用的研究，并给出了新的非双有理等价的非传递作用示例。

本文在代数闭域 k 上工作，且其特征为零。我们将 Burnside 群的形式体系应用于对维数为 ≤ 3的线性作用的研究。我们广泛使用 [22], 中提出的算法，该算法可递归计算有限群 G 在 $\mathbb{P}^n$上的（射影）线性作用在 $\mathbf{Burn}_n(G)$中的类。我们已在 `magma` 中实现该算法，并编制了这类作用在 $\mathbb{P}^2$ 和 $\mathbb{P}^3$上的类表，参见 [32]。我们的结果包括：

- 在维数 2 的情形下，伯恩赛德形式体系无法区分本原作用，但确实给出了许多新的非双有理线性且射影线性的作用实例。

- 在 3 维情形下，我们展示了作用于 $\mathbb{P}^3$ 的新型非双有理线性作用，以及光滑二次曲面上的不可线性化作用。

本质上，伯恩赛德形式体系补足了 [28], [10], [6] 中的双有理刚性技术。

本文的结构安排如下：第 2 节回顾等变双有理几何的基本事实，以及用于区分双有理等价作用的相关经典不变量。第 3 节回顾在[17]中引入的伯恩赛德群 $\mathrm{Burn}_n(G)$ 的定义；该群接收有限群 G 在 n维代数簇上的一般自由作用的双有理不变量。我们列出低维情形以及小 G时的群，并发展用于研究这些群的新工具。第 4 节说明如何计算类

$$[X \circlearrowleft G] \in \mathrm{Burn}_n(G)$$

在 n维代数簇 X上的一般自由 G-作用的类。第 5 节将这一形式体系应用于曲线。第 6 节借助 [22]中的算法，举例说明如何计算线性作用的类。第 7 节和第 8 节研究 $\mathbb{P}^2$ 和 $\mathbb{P}^3$上的线性作用，并给出无法用以往工具区分的非双有理作用的新例子。第 9 节研究维数为≤ 3的光滑二次曲面。

致谢：我们非常感谢 I. Cheltsov 和 A. Kresch 的关注与评论。第一作者获得了美国国家科学基金会项目 2000099 的部分资助。

2. Generalities

我们回顾一些基本术语和记号。我们考虑代数闭域 k （特征为零）上光滑射影代数簇上的有限群 G 的一般自由正则作用。按照惯例，作用从右侧进行，记作

$$X \circlearrowleft G.$$

函数域 $K = k(X)$ 上诱导的左 G 作用记作$G \quad K$。令

$$X^G := \{\mathfrak{p} \in X, \mathfrak{p} \cdot g = \mathfrak{p}\}$$

为 X 上的 G-不动点集。

我们记

$$X \sim_G X',$$

如果存在一个 G等变双有理映射 $X \dashrightarrow X'$。这意味着存在一个 G等变的域扩张同构

$$k(X)/k \xrightarrow{\sim} k(X')/k.$$

如果满足以下条件，我们称 X、X' 是稳定等变双有理的：

$$X \times \mathbb{P}^m \sim_G X' \times \mathbb{P}^m,$$

对于某个 m，且在第二个因子上具有平凡作用。特别值得研究的是克雷莫纳群的有限子群（的共轭类）

$$\mathrm{Cr}_n = \mathrm{BirAut}(\mathbb{P}^n),$$

即射影空间的双有理自同构群，以及等变双有理等价的研究

$$X \sim_G \mathbb{P}(V).$$

我们称 G 在 X 上的作用为：

- 可线性化，当且仅当 V是 G的忠实表示，即该作用源自单同态 $G \to \mathbf{GL}(V^\vee)$。
- 可射影线性化，当 G在 $\mathbb{P}(V)$上的作用源自射影表示 $G \to \mathbf{PGL}_{n+1}$，也就是说，源自中心扩张的线性表示 $G \to \mathbf{GL}(V^\vee)$

$$1 \to \mu_{n+1} \to \tilde{G} \to G \to 1.$$

注意，可线性化作用必定是可射影线性化的，但反之未必成立。我们分别称 $\mathbb{P}(V)$ 上相应的作用为线性作用和射影线性作用。在 $\mathbb{P}^n$ 上具有不动点的射影线性作用是线性的。

关于（稳定）线性化问题的一般方法包括：

- 双有理刚性，参见例如 [26], [9],
- 中间雅可比簇，参见 [13],
- 群上同调，例如阿米特苏尔不变量（参见 [2, 第6], [29, 定理 2.14]），或在光滑射影 G代数簇 X的等变爆破下 $\mathbf{H}^1(G,\mathbf{Pic}(X))$ 的不变性，参见 [3]。

我们列出等变双有理几何中无处不在的技术工具：

- 如果 X 是有理连通的，且 G 是循环的，那么 $X^G \neq \emptyset$。

• 如果 G 是阿贝尔的，且 $\pi \tilde{:} \ X \dashrightarrow X$ 是一个 G-等变双有理映射，那么

$$X^G \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{X}^G \neq \emptyset.$$

• （RY）：假设有限阿贝尔群 G在维数为n的光滑射影簇 X 上正则作用且一般自由。设 $\mathfrak{p} \in X^G$ 是一个 G-不动点，且

$$(a_1, \ldots, a_n), \quad a_j \in G^\vee$$

G 在 $\mathfrak{p}$处的切空间中出现的特征集合。设

$$\det(\mathfrak{p}) := a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in \wedge^n(G^\vee)$$

˜为行列式。设 $\pi : X \to X$ 是一个 G-等变双有理态射。那么，由 [27], ，存在一个 G-不动点$\mathfrak{q} \in \pi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset \tilde{X}$，使得

$$\det(\mathfrak{p}) = \pm \det(\mathfrak{q}).$$

•（无名引理）：若 G 在 X 上一般自由作用，且$\mathcal{E} \to X$ 是一个秩为 m 的 G-向量丛，则

$$\mathcal{E} \sim_G X \times \mathbb{P}^m,$$

第二个因子上的作用是平凡作用。

• （MRC）：设 $r = r(X)$ 表示代数簇 X 的最大有理连通（MRC）商的维数。根据 MRC 商的函子性（参见例如 [16,I V.5.5]），这是一个定义良好的等变双有理不变量。

• （H1）：设 X 是一个光滑射影簇，其上有 G 的泛自由且稳定可线性化的作用。那么，对于所有 $H \subseteq G$，有

$$\mathrm{H}^1(H, \mathrm{Pic}(X)) = 0.$$

满足这一性质的 G-簇称为 H^1-平凡。这是一个稳定双有理性质。

在接下来的几节中，我们将讨论 [17] 和 [21] 中引入的 G-双有理不变量。它们基于对 X 中具有非平凡稳定子的子簇的几何性质，以及法丛上的诱导表示的分析，可以视为（RY）不变量的一种推广。

3. Equivariant Burnside groups

全文中， G 是一个有限群， H 是一个有限阿贝尔群。当 $H \subseteq G$ 是一个子群时，我们分别用 $Z_G(H)$ 和 $N_G(H)$ 表示它在 G 中的中心化子和正规化子。我们记

$$H^\vee := \mathrm{Hom}(H, k^\times)$$

H 的特征标群。

符号群有三种版本，分别对应于我们为具有非平凡稳定子的轨迹所附加的数据类型（关于标准模型，参见第 4 节）。我们按照 [17] 和 [21] 回顾其定义。

3.1. 极大稳定子。此版本讨论阿贝尔群 H 在光滑射影 X 上的（一般自由的、正则的）作用，其中维数为 n；它记录了 H-不动点处切空间中 H 的权。具体而言，对于 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{S}_n(H),$$

为由以下符号生成的阿贝尔群

$$\beta = (b_1, \dots, b_n), \quad b_1, \dots, b_n \in H^\vee, \quad \langle b_1, \dots, b_n \rangle = H^\vee,$$

满足重排关系

(O) $\beta = (b_1, \dots, b_n) \sim \beta' = (b'_1, \dots, b'_n)$，若存在一个置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，使得 $b'_i = b_{\sigma(i)}$ 对于 $i = 1, \dots, n$。

考虑商

$$\mathcal{S}_n(H) \to \mathcal{B}_n(H)$$

模掉爆破关系

(B) For $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, $n \geq 2$,

$$\beta = \begin{cases} (0, b_2, \dots, b_n), & \text{if } b_1 = b_2, \\ \beta_1 + \beta_2, & \text{if } b_1 \neq b_2, \end{cases}$$

其中

$$\beta_1 := (b_1 - b_2, b_2, b_3, \dots, b_n), \qquad \beta_2 := (b_1, b_2 - b_1, b_3, \dots, b_n).$$

3.2. 组合伯恩赛德群。这个版本考虑了一般有限群作用的任意稳定子，但忽略了具有非平凡稳定子的分层上的函数域所受的诱导作用。对于 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{SC}_n(G)$$

是由以下符号生成的阿贝尔群

$$(H, Y, \beta), \tag{3.1}$$

其中

- $H \subseteq G$ 是一个阿贝尔子群（该符号的稳定子），
- Y 是 $Z_G(H)/H$的一个子群，并且
- $\beta = (b_1, \ldots, b_{n-d})$，其中 $d \in [0, \ldots, n]$，是 H的一个非平凡特征序列，生成 $H^\vee$。

带有 $d = 0$ 的符号称为点符号，带有 $d = n - 1$ 的符号称为除子符号。

符号 (3.1) 满足重排关系和共轭关系：

(O) $(H, Y, \beta) = (H, Y, \beta')$ if $\beta \sim \beta'$, as in Section 3.1.

(C) 对所有 $g \in G$,

$$(H, Y, \beta) = (H', Y', \beta'), \quad H' = gHg^{-1}, \quad Y' = gYg^{-1},$$

β' 中的特征由 β 中的特征通过 g 的共轭作用得到。

考虑商

$$\mathcal{SC}_n(G) \to \mathcal{BC}_n(G)$$

再对消失关系和爆破关系取商：

(V) $(H, Y, \beta) = 0$ when $b_1 + b_2 = 0$.

(B) $(H, Y, \beta) = \Theta_1 + \Theta_2$，其中：

$$\Theta_1 := \begin{cases} 0, & \text{if } b_1 = b_2, \\ (H, Y, \beta_1) + (H, Y, \beta_2), & \text{if } b_1 \neq b_2, \end{cases}$$

其中 β_1、β_2 如上所述，且

$$\Theta_2 := \begin{cases} 0, & \text{if } b_i \in \langle b_1 - b_2 \rangle \text{ for some } i, \\ (\overline{H}, \overline{Y}, \bar{\beta}), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里,

$$\overline{H} := \mathrm{Ker}(b_1 - b_2) \subseteq H,$$

with

$$H/\overline{H} \subseteq \overline{Y} \subseteq Z_G(H)/\overline{H},$$

¯由 $\overline{Y}/(H/\overline{H}) = Y$刻画，且 β 由 β的特征的限制构成:

$$\bar{\beta} := (\bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots).$$

点符号的像称为点类，相应地，除子符号的像称为除子类。

3.3. 等变 Burnside 群。最精细的版本同时记录稳定子在法丛上的作用，以及其在分层函数域上的诱导作用。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathrm{Symb}_n(G),$$

为由以下符号生成的阿贝尔群

$$(H, Y \quad K, \beta), \tag{3.2}$$

其中

- $H \subseteq G$ 是一个阿贝尔子群,
- $Y \subseteq Z_G(H)/H$ 是一个子群,
- K 是 k的有限生成扩张，超越次数为$d \leq n$，且 Y在其上忠实作用，并且
- $\beta = (b_1, \dots, b_{n-d})$是 H的一列非平凡特征，生成 $H^\vee$。

与组合伯恩赛德群的情形一样，若 $d = (n-1)$，即对于 $H^\vee$的某个生成元 b，有 $\beta = (b)$，则称 $\mathrm{Symb}_n(G)$中的符号为除子型。若 $d = 0$，则称该符号为点符号。一般而言，我们称$(n-d)$为该符号的余维。

符号 (3.2) 受重排关系和共轭关系约束:

(O) $(H, Y \quad K, \beta) = (H, Y \quad K, \beta')$ if $\beta \sim \beta'$.

(C) $(H, Y \quad K, \beta) = (H', Y' \quad K', \beta')$，如果对于某个 $g \in G$，我们有$H' = gHg^{-1}$, $Y' = gYg^{-1}$，则存在一个 $K \cong K'$同构，它在k上是平凡的，且与相应的作用相容，并且 β' 是通过 g的共轭从β 得到的。

我们考虑商

$$\mathrm{Symb}_n(G) \to \mathrm{Burn}_n(G)$$

由消失关系和爆破关系给出：

(V) $(H, Y \quad K, \beta) = 0$ when $b_1 + b_2 = 0$.

(B) $(H, Y \quad K, \beta) = \Theta_1 + \Theta_2$，其中：

$$\Theta_1 := \begin{cases} 0, & \text{if } b_1 = b_2, \\ (H, Y \quad K, \beta_1) + (H, Y \quad K, \beta_2), & \text{if } b_1 \neq b_2, \end{cases}$$

$$\Theta_2 := \begin{cases} 0, & \text{if } b_i \in \langle b_1 - b_2 \rangle \text{ for some } i, \\ (\overline{H}, \overline{Y} \quad K(x), \bar{\beta}), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

¯这里 $\overline{H} := \mathrm{Ker}(b_1 - b_2) \subset H$ 是 β 在$\overline{H}^\vee$中的特征像；此外，还有一种构造方法，可以在 $K(x)$上定义一个 $\overline{Y}$-作用，将 Y 在K上的给定作用（经由典范同态 $\overline{Y} \to Y$）扩展到该空间，参见 [21, 第 2]节中的作用构造。

3.4. 计算。设 G 为阿贝尔群。群 $\mathcal{B}_n(G)$由有限多个生成元和关系定义，因此可以有效计算。实际上，对 $n \leq 4$ 和 $|G| < 300$而言，这些计算是可行的。这类计算有助于发现 $\mathcal{B}_n(G)$中有趣的算术结构和组合结构：这些群与 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$的同余子群的上同调有关，带有赫克算子，并具有乘法和余乘法，见 [17], [18], [20]。小阶循环群 C_m 的表格见 [17, 第 5]节。

群 $\mathcal{BC}_n(G)$ 也是有限生成的，且只有有限多个关系，因此是可计算的。结构定理 [33, 定理 5.2], 通过将计算约化为修正后的 $\mathcal{B}_n(H)$, 简化了 $\mathcal{BC}_n(G)$ 的计算，其中 $H \subseteq G$ 为阿贝尔子群。例如，对于 G 阿贝尔的情形，我们在 [33] 中证明了

$$\mathcal{BC}_n(G) = \bigoplus_{H' \subseteq G} \bigoplus_{H'' \subseteq H'} \mathcal{B}_n(H'').$$

我们列出小群的 $\mathcal{B}_2$、 $\mathcal{BC}_2$ 和 $\mathcal{BC}_3$。我们从 $G := C_m$ 开始。

m	$\mathcal{B}_2(G)$	$\mathcal{BC}_2(G)$	$\mathcal{BC}_3(G)$
2	0	0	0
3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0

4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
5	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$	0
6	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}/2$	0
7	$\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
8	$\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/4$	$\mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z}/4$	$\mathbb{Z}/2$
9	$\mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}$
10	$\mathbb{Z}^4 \oplus (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}^8 \oplus (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/6$	$(\mathbb{Z}/2)^2$
11	$\mathbb{Z}^6 \oplus \mathbb{Z}/5$	$\mathbb{Z}^6 \oplus \mathbb{Z}/5$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5$
12	$\mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}/8$	$\mathbb{Z}^{16} \oplus (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/8$	$\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^2$
13	$\mathbb{Z}^8 \oplus \mathbb{Z}/7$	$\mathbb{Z}^8 \oplus \mathbb{Z}/7$	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/7$
14	$\mathbb{Z}^7 \oplus (\mathbb{Z}/2)^4 \oplus \mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}^{13} \oplus (\mathbb{Z}/2)^6 \oplus \mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2)^6$
15	$\mathbb{Z}^{13} \oplus \mathbb{Z}/8$	$\mathbb{Z}^{19} \oplus \mathbb{Z}/8$	$\mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z}/2$
16	$\mathbb{Z}^{10} \oplus (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus \mathbb{Z}/16$	$\mathbb{Z}^{19} \oplus (\mathbb{Z}/2)^2 \oplus (\mathbb{Z}/4)^2 \oplus \mathbb{Z}/16$	$\mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}/2)^7$

下一个表格涉及 $G := C_n \oplus C_m$。

(n,m)	$\mathcal{B}_2(G)$	$\mathcal{BC}_2(G)$	$\mathcal{BC}_3(G)$
(2, 2)	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	0
(2, 4)	$\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}^6 \oplus (\mathbb{Z}/2)^7$	$(\mathbb{Z}/2)^3$
(2, 6)	$\mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}/2)^4 \oplus \mathbb{Z}/4$	$\mathbb{Z}^{20} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{14} \oplus \mathbb{Z}/4$	$(\mathbb{Z}/2)^9$
(2, 8)	$\mathbb{Z}^6 \oplus (\mathbb{Z}/2)^6 \oplus \mathbb{Z}/8$	$\mathbb{Z}^{30} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{18} \oplus (\mathbb{Z}/4)^4 \oplus \mathbb{Z}/8$	$\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{24}$
(4, 4)	$\mathbb{Z}^{11} \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}^{41} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{29}$	$\mathbb{Z}^5 \oplus (\mathbb{Z}/2)^{31}$
(3, 3)	$\mathbb{Z}^7$	$\mathbb{Z}^{15}$	$\mathbb{Z}^3$

我们还记录了小阶非阿贝尔 G的结果。

G	$\mathcal{BC}_2(G)$	$\mathcal{BC}_3(G)$
Q_8	$(\mathbb{Z}/2)^3$	0
$\mathfrak{D}_4$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	0
$\mathfrak{D}_5$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	0
$\mathfrak{A}_5$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	0
$\mathfrak{S}_5$	$(\mathbb{Z}/2)^6 \oplus \mathbb{Z}/4$	0
$\mathfrak{D}_6$	$(\mathbb{Z}/2)^5 \oplus \mathbb{Z}/4$	0
$\mathfrak{A}_6$	$(\mathbb{Z}/2)^7 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$

$\mathfrak{S}_6$	$(\mathbb{Z}/2)^{31} \oplus (\mathbb{Z}/4)^3 \oplus \mathbb{Z}/8$	$(\mathbb{Z}/2)^5 \oplus \mathbb{Z}/4$
$\mathfrak{A}_7$	$(\mathbb{Z}/2)^{12} \oplus (\mathbb{Z}/4)^3 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}^2$	$(\mathbb{Z}/2)^3 \oplus \mathbb{Z}$
$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$	$(\mathbb{Z}/2)^3 \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$
$\mathfrak{D}_5 \times \mathfrak{D}_4$	$(\mathbb{Z}/2)^{118} \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus (\mathbb{Z}/12)^{11} \oplus (\mathbb{Z}/24) \oplus \mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z}/2)^{63} \oplus \mathbb{Z}$

与 $\mathcal{B}_n(G)$和 $\mathcal{BC}_n(G)$不同，$\mathrm{Burn}_n(G)$的计算更为困难。原因之一是，这些符号取决于函数域，即代数簇，而代数簇具有模。例如，平面克雷莫纳群 Cr_2 中有 3 类不可线性化的对合（de Jonqui`ères、Geisser、Bertini），它们固定亏格为≥ 1的曲线 C，并贡献符号

$$\mathfrak{s} = (C_2, 1 \quad k(C), (1)) \in \mathrm{Burn}_2(C_2).$$

由于 Cr_2 中对合的共轭类由 $k(C)$ 唯一确定，符号 $\mathfrak{s}$ 参数化了所有对合的共轭类。

在接下来的章节中，我们将讨论处理 $\mathrm{Burn}_n(G)$ 的各种方法。存在一个自然的同态

$$\mathrm{Burn}_n(G) \to \mathcal{BC}_n(G), \tag{3.3}$$

通过忘却每个符号中的域信息来定义（见 [20, 第 8]节）。注意，该同态不一定是满射。不过，有时可以通过比较作用在同态(3.3)下的类来区分它们，见第7节、第8节和第9节。

3.5. 工具。在低维且 G 较小时，我们可以通过对定义关系进行简单操作来加以简化。供参考，我们列出若干此类针对符号的标准操作；它们与环境群无关，且会被频繁使用。

我们考虑符号

$$\mathfrak{s} = (H, Y \quad K, \beta), \quad \beta = (b_1, \ldots, b_{n-d}), \quad K = k(F), \tag{3.4}$$

其中 H 和 Y 较小。

约化为点类：关系（B）意味着，若 $d \neq n-1$ 和 $b_1 = b_2$，则

$$\mathfrak{s} = (H, Y \quad K(x), (b_2, \ldots, b_{n-d})), \tag{3.5}$$

在 x 上具有平凡的 Y 作用。特别地，满足 (3.4) 中条件$Y = 1$ 和 $F = \mathbb{P}^d$ 的每个符号都可以化简为点符号。

消失：关系（V）意味着 $\mathfrak{s}$ 消失，前提是

$$\sum_{i\in I} b_i = 0 \in H^\vee, \text{ for some } I \subseteq [1,\dots,n-d]. \tag{3.6}$$

循环稳定子群：

- $H = C_2$：若 β 含有多个元素，则由 (V) 可得 $\mathfrak{s} = 0 \in \mathrm{Burn}_n(G)$。假设
$$F \sim_Y F' \times \mathbb{P}^1,$$
且在第二个因子上具有平凡作用。由 (3.5) 和 (V) 可得，
$$\mathfrak{s} = (C_2, Y \quad k(F'), (1,1)) = 0.$$
- $H = C_3$：根据 (3.6)，若其余维为 ≥ 3，则符号 $\mathfrak{s}$ 消失。结合 (B)，可推出
$$(C_3, 1 \quad K, \beta) = 0 \in \mathrm{Burn}_n, \quad \text{for } n \geq 3.$$
对于某些 G，该符号可能非平凡，即属于 $\mathrm{Burn}_2(C_3)$。另一方面，若存在一个中心化 H 的 $C_6 \subset G$，则它会提供额外的关系，从而导致进一步消失。例如，我们有

$$\begin{aligned}(C_3, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (1,1)) =& (C_6, 1 \quad k, (1,4,1)) - (C_6, 1 \quad k, (1,3,1)) \\ & - (C_6, 1 \quad k, (3,4,1)) \\ =& - (C_6, 1 \quad k, (1,3,1)) - (C_6, 1 \quad k, (5,4,1)) \\ & - (C_6, 1 \quad k, (3,1,1)) \\ =& - 2(C_6, 1 \quad k, (1,3,3)) = 0 \in \mathrm{Burn}_3(G).\end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned}(C_3, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (2,2)) =& (C_6, 1 \quad k, (2,5,5)) - (C_6, 1 \quad k, (2,3,5)) \\ & - (C_6, 1 \quad k, (3,5,5)) \\ =& - (C_6, 1 \quad k, (2,1,5)) - (C_6, 1 \quad k, (5,3,5)) \\ & - (C_6, 1 \quad k, (3,5,5)) = 0 \\ =& - 2(C_6, 1 \quad k, (5,3,3)) = 0 \in \mathrm{Burn}_3(G).\end{aligned}$$

- $H := C_4$：考虑 $n = 3$的点符号。只有两个可能非平凡的符号

$$(C_4, 1 \quad k, (1,1,1)), \quad (C_4, 1 \quad k, (3,3,3)), \tag{3.7}$$

利用 (3.6)，我们推导得出

$$0 = (C_4, 1 \quad k, (1,2,1)) = (C_4, 1 \quad k, (3,2,1)) + (C_4, 1 \quad k, (1,1,1)),$$

因此，右侧的第二项消失。同样的论证也适用于 (3.7) 中的另一个符号。

- $H = C_5$：所有符号

$$(C_5, 1 \quad k(\mathbb{P}^d), \beta) \in \mathrm{Burn}_n(G), \quad n \geq 2,$$

都归结为点类。令 $n = 3$，并将 $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ 排序，使用 (O)。可能不消失的生成元为：

$$(C_5, 1 \quad k, (i, i, i)), i = 1, \ldots, 4, \quad (C_5, 1 \quad k, (1, 1, 2)),$$

并转而考虑关系：

$$(C_5, 1 \quad k, (1, 1, 2)) = (C_5, 1 \quad k, (1, 4, 2)) + (C_5, 1 \quad k, (1, 1, 1)).$$

另一方面，我们有

$$(C_5, 1 \quad k, (1, 1, 2)) = (C_5, 1 \quad k(\mathbb{P}^1), (1, 2)) = (C_5, 1 \quad k, (1, 2, 2)) = 0.$$

同样的论证表明，所有其他生成元都消失。综上，我们有：

引理 3.1. 设 G 是一个有限群，且 $n \geq 3$。$\mathrm{Burn}_n(G)$ 中每个稳定子为 $H = C_m \subset G$ 且 $m \leq 6$ 的点类都是平凡的。

证明. 只需对 $n = 3$ 证明这一点。我们已经处理了 m =2、3、4、5。当 $m = 6$ 时，爆破关系中的 Θ_2-项来自：

$$(C_2, C_3 \quad k(\mathbb{P}^1), (1, 1)) = 0,$$
$$(C_3, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (1, 2)) = 0,$$
$$(C_3, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (\pm 1, \pm 1)).$$

我们证明最后这些符号在 $\mathrm{Burn}_3(G)$ 中也为零。首先，

$$\begin{aligned} 0 &= (C_3, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (1, 2)) \\ &= (C_3, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (2, 2)) + (C_3, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (1, 1)). \end{aligned}$$

为简洁起见，对于点类，我们将使用如下记号

$$(b_1, b_2, b_3) = (C_6, 1 \quad k(\mathbb{P}^1), (b_1, b_2, b_3)).$$

应用 (B)，我们得到

$$0 = (1, 4, 1) = (3, 4, 1) + (1, 3, 1) + (C_3, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (1, 1)).$$

类似地，

$$(3, 4, 1) = (3, 4, 3) + (3, 3, 1) + \Theta_2 = 0,$$

由于右侧所有项都为零，根据 (V) 以及这一事实

$$b_3 \in \langle b_1 - b_2 \rangle, \quad b_3 = 3, b_1 = 1, b_2 = 4.$$

现在我们有

$$0 = (3,4,1) = (5,4,1) + (3,1,1). \tag{3.8}$$

因此，所有 Θ_2 项都消失。

接下来请注意，一旦我们知道 $(b_1, b_2, b_3) = 0$，那么将相同关系应用于负数，也可得到 $(-b_1, -b_2, -b_3) = 0$。因此，我们需要证明以下关系序列中非粗体符号的消失，并按给定顺序依次应用这些关系；粗体标出的项是根据 (V)、先前的恒等式，或对先前已证明消失的符号改变符号而消失的项：

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) &= (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{5}) + (1,1,2)\\
(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2}) &= (\mathbf{1},\mathbf{5},\mathbf{2}) + (1,1,1)\\
(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) &= (\mathbf{4},\mathbf{2},\mathbf{3}) + (1,2,2)\\
(1,3,4) &= (\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{4}) + (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{3})\\
(1,1,3) &= (\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3}) + (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2})\\
(2,2,3) &= (\mathbf{2},\mathbf{5},\mathbf{3}) + (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{1})\\
(1,4,4) &= (\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{4}) + (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4})
\end{aligned}$$

□

3.6. 不可压缩对象。对于 $n = 1$，除共轭关系（C）外，不存在其他关系；也就是说，$\mathsf{Burn}_1(G)$ 是由符号张成的自由阿贝尔群

$$(H, 1 \quad k, (b_1)),$$

其中，$H \subseteq G$ 是一个循环子群（模共轭）。

在维数为 $n \geq 2$时，如果一个除子符号没有出现在任何关系（B）的 Θ_2 项中，我们就称其为不可压缩。我们有

$$\mathrm{Burn}_n(G) = \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{triv}}(G) \oplus \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{inc}}(G) \oplus \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{comp}}(G), \tag{3.9}$$

其中

- $\mathsf{Burn}_{\mathrm{triv}\ n}(G)$由符号自由生成

  $$(1, G \quad K, ()),$$

  其中 K 是超越次数为 n、带有 G的一般自由作用的域；

- $\mathsf{Burn}_{\mathrm{inc}\ n}(G)$ 由不可压缩的除子型符号自由张成，并对共轭取商；并且

- 第三个直和项由所有其他符号生成，并满足第3.3节中的关系（参见 [22, 命题 3.4]）。

在某些例子中，不可压缩符号的存在本身就足以区分作用的双有理类型，大大简化了论证（见第7节）。在另一些例子中，则必须在 $\mathrm{Burn}_n^{\mathrm{comp}}(G)$ 中进行计算。

回顾一下，对于 $n=2$，我们有

- 点类，即 $K=k$ 和 $\beta=(b_1,b_2)$，
- 除子类：– 有理曲线的类，即 $K=k(x)$、$\beta=(b_1)$，以及 Y 循环的，– 具有 $\beta=(b_1)$ 且 Y 非循环的有理曲线的类，– 亏格为 ≥ 1 的曲线的类，即满足 $K=k(C)$ 且 C 为一条亏格为 ≥ 1 的曲线的类。

不可压缩除子符号对应于最后两种情形。下表展示了 $G=C_m$ 的 $\mathrm{Burn}_2^{\mathrm{comp}}(G)$ 的结构：

m	$\mathrm{Burn}_2^{\mathrm{comp}}\ G()$
2	0
3	$\mathbb{Z}$
4	$\mathbb{Z}^2$
5	$\mathbb{Z}^2$
6	$\mathbb{Z}^6$
7	$\mathbb{Z}^3\oplus\mathbb{Z}/2$
8	$\mathbb{Z}^8\oplus\mathbb{Z}/2$
9	$\mathbb{Z}^8\oplus\mathbb{Z}/3$
10	$\mathbb{Z}^{11}\oplus\mathbb{Z}/3$
11	$\mathbb{Z}^6\oplus\mathbb{Z}/5$
12	$\mathbb{Z}^{22}\oplus\mathbb{Z}/4$
13	$\mathbb{Z}^8\oplus\mathbb{Z}/7$
14	$\mathbb{Z}^{17}\oplus\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/6$
15	$\mathbb{Z}^{22}\oplus\mathbb{Z}/8$
16	$\mathbb{Z}^{25}\oplus(\mathbb{Z}/2)^2\oplus\mathbb{Z}/8$

不可压缩除子符号的分析

$$\bar{\mathfrak{s}}=(\bar{H},\bar{Y}\qquad k(D),(\bar{b}_1)),$$

在维数为 $n \geq 3$ 时更加复杂。我们尚未尝试进行完整的分类，但可以识别出若干类型，例如，

- D 不是单有理的，
- D 是 G-坚实的，即它不是 G-双有理于一个底空间为正维的 G-等变 Mori 纤维空间（关于维数为 ≤ 3 的环面 G-坚实代数簇的详细研究，参见 [5]），
- $n = 3$ 且 D 是一个有理曲面，它不与 Hirzebruch 曲面 Y-等变双有理；关于此类作用的分类，参见 [11]。

在实际中，如何判断一个符号是否

$$\bar{\mathfrak{s}} := (\bar{H}, \bar{Y} \quad \bar{K}, \beta) \in \mathrm{Burn}_n(G) \tag{3.10}$$

不可压缩？一个必要条件是

$$\bar{K} \not\sim_{\bar{Y}} \bar{K}'(x),$$

其中某个函数域为 K'，且 Y 在 x 上平凡作用；这类符号可由爆破关系从某些特征在 β 中的重数为 ≥ 2 的符号导出。验证此条件后，接下来的步骤是：

(1) 列出阿贝尔子群 $H \subseteq G$ 的所有共轭类，以及它们的中心化子 $Z_G(H)$。(2) 对每个 H，枚举所有非平凡真子群 $H' \subsetneq H$。列出所有子群

$$Y' \subseteq Z_G(H)/H'.$$

(3) 若不存在与 (H, Y) 共轭的 (H', Y')，则 $\bar{\mathfrak{s}}$ 是不可压缩的。(4) 若存在这样一对，则需要详细分析作用构造能否以双有理方式产生所给的作用 $Y \quad K$。

例 3.2。设 $n = 3$ 和 $G = Q_8$。非平凡阿贝尔子群有 4 个共轭类，其中一个为 C_2，其中心化子为 G；另外三个为 C_4，其中心化子是其自身。我们考虑除子符号

$$\bar{\mathfrak{s}} = (C_2, C_2 \times C_2 \quad \bar{K}, (1)) \in \mathrm{Burn}_3(G),$$

其中 $\bar{K} = k(\mathbb{P}^2)$ 和 $\bar{Y} = C_2 \times C_2$ 以线性方式作用，特别是具有不动点。这种作用与 Y 在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的作用并不同构于双有理作用，且后者在第二个因子上是平凡作用。根据上文的步骤 2，这类 $Y = C_2 \times C_2$ 不会出现。

3.7. MRC 商。重新审视关键关系（B）可知，符号中的函数域 $K = k(F)$

$$\mathfrak{s} = (H, Y \qquad k(F), \beta)$$

左侧是有理连通（RC）簇的函数域，当且仅当右侧 Θ_2 项中的 $K(x)$ 满足这一条件。事实上，在任一给定的关系中，所有出现的项的 MRC 商 $r = r(F)$ 的维数都相同。这给出了一个直和分解

$$\mathrm{Burn}_n(G) = \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{triv}}(G) \oplus \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{rc}}(G) \oplus \bigoplus_{r=1}^{n-1} \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{nrc,r}}(G), \tag{3.11}$$

其中

- $\mathrm{Burn}_{\mathrm{triv}n}(G)$ 由满足 $H = 1$ 的符号自由生成，
- $\mathrm{Burn}_{\mathrm{rc}n}(G)$ 由满足 $H \neq 1$ 的符号 $\mathfrak{s}$ 以及域 $K = k(F)$ 生成，其中 F 是一个有理连通簇，并且
- $\mathrm{Burn}_{\mathrm{nrc'r}\ n}(G)$ 由满足 $H \neq 1$ 的符号以及 $K = k(F)$ 生成，后者是一个簇的函数域，其 MRC 商的维数为 r。

这一分解中的不同直和项可能与 $\mathrm{Burn}_n^{\mathrm{inc}}(G)$——不可压缩除子符号——有非平凡交集。

3.8. H^1-平凡性。注意到关系 (B) 保持 $\mathrm{Burn}_n(G)$ 的结构，可以进一步分解

$$\mathrm{H}^1(Y', F), \quad Y' \subseteq Y,$$

其中 F 是符号 $\mathfrak{s}$ 中函数域的一个光滑射影模型。特别地，我们有

$$\mathrm{Burn}_n^{\mathrm{rc}}(G) = \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{rc,H1=0}}(G) \ \oplus \ \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{rc,H1}\neq 0}(G),$$

这取决于 H^1-条件是否平凡（参见第 3 节）。

引理 3.3. 若 $\bar{\mathfrak{s}} \in \mathrm{Burn}_3^{\mathrm{rc}}(G)$ 是一个可压缩除子符号，则

$$\bar{\mathfrak{s}} \in \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{rc,H1=0}}(G).$$

证明. 的确，它只能来自一个符号

$$\mathfrak{s} = (H, Y \qquad k(\mathbb{P}^1), \beta)$$

它是 H^1-平凡的。 □

4. Computing the classes

我们回顾一下光滑射影簇 X 上一般自由的 G-作用的类的定义。按照惯例， G 在 X 上的作用是右作用，而在 $K = k(X)$ 上的诱导作用是左作用。

我们假设 X 处于标准形式，即存在一个开子集 $U \subset X$ ，在此处 G 的作用是自由的，且其补集 $X \setminus U$ 是一个正规交叉除子，使得对于它的每个不可约分支 D 和所有 $g \in G$，都有 $(D \cdot g) \cap D$ 要么为空，要么等于整个 D，详见 [12, 第 7 节。2]，以了解更多细节。函数域 K 的这种模型总可以通过等变爆破得到，而对这种模型进行的每次进一步吹起也仍处于标准形式。它的一个特点是所有稳定子都是阿贝尔群。根据定义，这种作用的类

$$[X \circlearrowleft G] := \sum_H \sum_F (H, Y \quad k(F), \beta_F) \in \mathrm{Burn}_n(G) \tag{4.1}$$

是对具有这些稳定子的极大层 F 的稳定子共轭类 H 求和，并附带子群 $Y \subset Z_G(H)/H$ 在相应函数域上的诱导作用。换言之，该符号记录了一个具有稳定子 H 的（极大）分层的 G-轨道中的一个代表：改变此 G-轨道中的一个不可约分支，会通过某个元素 $g \in G$ 将稳定子、该元素在该不可约分支上的作用，以及在该不可约分支的法丛中的诱导作用共轭起来；这体现于共轭关系 (C) 中。

和式 (4.1) 含有一个特殊的项，

$$(1, G \quad k(X), ()) \in \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{triv}}(G)$$

它反映了 X 一般点上的 G 作用。当然，也可能存在这样的作用：式 (4.1) 中没有其他项，例如椭圆曲线上的平移作用。在这种情况下，伯恩赛德群形式体系无法提供有关 G 作用的信息。另一方面，我们将展示许多例子，其中可以通过将相应的类投影到 $\mathrm{Burn}_n^{\mathrm{inc}}(G)$ 或 $\mathrm{Burn}_n^{\mathrm{comp}}(G)$ 后所得的像来区分这些作用。

我们注意到，不可压缩除子符号可以从任意等变双有理模型中读出，即使该模型并非标准形式。寻找标准模型通常并非易事。事实上，非阿贝尔群 G的线性表示 V 及其等变紧化 $\mathbb{P}(1 \oplus V)$（其中 1 是平凡表示）按定义具有稳定子为非阿贝尔群的分层，例如 V的原点；而要得到阿贝尔稳定子，可能需要多次吹起。在

[22] 中，研究表明，子空间排列的 De Concini–Procesi 紧化的 G-等变版本，为 G在 $\mathbb{P}(V)$上的作用提供了一个标准模型；这里， $\mathbb{P}(V)$中的相关子空间对应于具有非平凡稳定子的轨迹。我们将在第 6 节对此加以说明。文献 [19]介绍了一个类似的算法，用于处理环面簇上的作用。

接下来，假设给定了不同的 G-作用，分别作用在 X 和X' 上，且二者均为标准形式。为区分它们，可将其类表示为 (4.1) 中的形式，并考察差

$$[X \leftharpoonup G] - [X' \leftharpoonup G]$$

to

$$\mathrm{Burn}_n^{\mathrm{inc}}(G).$$

由于该群中的符号之间不存在爆破关系，因此很容易判断这个差是否消失；参见推论 7.7。

如果这个差在该群中确实消失，我们可以考察投影到第 3.6、3.7 和 3.8 节中引入的其他直和项。

$$\mathrm{Burn}_n^{\mathrm{comp}}(G), \quad \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{rc}}(G), \dots$$

如第 3 节所述，这些群通常更难计算。其中一个主要难点是必须追踪无穷多个生成符号，以及由（通常并非平凡的）稳定等变双有理等价所蕴含的关系。例如，根据无名引理，任意两个忠实的 G-表示都是稳定等变双有理的，但不一定等变双有理。在 [14] 中可以找到更多此类稳定等变双有理等价的例子。在某些情况下，我们通过 (3.3) 转而考察组合伯恩赛德群 $\mathcal{BC}_n(G)$，从而克服这一固有难题。我们已实现用于检验 $\mathcal{BC}_n(G)$ 中任意给定类是否非零的算法，适用于所有 $n \geq 2$；不过，这些算法仅在 n 较小时实用。

在接下来的章节中，我们将把这一套方法应用于

- （射影）线性作用于 $\mathbb{P}^n$，其中 $G \subset$射影一般线性群$_{n+1}$， $n \leq 3$,
- 光滑二次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$， $n \leq 4$。

5. Linear actions in dimension one

我们回顾一下有限 $G \subset$ 射影一般线性群$_2$的著名列表：

$$C_m, \mathfrak{D}_m, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5,$$

其中， C_m 是阶为 m 的循环群， $\mathfrak{D}_m$ 是阶为 $2m$的二面体群。对应的 $\mathbb{P}^1$ 上的作用是线性的，当且仅当G是循环群，或是阶数 m 为奇数的二面体群。

$\mathbb{P}^1$ 上的双有理作用分类很简单： $\mathbb{P}^1$ 上的两个G-作用等变双有理，当且仅当对应的表示 V 射影等价，即在射影一般线性群$\mathbf{PGL}_2$中共轭。具体来说：

- $G = C_m$：该作用由形如$\mathbb{P}(1 \oplus \epsilon)$的表示导出，其中 ϵ 是 G的本原特征；给定 ϵ、ϵ'，相应的 G作用为双有理，当且仅当 $\epsilon = \pm\epsilon'$.
- $G = \mathfrak{D}_m$：当 m 为奇数时， G 通过 $\mathfrak{D}_m$的忠实二维表示作用于 $\mathbb{P}^1$ ；当 m 为偶数时， G 通过 $\mathfrak{D}_{2m}$的忠实二维表示作用。两个这样的作用为双有理，当且仅当它们在子群 $C_m \subseteq \mathfrak{D}_m$ 上的限制诱导出 C_m 在 $\mathbb{P}^1$上的双有理作用。
- $G = \mathfrak{A}_4$：这些作用源自 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ 的忠实二维表示，而这些表示全都射影等价。因此， $\mathfrak{A}_4$ 在 $\mathbb{P}^1$上存在唯一的作用。
- $G = \mathfrak{S}_4$：这些作用来自 $\mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ 的忠实二维表示，且它们都射影等价。因此， $\mathfrak{S}_4$ 在 $\mathbb{P}^1$上也只有唯一的作用。
- $G = \mathfrak{A}_5$：这些作用来自 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ 的忠实二维表示。这样的表示有两个，射影化后诱导出 $\mathfrak{A}_5$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上的两个非同构作用。因此， $\mathfrak{A}_5$ 有两个非双有理作用。

注意，在维数为 1 时，循环群的非双有理作用可以由 Reichstein-Youssin 不变量（RY） [27]区分：当C_m 通过特征 χ作用于 $\mathbb{P}^1$ 时，该作用由 $\pm\chi$决定。

在非阿贝尔群的应用中，我们可以考察作用在其阿贝尔子群上的限制的行列式，例如，对 G 二面体群而言。对于 $G = \mathfrak{A}_5$，这两个非双有理作用也可以通过限制到 $C_5 \subset G$来区分：一种情况下，不动点处的权分别为 (1) 和 (4)，另一种情况下则为 (2) 和 (3)。

命题 5.1. 有限群 G 在 $\mathbb{P}^1$ 上的作用的双有理类型由以下内容唯一确定：

$$[\mathbb{P}^1 \circlearrowleft G] \in \mathrm{Burn}_1(G).$$

6. Computing the classes of linear actions

维数为 ≥ 2 的（射影）线性作用在 Burnside 群中的类的计算更加复杂。给定一个忠实

线性表示 $G \to \mathrm{GL}(V^\vee)$，我们可以得到忠实的射影表示 $G/C \to \mathrm{PGL}(V^\vee)$，其中 $C \subset G$ 是通过数量矩阵作用的极大（循环）子群。计算该类的算法

$$[\mathbb{P}(V) \circlearrowleft G/C] \in \mathrm{Burn}_n(G/C)$$

在 $\mathbb{P}^n$ 上的 G/C 诱导作用由 [22]，开发，并在 [32] 中实现。它基于 De Concini–Procesi 方法的等变版本，用于对子空间排列进行精彩紧化，该方法提供了一种将任意给定的射影线性作用转化为标准形式的系统方法。我们注意到

- 所有产生并作为直和项出现的符号

$$[\mathbb{P}(V) \circlearrowleft G] = \sum_H \sum_F (H, Y \qquad k(F), \beta_F),$$

  属于

$$\mathrm{Burn}_n^{\mathrm{rc}}(G),$$

  见 (3.11)，并且

- 所有作用 $Y \qquad k(F)$ 都等变双有理于射影空间上射影线性作用的乘积，且不对因子进行置换（见推论 6.1）。

下面我们阐述主要思路，并辅以两个例子（我们的记号沿用 [22] 中的记法）。首先，考虑以下配对

$$(\Gamma, \epsilon), \quad C \subseteq \Gamma \subseteq G, \quad \epsilon \in \mathrm{Hom}(\Gamma, k^\times), \tag{6.1}$$

其中，Γ 是某个一维子空间 $\ell \subset V$ 的一般稳定子群，而 ϵ 是 Γ 在其对 ℓ 的作用下给出的特征。于是，Γ/C 稳定点 $\mathbb{P}(\ell) \in \mathbb{P}(V)$。集合

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}(V) := \{\text{pairs } (\Gamma, \epsilon) \text{ as above}\} \cup \{\infty\}$$

包含关于子空间配置的信息。特别地，我们将子空间 $\in \mathcal{L}$ 与每一对 $(\Gamma, \epsilon)^{-}$ 关联起来

$$V_{\Gamma,\epsilon} := \{v \in V \mid v \cdot g = \epsilon(g)v, \text{ for all } g \in \Gamma\}.$$

De Concini–Procesi 模型 $\mathbb{P}(V)_{\bar{\mathcal{L}}}$ 定义为自然映射像的闭包

$$\mathbb{P}(V)^\circ \to \mathbb{P}(V) \times \prod_{\substack{(\Gamma,\epsilon)\in\bar{\mathcal{L}} \\ \Gamma \neq C}} \mathbb{P}(V/V_{\Gamma,\epsilon}),$$

其中， $\mathbb{P}(V)^\circ$ 是 $\mathbb{P}(V)$中所有形如 $\mathbb{P}(V_{\Gamma,\ \epsilon}$)的真子空间之并的补集。自然投影

$$\mathbb{P}(V)_{\bar{\mathcal{L}}} \to \mathbb{P}(V)$$

是 $\mathbb{P}(V)^\circ$ 上的同构，其在 $\mathbb{P}(V)_{\bar{\mathcal{L}}}$ 中的补集是一个正规交叉除子。在 $[22,\ \text{命题 } 7.2]$ 中证明了，相对于该除子， G 在 $\mathbb{P}(V)_{\bar{\mathcal{L}}}$ 上的作用具有标准形式。现在我们描述该算法的主要步骤。

输入。忠实线性表示 $G \to \mathrm{GL}(V^\vee)$。

步骤 1。求出 C 和 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(V)$，即 (6.1) 中所有可能的配对 (Γ, ϵ)。

步骤 2。求出所有子空间链，视共轭 G 为等价，

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_t \subsetneq V$$

使得

- $V_i = V_{\Gamma^i,\ \epsilon}$ 对于某一对 $(\Gamma^i, \epsilon) \in \bar{\mathcal{L}}$ ，满足 $\Gamma^i \neq C$，对每个$i = 1$, ..., t，且具有共同特征 ϵ,
- Γ^i 是 V_i 的（极大）稳定子群。

每条子空间链都对应一条稳定子群链，

$$\Lambda := \Gamma^1 \supsetneq \Gamma^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \Gamma^t,$$

以及 Γ^1 的一个特征 ϵ 。

步骤 3。对于每个子空间链 $V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_t$ 的共轭类及其对应的稳定子链 Λ, 求出

- $N_G(\Lambda) \subseteq G$，即 G 中稳定 ϵ 的 Γ^i 的正规化子的交集，这是 Λ. 的稳定子
- Δ^t_Λ， $N_G(\Lambda)$ 中通过标量作用于所有V_{i+1}/V_i的极大子群。

输入表示在 $N_G(\Lambda)$上诱导出一个忠实表示

$$V_1^\vee \times (V_2/V_1)^\vee \times (V_3/V_2)^\vee \times \cdots \times (V/V_t)^\vee,$$

其中， Δ^t_Λ 通过标量作用于每个因子；我们记录 Δ^t_Λ在 V_{i+1}/V_i、 $i = 0$、 .....、 t上的特征 ϵ^i 。按照约定， $V_0 = 0$ 和 $V_{t+1} = V$。

步骤 4。对于每个链的共轭类，计算一个中间类

$$[\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2/V_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(V/V_t) \circlearrowleft N_G(\Lambda)]_{(\mathcal{O}(-1))}$$

相对于一列线丛 $(\mathcal{O}(-1))$ 的 $N_G(\Lambda)$ 诱导作用的

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(-1)\,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2/V_1)}(-1)\,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2/V_1)}(1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_3/V_2)}(-1)\ldots.$

这个中间类取值于

$$\mathrm{Burn}_{n,\{0,\ldots,t\}}(N_G(\Lambda),\Delta^t_\Lambda),$$

关于线丛 $(\mathcal{O}(-1))$ 的等变指标化 Burnside 群，该群在 [22, 第 4 节和第 5] 节中定义。由于 De Concini–Procesi 模型满足 [22, 引理 5.1]，中的条件，我们可以根据 [22, 定义 5.3] 计算中间类。

步骤 5. 递归公式 [22, 命题 8.3 和定理 8.4]可用于计算该类

$$[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G]_{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1))}\in\mathrm{Burn}_{n,\{0\}}(G,C)$$

使用步骤 2 中找到的所有链的中间类。应用此递归，得到该类；它取值于关于线丛 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1))$ 的等变指标化 Burnside 群。

第6步。应用映射

$$\eta_{\{0\}}:\mathrm{Burn}_{n,\{0\}}(G,C)\to\mathrm{Burn}_n(G/C),$$

定义为

$$(C\subseteq H',Z'\qquad K,\beta,\gamma)\mapsto(H'/C,Z'\qquad K,\beta).$$

根据 [22, 定理 8.5]，我们有

$$[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G/C]=\eta_{\{0\}}\left([\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G]_{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1))}\right).$$

输出。类

$$[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G/C]\in\mathrm{Burn}_n(G/C)$$

表示为 $\mathrm{Symb}_n(G)$ 中符号的有限和。

如前所述，一个重要的观察是：

推论 6.1. 类中作为直和项出现的每个符号 $\mathfrak{s}$

$$[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G]\in\mathrm{Burn}_n(G),$$

通过 [21] 中的算法，均具有以下形式

$$\mathfrak{s} = (H, Y \qquad k(F), \beta),$$

其中

- F 与 $\prod_j \mathbb{P}(W_j)$ 双有理等价，
- $Y \subseteq Z_G(H)/H$ 的作用不交换各因子，且
- 在每个因子上的作用都与一个（射影）线性作用（双有理）等价。

特别是，

$$[\mathbb{P}(V) \circlearrowleft G] \in \mathrm{Burn}_n^{\mathrm{rc,H1=0}}(G),$$

（参见第3.8节）。

关于 $G = \mathfrak{S}_4$作用于 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$的一个计算示例，其中$V$是 $\mathfrak{S}_4$的标准三维表示，可见[22, 第 9] 节。这里我们给出维数2和3的新示例。

例6.2。设 $G = C_3 \times \mathfrak{D}_5$ 作用于 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(1 \oplus V_\epsilon)$；这里

$$V_\epsilon := \epsilon \otimes V$$

是 C_3 的标准二维表示经非平凡特征扭积所得的表示，其中生成元的作用方式如下：

$$\begin{pmatrix} \zeta_5 & 0 \\ 0 & \zeta_5^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们汇总了步骤1、2和3所得稳定子群链的共轭类相关信息。

t	Λ	$N_G(\Lambda)$	Δ^t_Λ	ϵ^i
1	$C_3 \times \mathfrak{D}_5$	$C_3 \times \mathfrak{D}_5$	C_3	0
1	C_{15}	C_{15}	平凡	$-$
1	C_6	C_6	C_2	1
1	C_6	C_6	平凡	$-$
1	C_3	$C_3 \times \mathfrak{D}_5$	C_3	1
1	C_2	C_6	C_2	0
2	$C_3 \times \mathfrak{D}_5 \supset C_2$	C_6	C_6	$0, 4$
2	$C_{15} \supset C_3$	C_{15}	C_{15}	$4, 1$
2	$C_6 \supset C_3$	C_6	C_6	$1, 4$
2	$C_6 \supset C_3$	C_6	C_6	$4, 1$
2	$C_6 \supset C_2$	C_6	C_6	$4, 0$

每条链 Λ通过其在步骤 4 中得到的中间类，为 $[\mathbb{P}^2 \circlearrowleft G]$ 作出贡献。我们记录这些类：

- $\Lambda = C_3 \times \mathfrak{D}_5$:

$$(C_3 \subseteq C_3, \mathfrak{D}_5 \quad k(\mathbb{P}^1), (), (0,2)) + (C_3 \subseteq C_6, 1 \quad k, (3), (0,2)) + (C_3 \subseteq C_6, 1 \quad k, (3), (0,5)) + (C_3 \subseteq C_{15}, 1 \quad k, (9), (0,8)) \in \mathrm{Burn}_{3,\{0,1\}}(C_3 \times \mathfrak{D}_5, C_3)$$

- $\Lambda = C_{15}$:

$$(1 \subseteq 1, C_{15} \quad k(\mathbb{P}^1), (), (0,0)) + (1 \subseteq C_{15}, 1 \quad k, (7), (13,2)) + (1 \subseteq C_{15}, 1 \quad k, (8), (13,9)) \in \mathrm{Burn}_{3,\{0,1\}}(C_{15}, 1)$$

- $\Lambda = C_6$ 使用 $\Delta_\Lambda^t = 1$:

$$(1 \subseteq 1, C_6 \quad k(\mathbb{P}^1), (), (0,0)) + (1 \subseteq C_6, 1 \quad k, (1), (2,3)) + (1 \subseteq C_6, 1 \quad k, (5), (2,4)) \in \mathrm{Burn}_{3,\{0,1\}}(C_6, 1)$$

- $\Lambda = C_6$ 使用 $\Delta_\Lambda^t = C_2$:

$$(C_2 \subseteq C_2, C_3 \quad k(\mathbb{P}^1), (), (1,1)) + (C_2 \subseteq C_6, 1 \quad k, (4), (5,3)) + (C_2 \subseteq C_6, 1 \quad k, (2), (5,1)) \in \text{伯恩}_{3,\{0,1\}}(C_6, C_2)$$

- $\Lambda = C_3$:

$$(C_3 \subseteq C_3, \mathfrak{D}_5 \quad k(\mathbb{P}^1), (), (2,1)) + (C_3 \subseteq C_6, 1 \quad k, (3), (2,4)) + (C_3 \subseteq C_6, 1 \quad k, (3), (5,1)) + (C_3 \subseteq C_{15}, 1 \quad k, (9), (8,7)) \in \mathrm{Burn}_{3,\{0,1\}}(C_3, C_3).$$

我们的算法在每个符号中记录函数域上的作用，例如，最后一个表达式中 $\mathfrak{D}_5$ 在 $k(\mathbb{P}^1)$ 上的作用，但我们在记号中省略了它。

当 $t = 2$ 时，每个分次分量都是一维向量空间，其中 $N_G(\Lambda)$ 通过标量作用。我们将得到一些类

$$(N_G(\Lambda) \subseteq N_G(\Lambda), 1 \quad k, (), (\epsilon, \epsilon^1 - \epsilon, \epsilon^2 - \epsilon^1)).$$

然后我们使用步骤5中的递归进行计算

$$[\mathbb{P}(V) \circlearrowleft G]_{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1))} \in \mathrm{Burn}_{n,\{0\}}(G, C).$$

在这个例子中， G 在 $\mathbb{P}^2$上泛型自由作用，因此 $C=1$。应用第6步中的映射$\eta_{\{0\}}$ 并利用关系进行约消后，我们得到

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G] = (1, G \quad k(\mathbb{P}^2), ()) + 2(C_2, C_3 \quad k(\mathbb{P}^1), (1))\\ + (C_3, \mathfrak{D}_5 \quad k(\mathbb{P}^1), (2)) + (C_3, \mathfrak{D}_5 \quad k(\mathbb{P}^1), (1))\\ + (C_6, 1 \quad k, (3,2)) + (C_6, 1 \quad k, (3,4))\\ + (C_6, 1 \quad k, (3,5)) + (C_6, 1 \quad k, (2,1)\\ + (C_6, 1 \quad k, (3,1)) + (C_6, 1 \quad k, (4,5))\\ + (C_{15}, 1 \quad k, (1,11)) + (C_{15}, 1 \quad k, (3,11))\\ + (C_{15}, 1 \quad k, (12,4)).\end{aligned}$$

计算类 $[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G]$[20, Section 5]还有一种替代方法：首先，考虑 $\mathfrak{D}_5$ 通过其二维表示 V 在 $\mathbb{P}^1$ 上的作用。令 L_1 为 C_3 的非平凡特征 ϵ 扭积 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$(1)，并令 L_0 为 $\mathbb{P}^1$ 上的平凡线丛。于是

$$\mathbb{P}(1\oplus V_\epsilon)\sim_G \mathbb{P}(L_0\oplus L_1),$$

等变地。利用 [20, Proposition 5.2]，我们得到

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}(L_0\oplus L_1)\circlearrowleft G] = (1, G \quad k(\mathbb{P}^2), ()) + (C_2, C_3 \quad k(\mathbb{P}^1), (1))\\ + (C_3, \mathfrak{D}_5 \quad k(\mathbb{P}^1), (2)) + (C_3, \mathfrak{D}_5 \quad k(\mathbb{P}^1), (1))\\ + (C_6, 1 \quad k, (3,2)) + (C_6, 1 \quad k, (3,4))\\ + (C_6, 1 \quad k, (3,5)) + (C_6, 1 \quad k, (3,1))\\ + (C_{15}, 1 \quad k, (3,11)) + (C_{15}, 1 \quad k, (3,4)).\end{aligned}$$

这里我们具体说明这些子群及其表示:

$$C_3 = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_3^2 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad C_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \zeta_3 \\ \zeta_3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad C_{15} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_3\zeta_5 & 0 \\ 0 & \zeta_3\zeta_5^4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

注意,

$$\begin{aligned}&[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G] - [\mathbb{P}(L_0\oplus L_1)\circlearrowleft G]\\ &= (C_2, C_3 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) + (C_6, 1 \quad k, (2,1)) + (C_6, 1 \quad k, (4,5))\\ &+ (C_{15}, 1 \quad k, (1,11)) + (C_{15}, 1 \quad k, (12,4)) - (C_{15}, 1 \quad k, (3,4)).\end{aligned}$$

根据共轭关系 (C),

$$(C_{15}, 1 \quad k, (3,4)) = (C_{15}, 1 \quad k, (12,1))$$

爆破关系 (B) 得出

$$(C_{15}, 1 \quad k, (12,1)) = (C_{15}, 1 \quad k, (11,1) + (C_{15}, 1 \quad k, (12,4)),$$

$$(C_6, 1 \quad k, (2,3)) = (C_6, 1 \quad k, (5,3)) + (C_6, 1 \quad k, (2,1)),$$

$$(C_6, 1 \quad k, (3,5)) =$$
$$(C_6, 1 \quad k, (3,2)) + (C_6, 1 \quad k, (4,5)) + (C_2, C_3 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)).$$

将最后两个等式相加，得到

$$(C_6, 1 \quad k, (2,1)) + (C_6, 1 \quad k, (4,5)) + (C_2, C_3 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) = 0$$

并得出

$$[\mathbb{P}(V) \circlearrowleft G] - [\mathbb{P}(L_0 \oplus L_1) \circlearrowleft G] = 0 \in \mathrm{Burn}_2(G),$$

正如预期。

例 6.3。考虑 $G = \mathfrak{D}_7$ 在 $\mathbb{P}^3$ 上的作用，定义如下：

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_7^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_7^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_7^{-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathrm{PGL}_4.$$

稳定子链为

t	Λ	$N_G(\Lambda)$	Δ^t_Λ	ϵ
1	C_2	C_2	C_2	0
1	C_2	C_2	C_2	1
1	C_7	C_7	C_1	2
1	C_7	C_7	C_1	3

等变指标伯恩赛德群中的中间类为：

- $\Lambda = C_2$ with $N_G(\Lambda) = C_2$:

  $$(C_2 \subseteq C_2, 1 \quad k(\mathbb{P}^2), (), (0,1)) \in \mathrm{Burn}_{3,\{0,1\}}(C_2, C_2)$$

- $\Lambda = C_2$ with $N_G(\Lambda) = C_2$:

  $$(C_2 \subseteq C_2, 1 \quad k(\mathbb{P}^2), (), (1,1)) \in \mathrm{Burn}_{3,\{0,1\}}(C_2, C_2)$$

- $\Lambda = C_7$:

$$(C_1 \subseteq C_1, C_7 \quad k(\mathbb{P}^2), (), (0,0)) + (C_1 \subset C_7, 1 \quad k, (5,6), (2,3))$$
$$+ (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (1,2), (2,1)) + (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (1,6), (2,2))$$
$$\in \mathrm{Burn}_{3,\{0,1\}}(C_7, 1)$$

- $\Lambda = C_7$:

$$(C_1 \subseteq C_1, C_7 \quad k(\mathbb{P}^2), (), (0,0)) + (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (4,6), (3,2))$$
$$+ (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (2,3), (3,6)) + (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (1,5), (3,1))$$
$$\in \mathrm{Burn}_{3,\{0,1\}}(C_7, 1).$$

将这些类组合起来，得到

$$[\mathbb{P}(V) \circlearrowleft G]_{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1))} = (C_1 \subseteq C_1, G \quad k(\mathbb{P}^3), (), (0))$$
$$+ (C_1 \subset C_2, 1 \quad k(\mathbb{P}^2), (1), (0)) + (C_1 \subseteq C_2, 1 \quad k(\mathbb{P}^2), (1), (1))$$
$$+ (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (3,5,6), (2)) + (C_1 \subset C_7, 1 \quad k, (1,1,2), (2))$$
$$+ (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (1,2,6), (2)) + (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (2,4,6), (3))$$
$$+ (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (2,3,6), (3)) + (C_1 \subseteq C_7, 1 \quad k, (1,1,5), (3))$$

应用 $\eta_{\{0\}}$ 并使用关系（V），我们得到非零的类

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}(V) \circlearrowleft G] =& (1, G \quad k(\mathbb{P}^3), ()) \\ &+ (C_7, 1 \quad k, (1,1,2)) + (C_7, 1 \quad k, (2,4,6)) \\ &+ (C_7, 1 \quad k, (2,3,6)) \in \mathrm{Burn}_3(G);\end{aligned}$$

事实上，该公式中的点类在$\mathcal{BC}_3(G) = \mathbb{Z}/2$中相等且非零。根据无名引理，该作用与 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$上的一个作用双有理等价，其中第二个因子上的作用是平凡作用，而第一个因子上的作用是忠实作用。

7. Automorphisms of $\mathbb{P}^2$

在本节中，我们将伯恩赛德群形式体系应用于分类有限子群在平面克雷莫纳群 $\mathbf{Cr}_2$ 中的作用（见 [11]），其中分类按共轭进行，并取模于 $\mathbf{PGL}_3$。

对于 $n = 2$，在 $\mathbf{PGL}_3$ 中按共轭分类的作用具有如下形式（我们遵循 [11,第 4 节.2]以及 [22, 第 10] 节）：

- 非传递： $G = C_m \times G'$，其中 $G' \subset \mathbf{GL}_2$,
- 传递但非本原： C_3 或 $\mathfrak{S}_3$ 被双循环群扩张的某些情形,
- 本原： $\mathfrak{A}_5$、 $\mathfrak{A}_6$、$\mathbf{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$、Hessian 群 $3_2 : \mathbf{SL}_2(\mathbb{F}_3)$，以及它的两个子群。

本原作用。这些作用可通过双有理（超）刚性技术得到彻底理解 [28]。例如， $\mathfrak{A}_5$ 有一个， $\mathfrak{A}_6$ 有四个，而 $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上有两个非双有理作用（见 [4, 定理 B.2]）。

命题 7.1。伯恩赛德群形式体系无法区分 $\mathbb{P}^2$ 上的本原作用。

证明通过计算所有涉及的类，并比较相应 Burnside 群中的结果表达式来完成。下面给出一个典型例子：

例 7.2。 $G:=\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上的作用是超刚性的，并且 G 有非同构的三维表示 V 和 V'，由此在 $\mathbb{P}^2=\mathbb{P}(V)$ 和 $\mathbb{P}(V')$ 上得到非双有理的 G-作用。相应表示的特征在 7 阶元素上不同。我们计算这些类

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G] &= (1,G \quad k(\mathbb{P}^2),())+2(C_2,\mathfrak{D}_2 \quad k(\mathbb{P}^1),(1))\\ &+(C_3,1 \quad k,(1,1))+(C_4,1 \quad k,(1,1))+2(C_4,1 \quad k,(1,2))\\ &+(C_7,1 \quad k,(6,5))+(C_7,1 \quad k,(1,4))\\ &+(C_2^2,1 \quad k,((0,1),(1,0)))+((C_2')^2,1 \quad k,((0,1),(1,0)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}(V')\circlearrowleft G] &= (1,G \quad k(\mathbb{P}^2),())+2(C_2,\mathfrak{D}_2 \quad k(\mathbb{P}^1),(1))\\ &+(C_3,1 \quad k,(1,1))+(C_4,1 \quad k,(1,1))+2(C_4,1 \quad k,(2,3))\\ &+(C_7,1 \quad k,(6,3))+(C_7,1 \quad k,(1,2))\\ &+(C_2^2,1 \quad k,((0,1),(1,0)))+((C_2')^2,1 \quad k,((1,1),(1,0))).\end{aligned}$$

表示 V 和 V' 相差 $\zeta_7\mapsto\zeta_7^3$。共轭关系推出

$$[\mathbb{P}(V)\circlearrowleft G]=[\mathbb{P}(V')\circlearrowleft G].$$

我们记录一种在维数 3 中构造不可压缩类的有用方法（见第3.6节）。

命题 7.3。设 G 是一个有限群，且

$$\bar{s}=(\bar{H},\bar{Y} \quad k(\mathbb{P}^1)(t),(\bar{b}))\in \mathrm{Burn}_3(G)$$

¯出现在 Θ_2-关系中的一个符号。因此，Y不允许在 $\mathbb{P}^2$上存在本原作用。

证明。根据分类，我们知道，$\mathfrak{A}_5$在 $\mathbb{P}^2$ 上的作用与 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ [9, 上的作用并非双有理等价（定理 6.6）。1]； $\mathfrak{A}_6$ 而 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ 不能作用于 $\mathbb{P}^1$，因此也不能作用于 $\mathbb{P}^1$上若干线丛之和的射影化。类似的论证也适用于 Hessian 群的子群（它们在 $\mathbb{P}^2$上存在本原作用）。□

传递非本原作用。这类作用有四种类型：其中两种是 C_3 的扩张，而另外两种则出现在 G 是 $\mathfrak{S}_3$的扩张时，参见定理 4。 G [11, 7]

命题 7.4。伯恩赛德群形式体系可以区分传递非本原作用，而（RY）不变量无法区分这些作用。

我们并未声称能够区分所有此类作用。在四种类型中的每一种里，都存在一个双循环群 $H \subset G$；限制到 H并对 H应用 Reichstein-Youssin 行列式不变量（RY），在某些情况下会得到非双有理作用。我们的例子聚焦于 [11, 定理 4.7], 中较简单的类型，因为较小的作用更难区分。

我们考虑：

（1）扩张

$$1 \to C_n \oplus C_n \to G \to C_3 \to 1$$

其中在 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(s,t)$ 上的作用由下式给出

$$(x:y:z) \mapsto (\zeta_n^s x : y : z),\ (x : \zeta_n^t y : z),\ (z : x : y), \tag{7.1}$$

其中 $s,t \in (\mathbb{Z}/n)^\times$，且 ζ_n 是一个本原 n 次单位根。

(2) 扩张

$$1 \to C_n \oplus C_m \to G \to C_3 \to 1,$$

其中 $m = n/d$，其中 $d > 1$, $d|n$, $s^2 - s + 1 = 0$ (模 d)，且在 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(r,s,t)$ 上的作用为

$$(x:y:z) \mapsto (\zeta_m^r x : y : z),\ (\zeta_n^s x : \zeta_n^t y : z),\ (z : x : y). \tag{7.2}$$

例 7.5. 设 G 是一个类型为 (1) 的群，其中 $n = 8$。考虑 (7.1) 中的作用，其中 和

$$s = 1, \quad t = 7,$$

分别,

$$s' = 3, \quad t' = 5.$$

在此情形下，（RY）不变量无法给出明确结论。按照第 6 节中的方法计算伯恩赛德符号，我们得到

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}^2(s,t) \circlearrowleft G] = (1, G \quad & k(\mathbb{P}^2), ()) \\ + (C_8, C_8 \quad & k(\mathbb{P}^1), (3)) + (C_8, C_8 \quad k(\mathbb{P}^1), (5)) \\ + (C_8^2, 1 \quad & k, ((1,2),(6,7))) + (C_8^2, 1 \quad k, ((7,6),(7,1))).\end{aligned}$$

$$[\mathbb{P}^2(s',t') \circlearrowleft G] = (1, G \quad k(\mathbb{P}^2), ()) \\ + (C_8, C_8 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) + (C_8, C_8 \quad k(\mathbb{P}^1), (7)) \\ + (C_8^2, 1 \quad k, ((3,6),(2,5))) + (C_8^2, 1 \quad k, ((5,2),(5,3))).$$

（和之前一样，我们在记号中省略了对 k（$\mathbb{P}^1$）上 C_8 的作用的说明。）上述表达式中没有不可压缩符号，但在将映射 (3.3) 应用于两者之差后，我们仍能在组合伯恩赛德群中区分这两个作用

$$[\mathbb{P}^2(s,t) \circlearrowleft G] - [\mathbb{P}^2(s',t') \circlearrowleft G],$$

并在 $\mathcal{BC}_2(G)$ 中进行 magma 计算。

同样的论证适用于 $n = 5$、$s = 1$、$t = 2$、$s' = 3$ 和 $t' = 4$；或者 $n = 9$、$s = 2$、$t = 3$、$s' = 4$ 和 $t' = 6$。

例 7.6. 设 G通过类型 (2) 作用，其中 $n = 14$ 和 $m = 2$。考虑如下 (7.2) 中的作用：

$$r = t = 1, s = 3,$$

分别，

$$r' = t' = 1, s' = 5.$$

同样，（RY）不变量无法得出结论。我们有

$$[\mathbb{P}^2(r,s,t) \circlearrowleft G] = (1, G \quad k(\mathbb{P}^2), ()) \\ + (C_2, C_{14} \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) + (C_2, C_{14} \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) \\ + (C_2 \times C_{14}, 1 \quad k, ((0,3),(1,5))) \\ + (C_2 \times C_{14}, 1 \quad k, ((0,11),(1,8))),$$

$$[\mathbb{P}^2(r',s',t') \circlearrowleft G] = (1, G \quad k(\mathbb{P}^2), ()) \\ + (C_2, C_{14} \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) + (C_2, C_{14} \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) \\ + (C_2 \times C_{14}, 1 \quad k, ((1,11),(0,1))) \\ + (C_2 \times C_{14}, 1 \quad k, ((1,3),(1,12))).$$

将映射 (3.3) 应用于差值，并在 $\mathcal{BC}_2(G)$ 中计算，我们发现这些作用不是双有理的。

非传递作用。存在 G-不动点，使得使用双有理刚性技术对非传递作用进行分类变得更加困难。然而，这种情形非常适合采用伯恩赛德群形式体系。回想一下，非传递作用的形式为

$$G = C_n \times G', \quad n \geq 2,$$

¯其中 $G' \subset \mathbf{GL}_2$ 是子群 $G' \subset \mathbf{PGL}_2$ 的一个提升。我们再次处于第5节的情形：

- $\bar{G'} = C_m$ 对于某个 $m \geq 2$。那么 G' 也是一个循环群，即 G 是秩为2的阿贝尔群。（RY）不变量决定了此类作用的等变双有理性 [27, 定理 7.1]._

- $G' = \mathfrak{D}_m$、$\mathfrak{A}_4$、$\mathfrak{S}_4$ 或 $\mathfrak{A}_5$。根据 [22, 第 10], 节，我们知道，当 $\varphi(n) \geq 3$ 时， G存在非双有理作用。这里我们修改证明，以涵盖 $n \geq 2$时的更多情形。

令 ϵ 为 C_m的一个本原特征， V 为 G'的一个忠实二维线性表示，而 $V_\epsilon := \epsilon \otimes V$为其经 ϵ扭积所得的表示。这给出了在 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$上的一个一般自由作用 G-作用（$1 \oplus V_\epsilon$）。为了将该作用化为标准形式，我们首先需要吹起点 $(1:0:0)$，因为该点的一般稳定子非阿贝尔。例外因子上的作用由 $\mathbb{P}(V_\epsilon)$ 给出。在标准模型上，有两个因子的一般稳定子为 H，其中 H 是 G中经由标量在 V_ϵ上作用的极大子群。举例而言，当 $G' = \mathfrak{A}_5$时，我们可以选择提升 $G' = \mathbf{SL}_2(\mathbb{F}_5)$，此时，

$$H = \begin{cases} C_n & \text{when } n \text{ is even,} \\ C_{2n} & \text{when } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

令 χ_ϵ 为与该作用对应的特征，它取决于 ϵ 的选择。两个因子贡献

$$(H, \bar{G}' \quad k(\mathbb{P}(V)), (\chi_\epsilon)) + (H, \bar{G}' \quad k(\mathbb{P}(V)), (-\chi_\epsilon)) \tag{7.3}$$

到类 $[\mathbb{P}^2 \circlearrowleft G]$；如第3.6节所述，这些符号是不可压缩的。当 $\varphi(n) \geq 3$ 时，我们可以通过选择特征 $\epsilon \neq \pm\epsilon'$ 来构造非双有理作用。但还可以做得更好：

¯ ¯推论 7.7. 对于 $G' = \mathfrak{D}_m$，当 $m \neq 1$ 为 2、3、4、6、8、12 或 $G' = \mathfrak{A}_5$，且对所有 $n \geq 2$，群 $G = C_n \times G'$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上都存在非双有理线性作用。

证明. 根据第5节，我们知道 $\mathfrak{D}_m$，其中 m 如陈述所述，而 $\mathfrak{A}_5$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上存在非双有理作用。这将为 (7.3) 贡献不同的不可压缩符号。□

¯现在我们更详细地考虑 $G' = \mathfrak{D}_m$ 的情形。回顾一下，当m 为奇数时，$\mathfrak{D}_m$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上的一般自由作用是线性的；当 m 为偶数时，该作用是射影线性的——它来自 $\mathfrak{D}_{2m}$ 的一个二维忠实表示。在这两种情况下，该表示由一个

本原特征 ψ 决定，分别属于 C_m和 C_{2m}，记作 $V_{\psi\circ}$ 我们得到 $G = C_n \times \mathfrak{D}_m$ 在

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\epsilon, \psi) := \mathbb{P}(1 \oplus V_{\epsilon,\psi}), \quad V_{\epsilon,\psi} := \epsilon \otimes V_\psi.$$

引理 7.8. 我们有

$$\mathbb{P}^2(\epsilon, \psi) \sim_G \mathbb{P}^2(-\epsilon, \psi) \sim_G \mathbb{P}^2(\epsilon, -\psi) \sim_G \mathbb{P}^2(-\epsilon, -\psi).$$

证明. 实际上，从 G-作用于 $\mathbb{P}^2(\epsilon, \psi)$ 到其他作用的等变双有理性由下式实现

$$(x : y : z) \dashrightarrow (\frac{1}{x} : \frac{1}{z} : \frac{1}{y}),\ (x : z : y),\ \text{and}\ (\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}),$$

分别。 □

m 是奇数：以下不可压缩符号之和

$$(C_n, \mathfrak{D}_m \quad k(\mathbb{P}(V_\psi)), \epsilon) + (C_n, \mathfrak{D}_m \quad k(\mathbb{P}(V_\psi)), -\epsilon) \tag{7.4}$$

对类 $[\mathbb{P}^2(\epsilon, \psi) \circlearrowleft G]$ 有贡献；我们可以得到 $\mathbb{P}^2(\epsilon', \psi')$ 上 G-作用的类似表达式。我们观察到：

- 当 $\epsilon \neq \pm\epsilon'$ 时，(7.4) 中的符号具有不同的权；
- 当 $\psi \neq \pm\psi'$ 时，$\mathfrak{D}_m$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上的作用彼此不具有双有理性。

引理 7.8 表明，伯恩赛德群形式体系在此情形下决定了等变双有理性。

另一方面，当 m 为偶数时，等变双有理类型的分类仍然是一个开放问题：

例 7.9。考虑 $G = C_3 \times \mathfrak{D}_8$，并令 $\psi' := \psi^3$。则

$$[\mathbb{P}^2(\epsilon, \psi) \circlearrowleft G] - [\mathbb{P}^2(\epsilon, \psi') \circlearrowleft G] = 0 \in \mathrm{Burn}_2(G).$$

然而，我们无法判断是否

$$\mathbb{P}^2(\epsilon, \psi) \overset{?}{\sim}_G \mathbb{P}^2(\epsilon, \psi').$$

具体而言，

$$
\begin{aligned}
&[\mathbb{P}^2(\epsilon,\psi)\circlearrowleft G] = (1, G \quad k(\mathbb{P}^2), ()) \\
&+ 2(C_2, C_6 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) + 2(C_2', C_6 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) \\
&+ (C_6, \mathfrak{D}_4 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) + (C_6, \mathfrak{D}_4 \quad k(\mathbb{P}^1), (5)) \\
&+ (C_2'' \times C_6, 1 \quad k, ((0,3),(1,5))) + (C_2'' \times C_6, 1 \quad k, ((1,2),(1,1))) \\
&+ (C_2'' \times C_6, 1 \quad k, ((1,4),(0,3))) + (C_2''' \times C_6, 1 \quad k, ((1,2),(0,3))) \\
&+ (C_2''' \times C_6, 1 \quad k, ((1,5),(1,4))) + (C_2''' \times C_6, 1 \quad k, ((1,1),(0,3))) \\
&+ (C_{24}, 1 \quad k, (19,11)) + (C_{24}, 1 \quad k, (5,6)) + (C_{24}, 1 \quad k, (19,18)),
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&[\mathbb{P}^2(\epsilon,\psi')\circlearrowleft G] \\
&= (1, G \quad k(\mathbb{P}^2), ()) + \dots \\
&+ (C_{24}, 1 \quad k, (6,17)) + (C_{24}, 1 \quad k, (7,23)) + (C_{24}, 1 \quad k, (7,18)),
\end{aligned}
$$

唯一的差异在于稳定子为 C_{24} 的项之和，而这些表达式在 $\mathsf{Burn}_2(G)$ 中相等。

8. Automorphisms of $\mathbb{P}^3$

本节中，我们给出关于 $\mathbb{P}^3$ 上非双有理本原线性作用的新例子。基本术语如下：

$$
\text{actions}\begin{cases}\text{intransitive: invariant point or line}\\ \text{transitive:}\begin{cases}\text{imprimitive:}\begin{cases}\text{2 skew lines}\\ \text{orbit of length 4 (monomial)}\end{cases}\\ \text{primitive: none of the above}\end{cases}\end{cases}
$$

本原作用。我们遵循 [10]。有限子群 $G \subset \mathsf{PGL}_4$ 中有 30 个共轭类给出本原作用。它们连同包含关系列于 [10, 附录 A]。这些作用可以用双有理（超）刚性技术分析，参见 [7] 或 [10]。根据 [10, 定理 11]，，该作用是双有理刚性的，当且仅当 $G \neq \mathfrak{A}_5$ 或 $\mathfrak{S}_5$。这意味着，对任意 G双有理模型应用 G极小模型纲领后，都会归约到$\mathbb{P}^3$；但这并不意味着 $\mathbb{P}^3$ 上的不同作用是等变双有理的。现在列出 Burnside 类的代表性计算：

- $G := \mathfrak{A}_5$: 令 V 为其不可约四维表示。考虑在 $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$上的诱导作用。于是

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}^3 \circlearrowleft G] = (1, \mathfrak{A}_5 \quad k(\mathbb{P}^3), ()) + 2(C_2, C_2 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) \\ + (C_3, 1 \quad k(\mathbb{P}^1), (2,2)) + (C_3, 1 \quad k(\mathbb{P}^1), (1,1)) \\ + (C_5, \quad k, (1,1,1)) + (C_5, C_5 \quad k, (2,2,4))\end{aligned}$$

根据引理 3.1，点类是平凡的；此外，

$$(C_2, C_2 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) = (C_2, C_2 \quad k(\mathbb{P}^1), (1,1)) = 0 \in \mathrm{Burn}_3(G),$$

$$(C_3, 1 \quad k(\mathbb{P}^1), (b,b)) = (C_3, 1 \quad k, (b,b,b)) = 0 \in \mathrm{Burn}_3(G),$$

根据 (B) 和消失关系（V）。

- $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$: $\mathbb{P}^3$ 上的 G作用是超刚性的（定理 1.3], ），但每个忠实作用都给出 [10,

$$[\mathbb{P}^3 \circlearrowleft G] = (1, G \quad \mathbb{P}^3, ()) \in \mathrm{Burn}_3(G).$$

- $G = \mathfrak{A}_6$: 只有两种作用；它们是刚性的，但不是超刚性的，因此等变双有理。相应的类为

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}^3 \circlearrowleft G] = (1, G \quad k(\mathbb{P}^3), ()) + (C_3, C_3 \quad k(\mathbb{P}^2), (2)), \\ + (C_3^2, 1 \quad k, ((2,2), (0,1), (2,1))) \\ + (C_3^2, 1 \quad k, ((0,2), (2,1), (2,2))).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}^3 \circlearrowleft G] = (1, G \quad k(\mathbb{P}^3), ()) + (C_3', C_3 \quad k(\mathbb{P}^2), (2)), \\ + (C_3^2, 1 \quad k, ((0,2), (1,1), (1,0))) \\ + (C_3^2, 1 \quad k, ((0,2), (1,0), (2,2))),\end{aligned}$$

而它们在 $\mathcal{BC}_3(G)$ 中的非平凡类贡献相等，正如预期。但它们在这个群中并非平凡。

- $G = \mathfrak{S}_6$: 有两个作用，其 Burnside 类分别为

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}^3 \circlearrowleft G] = (C_1, \mathfrak{S}_6 \quad k(\mathbb{P}^3), ()) \\ + (C_2, \mathfrak{A}_4 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) + (C_2', \mathfrak{A}_4 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) \\ + (C_2'', C_2^2 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) + (C_3, \mathfrak{S}_3 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) \\ + (C_3^2, 1 \quad k, ((1,1), (1,2), (2,0))),\end{aligned}$$

分别为,

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}^3 \circlearrowleft G] = (C_1, \mathfrak{S}_6 \quad & k(\mathbb{P}^3), ()) \\ + (C_2, \mathfrak{A}_4 \quad & k(\mathbb{P}^2), (1)) + (C_2', \mathfrak{A}_4 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) \\ + (C_2'', C_2^2 \quad & k(\mathbb{P}^2), (1)) + (C_3', \mathfrak{S}_3 \quad k(\mathbb{P}^2), (2)) \\ + (C_3^2, 1 \quad & k, ((0,2),(2,0),(2,2)))\end{aligned}$$

它们在 $\mathcal{BC}_3(G) = (\mathbb{Z}/2)^5 \oplus \mathbb{Z}/4$ 上不同；因此，这些作用并非双有理等价。

- $G = \mathfrak{A}_7$：有两个作用。这些作用是超刚性的，因此彼此不双有理等价。相应的类为：

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}^3 \circlearrowleft G] = (1, G \quad & k(\mathbb{P}^3), ()) + (C_2, \mathfrak{S}_3 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) \\ + (C_3, \mathfrak{A}_4 \quad & k(\mathbb{P}^2), (2)) \\ + (C_7, 1 \quad & k, (2,4,4)) + (C_7, 1 \quad k, (1,3,5)) \\ + (C_7, 1 \quad & k, (2,3,3)) \\ + (C_3^2, 1 \quad & k, ((0,1),(1,1),(2,0))) \\ + (C_3^2, 1 \quad & k, ((0,1),(2,0),(2,2))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}^3 \circlearrowleft G] = (1, G \quad & k(\mathbb{P}^3), ()) + (C_2, \mathfrak{S}_3 \quad k(\mathbb{P}^2), (1)) \\ + (C_3, \mathfrak{A}_4 \quad & k(\mathbb{P}^2), (2)) \\ + (C_7, 1 \quad & k, (2,4,4)) + (C_7, 1 \quad k, (1,3,5)) \\ + (C_7, 1 \quad & k, (2,3,3)) \\ + (C_3^2, 1 \quad & k, ((0,1),(1,0),(2,1))) \\ + (C_3^2, 1 \quad & k, ((0,1),(1,0),(1,2))).\end{aligned}$$

我们有 $\mathcal{BC}_3(G) = (\mathbb{Z}/2)^3 \oplus \mathbb{Z}$，这两个作用的组合 Burnside 类（非平凡贡献）相等；在这种情况下，这意味着它们在 $\mathrm{Burn}_3(G)$ 中的类相等。

传递非本原作用。回顾一下，它们有两种类型：

- 使两条异面直线的并保持不变，
- 具有长度为 4 的轨道（单项式子群）

第二类已在 [6] 中得到分析；根据其主定理，除(GAP ID)之外，每个 im- 本原单项子群

$$G_{48,3}, \quad G_{96,72}, \quad \text{or} \quad G_{324,160},$$

都是 G-固的（即不与圆锥丛或 Del Pezzo 纤维化 G-双有理）。非双有理作用的例子见 [6, 例 1.6、1.7 和 1.8]。

这里我们介绍伯恩赛德群形式体系在保持两条异面直线不变的作用中的应用。

例 8.1. 令 $G := \mathfrak{D}_5 \times \mathfrak{D}_4$，并用 ψ_m 表示 C_m 的一个本原特征标。与第7节中一样，令 V_ψ 为由 ψ_m 确定的 $\mathfrak{D}_m$ 的忠实二维表示。

我们在以下空间上有泛自由的线性 G-作用

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V_{\psi_5} \oplus V_{\psi_4}), \quad \text{respectively,} \quad \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V_{\psi_5^2} \oplus V_{\psi_4}). \tag{8.1}$$

我们的算法将 (8.1) 中每个作用的类表示为 60 多个符号之和；我们已将它们列于 [32]。同样，取 magma 后，我们发现类之差在 $\mathcal{BC}_3(G)$ 上的投影非零，因此得出这些作用并非双有理。

这是我们能找到的最小此类例子；对于 $G := \mathfrak{D}_7 \times \mathfrak{D}_4$（并将 ψ_5 替换为 ψ_7），结论也相同。

非传递作用：讨论与第7节中的讨论类似。在3维情形下，非传递作用具有以下形式：

$$G = C_n \times G', \quad n \geq 2,$$

其中，$G' \subset \mathrm{GL}_3$ 是 $G' \subset \mathrm{PGL}_3$的一个提升。在 [22, 定理11.2]中证明了，当

$$\bar{G}' = \mathfrak{S}_4, \quad \mathfrak{A}_5, \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \quad \mathfrak{A}_6 \quad \text{and} \quad \varphi(n) \geq 3,$$

G 具有非双有理作用。这里我们再次使用相同的论证来涵盖更多情形：设 V 是 G' 的一个3维忠实表示，ϵ 是 C_n的一个本原特征。令 $V_\epsilon := \epsilon \otimes V$，并考虑作用 $\mathbb{P}(1 \oplus V_\epsilon)$。我们需要吹起不动点$(1:0:0)$，使该作用变为标准形式；在吹起模型上，将有两个一般稳定子为 H的因子，其中 H 是 G 中通过标量作用的极大子群。它们对类的贡献为

$$(H, \bar{G}' \quad k(\mathbb{P}(V)), (\chi_\epsilon)) + (H, \bar{G}' \quad k(\mathbb{P}(V)), (-\chi_\epsilon)).$$

对于我们所选的 G'，这些符号不可压缩，因为 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ 和 $\mathfrak{A}_6$ 都是非阿贝尔群，且不能在 $\mathbb{P}^1$ 上产生一般自由作用（见命题 7.3）。$\mathfrak{S}_4$ 和 $\mathfrak{A}_5$ 在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的作用，若在一个因子上是平凡作用、在另一个因子上是一般自由作用，则不可

¯线性化。与推论 7.7 类似，我们知道，若 G' 在 $\mathbb{P}^2$ 上存在非双有理作用，则 G 在 $\mathbb{P}^3$ 上也存在非双有理作用。沿用上述记号，我们得到：

¯推论 8.2. 对于 $G = C_n \times G'$，若其为 $G' = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ 或 $\mathfrak{A}_6$，则对所有 $n \geq 2$，存在作用于 $\mathbb{P}^3$ 上的非双有理非传递 G-作用。

¯证明。与第7节中一样，这些对 G' 的选择在 $\mathbb{P}^2$. 上给出了非双有理作用 □

9. Automorphisms of quadrics

关于非闭域上二次曲面的双有理性的文献十分丰富（例如参见 [30]）；当然，只有在不存在 k-有理点时，这个问题才有意义。其中一个核心问题如下。

二次曲面的 Zariski 问题：若两个定义在非闭域上、维数相同的光滑二次曲面稳定双有理，则它们双有理。

这在维数 ≤ 7 中是已知的。另一方面，在 G-等变的情形下，已经有例子表明，二次曲面可以稳定等变双有理等价，却并非双有理等价，且这种现象在维数 2 时就已出现。其等变几何已在例如 [15], [29], [14, Section7] 中有所研究。特别地，二次曲面 $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 在奇数 n 时允许 $G = C_2 \times \mathfrak{D}_n$ 的作用；这些作用并不同于线性作用双有理等价，但 $Q \times \mathbb{P}^2$ 上的 G-作用与第二个因子上的平凡 G-作用构成的作用，却双有理等价于线性作用 [24], [14]。存在这类稳定双有理等价，使得 $\mathbf{Burn}_n^{\mathrm{rc}}(G)$, $n \geq 3$ 的分析颇具挑战，因为必须考虑所有这类可能性。

我们不了解是否有人系统研究过高维二次曲面的 G-等变几何。特别是，系统研究构造到射影空间的 G-等变（稳定）双有理等价将会很有意思，而这类构造不依赖于 G-不动点的存在。

关于不动点的假设：从不动点进行投影，可直接得到该作用可线性化，因此我们将假设

- $X^G = \emptyset$.

另一方面，对于阿贝尔群的作用，不动点的存在性是一个双有理不变量；而阿贝尔群的线性作用都有不动点，因此我们将假设

- $X^H \neq \emptyset$，对所有阿贝尔 $H \subset G$。

本节从伯恩赛德群的角度考察二次曲面自同构的双有理分类。特别地，我们聚焦于满足上述假设的 G-作用。

圆锥曲线：考虑由下式给出的 $X \subset \mathbb{P}^2$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j^2 = 0,$$

其上有韦伊群 $W(\mathrm{D}_3) = \mathfrak{S}_4$的子群 G 作用。群 $W(\mathrm{D}_3)$有11个子群共轭类。只有一个满足要求（关于不动点），即 $\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$，且 $\tau^2 = \sigma^3 = 1$，并在坐标上具有自然置换作用；此作用可线性化。接下来讨论二次曲面。

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$上的阿贝尔作用：其双有理分类见 [1,命题6.2。4]在 [12, 第5节 5] 中，我们指出以下 C_2^2 在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的作用无法通过伯恩赛德形式体系加以区分：乘积作用有不动点，而对角作用没有，因此这些作用并非双有理等价，但其类在伯恩赛德群非平凡部分中的投影均为零。

另一方面，考虑以下作用于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的 C_2^3 的不可线性化作用：第一种情形下，在一个因子上通过 $\mathfrak{K}_4 = C_2^2$，在另一个因子上通过 C_2；第二种情形下，在两个因子上都通过 $\mathfrak{K}_4$，并伴有因子交换。在第一种情形下，我们记录

$$2(C_2, \mathfrak{K}_4 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)),$$

它来自第二个 $\mathbb{P}^1$ 上的两个不动点；而在第二种情形下，只有一个这样的类。由于这个符号不可压缩（见 [22, Proposition 3.6]），我们得出结论：这两个作用在 Burnside 群中对应不同的类。

在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的非阿贝尔作用：此类作用的完整列表见 [11, 定理 4.9]。这里我们考虑由下式给出的二次曲面 Q

$$\sum_{j=1}^{4} x_j^2 = 0. \tag{9.1}$$

我们重点研究改变变量符号并置换变量的作用。满足不动点假设的此类群有 2 个共轭类 G ，即:

$$\mathfrak{D}_6 \longrightarrow \mathfrak{S}_3,$$

其中

$$\mathfrak{D}_6 = C_2 \times \mathfrak{S}_3 = \langle \iota, \sigma, \tau \rangle, \quad \tau^2 = \sigma^3 = 1.$$

这里， ι 在 x_4上反转符号， $\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma$通过置换前三个坐标来作用，特化到 $\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma$、 $\iota \cdot \tau \rangle$。

无不动点的 $\mathfrak{S}_3$-作用是可线性化的；它与 $\mathbb{P}(1 \oplus V_2)$上的一个作用双有理等价，其中 V_2 是 $\mathfrak{S}_3$的标准二维表示；特别地， $\mathbb{P}^2$上有一个不动点。

另一方面，根据 [24, 第 9] 节（另见 [14, 第 6]节），$\mathfrak{D}_6$在 Q 上的作用不可线性化，但稳定可线性化。 [15] 中关于不可线性化性的证明基于有理曲面之间双有理变换（链接）的分类。另一种使用伯恩赛德群形式体系的证明见 [12, 第7节。6]；我们将在下面的例子中给出类似的论证。

例 9.1。设 $G = C_2^2 \times \mathfrak{S}_3$。我们分析这个符号是否

$$\bar{\mathfrak{s}} = (C_2, C_2 \times \mathfrak{S}_3 \quad \bar{K}, (1)) \in \mathrm{Burn}_3(G), \quad \bar{K} = k(Q),$$

不可压缩。存在一个候选符号

$$\mathfrak{s} = (C_2^2, \mathfrak{S}_3 \quad K, (e_1, e_2)),$$

可通过爆破关系（B）得到给定的 $\bar{\mathfrak{s}}$ 。这里， e_1、 e_2是 C_2^2的非平凡且互不相同的特征。

我们来具体说明 $K = k(Q)$上的作用，其中 $Y = C_2 \times \mathfrak{S}_3$ 在 Q 是 (9.1) 中的二次曲面： C_2 改变 x_4 上的符号，而 $\mathfrak{S}_3$ 置换前三个坐标。

由于 Q 是有理的，我们必须有 $K = k(\mathbb{P}^1)$。Action 构造-¯生成了 Θ_2-项，其中 Y-作用双有理等价于 Hirzebruch 曲面 F 上的一个作用；该曲面是 $\mathbb{P}^1$ 上秩二向量丛的射影化，其作用要么是平凡作用，要么是在一般纤维上的 C_2-作用。

在第一种情况下，这样的作用与 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$上的一个作用双有理等价，其中 $C_2 \times \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{D}_6$ 作用在其中一个因子上，而第二个因子上的作用是平凡作用。将此作用限制到 $C_2 \times \mathfrak{S}_2 \subset C_2 \times \mathfrak{S}_3$后，它没有不动点；而 Q 上的 Y作用并非如此。因此，这些作用并不双有理等价。

¯在第二种情况下，我们比较 $\mathrm{Burn}_2(Y)$中的类，分别对应于 Q 和 F 上的作用。我们发现一个不可压缩符号

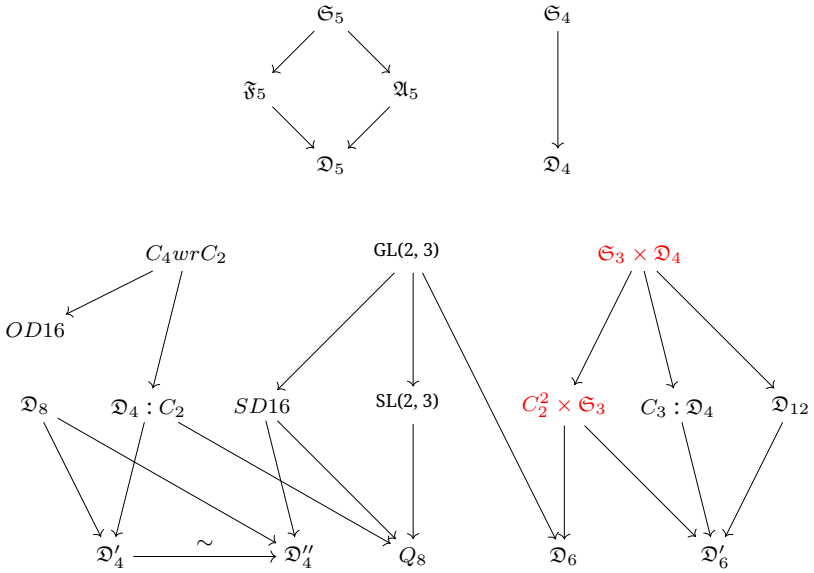
$$(C_2, \mathfrak{S}_3 \quad k(\mathbb{P}^1), (1)) \in \mathrm{Burn}_2(C_2 \times \mathfrak{S}_3)$$

¯属于类 $[Q \circlearrowleft Y]$，而两个这样的符号对应于由 C_2 固定的两个¯截面，属于类 $[F \circlearrowleft Y]$ （见第3.6节）。因此，这些作用不是双有理的，并且 $\bar{5}$ 是不可压缩的。

三维二次超曲面：我们首先考虑由 $\sum_{j=1}^{5} x_j^2 = 0$ 给出的 $X \subset \mathbb{P}^4$，其上有韦伊群 $W(\mathrm{D}_5)$ 的自然作用。该群有 197 个子群共轭类，在 [23, 第 5] 节中对其进行了考察，相关内容是对德尔佩佐曲面次数为 4 时皮卡群上可能的伽罗瓦作用（或自同构）的分析；其目标是识别非闭域上可能为有理的曲面（另见[31]）。有 112 个子群（共轭类） $G \subset W(\mathrm{D}_5)$ 可产生无不动点作用。

我们关注线性化问题。请注意，（RY）不变量（见第 3 节）并未提供任何信息： $W(\mathrm{D}_5)$ 不包含能够给出非平凡障碍的秩为 3 的阿贝尔子群。

我们得到满足不动点假设的 33 $W(\mathrm{D}_5)$-子群共轭类；其中有几个在 PGL_5 中彼此共轭。剩余情形如下：



例 9.2。我们考虑 $G = C_2^2 \times \mathfrak{S}_3 \subset W(\mathrm{D}_5)$。该作用通过对合 c_4 和 c_5 在 x_4 和 x_5 上变换符号来实现，而 $\mathfrak{S}_3$ 在其余变量 x_1、.....、x_3 上给出置换作用。

这贡献了符号

$$\bar{\mathfrak{s}} := (\bar{H}, \bar{Y} \quad k(Q), (1)) \in \mathrm{Burn}_3(G),$$

¯ ¯到类 $[X \circlearrowleft G]$；这里 $H := \langle c_5 \rangle$，且 $Y := \langle c_4, \mathfrak{S}_3 \rangle \simeq C_2 \times \mathfrak{S}_3$ 作用于二次曲面 $Q \subset \mathbb{P}^3$，其方程为

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 0. \tag{9.2}$$

我们断言

(1) $\bar{\mathfrak{s}}$ 是 $\mathrm{Burn}_3(G)$ 中的不可压缩除子符号，¯(2) Y 在 Q上的作用与一个（射影）线性作用或此类作用的乘积并非双有理等价。

我们已在例 9.1 中处理了 (1)。同样的论证表明，¯ Y在 Q 上的作用不可（射影）线性化。另请注意，˜在这种情况下，我们无需为˜上的 G作用转到标准模型 X 。事实上，在 X上计算类时，它将是若干类的和，且系数均为正；不可压缩类 $\bar{\mathfrak{s}}$ 也在其中。由于算法（第 6 节）不会产生符号 $\bar{\mathfrak{s}}$，且 $\bar{\mathfrak{s}}$ 不可压缩，我们得出结论： G在 X 上的作用不可（射影）线性化。

这 G 包含于 $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{D}_4$，因此相应的作用在$X$ 上也无法（射影）线性化。

例 9.3. 考虑由以下方程给出的三维二次超曲面 X

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = \sum_{i=1}^{6} x_i = 0.$$

它具有一个自然的 $\mathfrak{S}_6$ 作用，该作用通过置换坐标以及 $\mathfrak{A}_6$ 的诱导作用给出。根据 [8, 定理 6.2], ， $\mathfrak{A}_6$-作用是超刚性的；特别地，它与射影线性作用不等变双有理。

这里我们给出另一种基于 Burnside 形式主义的论证。首先考虑 $G = \mathfrak{S}_6$。对合 $x_5 \leftrightarrow x_6$ 固定一个二次曲面 Q，其上带有剩余的 $\mathfrak{S}_4$-作用。我们有：

- 相应的符号

$$\bar{\mathfrak{s}} := (C_2, \mathfrak{S}_4 \quad k(Q), (1))$$

是不可压缩的。事实上， Θ_2 项中的符号出现在 $\mathbb{P}^1$在 $\mathbb{P}^1$ 上秩二向量丛的射影化上的作用中。由于 $\mathfrak{S}_4$ 没有正规循环子群，它只能在纤维上平凡作用，并在底空间上泛点自由作用。特别地，任何 $\mathfrak{K}_4 \subset \mathfrak{S}_4$ 都会无不动点地作用。另一方面，由对换 (1, 2) 和 (3, 4) 生成的 $\mathfrak{K}_4$在 Q 上的作用分别交换 x_1与 x_2、x_3与 x_4，并固定两个点。这意味着 $\bar{\mathfrak{s}}$ 是不可压缩的。

- 在 $\mathbb{P}^3$上有两种射影线性 $\mathfrak{S}_6$作用，其 Burnside 类已在第 8 节中给出。符号 $\bar{\mathfrak{s}}$ 并未出现在这些表达式中。

我们得出结论： $\mathfrak{S}_6$在 X 上的作用与 $\mathbb{P}^3$上的射影线性作用并非双有理等价。

现在我们针对 $G := \mathfrak{A}_6$ 给出另一种论证，并将其推广至$\mathfrak{S}_6$。这里，我们的论证基于以下计算

$$\mathcal{BC}_3(\mathfrak{A}_6) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}.$$

我们分析子群（共轭类）的不动点集 $H \subset G$:

稳定子 H	$Z_G(H)$ 的 H 不动点集的轨道代表	
$\mathfrak{A}_4$	1	一个点
$\mathfrak{A}'_4$	1	一个点
$\mathfrak{S}_3$	1	两个点
C_3^2	C_3^2	一个点
C_5	C_5	两个点
C_4	C_4	两个点
C_3	C_3^2	一条圆锥曲线
C'_3	C_3^2	一条直线
C_2	$\mathfrak{D}_4$	一条圆锥曲线

注意， $\mathcal{BC}_3(\mathfrak{A}_6)$ 中稳定子不等于 $H := C_3^2$的所有符号都是平凡的。群 $H = \langle(1,2,3),(4,5,6)\rangle$ 有四个不动点，包含在 G 轨道中

$$\mathfrak{p} = (0 : 0 : 0 : 1 : \zeta_3 : \zeta_3^2).$$

G作用并非标准形式；然而，由于 $H = C_3^2$ 是极大的，在具有非平凡不动点集的群偏序集中，具有该稳定子的符号在标准形式上只能由这些不动点的吹起产生。

关系（B）意味着，吹起上的 H不动点所作出的贡献等于 X上的贡献。因此

$$[X \circlearrowleft G] = (H, 1, ((0,2),(1,2),(2,2))) \in \mathcal{BC}_3(G),$$

根据关系（V），它为零。另一方面， G 的射影线性作用的类在 $\mathcal{BC}_3(G)$ 中不为零，参见第 8 节。

References

[1] J. Blanc. 平面克雷莫纳群的有限阿贝尔子群。博士论文，日内瓦大学，2006年。论文编号3777，arXiv:0610368。[2] J. Blanc、I. Cheltsov、A. Duncan 和 Yu. Prokhorov. 作用于有理连通三维簇上的有限拟单群，2018年。arXiv:1809.09226。[3] F. Bogomolov 和 Yu. Prokhorov. 关于平面克雷莫纳群有限子群的稳定共轭，I。《中欧数学杂志》，11(12):2099–2105，2013年。[4] I. Cheltsov. 两个局部不等式。《俄罗斯科学院数学系列通报》，78(2):167–224，2014年。[5] I. Cheltsov、A. Dubouloz 和 T. Kishimoto. 环面G-固实法诺三维簇，2020年。arXiv:2007.14197。[6] I. Cheltsov 和 A. Sarikyan. 射影空间的等变可变性，2022年。arXiv:2202.09319。[7] I. Cheltsov 和 C. Shramov. 克莱因单群嵌入秩三克雷莫纳群的三种方式。《变换群》，17(2):303–350，2012年。[8] I. Cheltsov 和 C. Shramov. 一个单群的五种嵌入。《美国数学会汇刊》，366(3):1289–1331，2014年。[9] I. Cheltsov 和 C. Shramov. 克雷莫纳群与二十面体。《数学专著与研究札记》。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2016年。[10] I. Cheltsov 和 C. Shramov. 有限共线群与双有理刚性。《精选数学》（新系列），25(5)：第71篇论文，68页，2019年。[11] I. V. Dolgachev 和 V. A. Iskovskikh. 平面克雷莫纳群的有限子群。载于《代数、算术与几何：纪念尤·伊·马宁》。第一卷，第269卷《数学进展》，第443–548页。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，2009年。[12] B. Hassett、A. Kresch 和 Yu. Tschinkel. 低维中的符号与等变双有理几何。载于《簇的有理性》，第342卷《数学进展》，第201–236页。Birkhäuser/施普林格出版社，尚， [2021] ©2021年。[13] B. Hassett 和 Yu. Tschinkel. 两个二次曲面的奇数维完全交的等变几何。《纯粹与应用数学季刊》，18(4):1555–1597，2022年。[14] B. Hassett 和 Yu. Tschinkel. 扭子与稳定等变双有理几何，2022年。arXiv:2204.03106。[15] V. A. Iskovskikh. 将 $S_3 \times Z_2$ 嵌入克雷莫纳群的两个非共轭方式。II。载于《东亚代数几何——河内2005》，第50卷《纯数学高级研究》，第251–267页。日本数学会，东京，2008年。

[16] J. Koll´ar. 代数簇上的有理曲线，《数学及其边界领域研究成果》第32卷。第3辑。施普林格出版社，柏林，1996年。[17] M. Kontsevich、V. Pestun 和 Yu. Tschinkel. 等变双有理几何与模符号，2019年。arXiv:1902.09894，即将在《欧洲数学学会杂志》发表。[18] A. Kresch 和 Yu. Tschinkel. 等变双有理类型的算术性质，2021年。即将在《数论研究》发表。[19] A. Kresch 和 Yu. Tschinkel. 等变 Burnside 群与环面簇，2021 年。arXiv:2112.05123。[20] A. Kresch 和 Yu. Tschinkel. 等变 Burnside 群：结构与运算，2021年。arXiv:2105.02929。[21] A. Kresch 和 Yu. Tschinkel. 等变双有理类型与 Burnside 体积。《比萨高等师范学院科学分类年刊》（第5辑），23(2):1013–1052，2022年。[22] A. Kresch 和 Yu. Tschinkel. 等变 Burnside 群与表示论。《精选数学》（新系列），28(4)：第81篇论文，39，2022年。[23] B. ̀E. Kunyavski˘ı. 三维代数环面。载于《数论研究》（俄文），第90–111页。萨拉托夫国立大学，萨拉托夫，1987年。译文刊于《精选苏联数学》，9（1990），第1期，1–21页。[24] N. Lemire、V. L. Popov 和 Z. Reichstein. 凯莱群。《美国数学学会杂志》，19(4):921–967，2006年。[25] Yu. Prokhorov. 关于 $\mathbb{P}^3$的双有理对合。《俄罗斯科学院数学系列通报》，77(3):199–222，2013年。[26]Yu. Prokhorov. 双有理变换的有限群，2021年。arXiv:2108.13325。[27] Z. Reichstein 和 B. Youssin. 代数群作用的一个双有理不变量。《太平洋数学杂志》，204(1):223–246，2002年。[28]D. Sakovics. 射影平面的 G-双有理刚性。《欧洲数学杂志》，5(3):1090–1105，2019年。[29] A. Sarikyan. 关于平面克雷莫纳群中的线性化问题，2020年。arXiv:2009.05761。[30]B. Totaro. 二次曲面的双有理几何。《法国数学会通报》，137(2):253–276，2009年。[31] Yuri Tschinkel 和 Kaiqi Yang. 非闭域上德尔佩佐曲面的潜在稳定有理性。载于《组合与加法数论III》，第297卷《施普林格数学与统计学论文集》，第227–233页。施普林格出版社，尚，2020年。[32]Yuri Tschinkel、Kaiqi Yang 和 Zhijia Zhang，2022年。https://kaiqi-yang1994.github.io/projects/DCPonProj 。[33] Yuri Tschinkel、Kaiqi Yang 和 Zhijia Zhang. 组合伯恩赛德群。《数论研究》，8(2)：第33篇论文，2022年。

Courant Institute, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA电子邮件地址：tschinkel@cims.nyu.edu

Simons Foundation, 160 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA

Courant Institute, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA电子邮箱地址：ky994@nyu.edu

电子邮箱地址：zhijia.zhang@cims.nyu.edu