8至10维PL流形上的光滑结构

SAMIK BASU、RAMESH KASILINGAM 和 PRIYANKA MAGAR-SAWANT

arXiv:2302.02301v2 [math.AT] 4 Feb 2024

Abstract. 本文根据上同调和 Steenrod 运算，确定了维数介于8至10之间的 PL流形上的光滑结构协同类。这使我们得以计算同伦惯性群。最后，我们讨论透镜空间和实射影空间的特殊情形。

1 引言

对光滑流形及其分片线性（PL）三角剖分的研究，是微分拓扑中重要且活跃的课题之一。Milnor 发现奇异光滑7维球面不久后，[10], Kervaire 构造了一个 PL 10流形，其同伦型中不存在任何光滑流形；随后又发现了一个新的奇异9维球面[9]。这促使人们思考如下问题：若一个 PL流形存在与其底层PL结构相容的光滑结构，如何在某种适当的等价关系下对所有这类结构进行分类。对于更高维的流形，人们已研究了在若干等价关系下与其相容的光滑结构分类（参见 [11, 14, 15, 20, 23]）。本文将考察其中一种称为共边的等价关系。

约定：我们在定向光滑流形范畴中工作，其中所有态射均为PL-光滑，并默认所有流形都是维数为 ≥ 5的闭、连通、定向光滑流形，且所有映射都保向。

定义 1.1. 设 M为一个闭光滑流形。设(N, f)为一对对象，其中包含一个光滑流形 N以及一个 PL-同胚 $f\colon N \longrightarrow M$。若存在一个微分同胚 $g\colon N_1 \longrightarrow N_2$ 和一个 PL 同胚 $F\colon N_1 \times [0,1] \longrightarrow M \times [0,1]$，使得 $F|_{N_1\times 0} = f_1$ 且 $F|_{N_1\times 1} = f_2 \circ g$，则称这两对对象$(N_1, f_1)$和$(N_2, f_2)$是 PL-共边的。

所有这类 PL-共边协同类的集合记为 $\mathcal{C}(M)$。(N, f)的 PL-共边类记为 $[N, f]$，而恒等映射 $\mathrm{Id}: M \longrightarrow M$的类 $[M, \mathrm{Id}]$可视为 $\mathcal{C}(M)$的基点。研究 $\mathcal{C}(M)$通常先归约到纤维丛理论，再归约到同伦论。事实上，Cairns-Hirsch-Mazur [15] 证明，若 M 容许光滑结构，则存在一个集合之间的双射

$$\mathcal{C}(M) \cong [M, PL/O], \tag{1.1}$$

其中，PL/O 是一个 H空间（实际上是一个无限循环空间），它是遗忘映射 $BO \to BPL$ 的同伦纤维。注意，空间 BO 和 BPL 具有相容的交换 H空间结构，这些结构源自丛 [11, p.92] 的 Whitney和。因此，$[M, PL/O]$ 具有群结构。(1.1) 中的双射有一些直接推论。其中一个推论是，$\mathcal{C}(M)$具有阿贝尔群结构，且 $[M,\mathrm{Id}]$ 作为恒等元。另一个推论是群 $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$ 与 Θ_n 同构，它们表示光滑同伦球面的 h 配边类。对于 $n \geq 5$，群 Θ_n 也可以视为所有（定向）光滑同伦球面微分同胚类的集合。某些流形 M 的共边群 $\mathcal{C}(M)$ 已得到明确计算，其中包括标准球面$\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j$的积、$\mathbb{S}^i$ [20]上的一个 $\mathbb{S}^j$ 丛，以及复射影空间和四元数射影空间 [8, 2]。此外，利用障碍理论以及 PL/O 是 6-连通这一事实，可以证明

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：57N70, 57R55；次要分类：55P10, 55P42, 57Q60。
Key words and phrases. PL-流形上的光滑结构、共边惯性群、同伦惯性群

群 $\mathcal{C}(M)\cong H^7(M;\Theta_7)$ 对于闭光滑7维流形 M 而言，其中 $\Theta_7\cong\mathbb{Z}/28$ 是同伦7-球面的群。本文将这一结果推广至维数为 $n=8$、9、10 的流形，并利用 PL/O 的第10个 Postnikov 截段的结构（见 3.2）。

定理A。流形 M 带有 $8\le\dim(M)\le 10$时，其光滑同痕结构集 $\mathcal{C}(M)$ 可根据 Steenrod运算在 M的上同调上的作用明确确定。

这些结果的详细讨论见定理 2.1、定理 2.2和定理3.1。其基本思想是利用上同调运算，充分了解 M在7至10度上的胞腔粘接，从而能够通过 $[M,PL/O]$ 的Postnikov塔的初始阶段计算 PL/O。

回顾一下，群 $\Theta_n\cong\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$ 作用于光滑结构集 $S^{\mathrm{Diff}}(M)$，其作用 [3, 25], 由下式给出

$$\begin{aligned}\Theta_n\times S^{\mathrm{Diff}}(M)&\longrightarrow S^{\mathrm{Diff}}(M)\\([\Sigma,f],[N,g])&\mapsto[\Sigma\#N,f\#g]\end{aligned}\tag{1.2}$$

该作用在基点 $[M,\mathrm{Id}]$ 处的稳定子称为同伦惯性群，记为 $I_h(M)$。由 [10] 可知，对于维数 $8\le n\le 10$，群 Θ_n 适合于以下分裂短正合列

$$0\longrightarrow bP_{n+1}\longrightarrow\Theta_n\longrightarrow\pi_n^s/\mathrm{Im}(J)\longrightarrow 0,$$

其中 $\pi_n^s/$像$(J)\subseteq\pi_n(G/O)$。注意，$\pi_8^s/$像$(J)=\mathbb{Z}/2\{\epsilon\}$、$\pi_9^s/$像$(J)=\mathbb{Z}/2\{\mu\}\oplus\mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\}$以及$\pi_{10}^s/$像$(J)=\mathbb{Z}/2\{\eta\circ\mu\}\oplus\mathbb{Z}/3\{\beta_1\}$。本文利用定理（$\mathcal{C}$）中给出的结构，结合 A 的 Postnikov 截段，证明以下结论：PL/O。

定理B。设 M 是一个闭定向光滑 n-流形，且 $8\le n\le 10$。则 Θ_n/bP_{n+1} 在 (1.2) 中给出的作用在基点 $[M,\mathrm{Id}]$ 上的稳定子，可通过对 M 的上同调施加 Steenrod运算来明确确定（见定理 4.5、定理 4.9以及定理 4.14）。

回顾透镜空间 $L^{2n+1}(m)=\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$，其群作用由 $(z_0,z_1,\dots,z_n)\mapsto(\alpha z_0,\alpha z_1,\dots,\alpha z_n)$ 给出，其中 $\alpha=\exp^{\frac{2\pi i}{m}}$。以下定理给出了 $L^9(m)$ 和 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 在 $n=8$ 和 10 的惯性群的计算。

定理 C。设 m 为正整数，n 为非负整数。

(i) 设 $m=2n+1$。那么对于任意异球 $\Sigma\in\Theta_9$，连通和 $L^9(m)\#\Sigma$ 与 $L^9(m)$ 不微分同胚。(ii) 设 $m=4n+2$。那么存在唯一的异球 $\Sigma\in\Theta_9$，使得 $L^9(m)\#\Sigma$ 与 $L^9(m)$ 微分同胚。(iii) 设 $m=4n$。那么恰有四个异球 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4\in\Theta_9$，使得流形 $L^9(m)$、$L^9(m)\#\Sigma_1$、$L^9(m)\#\Sigma_2$、$L^9(m)\#\Sigma_3$ 和 $L^9(m)\#\Sigma_4$ 中任意两个都不微分同胚。(iv) 设 $\Sigma\in\Theta_8$ 为该异球。那么 $\mathbb{R}\mathrm{P}^8\#\Sigma$ 与 $\mathbb{R}\mathrm{P}^8$ 不微分同胚。(v) 对任意同伦 10-球面 $\Sigma\in\Theta_{10}$，连通和 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}\#\Sigma$ 与 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ 微分同胚。

定理 C （i）、（ii）和（iii）是定理 4.9 和 [12, 定理 4.2]的直接推论。定理 C 的最后两个断言将在定理 4.5 和定理 4.16中证明。

1.1 记号

- 令 O_n 为正交群，$PL_n\subset O_n$ 为分段线性同胚群，而 G_n 为同伦等价的集合。记 $O=colim\ O_n$、$_{n\to\infty}PL=\underset{n\to\infty}{colim}\ PL_n$和$G=\underset{n\to\infty}{colim}\ G_n$ [13, 16]。

- 令 G/O 为典范映射 $BO\to BG$ 的同伦纤维，该映射连接稳定向量丛和稳定球面纤维化的分类空间 [18, §2 和 §3]，；令 G/PL为典范映射 $BPL\to BG$ 的同伦纤维，该映射连接 PL $\mathbb{R}^n$-丛和稳定球面纤维化的分类空间 [22]。

- 对于无限循环空间 X，我们用小写字母 x 表示满足 $\Omega^\infty(x)\simeq X$ 的连通谱。我们用这一记号定义谱 g、o、pl、pl/o、g/o、g/pl。

- 阿贝尔群 A 的 Eilenberg–MacLane 谱记作 HA。
- 记号 $\{-,-\}$ 用于表示谱之间映射的稳定同伦类。
- 记号 $\tau_{\leq m}$ 专用于 m^{th} Postnikov 截段。它满足 $\pi_i\tau_{\leq m}(E) = \pi_i(E)$，当 $i \leq m$ 时成立；若 $i > m$，则为 0。记号 ${}^{>m}\tau$ 指 m-连通覆盖，它也是 $X \to \tau_{\leq m}X$ 的纤维。
- Moore 空间 $M(A,n)$ 是约化同调集中在度数 n 的空间，因此它同构于 A。
- 群 Θ_n/bP_{n+1} 和 $\pi_n(G/O)$ 的生成元所用的记号相同，具体见 [24] 和 [21]。

1.2 结构安排

在第 2 节和 3节中，我们给出 10th 的 Postnikov 截段的同伦分裂，并计算 pl/o 的集合 $[M^n, PL/O]$，其中 $8 \leq n \leq 10$。在第 4 节中，我们讨论光滑流形 M^n的共边和同伦惯性群，特别是计算 $I_h(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$，其中 $8 \leq n \leq 10$。

2 8、9维流形上的光滑结构

本节中，我们利用 $\tau_{\leq 9}PL/O$ 中给出的 Postnikov 截段结构 [7],，并计算$[M, PL/O]$当 dim$(M) = 8$，9 时的情形。对于 8 维流形，我们推导出以下定理。虽然 [7] 中的计算也能推出这一结果，但在这里我们通过直接计算独立地确认了该结果。

定理 2.1. 设 M^8 是一个闭光滑流形。则

$$[M^8, PL/O] \cong H^7(M^8; \mathbb{Z}/28) \oplus H^8(M^8; \mathbb{Z}/2)$$

证明。我们证明 PL/O 的 8th-Postnikov 截段分裂为积 $K(\mathbb{Z}/28, 7) \times K(\mathbb{Z}/2, 8)$，从而得到所需的同构。只需证明对每个素数 p，在 p-局部范畴中存在分裂。由于 k-不变量处于稳定范围，我们采用稳定方法，使用 Eilenberg–MacLane 谱而非其底层空间。注意， pl/o 在不超过 8 的次数上的同伦群仅在 $p = 2$ 和 7 处含有 p-挠。对于 $p = 7$ 的情形，同伦群仅在 7 次非零。因此，只需进行 2-局部化。

8^{th}的稳定 Postnikov 截段是映射 $\Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 \longrightarrow \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2$ 的纤维。除同伦外，该映射要么是 0，要么是 $(\Sigma^7 Sq^2) \circ q$，即

$$\Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 \xrightarrow{q} \Sigma^7 H\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\Sigma^7 Sq^2} \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2.$$

这可由下图直接看出，其中对于任意 $\phi \in \{\Sigma^7 H\mathbb{Z}/4, \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2\}$，观察 $\{H\mathbb{Z}/2, \Sigma^2 H\mathbb{Z}/2\} \cong \{0, Sq^2\}$ 可得

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^6 H\mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\beta} & \Sigma^7 H\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{q} & \Sigma^7 H\mathbb{Z}/2 \\ & & & \searrow^{\psi} & \downarrow{\scriptstyle \phi} & \swarrow & \vdots \\ & & & & \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2 & \cdots & {\scriptstyle \zeta} \end{array}$$

其中 $\psi = \Sigma^7 Sq^2$ 或 0，且 $\beta = Sq^1$。由于 $Sq^2 \circ \beta \neq 0$，映射 ψ 的唯一可能性是 0，这意味着 ζ映射的存在。我们旨在证明 $(\Sigma^7 Sq^2) \circ q$ 不会作为 k-不变量出现。其思路是构造一个映射 $\Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 \longrightarrow \tau_{\leq 8}\ pl/o$，使其与纤维化映射 $b\colon \tau_{\leq 8}\ pl/o \longrightarrow \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4$ 的复合是一个等价。由此可推出 k-不变量为 0。

考虑自然纤维化映射 $\Sigma^{-1}g/pl \longrightarrow pl/o$，并将其限制到 $\Sigma^{-1}g/pl$ 的 6-连通覆盖${}^{>6}\tau\Sigma^{-1}g/pl$。由于 $\pi_7({}^{>6}\tau\Sigma^{-1}g/pl) \cong \mathbb{Z}$ 且 $\pi_8({}^{>6}\tau\Sigma^{-1}g/pl) = 0$，因此

$${}^{>6}\tau_{\leq 8}(\tau\Sigma^{-1}g/pl) \cong \Sigma^7 H\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \tau_{\leq 8}\ pl/o.$$

因此，我们得到以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma^7 H\mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 4} & \Sigma^7 H\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow \\
\Sigma^8 H\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \tau_{\leq 8}\, pl/o & \xrightarrow[b]{} & \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4
\end{array}$$

其中 p 是从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}/4$的自然投影。注意，复合映射 $b\circ g\circ(\times 4)$ 为 0，因为复合映射 $p\circ(\times 4)$ 为 0。因此我们得到一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma^7 H\mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 4} & \Sigma^7 H\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
\Sigma^8 H\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \tau_{\leq 8}\, pl/o & \xrightarrow[b]{} & \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4
\end{array}$$

由于从 $\Sigma^7 H\mathbb{Z} \longrightarrow \Sigma^8 H\mathbb{Z}/2$ 出发的每个映射都是零伦的，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma^7 H\mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 4} & \Sigma^7 H\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 \\
 & \searrow^{0} & \downarrow{\scriptstyle g} & \nearrow_{\widetilde{b}} & \\
 & & \tau_{\leq 8}\, pl/o & &
\end{array}$$

其中 $g\circ(\times 4) = 0$ 蕴含着存在一个具有所需性质的映射 $\widetilde{b}$。
因此，该映射 $\widetilde{b}$ 是映射 b的一个同伦截面，从而得到如下分解

$$\tau_{\leq 8}\, pl/o \simeq \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 \vee \Sigma^8 H\mathbb{Z}/2. \tag{2.1}$$

证明完毕。 □

定理 2.1 说明，对 8th Postnikov 截段的分解结果有助于计算 $\mathcal{C}(M) = [M, PL/O]$ 8 维流形 M。现在我们回顾 [7] 中 ${}^{>6}\tau_{\leq 9}\ pl/o$的公式。注意，$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ 结合万有系数定理可得$H^{n+1}(K(\mathbb{Z}/4, n); \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$。我们用记号 d_2 表示相应的稳定映射 $H\mathbb{Z}/4 \longrightarrow \Sigma H\mathbb{Z}/2$，并定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &:= \mathrm{Fibre}(H\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{Sq^2} \Sigma^2 H\mathbb{Z}/2) \\
\mathcal{F}_2 &:= \mathrm{Fibre}(H\mathbb{Z}/4 \xrightarrow{Sq^2\circ d_2} \Sigma^3 H\mathbb{Z}/2).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

由此， 9th 的 pl/o Postnikov 截段为

$$\tau_{\leq 9}\ pl/o \simeq \Sigma^8\mathcal{F} \vee \Sigma^7\mathcal{F}_2 \vee \Sigma^7 H\mathbb{Z}/7 \vee \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2. \tag{2.3}$$

设 M^9 为闭定向光滑流形。那么，[6, §4.C] 上的$M^9/M^{(6)}$ 最小胞腔结构具有如下形式

$$M^9/M^{(6)} \simeq \Big(\vee_{(p,r)\in J}\, M(\mathbb{Z}/p^r, 7) \vee (\mathbb{S}^7)^{\vee_l} \vee (\mathbb{S}^8)^{\vee_k} \Big) \bigcup e^9,$$

其中， $M(\mathbb{Z}/p^r, n)$表示群 $\mathbb{Z}/p^r$ 在次数 n对应的 Moore 空间，而 J是某个有限指标集。在这种情况下，9 胞腔到 8 胞腔的粘接映射是零伦。因此，

$$M^9/M^{(6)} \simeq \Big((\vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7) \vee (\mathbb{S}^7)^{\vee_l}) \bigcup_f e^9 \Big) \vee (\mathbb{S}^8)^{\vee_k}\ , \tag{2.4}$$

因此，粘接映射 f属于 $\pi_8\Big(\vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7) \vee (\mathbb{S}^7)^{\vee_l}\Big)$。根据连通性论证，

$$\pi_8\Big(\vee_{(p,r)\in J}\, M(\mathbb{Z}/p^r, 7) \vee (\mathbb{S}^7)^{\vee_l} \Big) \cong \bigoplus_{(p,r)\in J} \pi_8(M(\mathbb{Z}/p^r, 7)) \bigoplus_l \pi_8(\mathbb{S}^7)$$

其中 $\pi_8(\mathbb{S}^7) \cong \mathbb{Z}/2\{\eta\}$ 和

$$\pi_8(M(\mathbb{Z}/p^r, 7)) \cong \begin{cases} 0 & \text{if p is odd,} \\ \mathbb{Z}/2\{\iota\circ\eta\} & \text{if p=2,} \end{cases}$$

其中 $\iota\circ\eta$ 是复合映射 $S^8 \xrightarrow{\eta} S^7 \xrightarrow{\iota} M(\mathbb{Z}/2^r, 7)$。

考虑斯廷罗德平方运算 $Sq^2\colon\ H^7(M^9;\ \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^9(M^9;\ \mathbb{Z}/2)$，对每个 $r\geq 1$，都有一个高阶博克斯坦运算 $\beta_r\colon\ H^*(M^9;\ \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{*+1}(M^9;\ \mathbb{Z}/2)$. 现在，根据粘接映射的不同，我们有以下几种可能（详情参见 [17]）：

(1) 如果 M^9 是自旋流形，那么粘接映射 $\mathbb{S}^8 \longrightarrow \vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7)\ \vee (\mathbb{S}^7)^{\vee_l}$ 是零伦的，因为 $Sq^2\colon H^7(M^9;\ \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^9(M^9;\ \mathbb{Z}/2)$ 为零。因此

$$M^9/M^{(6)} \simeq (\mathbb{S}^7)^{\vee_l} \vee (\mathbb{S}^8)^{\vee_k} \vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7) \vee \mathbb{S}^9\ , \tag{2.5}$$

(2) 如果 M^9 是非自旋流形，那么 $Sq^2\colon\ H^7(M^9;\ \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^9(M^9;\ \mathbb{Z}/2)$ 非零。此外，

(a) 假设对于任意 $u\in H^7(M^9;\ \mathbb{Z}/2)$ 满足 $Sq^2(u)\neq 0$，以及任意 $v\in$核(Sq^2)，都有 $\beta_r(u+v)=0$ 且 $u+v\notin$ 像$(\beta_s)\ \ \forall r,\ s\geq 1$。那么，粘接映射 f 在 (2.4) 中的非平凡因子为 η，这意味着

$$M^9/M^{(6)} \simeq C(\eta)\vee M', \tag{2.6}$$

其中 $M'\simeq(\mathbb{S}^7)^{\vee_{l-1}}\vee(\mathbb{S}^8)^{\vee_k}\vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7)$。

(b) 假设对于任意 $u\in H^7(M^9;\ \mathbb{Z}/2)$ 满足 $Sq^2(u)\neq 0$，且任意 $v\in$核$\big(Sq^2\big)$，都有 $u+v\notin$ 像$(\beta_s)\ \ \forall s\geq 1$；同时存在 $u'\in H^7(M^9;\ \mathbb{Z}/2)$ 满足 $Sq^2(u')\neq 0$ 且$v'\in$ 核$\big(Sq^2\big)$，使得对于某个 $r\geq 1$，有 $\beta_r(u'+v')\neq 0$。那么，粘接映射 f 在 (2.4) 中唯一的非平凡因子为 $\iota\circ\eta$，并且

$$M^9/M^{(6)} \simeq C(\iota\circ\eta)\vee M'' \tag{2.7}$$

where $M''\simeq(\mathbb{S}^7)^{\vee_l}\vee(\mathbb{S}^8)^{\vee_k}\vee_{(p,r)\in J'} M(\mathbb{Z}/p^r, 7)$.

以下定理将 Postnikov 截段（2.3）的分裂应用于 9 维流形的情形。

定理 2.2. 设 M^9 是一个闭定向光滑流形，且 $Sq^2\circ d_2\colon\ H^6(M^9;\ \mathbb{Z}/4) \longrightarrow H^9(M^9;\ \mathbb{Z}/2)$。

(1) 若 M^9 是一个自旋流形，则

$$[M^9, PL/O]\cong H^7(M^9;\mathbb{Z}/28)\oplus H^8(M^9;\mathbb{Z}/2)\oplus H^9(M^9;\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2).$$

(2) 设 M^9 是一个非自旋流形。

(a) 若 $Sq^2\circ d_2$ 非平凡，则

$$[M^9, PL/O]\cong H^7(M^9;\mathbb{Z}/28)\oplus H^8(M^9;\mathbb{Z}/2)\oplus H^9(M^9;\mathbb{Z}/2).$$

(b) 若 $Sq^2\circ d_2$ 平凡，则

$$[M^9, PL/O]\cong H^7(M^9;\mathbb{Z}/7)\oplus H^8(M^9;\mathbb{Z}/2)\oplus H^9(M^9;\mathbb{Z}/2)\oplus[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]\ ,$$

其中，$[M,\Sigma^7\mathcal{F}_2]\cong\widetilde{K}\oplus\widetilde{A}$（$\widetilde{K}$）是短正合列的一部分

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}\big(Sq^2\big)\longrightarrow\widetilde{K}\longrightarrow \mathrm{Ker}\big(Sq^2\oplus Sq^1\big)\longrightarrow 0,$$

$Sq^1\colon\ H^7(M;\ \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^8(M;\ \mathbb{Z}/2)$，以及 $Sq^2\colon\ H^7(M;\ \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^9(M;\ \mathbb{Z}/2)$，且 $\widetilde{A}$ 是满足该短正合列的非平凡扩张

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}/2\longrightarrow\widetilde{A}\longrightarrow A\longrightarrow 0,$$

其中 $A=\mathbb{Z}/4$ 或 $\mathbb{Z}/2$。

证明。利用（2.3），可得 $[M^9, PL/O]\cong[M^9,\tau_{\leq 9}\ pl/o]\cong H^7(M^9;\ \mathbb{Z}/7)\ \oplus H^9(M^9;\ \mathbb{Z}/2)\oplus[M^9,\Sigma^8\mathcal{F}]\oplus[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]$. 因此，只需计算 $[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]$ 和 $[M^9,\Sigma^8\mathcal{F}]$。注意，$\Sigma^8\mathcal{F}$ 是 7-连通的，因此

$$[M^9,\Sigma^8\mathcal{F}]\cong[M^9/M^{(6)},\Sigma^8\mathcal{F}]. \tag{2.8}$$

空间 $\Sigma^7\mathcal{F}_2$ 是 6-连通的，群 $[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]$ 可通过以下交换图计算：

$$\begin{array}{ccccccc}
[M^9,\Sigma^6H^{\mathbb{Z}}/4] & \xrightarrow{Sq^2\circ d_2} & [M^9,\Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2] & \twoheadrightarrow & [M^9,\Sigma^7H^{\mathbb{Z}}/4] \\
\uparrow & & \uparrow\cong & & \uparrow & & \uparrow\cong \\
0 & \longrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^7\mathcal{F}_2] & \twoheadrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^7H^{\mathbb{Z}}/4]
\end{array} \tag{2.9}$$

(1) 设 M^9 为一个自旋流形。则（2.5）与（2.8）合起来给出

$$[M^9,\Sigma^8\mathcal{F}]\cong[M^9/M^{(6)},\Sigma^8\mathcal{F}]\cong H^8(M^9/M^{(6)};\mathbb{Z}/2)\oplus H^9(M^9/M^{(6)};\mathbb{Z}/2).$$

对于 $[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]$，由于 $Sq^2=0$，利用（2.9）可得到如下由短正合列组成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & [M^9,\Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [M^9,\Sigma^7H^{\mathbb{Z}}/4] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow\cong & & \uparrow & & \uparrow\cong & & \\
0 & \longrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^7\mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^7H^{\mathbb{Z}}/4] & \longrightarrow & 0\ .
\end{array} \tag{2.10}$$

这意味着

$$[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]\cong[M^9/M^{(5)},\Sigma^7\mathcal{F}_2].$$

在（2.10）中，我们证明了第二行短正合列的分裂，从而推出第一行正合列的分裂。为此，考虑余纤维序列 $M^9/M^{(5)}\longrightarrow M^9/M^{(6)}\xrightarrow{\Psi}\Sigma\,(M^{(6)}/M^{(5)})$，以及由此诱导出的如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^7\mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [M^9/M^{(5)},\Sigma^7H^{\mathbb{Z}}/4] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow\cong & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & [M^9/M^{(6)},\Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [M^9/M^{(6)},\Sigma^7\mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [M^9/M^{(6)},\Sigma^7H^{\mathbb{Z}}/4] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow\phi^* & & \uparrow\Psi^* & & \uparrow\gamma^* & & \\
0 & \rightarrowtail & [\Sigma\,(M^{(6)}/M^{(5)}) & \Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2] & \rightarrowtail & [\Sigma\,(M^{(6)}/M^{(5)}) & \Sigma^7\mathcal{F}_2] & \rightarrowtail & [\Sigma\,(M^{(6)}/M^{(5)}) \quad \Sigma^7H^{\mathbb{Z}}/4] \rightarrowtail 0.
\end{array} \tag{2.11}$$

注意，由于（2.5），映射 $\Psi:\ M^9/M^{(6)}\longrightarrow\Sigma\,(M^{(6)}/M^{(5)})\ \simeq\vee_i\mathbb{S}^7$ 分解为$\gamma:\ \vee_l\mathbb{S}^7\vee_k\mathbb{S}^8\vee_{(p,r)\in J}M\,(\mathbb{Z}/p^r,\ 7)\longrightarrow\vee_i\mathbb{S}^7$和 $\phi:\ \mathbb{S}^9\longrightarrow\vee_i\mathbb{S}^7$。在同伦意义下，映射 ϕ要么为 0，要么为 η^2 $(\pi_2^s\cong\mathbb{Z}/2\{\eta^2\})$。如果它是 $\eta^2=\eta\circ\eta$，那么由下式可知映射 ϕ^* 为 0。

$$\begin{array}{ccc}
[\mathbb{S}^7,\Sigma^7\mathcal{F}_2] & \xrightarrow{\quad(\eta^2)^*\quad} & [\mathbb{S}^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2] \\
 & {\scriptstyle\eta^*}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\eta^*} & \\
 & [\mathbb{S}^8,\Sigma^7\mathcal{F}_2]=0 &
\end{array}$$

因此，我们得到像$(\Psi^*)\ =$ 像(γ^*)。这表明，在(2.11)中，第二行的正合序列在 $[M^9/M^{(6)},\Sigma^7\mathcal{F}_2]$／像$(\Psi^*)$处诱导出一个分裂正合序列。因此，我们得到

$$[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]\cong H^7(M;\mathbb{Z}/4)\oplus H^9(M;\mathbb{Z}/2). \tag{2.12}$$

因此，在自旋情形下，我们得到如下结果，

$$[M^9,PL/O]\cong H^7(M^9;\mathbb{Z}/28)\oplus H^8(M^9;\mathbb{Z}/2)\oplus H^9(M^9;\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2).$$

(2) 设 M^9是一个非自旋流形。利用(2.8)，我们有 $[M^9,\Sigma^8\mathcal{F}]\cong[M^9/M^{(6)},\Sigma^8\mathcal{F}]$，由(2.6)和(2.7)，

$$[M^9/M^{(6)},\Sigma^8\mathcal{F}]\cong[C(\eta),\Sigma^8\mathcal{F}]\oplus[M',\Sigma^8\mathcal{F}]\ \text{or}\ [C(\iota\circ\eta),\Sigma^8\mathcal{F}]\oplus[M'',\Sigma^8\mathcal{F}]. \tag{2.13}$$

此外，对于所有奇素数，$[\mathbb{S}^8,\Sigma^8\mathcal{F}]\xrightarrow{\cong}[M(\mathbb{Z}/2^r,7)\ \Sigma^8\mathcal{F}]\cong\mathbb{Z}/2$，且 $[M(\mathbb{Z}/p^r,7)\ \Sigma^8\mathcal{F}]=0$e p。因此

$$[M',\Sigma^8\mathcal{F}]\cong H^8(M';\mathbb{Z}/2)\ \text{and}\ [M'',\Sigma^8\mathcal{F}]\cong H^8(M'';\mathbb{Z}/2). \tag{2.14}$$

还需计算 $[C(\eta)\ \Sigma\ \mathcal{F}]$ 和 $[C(\iota\ \delta^8\eta)\ \Sigma\ \mathcal{F}]$。 8

$[C(\eta)\ \Sigma^8\mathcal{F}]$ 的计算可由以下正合序列轻松得出

$$\cdots\ [\mathbb{S}^8,\Sigma^8\mathcal{F}]\xrightarrow{\cong}[\mathbb{S}^9,\Sigma^8\mathcal{F}]\longrightarrow[C(\eta),\Sigma^8\mathcal{F}]\longrightarrow[\mathbb{S}^7,\Sigma^8\mathcal{F}]=0.$$

因此，我们得到

$$[C(\eta),\Sigma^8\mathcal{F}]=0 \tag{2.15}$$

为了计算 $[C(\iota\circ\eta)\ \Sigma^8\mathcal{F}]$，考虑由余纤维序列 $\mathbb{S}^8\xrightarrow{\iota\circ\eta}M(\mathbb{Z}/2^r,7)\longrightarrow C(\iota\circ\eta)$ 得到的如下交换图，

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & [\mathbb{S}^8,\Sigma^8\mathcal{F}] & & & & \\
 & & & \overset{\Sigma i^*}{\nearrow} & \downarrow\cong & & & & \\
[\Sigma M(\mathbb{Z}/2^r,7)\ \Sigma^8\mathcal{F}] & \to & [\mathbb{S}^9,\Sigma^8\mathcal{F}] & \to & [C(\iota\circ\eta)\ \Sigma^8\mathcal{F}] & \to & [M(\mathbb{Z}/2^r,7)\ \Sigma^8\mathcal{F}] & \overset{(\iota\circ\eta)^*}{\to} & [\mathbb{S}^8,\Sigma^8\mathcal{F}] \\
 & & & & & & \uparrow d^*\cong & \overset{\times 2}{\nearrow} & \\
 & & & & & & [\mathbb{S}^8,\Sigma^8\mathcal{F}] & &
\end{array} \tag{2.16}$$

其中，映射 Σi^* 是由余纤维序列$\mathbb{S}^7\xrightarrow{2^r}\mathbb{S}^7\xrightarrow{i}M(\mathbb{Z}/2^r,7)$得到的正合序列的一部分。此外，映射 $(\iota\circ\eta)^*$ 是平凡的，这意味着$[C(\iota\circ\eta)\,\Sigma^8\mathcal{F}]\cong[M(\mathbb{Z}/2^r,7)\ \Sigma^8\mathcal{F}]\cong\mathbb{Z}/2$。总之，我们得到

$$[C(\eta),\Sigma^8\mathcal{F}]\cong H^8(C(\eta);\mathbb{Z}/2)\text{ and }[C(\iota\circ\eta),\Sigma^8\mathcal{F}]\cong H^8(C(\iota\circ\eta);\mathbb{Z}/2). \tag{2.17}$$

因此，结合（2.14）和（2.17），我们得到

$$[M,\Sigma^8\mathcal{F}]\cong H^8(M;\mathbb{Z}/2). \tag{2.18}$$

最后，根据粘接映射的性质分两种情况来计算 $[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]$：映射 $Sq^2\circ d_2$：$H^6(M;\mathbb{Z}/4)\longrightarrow H^9(M;\mathbb{Z}/2)$ 是非平凡的还是平凡的。

当 $Sq^2\circ d_2$ 是非平凡的情况下，由交换图（2.9）可知

$$[M^9,\Sigma^7\mathcal{F}_2]\cong[M^9,\Sigma^7H\mathbb{Z}/4]. \tag{2.19}$$

现在，对于 $Sq^2\circ d_2=0$ 这种情况，我们需要 $[C(\eta)\ \Sigma^7\mathcal{F}_2]$ 和 $[C(\iota\circ\eta)\ \Sigma^7\mathcal{F}_2]$。因此，先来计算这些群。

我们有 $\eta\colon\mathbb{S}^8\longrightarrow\mathbb{S}^7$, $\mathcal{F}_2=$ 纤维$(H\mathbb{Z}/4\xrightarrow{Sq^2\circ d_2}\Sigma^3H\mathbb{Z}/2)$，以及以下交换方块

$$\begin{array}{ccc}
H\mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{Sq^2\circ Sq^1} & \Sigma^3H\mathbb{Z}/2 \\
\downarrow & & \downarrow= \\
H\mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{Sq^2\circ d_2} & \Sigma^3H\mathbb{Z}/2
\end{array} \tag{2.20}$$

令 $\mathcal{D}=$ 纤维$(H\mathbb{Z}/2\xrightarrow{Sq^2\circ Sq^1}\Sigma^3H\mathbb{Z}/2)$。我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma^7H\mathbb{Z}/4 & \longrightarrow & \Sigma^7\mathcal{D} & \longrightarrow & \Sigma^8\mathcal{F} \\
\downarrow= & & \downarrow & & \downarrow \\
\Sigma^7H\mathbb{Z}/4 & \longrightarrow & \Sigma^7H\mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\Sigma^7Sq^1} & \Sigma^8H\mathbb{Z}/2 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma^7(Sq^2\circ Sq^1)} & & \downarrow{\scriptstyle\Sigma^7Sq^2} \\
0 & \longrightarrow & \Sigma^{10}H\mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{=} & \Sigma^{10}H\mathbb{Z}/2
\end{array}$$

其中各行和各列均为余纤维序列。

注意，$[C(\eta)\ \Sigma^7\mathcal{F}]=0=[C(\eta)\ \Sigma^8\mathcal{F}]$ 意味着

$$[C(\eta),\Sigma^7\mathcal{D}]\cong[C(\eta),\Sigma^7H\mathbb{Z}/4]\cong\mathbb{Z}/4.$$

现在，利用（2.20），我们得到如下短正合列的交换图。请注意，如果底行分裂，那么顶行也分裂。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & [C(\eta), \Sigma^9 H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [C(\eta), \Sigma^7 \mathcal{D}] & \longrightarrow & [C(\eta), \Sigma^7 H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{=} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & [C(\eta), \Sigma^9 H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [C(\eta), \Sigma^7 \mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [C(\eta), \Sigma^7 H^{\mathbb{Z}}/4] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因此，

$$[C(\eta), \Sigma^7 \mathcal{F}_2] \cong \mathbb{Z}/8. \tag{2.21}$$

要计算 $[C(\iota \circ \eta)\ \Sigma^7 \mathcal{F}_2]$，考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \overset{\mathbb{Z}/2}{\wr\|} & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & [\mathbb{S}^9, \Sigma^7 \mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [C(\iota \circ \eta), \Sigma^7 \mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [M(\mathbb{Z}/2^r, 7), \Sigma^7 \mathcal{F}_2] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{=} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & [\mathbb{S}^9, \Sigma^7 \mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [C(\eta), \Sigma^7 \mathcal{F}_2] & \longrightarrow & [\mathbb{S}^7, \Sigma^7 \mathcal{F}_2] & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2.22}$$

其中各行是由 $C(\iota \circ \eta)$和 $C(\eta)$的余纤维序列所诱导的正合序列。为计算 $[M(\mathbb{Z}/2^r, 7)\ \Sigma^7 \mathcal{F}_2]$，我们使用2.2中的 $\mathcal{F}_2$ 纤维序列，它给出

$$[M(\mathbb{Z}/2^r, 7), \Sigma^7 \mathcal{F}_2] \cong H^7(M(\mathbb{Z}/2^r, 7); \mathbb{Z}/4),$$

并进一步利用余纤维序列 $\mathbb{S}^7 \xrightarrow{\times 2^r} \mathbb{S}^7 \longrightarrow M(\mathbb{Z}/2^r, 7)$ 计算上同调，th at 给出

$$[M(\mathbb{Z}/2^r, 7), \Sigma^7 \mathcal{F}_2] \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/4 & \text{if } r = 1, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{if } r > 1. \end{cases} \tag{2.23}$$

沿着(2.22)和(2.21)进行直接的图追逐，表明在 $[C(\iota \circ \eta)\ \Sigma^7 \mathcal{F}_2]$处的短正合列不分裂。此外，

$$[C(\iota \circ \eta^2), \Sigma^7 \mathcal{F}_2] \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/8 & \text{if } r = 1, \\ \mathbb{Z}/4 & \text{if } r > 1. \end{cases} \tag{2.24}$$

现在考虑 $Sq^2 \circ d_2$ 是平凡的情形。这意味着 $Sq^2 Sq^1 \colon H^6(M; \mathbb{Z}/2) \to H^9(M; \mathbb{Z}/2)$ 为0。因此

$$Sq^2 \colon \mathrm{Coker}\big(Sq^1 \colon H^6(M; \mathbb{Z}/2) \to H^7(M; \mathbb{Z}/2)\big) \longrightarrow H^9(M; \mathbb{Z}/2)$$

是良定义且非零的。因此，我们有

$$\mathrm{Coker}\big(Sq^1\big) = \mathrm{Ker}\big(Sq^2\big) \oplus \mathbb{Z}/2.$$

令 $q \colon H^*(M; \mathbb{Z}/4) \longrightarrow H^*(M; \mathbb{Z}/2)$ 为由非平凡态射$\mathbb{Z}/4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2$诱导的映射。

注意，$\Big(H^7(\widehat{M}; \mathbb{Z}/4) \to H^7(M; \mathbb{Z}/4)\Big) \subseteq$核$\big(Sq^2 \circ q\big)$，其中 $\widehat{M} = M'$或者 M''如（2.6）和（2.7）中所述。然后，利用正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\big(Sq^1\big) \longrightarrow H^7(M; \mathbb{Z}/4) \xrightarrow{q} \mathrm{Ker}\big(Sq^1 : H^7(M; \mathbb{Z}/2) \to H^8(M; \mathbb{Z}/2)\big) \longrightarrow 0,$$

注意到 $H^7(M; \mathbb{Z}/4) = \widetilde{K} \oplus A$，其中 $A = \mathbb{Z}/2$或 $\mathbb{Z}/4$，且 $\widetilde{K}$属于以下可能的非平凡扩张，该扩张由 $H^7(M; \mathbb{Z}/4)$ 的结构确定

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\big(Sq^2\big) \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow \mathrm{Ker}\big(Sq^2 \oplus Sq^1\big) \longrightarrow 0.$$

此外，注意到 $\widetilde{K} \subseteq H^7(M; \mathbb{Z}/4)$ 实际上是 $H^7(\widehat{M}; \mathbb{Z}/4)$ 的像。因此，我们有

$$[M, \Sigma^7 \mathcal{F}_2] \cong \widetilde{K} \oplus \widetilde{A} \tag{2.25}$$

~其中 A 是

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \widetilde{A} \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

这就完成了证明。 □

3 10维流形上的光滑结构

现在我们考虑定理2.2 在单连通10维流形上的类似结果。为此，我们需要关于 10th-Postnikov 截段 $\tau_{\leq 10}\ pl/o$ 的 pl/o 的相关信息，该信息在 [7]中计算得出。在此背景下，注意到 $Sq^2 \circ Sq^2 \circ d_2 = 0$ 导出了一个类 $\Phi:\ \mathcal{F}_2 \longrightarrow \Sigma^4 H\mathbb{Z}/2$利用以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{-1}H\mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{Sq^2\circ d_2} & \Sigma^2 H\mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Sq^2} & \swarrow_{\Phi} & \\ & & \Sigma^4 H\mathbb{Z}/2 & & \end{array}$$

运算 Φ 定义了一个次级上同调运算，从 $\mathrm{Ker}\big(Sq^2 \circ d_2\big)(\subseteq H^i(M;\ \mathbb{Z}/4)) \longrightarrow H^{i+4}(M;\ \mathbb{Z}/2)$。现在，令

$$\mathcal{E} \coloneqq \mathrm{Fibre}(\mathcal{F}_2 \xrightarrow{\Phi} \Sigma^4 H\mathbb{Z}/2). \tag{3.1}$$

由此， pl/o 的 10th Postnikov 截段为

$$\tau_{\leq 10}\ pl/o \simeq \Sigma^8\mathcal{F} \vee \Sigma^7\mathcal{E} \vee \Sigma^7 H\mathbb{Z}/7 \vee \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2 \vee \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/3. \tag{3.2}$$

设 M^{10}是一个满足 $H_1(M^{10}) = 0$ 的闭光滑流形。则 $M^{10}/M^{(6)}$ 上存在一个形如[6, §4.C]的最小胞腔结构

$$M^{10}/M^{(6)} \simeq \Big(\vee_l \mathbb{S}^7 \vee_k \mathbb{S}^8 \vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7)\Big) \bigcup_f e^{10},$$

粘接映射 f属于 $\pi_9\Big(\vee_l \mathbb{S}^7 \vee_k \mathbb{S}^8 \vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7)\Big)$。根据连通性论证
其中 t,

$$\pi_9\Big(\vee_l \mathbb{S}^7 \vee_k \mathbb{S}^8 \vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7)\Big) \cong \oplus_l \pi_9(\mathbb{S}^7) \oplus_k \pi_9(\mathbb{S}^8) \oplus_{(p,r)\in J} \pi_9(M(\mathbb{Z}/p^r, 7)), \tag{3.3}$$

其中 $\pi_9(\mathbb{S}^8) \cong \mathbb{Z}/2\{\eta\}$, $\pi_9(\mathbb{S}^7) \cong \mathbb{Z}/2\{\eta^2\}$ 和 $\pi_9(M(\mathbb{Z}/p^r, 7)) \cong \mathbb{Z}/2\{\iota \circ \eta^2\}$。

若 M^{10}是自旋流形，则存在一个高阶上同调运算 ψ: $H^6(M;\ \mathbb{Z}/4) \longrightarrow H^{10}(M;\ \mathbb{Z}/2)$，对应于 $(Sq^2 \circ Sq^2) + (Sq^3 \circ Sq^1) = 0$，以检测映射 η^2 [19, 推论2，第177]页。根据 ψ 是否平凡，有以下几种可能:

(1) 若 ψ 平凡，则

$$M^{10}/M^{(6)} \simeq M^{10}/M^{(6)} \simeq \vee_l \mathbb{S}^7 \vee_k \mathbb{S}^8 \vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7) \vee \mathbb{S}^{10}. \tag{3.4}$$

(2) 若 ψ 非平凡，则

$$M^{10}/M^{(6)} \simeq C(\eta^2) \vee M', \tag{3.5}$$

or

$$M^{10}/M^{(6)} \simeq C(\iota \circ \eta^2) \vee M'', \tag{3.6}$$

with $M' \simeq \vee_{l-1} \mathbb{S}^7 \vee_k \mathbb{S}^8 \vee_{(p,r)\in J} M(\mathbb{Z}/p^r, 7)$ and $M'' \simeq \vee_l \mathbb{S}^7 \vee_k \mathbb{S}^8 \vee_{(p,r)\in J'} M(\mathbb{Z}/p^r, 7)$.

以下定理将 Postnikov 截段的分裂（3.2）应用于 10 维流形的情形。

定理3.1。 设 M^{10}是一个闭光滑 10维流形，且 $H_1(M) = 0$，并且 Φ， ψ: $H^6(M;\ \mathbb{Z}/4) \longrightarrow H^{10}(M;\ \mathbb{Z}/2)$ 为以下文中所描述的次级运算 (3.1) 和 (3.4)。

(1) 设 M^{10} 是一个自旋流形。

(a) 如果 $\Phi = 0$，那么

$$\begin{aligned}[M^{10}, PL/O] \cong & H^7(M^{10};\mathbb{Z}/7) \oplus H^8(M^{10};\mathbb{Z}/2) \oplus H^9(M^{10};\mathbb{Z}/2) \oplus H^{10}(M^{10};\mathbb{Z}/3) \\ & \oplus [M^{10}, \Sigma^7\mathcal{E}].\end{aligned}$$

此外，如果高阶上同调运算 $\psi = 0$，那么

$$[M^{10}, \Sigma^7\mathcal{E}] \cong H^{10}(M;\mathbb{Z}/2) \oplus H^7(M;\mathbb{Z}/4).$$

另一方面，如果 $\psi \neq 0$，那么 $[M, \Sigma^7\mathcal{E}] = \widetilde{K} \oplus \widetilde{A}$，其中 $\widetilde{K} \subseteq H^7(M;\ \mathbb{Z}/4)$，而 $\widetilde{A}$是满足以下序列的非平凡扩张

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \widetilde{A} \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

与 $A=\mathbb{Z}/4$ 或 $\mathbb{Z}/2$。

(b) 若 $\Phi\neq 0$，则

$$[M^{10},PL/O]\cong H^7(M^{10};\mathbb{Z}/28)\oplus H^8(M^{10};\mathbb{Z}/2)\oplus H^9(M^{10};\mathbb{Z}/2)\oplus H^{10}(M^{10};\mathbb{Z}/3).$$

(2) 如果 M^{10} 是非自旋流形，那么

$$[M^{10},PL/O]\cong H^7(M^{10};\mathbb{Z}/7)\oplus H^{10}(M^{10};\mathbb{Z}/3)\oplus \mathrm{Ker}\big(Sq^2\big)\oplus \mathrm{Ker}\big(Sq^2\circ d_2\big),$$

$$\textit{where } Sq^2: H^8(M^{10};\mathbb{Z}/2)\to H^{10}(M^{10};\mathbb{Z}/2),\ \textit{and } Sq^2\circ d_2: H^7(M;\mathbb{Z}/4)\to H^{10}(M;\mathbb{Z}/2).$$

证明。利用（3.2）中的分解，只需计算 $[M^{10},\Sigma^8\mathcal{F}]$和 $[M^{10},\Sigma^7\mathcal{E}]$。对于 $[M^{10},\Sigma^8\mathcal{F}]$，由纤维化（2.2）可得一个长正合列

$$\cdots\longrightarrow \underset{\wr\|\ 0}{[M,\Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2]}\longrightarrow [M,\Sigma^8\mathcal{F}]\longrightarrow [M,\Sigma^8H^{\mathbb{Z}}/2]\xrightarrow{Sq^2}[M,\Sigma^{10}H^{\mathbb{Z}}/2]$$

这意味着

$$[M^{10},\Sigma^8\mathcal{F}]=\begin{cases}H^8(M;\mathbb{Z}/2) & \text{if } M \text{ is spin},\\ \mathrm{Ker}\big(Sq^2\big) & \text{if } M \text{ is not spin}.\end{cases}\tag{3.7}$$

对于 $[M,\Sigma^7\mathcal{E}]$，由（3.1）可得以下正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc}[M,\Sigma^8H^{\mathbb{Z}}/2] & & & & & & & & \\ \downarrow & \searrow^{Sq^2} & & & & & & & \\ [M,\Sigma^6\mathcal{F}_2] & \xrightarrow{\Phi} & \underset{\wr\|\ \mathbb{Z}/2}{[M,\Sigma^{10}H^{\mathbb{Z}}/2]} & \longrightarrow & [M,\Sigma^7\mathcal{E}] & \longrightarrow & [M,\Sigma^7\mathcal{F}_2] & \xrightarrow{\Phi} & \underset{\wr\|\ 0}{[M,\Sigma^{11}H^{\mathbb{Z}}/2]}\end{array}\tag{3.8}$$

如果 M是非自旋的，或者映射 $\Phi\neq 0$，显然有 $[M,\Sigma^7\mathcal{E}]\cong[M,\Sigma^7\mathcal{F}_2]$。后一个群可以利用长正合列计算得出

$$\cdots\ \underset{\wr\|\ 0}{[M,\Sigma^9H^{\mathbb{Z}}/2]}\longrightarrow [M,\Sigma^7\mathcal{F}_2]\longrightarrow [M,\Sigma^7H^{\mathbb{Z}}/4]\xrightarrow{Sq^2\circ d_2}[M,\Sigma^{10}H^{\mathbb{Z}}/2],\tag{3.9}$$

结合（3.8）可得

$$[M,\Sigma^7\mathcal{E}]\cong[M,\Sigma^7\mathcal{F}_2]=\mathrm{Ker}\big(Sq^2\circ d_2\big).\tag{3.10}$$

Thus

$$[M,\Sigma^7\mathcal{E}]=\begin{cases}H^7(M;\mathbb{Z}/4) & \text{if } M \text{ is spin and } \Phi\neq 0\\ \mathrm{Ker}\big(Sq^2\circ d_2\big) & \text{if } M \text{ is non-spin}.\end{cases}\tag{3.11}$$

现在，假设 M 是自旋的，且 $\Phi=0$。在这种情况下，由（3.8）和（3.9），得到以下短正合列

$$0\longrightarrow H^{10}(M;\mathbb{Z}/2)\longrightarrow [M,\Sigma^7\mathcal{E}]\longrightarrow H^7(M;\mathbb{Z}/4)\longrightarrow 0.\tag{3.12}$$

为了计算 $[M,\Sigma^7\mathcal{E}]$，我们首先计算 $[C(\eta^2)\ \Sigma^7\mathcal{E}]$ 以及 $[C(\iota\circ\eta^2)\ \Sigma^7\mathcal{E}]$。为此，考虑以下交换图，其行和列均为余纤维序列

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{S}^9 & \xrightarrow{\eta^2} & \mathbb{S}^7 & \longrightarrow & C(\eta^2)\\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \| & & \downarrow\\ \mathbb{S}^8 & \xrightarrow[\eta]{} & \mathbb{S}^7 & \longrightarrow & C(\eta)\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ \Sigma C(\eta) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma^2C(\eta)\end{array}$$

由此结合（3.12）可得

$$
\begin{tikzcd}
 & & {[C(\eta),\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & {[C(\eta^2),\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/4 \arrow[r] & 0 \\
 & & {[\Sigma C(\eta),\Sigma^7\mathcal{E}]} & &
\end{tikzcd}
$$

对于非自旋情形，我们有 $[C(\eta)\ \ \Sigma^7\mathcal{E}] \cong [C(\eta)\ \ \Sigma^7\mathcal{F}_2] \cong \mathbb{Z}/8$，并且 $[\Sigma C(\eta)\ \ \Sigma^7\mathcal{E}] = 0$ 由（2.21）可知。这意味着 $C(\eta^2)$ 对应的短正合列不分裂，因此得到

$$
[C(\eta^2),\Sigma^7\mathcal{E}] \cong \mathbb{Z}/8. \tag{3.13}
$$

要计算 $[C(\iota\circ\eta^2)\ \ \Sigma^7\mathcal{E}]$，考虑下面的交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {[\mathbb{S}^{10},\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] \arrow[d, "="] & {[C(\iota\circ\eta^2),\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] \arrow[d] & {[M(\mathbb{Z}/2^r,7),\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] \arrow[d, tail] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[\mathbb{S}^{10},\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] & {[C(\eta^2),\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] & {[\mathbb{S}^7,\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{3.14}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/2 \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & & & \\
 & {[\mathbb{S}^{10},\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[d, "="] & & & \\
 & {[\mathbb{S}^{10},\Sigma^7\mathcal{E}]} & & & \\
 & {[\mathbb{S}^{10},\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] & {[C(\eta^2),\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] & {[\mathbb{S}^7,\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] & 0 \\
 & & & \mathbb{Z}/4 \arrow[u, phantom, "\wr\|"] &
\end{tikzcd}
$$

该图由 $C(\eta^2)$ 和 $C(\iota\circ\eta^2)$ 的余纤维序列得到。由于 $[C(\eta^2)\ \ \Sigma^7\mathcal{E}]$ 处的短正合列不分裂，我们得出 $[C(\iota\circ\eta^2)\ \ \Sigma^7\mathcal{E}]$ 处的短正合列也不分裂。

因此，取决于 r 在 $M(\mathbb{Z}/2^r,\ 7)$, (3.14) 意味着

$$
[C(\iota\circ\eta^2),\Sigma^7\mathcal{E}] \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/8 & \text{if } r=1, \\ \mathbb{Z}/4 & \text{if } r>1. \end{cases} \tag{3.15}
$$

注意，10维流形自旋情形分为两个子情形：映射 $\psi\colon H^6(M;\mathbb{Z}/4) \to H^{10}(M;\mathbb{Z}/2)$（如（3.4）中所述）是非平凡还是平凡。A

S设 $\psi \neq 0$ 对于自旋10维流形成立。这意味着顶胞腔的粘接映射 ll

$\mathbb{S}^9 - \ \ M/M^{(6)} \simeq (\mathbb{S}^7)^{\vee_l} \vee (\mathbb{S}^8)^{\vee_s} \vee_{p,r} M(\mathbb{Z}/p^r,7)$ 通过 η^2 粘接到某个 $(\mathbb{S}^7)^{\vee_l}$ 或某个 $M(\mathbb{Z}/p^r,7$).

令 $K \subseteq H^7(M;\mathbb{Z}/4)$ 为 $\mathrm{Ker}\left(H^7(M;\mathbb{Z}/4) \to H^7(M;\mathbb{Z}/2) \to H^{10}(M;\mathbb{Z}/2)\right)$。此外，令 $H^7(M;\mathbb{Z}/4)$ $=\widetilde{K}\oplus A$，其中 $A=\mathbb{Z}/2$ 或 $\mathbb{Z}/4$（类似于 9 维流形情形）。于是，$[M,\Sigma^7\mathcal{E}] = \widetilde{K}\oplus\widetilde{A}$，其中 $\widetilde{A}$ 是 $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow A \longrightarrow A \longrightarrow 0$ 中的非平凡扩张。

另一方面，假设 $\psi = 0$。类似于 9维流形自旋情形，我们得到如下由短正合列构成的交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {[M^{10},\Sigma^{10}H\mathbb{Z}/2]} \arrow[r] & {[M^{10},\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] & {[M^{10},\Sigma^7H\mathbb{Z}/4]} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[M^{10}/M^{(5)},\Sigma^{10}H\mathbb{Z}/2]} \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & {[M^{10}/M^{(5)},\Sigma^7\mathcal{E}]} \arrow[r] \arrow[u] & {[M^{10}/M^{(5)},\Sigma^7H\mathbb{Z}/4]} \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & 0\ .
\end{tikzcd}
\tag{3.16}
$$

这意味着

$$
[M^{10},\Sigma^7\mathcal{E}] \cong [M^{10}/M^{(5)},\Sigma^7\mathcal{E}].
$$

为计算 $[M^{10}/M^{(5)}, \Sigma^7\mathcal{E}]$，考虑如下

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & [M^{10}/M^{(5)}, \Sigma^{10}H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [M^{10}/M^{(5)}, \Sigma^7\mathcal{E}] & \longrightarrow & [M^{10}/M^{(5)}, \Sigma^7 H^{\mathbb{Z}}/4] & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow\cong & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & [M^{10}/M^{(6)}, \Sigma^{10}H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [M^{10}/M^{(6)}, \Sigma^7\mathcal{E}] & \longrightarrow & [M^{10}/M^{(6)}, \Sigma^7 H^{\mathbb{Z}}/4] & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow\phi^* & & \uparrow\Psi^* & & \uparrow\gamma^* & & \\ 0 & \longrightarrow & [\Sigma(M^{(6)}/M^{(5)}), \Sigma^{10}H^{\mathbb{Z}}/2] & \longrightarrow & [\Sigma(M^{(6)}/M^{(5)}), \Sigma^7\mathcal{E}] & \longrightarrow & [\Sigma(M^{(6)}/M^{(5)}), \Sigma^7 H^{\mathbb{Z}}/4] & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{3.17}$$

利用 (3.4)，映射 $\Psi: {}^{M^{10}}/_{M^{(6)}} \longrightarrow \Sigma({}^{M^{(6)}}/_{M^{(5)}}) \simeq \vee_i \mathbb{S}^7$ 在 $\gamma: \vee_l \mathbb{S}^7 \vee_k \mathbb{S}^8 \vee_{(p,r)\in J} M({}^{\mathbb{Z}}/_{p^r}, 7) \longrightarrow \vee_i \mathbb{S}^7$ 和 $\phi: \mathbb{S}^{10} \longrightarrow \vee_i \mathbb{S}^7$中分解。此外，注意到从 10 维胞腔到 6 维胞腔的粘接映射是 $\nu \in \pi_3^{\mathbb{S}}$的倍数。因此，我们需要计算 $\nu^*: [\mathbb{S}^7, \Sigma^7\mathcal{E}] \longrightarrow [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^7\mathcal{E}]$。

Usi由 (3.2)，我们得到以下交换图（注意，只需在 2-局部范围内进行讨论） y)

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}^7, \Sigma^7\mathcal{E}] & \xrightarrow{\nu^*} & [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^7\mathcal{E}] \\ \| & & \| \\ [\mathbb{S}^7, \tau_{\leq 10}\ pl/o] & \xrightarrow{\nu^*} & [\mathbb{S}^{10}, \tau_{\leq 10}\ pl/o] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{\nu^*} & [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \end{array}$$

由于映射 $[\mathbb{S}^{10}, \tau_{\leq 10}\ pl/o] \longrightarrow [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 是一个同构，且 $[\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] = 0$，映射 $\nu^* = 0$，因此在 (3.17) 中诱导的映射 $\phi^* = 0$。于是，像 (Ψ^*) =像 (γ^*)，这意味着交换图 (3.17) 中的正合序列在 ${}^{[M^{10}/M^{(6)}, \Sigma^7\mathcal{E}]}/_{\mathrm{Im}(\Psi^*)}$ 处分裂，因此也在 $[M^{10}/M^{(5)}, \Sigma^7\mathcal{E}]$处分裂。因此，(3.16) 中的正合序列对 M分裂。

这就完成了对所有具有 $H_1(M^{10}) = 0$ 的 10 维流形 M^{10} 的证明。 □

4 当 8 ⩽ n ⩽ 10 时， M^n 的惯性群

在流形光滑结构的分类中，群 Θ_n 扮演着重要角色。具体而言，若将一个光滑流形与一个异球作连通和，所得流形仍与底层拓扑流形同胚；然而，其微分同胚类可能会改变。因此，确定 Θ_n 的子群，即惯性群、同伦惯性群和同痕惯性群，与分类问题密切相关。我们先给出这些群的定义。

定义 4.1. 设 M^n 是一个闭定向光滑流形。

(i) M^n 的惯性群是同伦球面 Σ^n 的子群 $I(M^n) \subseteq \Theta_n$，其中的元素满足 $M^n\#\Sigma^n$ 与 M^n 微分同胚。(ii) 同伦惯性群 $I_h(M^n)$ 由满足以下条件的 $\Sigma^n \in I(M^n)$ 构成：存在一个从 $M^n\#\Sigma^n \to M^n$ 出发的微分同胚，它与典范同胚 h_{Σ^n}:$M^n\#\Sigma^n \to M^n$ 同伦。(iii) 同痕惯性群 $I_c(M^n)$ 由满足以下条件的 $\Sigma^n \in I_h(M^n)$ 构成：存在一个从 $M^n\#\Sigma^n \to M^n$ 出发的微分同胚，它与典范同胚h_{Σ^n}：$M^n\#\Sigma^n \to M^n$ 共边。

Th本节讨论光滑流形 M^n f 的共边群和同伦惯性群 or $8 \leq n \leq 10$。

4.1 共边惯性群

Řeč所有这些表明，若 $d: M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ 是度为一的映射，则诱导映射 d 的核 $/O] \longrightarrow [M^n, PL/O]$可与 $I_c(M^n)$ 识别。

定理 4.1。设 M^8 为一个闭流形。则

$$I_c(M^8) = \{0\}.$$

证明。 结论直接由 8th Postnikov 分解（2.1） pl/o得出，其中映射 d^*：
$[\mathbb{S}^8, \tau_{\leq 8}\, pl/o] \longrightarrow [M^8, \tau_{\leq 8}\, pl/o]$ 由塌缩映射 d： $M^8 \longrightarrow M^8 \setminus int(\mathbb{D}^8)$ 诱导，且为单射。 □

定理 4.2。设 M^9 是一个闭定向光滑流形，满足 $Sq^2 \circ d_2$： $H^6(M;\, \mathbb{Z}/4) \longrightarrow H^9(M;\, \mathbb{Z}/2)$。

(1) 若 M^9 是自旋流形，则

$$I_c(M^9) = \{0\}.$$

(2) 若 M^9 是非自旋流形且 $Sq^2 \circ d_2 = 0$，则

$$I_c(M^9) = \mathbb{Z}/2\{\eta \circ \epsilon\}.$$

(3) 若 M^9 是非自旋流形且 $Sq^2 \circ d_2 \neq 0$，则

$$I_c(M^9) = \mathbb{Z}/2\{\eta \circ \epsilon\} \oplus \mathbb{Z}/2\{\mu\}.$$

证明。 利用分裂（2.3），我们得到以下分解

$$[M^9, PL/O] \cong H^7(M^9; \mathbb{Z}/7) \oplus H^9(M^9; \mathbb{Z}/2) \oplus [M^9, \Sigma^8\mathcal{F}] \oplus [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]. \tag{4.1}$$

由于流形的共边惯性群同构于 d^*: $[\mathbb{S}^9, PL/O] \longrightarrow [M^9, PL/O]$的核，因此只需逐分量检验（$d^*$）在（4.1）中的 Ker。由于 M^9是定向的，映射d^*: $H^9(\mathbb{S}^9;\, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^9(M^9;\, \mathbb{Z}/2)$ 在顶维上同调上是单射。因此，我们重点考察映射d^*: $[\mathbb{S}^9, \Sigma^8\mathcal{F}] \longrightarrow [M^9, \Sigma^8\mathcal{F}]$ 和 d^*: $[\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \longrightarrow [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$。

(1) 若 M^9 是自旋流形，则根据定理 2.2(1) 的证明，有 $[M^9, \Sigma^8\mathcal{F}] \cong H^8(M^9;\, \mathbb{Z}/2) \oplus H^9(M^9;\, \mathbb{Z}/2)$ 和 $[M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \cong H^7(M;\, \mathbb{Z}/4) \oplus H^9(M;\, \mathbb{Z}/2)$。因此，诱导映射 d^*: $[\mathbb{S}^9, \Sigma^8\mathcal{F}] \to [M^9, \Sigma^8\mathcal{F}]$ 和 d^*: $[\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \longrightarrow [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$ 是单射，其像同构于 $H^9(M^9;\, \mathbb{Z}/2)$。所以，对于自旋流形 M^9，映射 d^*: $[\mathbb{S}^9, PL/O] \longrightarrow [M^9, PL/O]$ 的核是平凡的。

(2) 设 M^9是一个非自旋流形。由（2.6）和（2.7）可得 $M^9/M^{(6)} \simeq C(\eta) \vee M'$或 $C(\iota \circ \eta) \vee M''$。设 $X = C(\eta)$ 或 $C(\iota \circ \eta)$。由于 M'或 M''位于$M^9/M^{(6)}$的 8-骨架中，度为一的映射可分解为经过 X，因此有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}^9, \Sigma^8\mathcal{F}] & \xrightarrow{\quad d^* \quad} & [M^9, \Sigma^8\mathcal{F}] \\ & \searrow^{d^*} \quad \nearrow & \\ & [X, \Sigma^8\mathcal{F}] & \end{array}$$

由（2.15）和（2.16）可知，映射$[\mathbb{S}^9, \Sigma^8\mathcal{F}] \cong \mathbb{Z}/2\{\eta \circ \epsilon\} \longrightarrow [X, \Sigma^8\mathcal{F}]$ 是平凡的。因此，对于分支 $\Sigma^8\mathcal{F}$，诱导映射 d^*： $[\mathbb{S}^9, \Sigma^8\mathcal{F}] \longrightarrow [M^9, \Sigma^8\mathcal{F}]$ 也是平凡的。

对于映射 d^*： $[\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \longrightarrow [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$，考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & [\mathbb{S}^9, \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2] & \xrightarrow{\cong} & [\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \cong \mathbb{Z}/2\{\mu\} \\ & & \cong\downarrow d^* & & \downarrow d^* \\ [M^9, \Sigma^6 H\mathbb{Z}/4] & \xrightarrow{Sq^2 d_2} & [M^9, \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2] & \longrightarrow & [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \end{array} \tag{4.2}$$

其各行是由 $\mathcal{F}_2$ 的纤维化序列（见（2.2））导出的正合序列的一部分。在 $Sq^2 \circ d_2 = 0$的情形下，映射 $[M^9, \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2] \longrightarrow [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$变为单射，因此 d^* 也是如此： $[\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \longrightarrow [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$。

此外，（ $Sq^2 \circ d_2$ 中的映射（4.2）非平凡，这意味着映射 $[M^9, \Sigma^9 H\mathbb{Z}/2] \longrightarrow [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$ 是平凡的。因此，映射 d^*： $[\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \longrightarrow [M^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$ 也同样是平凡的。

至此，所有情形的证明均已完成。 □

定理 4.3. 设 M^{10} 是一个闭的单连通光滑流形，并设 Φ: $H^6(M^{10};\, \mathbb{Z}/4) \to H^{10}(M^{10};\, \mathbb{Z}/2)$ 是 （3.1） 中提到的次级上同调运算。

(1) 若 M^{10} 是自旋流形且 $\Phi = 0$，则

$$I_c(M^{10}) = \{0\}.$$

(2) 如果 M^{10} 是自旋流形且 $\Phi \neq 0$，或者是非自旋流形，那么

$$I_c(M^{10}) = \mathbb{Z}/2\{\eta \circ \mu\}.$$

证明。 分裂 (3.2) 给出如下结果

$$[M^{10}, PL/O] \cong [M^{10}, \Sigma^8 \mathcal{F}] \oplus [M^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}] \oplus H^7(M^{10}; \mathbb{Z}/7) \oplus H^9(M^{10}; \mathbb{Z}/2) \\ \oplus H^{10}(M^{10}; \mathbb{Z}/3).$$

利用定理 2.2，我们有 $[\mathbb{S}^{10}, PL/O] \cong [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/3] \oplus [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}]$。与定理 4.2类似，只需检查 d^* 的逐分量核：$[\mathbb{S}^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/3] \oplus [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}] \longrightarrow [M^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/3] \oplus [M^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}]$。

由于 M^{10}是单连通的，映射 $d^*\colon [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/3] \longrightarrow [M^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/3]$是单射。这意味着 $[\mathbb{S}^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/3] = \mathbb{Z}/3\{\beta_1\}$ 的生成元 β_1不属于 $I_c(M^{10})$。

因此，只需计算 $d^*\colon [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}] = \mathbb{Z}/2\{\eta \circ \mu\} \longrightarrow [M^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}]$ 的核。为此，我们考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} [M^{10}, \Sigma^8 H\mathbb{Z}/2] & & [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/2] & \xrightarrow{\cong} & [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}] \\ \downarrow & \overset{Sq^2}{\searrow} & \cong \downarrow d^* & & \downarrow d^* \\ [M^{10}, \Sigma^{(6)} \mathcal{F}_2] & \xrightarrow[\Phi]{} & [M^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/2] & \longrightarrow & [M^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}] \end{array} \tag{4.3}$$

其中底行是正合序列（3.8）的一部分。从图中显然可知，映射 $d^*\colon [\mathbb{S}^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}] \to [M^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}]$ 是单射或平凡映射，当且仅当从 $[M^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/2] \to [M^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}]$ 出发的映射分别是单射或平凡映射。对于自旋情形，只要 $\Phi = 0$，映射$[M^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/2] \longrightarrow [M^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}]$ 就是单射；否则它是平凡映射。另一方面，在非自旋情形下， Φ始终非平凡。因此，映射 $[M^{10}, \Sigma^{10} H\mathbb{Z}/2] \longrightarrow [M^{10}, \Sigma^7 \mathcal{E}]$ 是平凡映射。至此，所有情形的证明均已完成。□

4.2 同伦惯性群

在手术理论中，存在一个自然映射 $f_{M^n}\colon \Theta_n \longrightarrow S^{\mathrm{Diff}}(M^n)$，其中 $S^{\mathrm{Diff}}(M^n)$ 是 M^n [3, 25]的同伦光滑结构集。于是，同伦惯性群 $I_h(M^n)$ 可识别为 $\mathrm{Ker}(f_{M^n})$。如果 M^n是一个闭定向光滑流形，那么我们有如下交换方块

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}^n, PL/O] & \xrightarrow{\psi_*} & [\mathbb{S}^n, G/O] \\ {\scriptstyle f_{M^n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d^*} \\ S^{\mathrm{Diff}}(M^n) & \xrightarrow[g']{} & [M^n, G/O] \end{array}, \tag{4.4}$$

其中 $\psi\colon PL/O \longrightarrow G/O$ 是一个自然纤维化， d^* 由度为一的映射诱导， g' 是手术正合序列的一部分。注意，如果 n 是偶数且 M^n 是单连通的，那么映射 ψ_* 和 g' 是单射。

回忆一下， $I_c(M^n) \subseteq I_h(M^n)$。因此，只需讨论 $\Theta_n \equiv [\mathbb{S}^n, PL/O]$ 中不属于 $I_c(M^n)$ 的那些元素。

我们注意到，以下事实可通过直接进行图追逐得出。考虑下面的交换图，其行和列均为阿贝尔群正合序列的一部分，且 ξ和 β 是满同态。

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \\ {\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ E & \xrightarrow{\gamma} & F & \xrightarrow{\eta} & G \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \\ & & H & & \end{array} \tag{4.5}$$

Cl目标：若 $y \notin \mathrm{Im}(\phi)$且 $\eta(y) = z \neq 0$，则 $z \notin \mathrm{Im}\quad(\psi)$.

我们通过反证法证明这一点。假设 $z \in$ 属于ψ的像。则存在元素 b、c，使得$\beta(b) = c$ 且 $\psi(c) = z$。对于 $\phi(b) = x$，我们有 $\eta(x) = z$ 且 $\theta(x) = 0$。因此 $\eta(x-y) = 0$，这也意味着存在一个元素 e，使得 $\gamma(e) = x - y$。由于 ξ 是满射，根据交换图的交换性，我们可以确认存在 b'，使得 $\phi(b') = x-y$。因此，$\theta(x-y) = \theta(x)-\theta(y) = 0$，这意味着 $\theta(y) = 0$。然而，这与 $y \notin$ 属于ϕ的像这一事实矛盾。因此，断言得证。

令 $M^{(6)}$ 为 $n \leq 10$时的 n-流形 M 的 6-骨架。考虑以下交换图，

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] & = & [\Sigma M^{(6)}, K(\mathbb{Z}_{(2)}, 7)] \\ \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\ [\Sigma M^{(6)}, \tau_{\leq 10}\ pl/o] & = & [\Sigma M^{(6)}, K(\mathbb{Z}/4, 7)] \end{array}$$

其中映射 j_* 由纤维化诱导

$$ {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl) \xrightarrow{j} \tau_{\leq 10}\ pl/o \xrightarrow{\psi} {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o\ . \tag{4.6}$$

注意，映射 j_*: $[\Sigma M_{(6)}\, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \longrightarrow [\Sigma M_{(6)}\, \tau_{\leq 10}\ pl/o]$ 是满射。

进一步，考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} [\Sigma M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] & \to & [M/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] & \overset{q^*}{\twoheadrightarrow} & [M, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \\ \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\ [\Sigma M^{(6)}, \tau_{\leq 10}\ pl/o] & \longrightarrow & [M/M^{(6)}, \tau_{\leq 10}\ pl/o] & \xrightarrow{q^*} & [M, \tau_{\leq 10}\ pl/o] \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} \\ & & [M/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{q^*} & [M, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \end{array}$$

其列和行分别是由（4.6）中的纤维化以及余纤维化 $M^{(6)} \hookrightarrow M \xrightarrow{q} M/M^{(6)}$ 得到的阿贝尔群正合序列的一部分。此外，映射 j_* :$[\Sigma M_{(6)}\, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \to [\Sigma M_{(6)}\, \tau_{\leq 10} pl/o]$ 和

q^*: $[M/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \to [M, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)]$ 均为满射。因此，断言 4.2对这个交换图成立，从而得到以下命题：

命题 4.4. 若 $y \notin \mathrm{Im}\big(j_*\colon [M/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \longrightarrow [M/M^{(6)}, \tau_{\leq 10}\ pl/o]\big)$，则 $q^*(y) \notin \mathrm{Im}\big(j_*\colon [M, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \longrightarrow [M, \tau_{\leq 10}\ pl/o]\big)$，前提是 $q^*(y) \neq 0$。

我们感兴趣的映射来自（4.4），具体而言是 d^*: $[\mathbb{S}^n, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$。为此，我们将按如下方式使用命题4.4 。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & [M/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] & \overset{q^*}{\twoheadrightarrow} & [M, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \\ & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} \\ [\mathbb{S}^n, \tau_{\leq 10}\ pl/o] & \xrightarrow{d^*} & [M/M^{(6)}, \tau_{\leq 10}\ pl/o] & \xrightarrow{q^*} & [M, \tau_{\leq 10}\ pl/o] \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} \\ [\mathbb{S}^n, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{d^*} & [M/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{q^*} & [M, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \\ & \searrow^{d^*} & & & \end{array} \tag{4.7}$$

其各列属于使用（4.6）的正合序列，映射 d^* 由度为一的映射诱导，而q^*由商映射诱导。对于 $n = 8$, 9 和 10 中的映射 ψ_*:$[\mathbb{S}^n, \tau_{\leq 10}\ pl/o] \longrightarrow [\mathbb{S}^n, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 分别是单射、满射和同构。在下文讨论的大多数情形中，我们应用了命题 4.4。为此，我们结合使用交换图（4.2）和（4.7），并证明若 $0 \neq y \in d^*([\mathbb{S}^n, \tau_{\leq 10}\, pl/o]) \subseteq [M/M^{(6)}, \tau_{\leq 10}\, pl/o]$，则 $y \notin$像$\big(j_*\colon [M/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \to [M/M^{(6)}, \tau_{\leq 10}\ pl/o]\big)$。

T定理 4.5。设 M^8 是一个闭流形。 *Then*

$$I_h(M^8) = \{0\}.$$

证明。在 (4.4) 中，由于 $[\mathbb{S}^8, PL/O] = \mathbb{Z}/2\{\epsilon\}$ 且映射 $\psi_*\colon [\mathbb{S}^8, PL/O] \longrightarrow [\mathbb{S}^8, G/O]$ 是单射，只需证明 $\psi_*(\epsilon)$ 在 $d^*\colon [\mathbb{S}^8, G/O] \longrightarrow [M^8, G/O]$ 下的像非零。由定理 4.1，映射 $d^*\colon [\mathbb{S}^8, \tau_{\leq 8}\, pl/o] \longrightarrow [M^8, \tau_{\leq 8}\, pl/o]$ 是单射。回忆一下，${}^{>6}\tau_{\leq 8}(\Sigma^{-1}g/pl)_{(2)} \simeq \Sigma^7 H\mathbb{Z}_{(2)}$ 且 $\tau_{\leq 8}(pl/o) \simeq \Sigma^7 H\mathbb{Z}/4 \vee \Sigma^8 H\mathbb{Z}/2$，使得映射 $\Sigma^7 H\mathbb{Z}_{(2)} \to \Sigma^8 H\mathbb{Z}/2$ 零伦。因此我们得到 $d^*([\mathbb{S}^8, \tau_{\leq 8}\, pl/o]) \bigcap 像\big(j_*\colon [M^8, {}^{>6}\tau_{\leq 8}(\Sigma^{-1}g/pl)] \longrightarrow [M^8, \tau_{\leq 8}\, pl/o]\big) = \{0\}$。因此，在 (4.7) 中，$\psi_*\colon [M^8, \tau_{\leq 8}\, pl/o] \longrightarrow [M^8, {}^{>6}\tau_{\leq 8}\, g/o]$ 将 $d^*([\mathbb{S}^8, \tau_{\leq 8}\, pl/o])$ 单射映射。将此用于 (4.4)，即完成证明。□

下面的推论利用了这样一个事实： $\mathbb{R}\mathrm{P}^8$ 的每个保定向自同伦等价都同伦于一个微分同胚。

推论 4.6. $I(\mathbb{R}\mathrm{P}^8) = \mathbb{Z}/2.$

在 9 维情形中，利用 (4.7)，我们先在下一个引理中讨论映射 $d^*\colon [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 9}\, g/o] \to [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 9}\, g/o]$。

引理 4.7. 设 M^9 是一个闭定向光滑流形，满足 $Sq^2 \circ d_2\colon H^6(M^9; \mathbb{Z}/4) \longrightarrow H^9(M^9; \mathbb{Z}/2)$。

(1) 若 M^9 是自旋的，则 $d^*\colon [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \longrightarrow [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$ 是单射。(2) 假设 M^9 是非自旋的，且 $Sq^2 \circ d_2$ 是平凡的。(a) 若 M^9 满足 (2.6)，则 $d^*\colon [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \longrightarrow [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$ 是平凡的。(b) 若 M^9 满足 (2.7)，则 $d^*\colon [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \to [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$ 的核(d^*)为 $=\mathbb{Z}/2\{\eta \circ \epsilon\}$，且像($d^*$)为 $= \mathbb{Z}/2\{\mu\}$。

证明。回想一下，$[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \cong [\mathbb{S}^9, \Sigma^8\mathcal{F}] \oplus [\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$。此外，$[\mathbb{S}^9, \Sigma^8\mathcal{F}] = \mathbb{Z}/2\{\eta \circ \epsilon\}$ 和 $[\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] = \mathbb{Z}/2\{\mu\}$。

(1) 若 M^9 是自旋流形，则 $M^9/M^{(6)}$ 分解 (2.5) 直接给出了映射 $d^*\colon [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \longrightarrow [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$ 的单射性。(2) 设 M^9 是一个非自旋流形，且 $Sq^2 \circ d_2 = 0$。注意，由 (2.6)、(2.7)，度映射导出如下

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] & \xrightarrow{\quad d^*\quad} & [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \\ & {\scriptstyle d^*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p^*} & \\ & [X, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] & \end{array}$$

其中 $X = C(\eta)$ 或 $C(\iota \circ \eta)$，且 $p\colon M^9/M^{(6)} \longrightarrow X$ 是投影映射。现在，我们将讨论 $\{\mu\} \in [\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2]$ 在 $d^*\colon [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \longrightarrow [X, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$ 下的像。

(a) 若 M^9 满足（2.6），则 $X = C(\eta)$。考虑由此诱导的长正合列，源于 to 由 η 的余纤维序列： $\mathbb{S}^8 \longrightarrow \mathbb{S}^7$

$$\cdots \longrightarrow [\mathbb{S}^8, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \xrightarrow{\eta^*} [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \longrightarrow [C(\eta), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$$

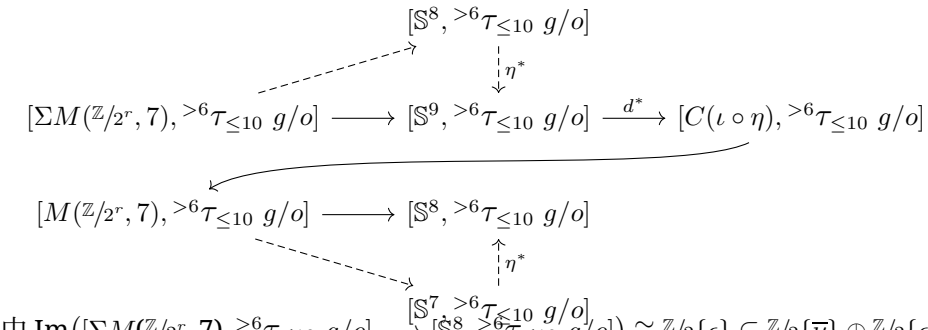
$$[\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \xrightarrow{\eta^*} [\mathbb{S}^8, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$$

由于 $[\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] = 0$ 和 $\eta^*\colon [\mathbb{S}^8, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] \longrightarrow [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$ 是满射，得到

$$[C(\eta), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o] = 0$$

因此，在（2）中，映射 $d^*\colon [\mathbb{S}^9, \Sigma^7\mathcal{F}_2] \longrightarrow [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$ 是平凡的。

(b) 若 M^9 满足（2.7），则 $X = C(\iota \circ \eta)$。现在考虑由此诱导的长正合序 ce 由 $\iota \circ \eta$ 的余纤维序列： $\mathbb{S}^8 \longrightarrow \mathbb{S}^7 \longrightarrow M(\mathbb{Z}/2^r, 7)$



其中 $\mathrm{Im}\big([\Sigma M(\mathbb{Z}/2^r,7)\ {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [\mathbb{S}^8, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]\big) \cong \mathbb{Z}/2\{\epsilon\} \subseteq \mathbb{Z}/2\{\overline{\nu}\} \oplus \mathbb{Z}/2\{\epsilon\}$。这意味着

$$\mathrm{Ker}\big(d^* : [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [C(\iota\circ\eta), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]\big) = \mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\} \tag{4.8}$$

and

$$\mathrm{Im}\big(d^* : [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [C(\iota\circ\eta), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]\big) = \mathbb{Z}/2\{\mu\}. \tag{4.9}$$

至此，所有情形的证明均已完成。 □

定理 4.8. 设 M^9 是一个闭定向光滑流形，且 $Sq^2\circ d_2$: $H^6(M^9;\mathbb{Z}/4) \to H^9(M^9;\mathbb{Z}/2)$。

（1）若 M^9 是自旋的，则映射 d^*: $[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 是单射。（2）设 M^9 是非自旋的，且映射 $Sq^2\circ d_2$ 是平凡的。（a）若 M^9 满足 (2.6)，则 d^*: $[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 将 $\{\mu\}$ 映射到 0。（b）若 M^9 满足 (2.7)，则 d^*: $[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 将 $\{\mu\}$ 单射地映射。

证明。 (1) 设 M^9 是一个自旋流形。应用命题 4.4，结合引理 4.7(1) 和定理 4.2(1)，我们得到映射 d^*: $[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 是单射。

(2) 设 M^9 是非自旋的，且映射 $Sq^2\circ d_2$ 是平凡的。

(a) 若 M^9 满足 (2.6)，则由引理 4.7(2)(a) 可知映射 d^*: $[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \to [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 是平凡的。由于，度为一的映射 d^*: $[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \to [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 可经由 $[M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 分解，这就清楚地表明了此情形下的结论。

(b) 现在考虑 M^9 满足 (2.7) 的情形。由引理 4.7(2)(b) 可知，$\mathbb{Z}/2\{\mu\}$ 属于 $\mathrm{Im}\big(d^*: [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]\big)$。由于在 ψ_*: $[\mathbb{S}^9, \tau_{\leq 10}\ pl/o] \longrightarrow [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 下，群 $\mathbb{Z}/2\{\mu\}$ 被单射映射，这意味着在 (4.7) 中，$d^*(\mu) \notin \mathrm{Im}\big(j_*: [M^9/M^{(6)}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\Sigma^{-1}(g/pl)] \longrightarrow [M^9/M^{(6)}, \tau_{\leq 10}\ pl/o]\big)$。此外，由定理 4.2(2)(a) 可知，$d^*(\mu)$ 在 $[M^9, \tau_{\leq 10}\ pl/o]$ 中非零。最后，利用命题 4.4，我们得到 $d^*(\mu)$ 在 ψ_* : $[M^9, \tau_{\leq 10}\ pl/o] \longrightarrow [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 下被非平凡地映射。因此，μ 在 d^*: $[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 下也被非平凡地映射。结论成立。

□

定理 4.9. 设 M^9 是一个闭定向光滑流形，且映射 $Sq^2\circ d_2$: $H^6(M^9;\mathbb{Z}/4) \longrightarrow H^9(M^9;\mathbb{Z}/2)$.

(1) 如果 M^9 是自旋流形，则

$$I_h(M^9) \bigcap \Theta_9/bP_{10} = \{0\}.$$

(2) 如果 M^9 是单连通自旋流形，则

$$I_h(M^9) = \{0\}.$$

(3) 假设 M^9 是非自旋的，且映射 $Sq^2\circ d_2 = 0$。

(a) 若 M^9 满足 2.6 则

$$I_h(M^9) \supseteq \mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\} \oplus \mathbb{Z}/2\{\mu\}.$$

(b) 若 M^9 满足 2.7 则

$$I_h(M^9) \supseteq \mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\} \ and \ I_h(M^9) \not\supseteq \mathbb{Z}/2\{\mu\}.$$

(4) 若 M^9 是非自旋的，且满足 $Sq^2\circ d_2 \neq 0$，则

$$I_h(M^9) \supseteq \mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\} \oplus \mathbb{Z}/2\{\mu\}.$$

证明。回顾一下，$I_h(M^n) =$核$\big(f_{M^n}\colon\ [\mathbb{S}^n, PL/O] \longrightarrow S^{\mathrm{Diff}}(M^n)\big)$，其中 f_{M^n}是交换方形（4.4）的一部分。

(1) 设 M^9是一个自旋流形。回顾一下，$\Theta_9/bP_{10} = \mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\}\oplus\mathbb{Z}/2\{\mu\} \subseteq [\mathbb{S}^9, \tau_{\leq 10}\, pl/o]$，并且在（4.4）中，映射 $\psi_*\colon [\mathbb{S}^9, \tau_{\leq 10}\, pl/o] \longrightarrow [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\, g/o]$将 $\mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\}\oplus\mathbb{Z}/2\{\mu\}$单射映射。此外，根据定理 4.8(1)，映射 $d^*\colon [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$是单射，因此本情形下结论显然成立。(2) 若 M^9 是单连通自旋流形，则命题 II.2] 中的结果 [4, 表明$I_h(M^9) \subseteq$Coker(J_9) $= \mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\} \oplus \mathbb{Z}/2\{\mu\}$。因此，由陈述（1）可得 $I_h(M^9) = 0$。(3) 设 M^9 是一个非自旋流形，且映射为 $Sq^2\circ d_2 = 0$。(a) 假设 M^9 满足 2.6。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & [\mathbb{S}^9, PL/O] & & \\ & \overset{\mathbf{d}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \\ [\Sigma M_0^9, G/O] & \xrightarrow[(\Sigma h)^*]{} & [\mathbb{S}^9, G/O] & \xrightarrow[d^*]{} & [M^9, G/O] \end{array}$$

其中 $M_0^9 = M^9 \setminus int(\mathbb{D}^9)$，且 $\mathbf{d}\colon [\Sigma M_0^9, G/O] \longrightarrow [\mathbb{S}^9, PL/O]$是命题 3 中给出的映射 [4,Proposition 3.1], 使得 $I_h(M^9) =$是 $\mathbf{d}$的像。底行由余纤维序列 $M^9 \xrightarrow{d} \mathbb{S}^9 \xrightarrow{\Sigma h} \Sigma M_0^9$得到，其中 h是 M^9的顶胞腔附着映射，而 d是度为一的映射。

结合定理 4.2(2)(a) 和定理 4.8(1)(a)，可得 $d^*\colon\ [\mathbb{S}^9, G/O] \longrightarrow [M^9, G/O]$是平凡的。因此，在上述交换图中，$(\Sigma h)^*\colon [\Sigma M_0^9, G/O] \longrightarrow [\mathbb{S}^9, G/O]$是满射。由于 $\mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\} \oplus \mathbb{Z}/2\{\mu\} \subseteq [\mathbb{S}^9, PL/O]$，在这种情况下结论显然成立。

(b) 若 M^9满足2.7，则由定理4.2(2)(a)可知 $\mathbb{Z}/2\{\eta\circ\mu\} \subseteq I_h(M^9)$。现在，在（4.4）中回忆到，$\psi_*(\mu)$在$[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$中非零，而定理4.8(2)($b$)表明，$\mathbb{Z}/2\{\mu\}$ 在映射 $d^*\colon$ $[\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$下是单射。因此，$f_{M^9}(\mu)$也非零，由此完成了此情形的证明。

(4) 当 M^9 是非自旋流形且映射 $Sq^2\circ d_2 \neq 0$ 时，该情形的陈述可由定理4.2(2)(b)直接得出，因为 $\mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\} \oplus \mathbb{Z}/2\{\mu\} = I_c(M^9) \subseteq I_h(M^9)$。

□

回想一下，$L^9(m)$ 是一个闭的定向光滑 9 维流形，其惯性群取决于 m，将在下文讨论。

定理 4.10. 设 m 为正整数，n 为非负整数。

(1) 若 $m = 2n+1$，

则 (2) 若 $m = 4n+2$，

则 (3) 若 $m = 4n$，则

$$I(L^9(m)) = \{0\}.$$

$$I(L^9(m)) = \mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\}.$$

$$I(L^9(m)) = \mathbb{Z}/2\{\eta\circ\epsilon\} \oplus bP_{10}.$$

证明。注意，若 m 为奇数，则 $L^9(m)$ 是一个自旋流形；否则，它是非自旋流形。注意，若 $L^9(m)$ 是非自旋流形，则 $Sq^2\circ d_2 = 0$，且 $L^9(m)$ 满足（2.7）。此外，$bP_{10} \subseteq I_h(L^9(m))$ 当且仅当 $4|m$ 根据 [12, 定理 4。2]。结合这一点以及以下事实：一个

透镜空间的保向自同伦等价与恒等映射同伦，结合定理4.9，即可完成证明。□

注意，当 $m=2$， $L^{2n+1}(m)$ 不过是通常的实射影空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$。以下注记是定理 4.9 的一部分，并且是定理 $m=2$ 4.10中的一个特例。

注 4.11. 存在唯一的异球 $\Sigma\in\Theta_9$，使得 $\mathbb{R}\mathrm{P}^9\#\Sigma$ 与 $\mathbb{R}\mathrm{P}^9$ 微分同胚。

现在，在 10 维情形下，对于同伦惯性群，我们只需检验 M^{10} 为自旋且 $\Phi=0$ 的情形。为此，回顾 $M^{10}/M^{(6)}$ (3.4)、(3.5) 和 (3.6) 中 $\pi_{10}(pl/o)\cong\pi_{10}(g/o)\cong\mathbb{Z}_2\{\eta\circ\mu\}\oplus\mathbb{Z}_3\{\beta_1\}$。由于，只需在素数 2 和 3 处进行局部考察。我们先讨论 3-局部化情形。

定理 4.12. 设 M^{10} 是一个闭定向光滑流形。那么诱导的度为一的映射 d^*: $[\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(3)}\longrightarrow[M^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(3)}$ 是单射。

证明. 回想一下，$g/o_{(3)}\simeq\mathrm{cok}(J)_{(3)}\times bso_{(3)}$。由于 $[\mathbb{S}^{10},bso]_{(3)}=0$；我们得到$[\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(3)}=[\mathbb{S}^{10},\mathrm{cok}(J)]_{(3)}$。注意

$$\pi_i(\mathrm{cok}(J))_{(3)}\begin{cases}0 & \text{if } i\leq 9\\ \mathbb{Z}/3 & \text{if } i=10\end{cases}$$

这意味着 $\tau_{\leq 10}\mathrm{cok}(J)_{(3)}=K(\mathbb{Z}/3,10)$。因此，该陈述成立，因为 $d^*\colon H^{10}(\mathbb{S}^{10};\mathbb{Z}/3)\longrightarrow H^{10}(M^{10};\mathbb{Z}/3)$ 是单射。□

现在我们来讨论 2-局部化的情形。

定理 4.13. 设 M^{10}是一个闭光滑 10-流形，具有 $H_1(M)=0$。那么诱导的度为一的映射 d^*: $[\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}\longrightarrow[M^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}$是单射，如果 M^{10}满足 (3.4)或 (3.6)；如果 M^{10} 满足 (3.5)，则该映射为平凡映射。

证明。考虑 M^{10}满足（3.4）的情况。由于$[\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ (\Sigma^{-1}g/pl)\ ]_{(2)}=0$，$d^*\ ([\mathbb{S}^{10},\tau_{\leq 10}\ pl/o]_{(2)})\bigcap j_*\ ([M^{10}/M^{(6)},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ (\Sigma^{-1}g/pl)\ ]_{(2)})\ =\{0\}$。由定理 4.3可知$d^*\ (\eta\circ\mu)$ 在 $[M^{10},\tau_{\leq 10}\ pl/o]$中非零。因此，由命题 4.4可知，映射$d^*\colon\ [\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}\longrightarrow[M^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}$是单射。

对于其余情况，$M^{10}/M^{(6)}$ 在（3.5）或（3.6）中的同伦分解给出以下交换图

$$\begin{array}{ccc}[\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{\quad d^*\quad} & [M^{10}/M^{(6)},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]\\ & {\scriptstyle d^*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p^*} & \\ & [X,{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \end{array}$$

其中 $X=C(\eta^2)$ 或 $C(\iota\circ\eta^2)$，且 $p\colon M^{10}/M^{(6)}\longrightarrow X$ 是投影映射。鉴于我们关注同伦惯性群，且 p^* 是单射，因此首先考察 $\{\eta\circ\mu\}\in[\mathbb{S}^{10},\Sigma^7\mathcal{E}]$ 在 $d^*\colon[\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]\longrightarrow[X,{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 下的像。

现在，假设 M^{10} 满足（3.5）。考虑 $\eta^2\colon\mathbb{S}^9\longrightarrow\mathbb{S}^7$ 的余纤维序列。

$$\begin{array}{ccccc}[\mathbb{S}^8,{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} & \xrightarrow{(\eta^2)^*} & [\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} & \longrightarrow & [C(\eta^2),{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}\\ & \searrow & & \swarrow & \\ & [\mathbb{S}^7,{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} & \xrightarrow{(\eta^2)^*} & [\mathbb{S}^9,{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} & \end{array}$$

这里，群 $[\mathbb{S}^7,{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}=0$。此外，我们有

$$\begin{array}{ccccc}[\mathbb{S}^8,{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} & \cong & [\mathbb{S}^8,\mathrm{cok}(J)]_{(2)} & \oplus & [\mathbb{S}^8,bso]_{(2)}\\ \downarrow{\scriptstyle (\eta^2)^*} & & \downarrow{\scriptstyle (\eta^2)^*} & & \downarrow{\scriptstyle (\eta^2)^*}\\ [\mathbb{S}^{10},{}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} & \cong & [\mathbb{S}^{10},\mathrm{cok}(J)]_{(2)} & \oplus & [\mathbb{S}^{10},bso]_{(2)}\end{array}$$

其中 $[\mathbb{S}^{10}, \text{余核}(J)]_{(2)} = 0$ 且 $(\eta^2)^*$： $[\mathbb{S}^8, bso]_{(2)} \longrightarrow [\mathbb{S}^{10}, bso]_{(2)}$ 非零 [1, 命题 7。1]。因此，映射 $(\eta^2)^*$： $[\mathbb{S}^8, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} \longrightarrow [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}$ 是满射，从而证明在正合序列 4.2

$$[C(\eta^2), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} = 0. \tag{4.10}$$

由此，在（4.2）中，映射 d^*： $[\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} \longrightarrow [{}^{M^{10}}/_{M^{(6)}}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}$ 是平凡的。因此，在（4.7）中，映射 d^*： $[\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} \longrightarrow [M^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}$ 是平凡的。

对于 M^{10} 满足（3.6）的情形，考虑正合序列

$$[\Sigma M({}^{\mathbb{Z}}/_{2^r}, 7), {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \to [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \xrightarrow{d^*} [C(\iota\circ\eta^2), {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)]$$

$$[M({}^{\mathbb{Z}}/_{2^r}, 7), {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \longrightarrow [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)]$$

$$[\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \xrightarrow{(\eta^2)^*}$$

其中 $[\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)]_{(2)} = 0$，且映射 $(\eta^2)^*$： $[\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \to [\mathbb{S}^9, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)]$是平凡的。因此，

$$[C(\iota\circ\eta^2), {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \cong [M({}^{\mathbb{Z}}/_{2^r}, 7), {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)]$$

$M({}^{\mathbb{Z}}/_{2^r}, 7)$ 的余纤维序列导出如下

$$[\mathbb{S}^8, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \xrightarrow{\times 2^r} [\mathbb{S}^8, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \to [M({}^{\mathbb{Z}}/_{2^r}, 7), {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)]$$

$$[\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \xrightarrow{\times 2^r} [\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)]$$

注意到 $[\mathbb{S}^8, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] = 0$ 与 $[\mathbb{S}^7, {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] \cong \mathbb{Z}$ 一同蕴含 $[M({}^{\mathbb{Z}}/_{2^r}, 7)$ ${}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] = 0$，从而得到，

$$[C(\iota\circ\eta^2), {}^{>6}\tau_{\leq 10}(\Sigma^{-1}g/pl)] = 0 \tag{4.11}$$

因此，由（4.6）可知，映射

$$\psi_* : [C(\iota\circ\eta^2), \tau_{\leq 10}\ pl/o] \longrightarrow [C(\iota\circ\eta^2), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \tag{4.12}$$

是单射。因此，在（4.7）中， $d^*(\eta\circ\mu) \notin j_*([{}^{M^{10}}/_{M^{(6)}}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\Sigma^{-1}(g/pl)])$。由于根据定理 4.3(1)($a$)，元素 $d^*(\eta\circ\mu)$ 在 $[M^{10}, \tau_{\leq 10}\ pl/o]$ 中非零，并且根据命题 4.4，元素 $d^*(\eta\circ\mu)$ 在 ψ_* 下的像非平凡：$[M^{10}, \tau_{\leq 10}\ pl/o] \longrightarrow [M^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$。因此，映射 d^*： $[\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 将 $\eta\circ\mu$ 映射为非平凡元素，证明完毕。

□

定理 4.14。设 M^{10} 是一个闭的单连通光滑 10 维流形。

(1) 若 M^{10} 是自旋流形，且 $\Phi = 0$，则

$$I_h(M^{10}) = \begin{cases} 0 & \text{if } M^{10} \text{ satisfies (3.4) or (3.6)}, \\ {}^{\mathbb{Z}}/_2\{\eta\circ\mu\} & \text{if } M^{10} \text{ satisfies (3.5)}. \end{cases}$$

(2) 若 M^{10} 是自旋流形，且 $\Phi \neq 0$，或者是非自旋流形，则

$$I_h(M^{10}) = {}^{\mathbb{Z}}/_2\{\eta\circ\mu\}.$$

证明。 证明可由（4.4）结合单连通10维流形的相关结果，以及定理 4.12和定理 4.13得出。 □

注 4.15. (i) 定理 *4.12* 给出了更一般的结果：设 M^{10} 是一个闭定向光滑流形。那么 $I_h(M^{10}) \bigcap (\Theta_{10})_{(3)} = \{0\}$。（ii）注意，若 M^{10} 是非定向的，那么 $H^{10}(M^{10};\ \mathbb{Z}/3) = 0$；因此，采用与定理 *4.12* 类似的证明可得 $I_h(M^{10}) \supseteq {}^{\mathbb{Z}}/_3\{\beta_1\}$。

4.3 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ 的惯性群

现在，我们通过对定理 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ 的证明技巧稍作调整，来计算非定向流形 4.14的同伦惯性群。

定理 4.16. $I_h(\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}) = \mathbb{Z}/3\{\beta_1\} \oplus \mathbb{Z}/2\{\eta \circ \mu\}$。

证明。对于 $I_h(\mathbb{R}\mathrm{P}^{10})$，如备注 4.15(*ii*) 中所述，我们有 $\mathbb{Z}/3\{\beta_1\} \subseteq I_h(\mathbb{R}\mathrm{P}^{10})$。因此，只需进行 2-局部化处理。考虑交换图 (4.4)，其中注意到 $\psi_*\colon [\mathbb{S}^{10}, PL/O] \longrightarrow [\mathbb{S}^{10}, G/O]$ 和 $g'\colon S^{\mathrm{Diff}}(M^n) \longrightarrow [M^n, G/O]$ 是单射。因此，只需证明映射 $d^*\colon [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} \longrightarrow [\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}$ 是平凡的。注意，该映射 d^* 经由 $[\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 分解，如下方交换图所示，

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{\quad d^*\quad} & [\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \\ & {\scriptstyle d^*}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle q^*} & \\ & [\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \end{array} \tag{4.13}$$

其中 $q\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6}$ 是商映射。为完成证明，我们断言映射 d^*：
$[\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 是平凡的。

As $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{7} \simeq \mathbb{S}^8 \vee M(\mathbb{Z}/2, 9)$ 和 $\Sigma\mathbb{R}\mathrm{P}^{7}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6} \simeq \mathbb{S}^8$，考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} [\Sigma\mathbb{R}\mathrm{P}^{7}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{f^*} & [\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{7}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{q^*} & [\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \\ \| & & \| & & {\scriptstyle d^*}\uparrow \\ [\mathbb{S}^{8}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow{f^*} & [\mathbb{S}^8 \vee M(\mathbb{Z}/2, 9), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xleftarrow{d^*} & [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \end{array}$$

其顶行是由余纤维序列 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6} \xrightarrow{q} \mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{7} \xrightarrow{f} \Sigma\mathbb{R}\mathrm{P}^{7}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6}$ 诱导的正合序列的一部分。此外，映射 d^*：
$[\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)} \longrightarrow [\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{7}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]_{(2)}$ 的单射性可通过将 $\Sigma^7\mathcal{E}$ 替换为 ${}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o$，利用正合序列 (??) 加以验证。

注意，连接映射 $f\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{10}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{7} \longrightarrow \Sigma\mathbb{R}\mathrm{P}^{7}/\mathbb{R}\mathrm{P}^{6}$ 与映射 $(2, \phi)\colon \mathbb{S}^8 \vee M(\mathbb{Z}/2, 9) \longrightarrow \mathbb{S}^8$ 同伦。这里，映射 ϕ 适合以下交换三角形

$$\begin{array}{ccc} M(\mathbb{Z}/2, 9) & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathbb{S}^8 \\ {\scriptstyle \iota}\uparrow & \nearrow{\scriptstyle \eta} & \\ \mathbb{S}^9 & & \end{array}$$

根据 [5, 引理 2。3], 存在一个非分裂短正合列

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}/2=\{\eta^2\}}{[\mathbb{S}^{10}, \mathbb{S}^8]} \xrightarrow{d^*} [M(\mathbb{Z}/2, 9), \mathbb{S}^8] \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}/2=\{\eta\}}{[\mathbb{S}^{9}, \mathbb{S}^8]} \longrightarrow 0$$

这使得 ϕ 成为 $[M(\mathbb{Z}/2, 9)\ \mathbb{S}^8] = \mathbb{Z}/4$ 中的生成元。在（4.3）中，注意到 $d^*(\eta^2) = 2\phi$。在下面的交换三角形中，这迫使映射 $[\mathbb{S}^{8}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \longrightarrow [M(\mathbb{Z}/2, 9)\ {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$ 为（2ϕ）*

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}^{8}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & & \\ {\scriptstyle (\eta^2)^*}\downarrow & \searrow & \\ [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] & \xrightarrow[d^*]{} & [M(\mathbb{Z}/2, 9), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]. \end{array}$$

$(\eta^2)^*$ 是满射这一点意味着

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\big(d^*\colon [\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \to [M(\mathbb{Z}/2, 9), {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]\big) &\subseteq \mathrm{Im}((2\phi)^*) \\ &\subseteq \mathrm{Im}(\phi^*) \subseteq \mathrm{Im}((2, \phi)^*). \end{aligned}$$

现在，由（4.3）中的顶行正合序列可得d^*：$[\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \to [\mathbb{RP}^{10}/\mathbb{RP}^6, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$是平凡的。因此，在（4.13）中，映射 $d^*:[\mathbb{S}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o] \to [\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}, {}^{>6}\tau_{\leq 10}\ g/o]$是平凡的，证明完毕。

□

我们用以下结果结束本节，该结果使用定理 4.16推论 4.17。 $I(\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}) = \Theta_{10}$。

参考文献

[1] J.F. Adams. 关于群 J(X)—IV. *Topology*, 5(1):21–71, 1966. [2] Samik Basu 和 Ramesh Kasilingam. 四元数射影空间上的惯性群与光滑结构. *Forum Math.*, 34(2):369–383, 2022. [3] William Browder. 单连通流形上的手术. *Springer Berlin Heidelberg*, 1972. [4] Gregory W. Brumfiel. 几乎光滑流形的同伦等价 . *Commentarii Mathematici Helvetici*, 46 381: –407, 1971.[5] D. Crowley, T. Schick 和 W. Steimle. 通过 Gromoll 滤子与 Toda 括号研究调和旋量和正曲率度量. *Journal of Topology*, 11: 1077-1099. 2018. [6] Allen Hatcher. 代数拓扑. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2002. [7] Bjørn Jahren. PL/O 的光滑化理论与拓扑, 1973. [8] Ramesh Kasilingam. 同伦惯性群与切向结构. *JP Journal of Geometry and Topology*, 20 91: –114, 2017.[9] Michel A. Kervaire. 一个不允许任何可微结构的流形. *Commentarii Mathematici Helvetici* 34 1 257 270, 1960 , ( ): – dec .

[10] Michel A. Kervaire 和 John W. Milnor. 同伦球面的群 . I. *Ann. of Math. (2)*, 77:504–537, 1963. [11] Robion C. Kirby 和 Laurence C. Siebenmann. *Foundational essays on topological manifolds smoothings and triangulations* 88 , , . 数学年鉴研究丛书，第 . Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1977. 附有 John Milnor 和 Michael Atiyah 的注释。[12] Yasuhiko Kitada. Kervaire 关于有限循环群在同伦球面上自由作用的障碍. 01 2002. [13] N. Kuiper 和 R. Lashof. 微丛与丛. *I. Elementary theory, Invent. Math.*, 第 1–17 页, 1966. [14] N. H. Kuiper. 三角剖分流形与组合流形的光滑化. *Differential and Combinatorial Topology* 3 22, 1965 , 第 – 页.

[15] Timothy Lance. 流形上的可微结构. 载于 *Surveys on surgery theory Vol. 1* 145 *Ann. of Math. Stud.* 73 104 , , [16] 卷, 2000 *Topology 3*页 – . Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, .[17] R. Lashof 和 M. Rothenberg. 微丛与光滑化. $n-1$, 第 357–388 页, 1965. $2n+2$Pengcheng Li 和 Zhongjian Zhu. ( )- 连通 ([18])- 维 Poincaré 对偶复形的悬垂同伦 , 2023. *Annals of Mathematics Studies No. 92. Princeton University Press* 1979 Ib

Madsen 和 R. James Milgram. 流形手术与配边的分类空间. [19] , , . *Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications* 2008 R.E.

Mosher 和 M.C. Tangora. 上同调运算及其在同伦论中的应用. [20] , . *Michigan Mathematical Journal*James R. Munkres. 可微结构的共边——两种方法. [21] , 14 2 183 191, 1967 ( ): – . *Pure and Applied Mathematics*Douglas C. Ravenel. 复配边与球面的稳定同伦群, [22] . Academic Press, Orlando, FL, 1986. *World Scientific*Rudyak 和 Yuli. 拓扑流形上的分片线性结构. [23] , 2016. *Springer Netherlands*D. P. Sullivan. 对同伦等价与同胚进行三角剖分与光滑化. 几何拓扑研讨班讲义, 第 69–103 页. *Dordrecht*,[24] , 1996.

Annals of Mathematics Studies No. 92. Hiroshi *Princeton University Press* 1963
Toda. 球面同伦群中的复合方法. [25] , , .

Mathematical surveys and monographs. American C.T.C. *Mathematical Society* 1999
Wall 和 A. Ranicki. 紧流形上的手术. , .

Stat-Math Unit, Indian Statistical Institute Kolkata, India, 700108.
Email address: samik.basu2@gmail.com; samikbasu@isical.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute Of Technology Chennai, India, 600036.
Email address: rameshkasilingam.iitb@gmail.com ; rameshk@iitm.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute Of Technology Bombay, India, 400076.
Email address: priyanka.ms.math@gmail.com