arXiv:2302.02308v1 [math.NA] 5 Feb 2023

最优传输、均值场规划与均值场博弈的高阶计算

GuoshengFu[a],[1], Siting Liu[b],[2], Stanley Osher[b],[2], Wuchen Li[c],[3]

[a]圣母大学应用与计算数学及统计学系，圣母镇，印第安纳州 *46556*，美国[b]加利福尼亚大学洛杉矶分校数学系，洛杉矶，加利福尼亚州 *90095*，美国[c]南卡罗来纳大学数学系，哥伦比亚，南卡罗来纳州 *29208*，美国

摘要

均值场博弈（MFG）在诸多领域的大规模系统建模中展现出强大的能力，推动了均值场博弈问题计算方法的发展。然而，高阶方法尚未得到充分研究。本文探索在时空域中将通用高阶数值格式与有限元方法结合，用于计算最优传输（OT）、均值场规划（MFP）和均值场博弈（MFG）问题。我们通过若干实验对高阶方法的收敛率进行数值验证。这些数值实验还展示了我们方法的效率和有效性。

关键词：高阶计算；最优传输；均值场规划；均值场博弈。

*通讯作者电子邮箱：gfu@nd.edu (Guosheng Fu), siting6@math.ucla.edu (Siting Liu), sjo@math.ucla.edu (Stanley Osher), wuchen@mailbox.sc.edu (Wuchen Li)[1]G. Fu 的研究部分由美国国家科学基金会 DMS-2134168 项目资助。[2]S. Osher 和 S. Liu 的研究部分由美国空军科学研究办公室 MURI FP 9550-18-1-502 项目以及美国海军研究办公室的 N00014-20-1-2093 和 N00014-20-1-2787 项目资助。[3]W. Li 的研究由美国空军科学研究办公室 MURI FP 9550-18-1-502 项目、美国空军科学研究办公室青年研究员计划 2023年 项目以及美国国家科学基金会研究生培训计划 2038080 项目资助。

1. 引言

均值场博弈由 Lasry 和 Lions [29]提出，Caines、Huang 和 Malham´也独立提出了这一理论。 [25], 均值场博弈以均值场的方式刻画无限多个相同主体之间的相互作用，并描述系统的均衡状态。凭借强大的描述能力，均值场博弈（MFG）已成为研究由大量相互作用主体组成的复杂系统的重要方法，例如人群动力学、金融市场、电力系统、大流行病等。[17, 18, 28, 6, 7, 27, 34, 33]均值场规划是一类均值场博弈，其中终端时刻主体的分布是给定的。 [41]另一方面，最优传输问题的 Benamou-Brenier 动态形式 [10] 与势均值场博弈的变分形式相关。它可视为均值场规划问题的一个特例，旨在寻找一种高效的方法，将一个概率分布转移到另一个概率分布。随着均值场博弈和最优传输在建模及实际应用中取得成功，均值场博弈的研究也不断拓展。从偏微分方程的角度看，均值场博弈模型可由一组耦合的偏微分方程描述：一个正向时间演化的 Fokker-Planck（FP）方程控制群体的演变，另一个反向时间演化的 Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）方程则描述价值函数，并刻画控制问题。关于均值场博弈理论的综述，请参阅[30, 22, 14, 21]。

由于应用范围广泛，计算方法发挥着至关重要的作用，因为大多数均场博弈和最优传输问题都没有解析解。虽然近期一些计算方法借助了机器学习方法和博弈论 [42, 38, 4, 19, 32, 23, 15, 24], ，但经典数值方法主要通过有限差分格式或半拉格朗日格式进行离散化。在 [1], 中，均场博弈系统采用有限差分格式离散化，然后用牛顿法求解。文献 [16] 研究了半拉格朗日方法。对于能够写成变分形式的均场博弈和最优传输问题，则采用增广拉格朗日、原始-对偶混合梯度法、交替方向乘子法等优化方法来求解离散化后的系统[10, 11, 2, 8, 12, 39]。近期，文献 [45] 研究了流形上的均场博弈计算。关于数值方法的综述，请参阅文献 [3, 31]。在增广拉格朗日框架下，低阶有限元离散已得到广泛应用；例如，参见文献 [10, 11, 5, 26]。

计算最优传输/平均场博弈领域的开创性研究主要关注一阶或二阶方

法；通用的高阶方法尚未得到充分研究。然而，在数值分析中，高阶方法通常具有更快的收敛率，并且与低阶方法相比，能在粗得多的计算网格上提供更准确的解。因此，探索用于均值场博弈和最优传输问题的高阶计算方法至关重要。

在这项工作中，我们提出了一种通用的高阶数值方法，利用有限元方法求解最优运输问题和平均场博弈（控制）问题。更具体地说，

1. 我们利用高阶时空有限元离散化 MFP 和平均场博弈系统的增广拉格朗日公式。考虑鞍点公式中使用的推导信息，我们采用高阶 H^1-协调有限元近似价值函数（对偶变量） ϕ ，而密度和动量（原始变量） ρ, $\boldsymbol{m}$ 则通过一种高阶（不连续）积分规则空间进行近似，该空间仅记录高阶（时空）积分点上的值。随后，我们按照 [11]，通过 ALG2 算法求解离散鞍点问题。据我们所知，这是首次应用精度超过二阶的高阶格式。

2. 我们开展了一系列全面的实验，以展示所提出数值算法的有效性和效率。这些实验从数值上验证了算法的收敛率随网格尺寸和多项式次数变化的规律。特别是，我们证明，在自由度数量相同的情况下，粗网格上的高阶方法比细网格上的低阶方法更加精确。此外，我们将有限元格式应用于一组非矩形区域（含障碍物）上的均值场规划和均值场博弈问题，以及计算机图形学问题，展示了该方法的有效性和实用性。

本文组织如下。第 2 节回顾最优传输、均值场规划和均值场博弈的动态表述。第 3 节介绍我们为求解上述问题而设计的高阶格式及其配套算法。第 4 节通过数值实验展示高阶方法的有效性。最后，我们在第 5 节给出一些结论和评述。

2. OT、MFP 和均场博弈

本节简要回顾动态均场规划和均场博弈问题。

2.1. 动态均场规划

考虑时间区间 $[0,1]$ 和空间区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ 上的模型。令 ρ 表示在 $t \in [0,1]$ 内主体的密度，令 $\boldsymbol{m}$ 表示该密度的通量，用于描述主体的策略（控制），并且 $(\rho, \boldsymbol{m}) \in \mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{array}{c} (\rho, \boldsymbol{m}) : \rho : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^+, \|\rho\|_{L^1} < +\infty, \int_\Omega \rho(t, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1, \forall t \in [0,1], \\ \boldsymbol{m} : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^D \text{ is Lebesgue measurable,} \end{array} \right\}. \tag{2.1}$$

我们关注 ρ，其中给定初始密度和终端密度 ρ_0, ρ_1，且 $(\rho, \boldsymbol{m})$ 满足零边界通量和质量守恒定律，并满足约束集 $\mathcal{C}(\rho_0, \rho_1)$:

$$\mathcal{C}(\rho_0, \rho_1) := \mathcal{C} \cap \left\{ \begin{array}{c} (\rho, \boldsymbol{m}) : \partial_t \rho + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{m} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ for } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \rho(0, \cdot) = \rho_0, \rho(1, \cdot) = \rho_1, \end{array} \right\}. \tag{2.2}$$

其中，该方程以分布的意义成立。

记 $L: \overline{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}^D \to \mathbb{R} := \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ 为动态代价函数，记 $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为用于描述相互作用代价的函数。MFP 的目标是在所有可行的 $(\rho, \boldsymbol{m}) \in \mathcal{C}(\rho_0, \rho_1)$。中最小化总成本。因此，该问题可表述为

$$\inf_{(\rho, \boldsymbol{m}) \in \mathcal{C}(\rho_0, \rho_1)} \int_0^1 \int_\Omega L(\rho(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{m}(t, \boldsymbol{x})) + A(\rho(t, \boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

显然，$\mathcal{C}(\rho_0, \rho_1)$ 是凸且紧的。此外，质量守恒定律 $\partial_t \rho + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{m} = 0$ 和零通量边界条件 $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ 表明，$\mathcal{C}(\rho_0, \rho_1) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\int_\Omega \rho_0 = \int_\Omega \rho_1$。一旦 $\mathcal{C}(\rho_0, \rho_1)$ 非空，最优解的存在性与唯一性取决于 L 和 F。本文考虑一种典型的动态代价函数 L，其形式为

$$L(\beta_0, \boldsymbol{\beta}_1) := \begin{cases} \frac{\|\boldsymbol{\beta}_1\|^2}{2\beta_0} & \text{if } \beta_0 > 0 \\ 0 & \text{if } \beta_0 = 0, \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{0} \\ +\infty & \text{if } \beta_0 = 0, \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{0}. \end{cases} . \tag{2.4}$$

数值计算部分将给出相互作用函数的多种选取方式。

若相互作用代价函数 $A = 0$，则 MFP 成为最优传输问题的动态公式：

$$(\mathrm{OT}) \quad \min_{\rho, \boldsymbol{m} \in \mathcal{C}(\rho_0, \rho_1)} \int_0^1 \int_\Omega L(\rho(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{m}(t, \boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

由于 $\boldsymbol{m} = \rho \boldsymbol{v}$，此定义确保 L 在 $\rho = 0$成立的任何位置都有 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$。最优传输可视为 MFP 的一种特殊情况，其中质量通过 $t \in [0, 1]$在 Ω 中自由移动。

为简化记号，我们将集合 $\mathcal{C}$ 中的一个元素记为 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}_1) \in \mathcal{C}$。对于约束（2.2），引入拉格朗日乘子 ϕ： $[0, 1] \times \Omega$，MFP 问题（2.3）可重写为以下鞍点问题：

$$\inf_{\boldsymbol{\alpha}} \sup_{\phi} F(\boldsymbol{\alpha}) - G(\phi) - \langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla_{t,x} \phi \rangle, \tag{2.6a}$$

其中

$$F(\boldsymbol{\alpha}) := \int_0^1 \int_\Omega L(\alpha_0(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{\alpha}_1(t, \boldsymbol{x})) + A(\alpha_0(t, \boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{d}t, \tag{2.6b}$$

$$G(\phi) := \int_\Omega -\phi(1, \boldsymbol{x}) \rho_1(\boldsymbol{x}) + \phi(0, \boldsymbol{x}) \rho_0(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.6c}$$

$\nabla_{t,x} = (\partial_t, \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}})$ 是时空梯度算子，而 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle := \int_0^1 \int_\Omega \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{d}t$ 是时空积分。该鞍点系统（代价函数为（2.4）中的 L ）对应的 KKT 系统是定义在时空域 $[0, 1] \times \Omega$ 上的以下偏微分方程组

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{m} = 0, \tag{2.7a}$$

$$\frac{\boldsymbol{m}}{\rho} - \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \phi = 0, \tag{2.7b}$$

$$\partial_t \phi + \frac{|\boldsymbol{m}|^2}{2\rho^2} = A'(\rho), \tag{2.7c}$$

带边界条件

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{on } [0, 1] \times \partial\Omega, \tag{2.7d}$$

$$\rho(0, \boldsymbol{x}) = \rho_0(\boldsymbol{x}), \quad \rho(1, \boldsymbol{x}) = \rho_1(\boldsymbol{x}) \quad \text{on } \Omega. \tag{2.7e}$$

将 $[L+A]^*(\boldsymbol{\alpha}^*)$ 记为 $L(\alpha_0,\boldsymbol{\alpha}_1)$ 的凸共轭（勒让德变换），其中 $+A(\alpha_0)$ 中的 L 已在（2.4）中给出，即

$$\begin{aligned}
[L+A]^*(\boldsymbol{\alpha}^*) &= \sup_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* - L(\alpha_0,\boldsymbol{\alpha}_1) - \lambda A(\alpha_0) \\
&= \sup_{\alpha_0} \alpha_0\cdot(\alpha_0^* + |\boldsymbol{\alpha}_1^*|^2) - \underbrace{L(\alpha_0,\alpha_0\boldsymbol{\alpha}_1^*)}_{=\frac{1}{2}\alpha_0|\boldsymbol{\alpha}_1^*|^2} - A(\alpha_0) \\
&= \sup_{\alpha_0} \alpha_0\cdot(\alpha_0^* + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\alpha}_1^*|^2) - A(\alpha_0) \\
&= A^*(\alpha_0^* + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\alpha}_1^*|^2),
\end{aligned}$$

其中在第二个等式中我们使用了最优性条件 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \alpha_0\boldsymbol{\alpha}_1^*$。根据对偶性，我们有

$$L(\alpha_0,\boldsymbol{\alpha}_1) + A(\alpha_0) = \sup_{\boldsymbol{\alpha}^*} \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}^* - A^*(\alpha_0^* + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\alpha}_1^*|^2). \tag{2.8}$$

利用上述关系，我们得到鞍点问题 (2.6a) 的如下对偶形式:

$$\sup_{\boldsymbol{\alpha}} \inf_{\phi,\boldsymbol{\alpha}^*} F^*(\boldsymbol{\alpha}^*) + G(\phi) + \langle\boldsymbol{\alpha}, \nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}^*\rangle, \tag{2.9}$$

其中

$$F^*(\boldsymbol{\alpha}^*) = \int_0^1\int_\Omega A^*(\alpha_0^* + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\alpha}_1^*|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t.$$

引入增广拉格朗日

$$L_r(\phi,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^*) := F^*(\boldsymbol{\alpha}^*) + G(\phi) + \langle\boldsymbol{\alpha}, \nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}^*\rangle + \frac{r}{2}\langle\nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}^*, \nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}^*\rangle,$$

其中 r 是一个正参数，显然，相应的鞍点问题

$$\sup_{\boldsymbol{\alpha}} \inf_{\phi,\boldsymbol{\alpha}^*} L_r(\phi,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^*) \tag{2.10}$$

与 (2.9) 具有相同的解。

2.2. 动态平均场博弈

对于均场博弈，终端密度 ρ_1 并未明确给出，但它满足给定的偏好。均场博弈的目标是在所有可行的 $(\rho,\ \boldsymbol{m}) \in \mathcal{C}(\rho_0)$ 中最小化总成本：

$$\inf_{(\rho,\boldsymbol{m})\in\mathcal{C}(\rho_0)} F((\rho,\boldsymbol{m})) + \underbrace{\int_\Omega \Gamma(\rho(1,\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{:=R(\rho(1,\cdot))}, \tag{2.11}$$

其中，$\Gamma:\ \mathbb{R} \overrightarrow{\to} \mathbb{R}$ 是终端成本，约束集 $\mathcal{C}(\rho_0)$与 $\mathcal{C}(\rho_0,\ \rho_1)$类似：

$$\mathcal{C}(\rho_0) := \mathcal{C} \cap \left\{ \begin{array}{l} (\rho,\boldsymbol{m}) :\partial_t\rho + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{m} = 0, \\ \qquad\qquad \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ for } \boldsymbol{x}\in\partial\Omega, \rho(0,\cdot) = \rho_0, \end{array} \right\}. \tag{2.12}$$

与 MFP 类似，我们将问题 (2.11) 重新表述为一个鞍点问题：

$$\inf_{\boldsymbol{\alpha},\rho_1}\sup_{\phi} F(\boldsymbol{\alpha}) + R(\rho_1) + (\rho_1,\phi(1,\cdot)) - (\rho_0,\phi(0,\cdot)) - \langle\boldsymbol{\alpha},\nabla_{t,x}\phi\rangle, \tag{2.13}$$

其中，$(\alpha,\ \beta)$：$=\int_\Omega \alpha\beta\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是空间积分。这里，鞍点问题 (2.13) 的 KKT 系统就是 MFP 系统 (2.7)，只是将边界条件 (2.7e) 替换为以下条件：

$$\rho(0,\boldsymbol{x}) = \rho_0(\boldsymbol{x}), \quad \phi(1,\boldsymbol{x}) = -\Gamma'(\rho_1(\boldsymbol{x})) \quad \text{on } \Omega.$$

分别为 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 ρ_1引入对偶变量 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 和 ρ_1^* 后，我们得到以下等价鞍点问题：

$$\begin{aligned} \sup_{\boldsymbol{\alpha},\rho_1}\inf_{\phi,\boldsymbol{\alpha}^*,\rho_1^*}\ & F^*(\boldsymbol{\alpha}^*) + \langle\boldsymbol{\alpha},\nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}^*\rangle \\ & + R^*(\rho_1^*) - (\rho_1,\phi(1,\cdot)+\rho_1^*) + (\rho_0,\phi(0,\cdot)), \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中，$R^*(\rho_1^*)$：$=\int_\Omega \Gamma^*(\rho_1(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其中 Γ^* 是 Γ的凸共轭。

（2.14）的增广拉格朗日重构如下：

$$\begin{aligned} \sup_{\boldsymbol{\alpha},\rho_1}\inf_{\phi,\boldsymbol{\alpha}^*,\rho_1^*}\ & F^*(\boldsymbol{\alpha}^*) + R^*(\rho_1^*) + (\rho_0,\phi(0,\cdot)) \\ & + \langle\boldsymbol{\alpha},\nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}^*\rangle + \frac{r_1}{2}\langle\nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}^*, \nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}^*\rangle \\ & - (\rho_1,\phi(1,\cdot)+\rho_1^*) + \frac{r_2}{2}(\phi(1,\cdot)+\rho_1^*,\phi(1,\cdot)+\rho_1^*), \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 r_1，r_2 是两个正参数。

备注 2.1。 继 *[9, 11],* 开创性研究之后，我们基于增广拉格朗日表述 (2.10) 和 (2.15)，提出了用于 *MFP* 和均场博弈的高阶格式。随后，使用 *ALG2* 算法 *[20]*求解离散鞍点问题。我们格式的主要创新之处在于，采用高阶时空有限元对 (2.10) 和 (2.15) 中的变量进行离散化。这是高阶格式首次应用于此类问题，且精度超过二阶。

3. OT、MFP 和均场博弈的高阶格式

本节使用高阶时空有限元空间对增广拉格朗日问题 (2.10) 和 (2.15) 进行离散。我们首先介绍记号，包括网格以及将要使用的有限元空间的定义。随后，我们利用这些有限元空间构造离散鞍点问题，并使用 ALG2 算法[20]迭代求解。整个本节中，我们将讨论范围限定在 $D = 2$ 空间维度。

由于 ϕ需要时空导数信息，我们使用（高阶） H^1协调有限元对其进行近似。另一方面，由于 $\boldsymbol{\alpha}$、 $\boldsymbol{\alpha}^*$（以及均场博弈中的 ρ_1 和 ρ_1^* ）不涉及导数信息，因此自然可以仅在（高阶）积分点上对这些变量进行近似。

3.1. 有限元空间与记号

设 $\mathcal{I}_h = \{I_j\}_{j=1}^N$ $[0,1]$ $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ $\mathcal{T}_h = \{T_\ell\}_{\ell=1}^M$ 是时间域的一个三角剖分，其中，且。设 是空间域 Ω 的一个相容三角剖分，并假设单元$\frown T_\ell := \Phi_{T_\ell}(\widehat{T})$由一个多项式映射 Φ_{T_ℓ} 从参考$\widehat{\ }$单元 $\widehat{T}$映射得到，其中该单元为单位三角形或单位正方形。我们通过对空间网格和时间网格取张量积，得到 Ω_T: $= [0,1] \times \Omega$ 的时空网格:

$$\mathcal{I}_h \otimes \mathcal{T}_h := \{I_j \otimes T_\ell : \forall j \in \{1, \cdots, N\}, \text{ and } \ell \in \{1, \cdots, M\}\}.$$

我们将 $\mathcal{P}^k(I)$ 表示为区间 I 上次数不超过 k 的多项式空间；将 $\mathcal{P}^k(\widehat{T})$ 表示为次数不超过 $\frown k$ 的多项式空间（若 T 是单位三角形），或表示为次数不超过

$\widehat{}$的张量积多项式空间（若 T 是单位正方形，则各方向上的次数均不超过 k），其中 $k \geq 1$。空间物理单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上的映射多项式空间记作

$$\mathcal{P}^k(T) := \{\widehat{v} \circ (\Phi_T)^{-1} : \ \forall \widehat{v} \in \mathcal{P}^k(\widehat{T})\}.$$

我们将 $\{\widehat{\boldsymbol{\xi}}_i\}_{i=1}^{N_k}$ 记为一组带有正权重$\{\widehat{\omega}_i\}_{i=1}^{N_k}$ 的求积点，其在参考$\widehat{}$单元 T上对次数不超过 $2k+1$ 的多项式精确，即

$$\int_{\widehat{T}} \widehat{f} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N_k} \widehat{\omega}_i \widehat{f}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_i), \quad \forall \widehat{f} \in \mathcal{P}^{2k+1}(\widehat{T}). \tag{3.1}$$

$\widehat{}$请注意，当 T 为参考正方形时，我们直接采用 $N_k = (k+1)^2$, 的高斯-勒让德求积公式，这是最优的。另一方面，$\widehat{}$当 T 为参考三角形时，最优求积公式的选择则较为复杂；例如可参见 [46, 44]及其中引用的文献。举例而言， [46] 中给出的三角形对称求积公式在 $0 \leq k \leq 6$ 下的求积点数量 N_k 列于表 1。积分点和

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
N_k on Triangle	1	6	7	15	19	28	37

表 1：对于 $0 \leq k \leq 6$，三角形上的求积公式在精确到 $2k+1$ 次时所需的求积点数量 N_k 。

物理单元上的权重 T_ℓ 可通过映射直接得到： $\{\boldsymbol{\xi}_i^\ell := \Phi_{T_\ell}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_i)\}_{i=1}^{N_k}$，以及 $\{\omega_i^\ell := |\mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \Phi_{T_\ell}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_i)| \widehat{\omega}_i\}_{i=1}^{N_k}$。此外，我们将 $\{\eta_i^j\}_{i=1}^{k+1}$ 记作区间 I_j 上的 $(k+1)$ 个 Gauss-Legendre 求积点及其对应的权重 $\{\zeta_i^j\}_{i=1}^{k+1}$。为简化记号，我们将物理积分点和权重的集合记作

$$\Xi_h^k := \{\boldsymbol{\xi}_i^\ell : \ 1 \leq i \leq N_k, 1 \leq \ell \leq M\}, \tag{3.2a}$$
$$\Omega_h^k := \{\omega_i^\ell : \ 1 \leq i \leq N_k, 1 \leq \ell \leq M\}, \tag{3.2b}$$
$$H_h^k := \{\eta_i^j : \ 1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq N\}, \tag{3.2c}$$
$$Z_h^k := \{\zeta_i^j : \ 1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq N\}. \tag{3.2d}$$

此外，我们将 $(\cdot,\cdot)_h$ 记为网格 $\mathcal{T}_h$ 上使用求积点 Ξ_h^k 和权重 Ω_h^k 的离散内积：

$$(\alpha, \beta)_h := \sum_{\ell=1}^{M} \sum_{i=1}^{N_k} \alpha(\boldsymbol{\xi}_i^\ell) \beta(\boldsymbol{\xi}_i^\ell) \omega_i^\ell,$$

并将 $\langle\cdot,\cdot\rangle_h$ 记为时空网格 $\mathcal{I}_h\otimes\mathcal{T}_h$ 上使用求积点 Ξ_h^k, H_h^k 和权重 Ω_h^k, Z_h^k 的离散内积:

$$\langle\alpha,\beta\rangle_h := \sum_{\ell=1}^{M}\sum_{i_s=1}^{N_k}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i_t=1}^{k+1}\alpha(\eta_{i_t}^j,\boldsymbol{\xi}_{i_s}^\ell)\beta(\eta_{i_t}^j,\boldsymbol{\xi}_{i_s}^\ell)\omega_{i_s}^\ell\zeta_{i_t}^\ell.$$

现在我们可以介绍有限元空间:

$$V_h^k := \{v\in H^1(\Omega_T):\quad v|_{I_j\times T_\ell}\in\mathcal{P}^k(I_j)\otimes\mathcal{P}^k(T_\ell)\ \ \forall j,\ell\},\tag{3.3}$$
$$W_h^k := \{w\in L^2(\Omega_T):\quad w|_{I_j\times T_\ell}\in\mathcal{P}^k(I_j)\otimes W^k(T_\ell)\ \ \forall j,\ell\},\tag{3.4}$$
$$M_h^k := \{\mu\in L^2(\Omega):\quad\ \ \mu|_{T_\ell}\in W^k(T_\ell)\ \ \forall\ell\},\tag{3.5}$$

其中， V_h^k是时空网格 $\mathcal{I}_h\otimes\mathcal{T}_h$上的 H^1协调空间， W_h^k是时空网格 $\mathcal{I}_h\otimes\mathcal{T}_h$ 上的 L^2协调空间，而 M_h^k 是空间网格 $\mathcal{T}_h$上的L^2协调空间，其中局部空间

$$W^k(T_\ell) := \mathcal{P}^k(T_\ell)\oplus\delta W_k(T_\ell),$$

与 (3.1) 中的积分规则相关联，使得 dim $W^k(T_\ell) = N_k$，且节点条件为

$$\varphi_i^\ell(\boldsymbol{\xi}_j^\ell)=\delta_{ij},\quad\forall 1\le j\le N_k,\tag{3.6}$$

其中， δ_{ij}是克罗内克δ函数，确定唯一解$\varphi_i^\ell\in W^k(T_\ell)$。这意味着 $\{\varphi_i^\ell\}_{i=1}^{N_k}$ 是空间$W^k(T_\ell)$的一组节点基，即

$$W^k(T_\ell)=\mathrm{span}_{1\le i\le N_k}\{\varphi_i^\ell\}.\tag{3.7}$$

当 T^ℓ 从参考正方形映射而来时，我们有 $N_k=(k+1)^2,$，因此 $W^k(T_\ell)$ 就是（映射后的）张量积多项式空间 $\mathcal{P}^k(T_\ell)$。此外，我们强调，在我们的构造中，基函数 ϕ_i^ℓ的显式表达式并不重要，因为数值积分时只会用到它们在求积节点上的节点自由度（DOF）。进一步地，设 $\{\psi_i^j(t)\}_{i=1}^{k+1}$ 是 $\mathcal{P}^k(I_j)$ 对应于高斯-勒让德求积节点 $\{\eta_i^j\}_{i=1}^{k+1}$ 的基函数集合，即 $\psi_i^j\in\mathcal{P}^k(I_j)$ 满足

$$\psi_i^j(\eta_l^j)=\delta_{il},\quad\forall 1\le l\le k+1.$$

手动写出这一记号后，我们有

$$W_h^k = \text{span}\left\{\psi_{i_t}^j(t)\varphi_{i_s}^\ell(\boldsymbol{x}): \quad \begin{array}{l} 1 \le i_t \le k+1,\, 1 \le i_s \le N_k, \\ 1 \le j \le N,\, 1 \le \ell \le M \end{array} \right\} \tag{3.8}$$

and

$$M_h^k = \text{span}\left\{\varphi_{i_s}^\ell(\boldsymbol{x}): \;\; 1 \le i_s \le N_k, 1 \le \ell \le M\right\} \tag{3.9}$$

我们使用 H^1-协调有限元空间 V_h^{k+1} 逼近对偶变量 ϕ，使用积分规则空间 W_h^k表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 的各个分量，并使用积分规则空间 M_h^k表示变量 ρ_1和 ρ_1^*（对于均场博弈）。

3.2. MFP 和均场博弈的高阶有限元法

MFP (2.10) 的离散格式如下：给定时空网格 $\mathcal{I}_h \otimes \mathcal{T}_h$和多项式次数 $k \ge 0$，求 $\boldsymbol{\alpha}_h, \boldsymbol{\alpha}_h^* \in [W_h^k]^3$ 以及 $\phi_h \in V_h^{k+1}$，使得

$$\sup_{\boldsymbol{\alpha}_h \in [W_h^k]^3} \inf_{\phi_h \in V_h^{k+1}, \boldsymbol{\alpha}_h^* \in [W_h^k]^3} L_{r,h}(\phi_h, \boldsymbol{\alpha}_h, \boldsymbol{\alpha}_h^*), \tag{3.10}$$

其中，离散增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L_{r,h} := {} & F_h^*(\boldsymbol{\alpha}_h^*) + G_h(\phi_h) + \langle \boldsymbol{\alpha}_h, \nabla_{t,x}\phi_h - \boldsymbol{\alpha}_h^* \rangle_h \\ & + \frac{r}{2}\langle \nabla_{t,x}\phi_h, \nabla_{t,x}\phi_h \rangle - r\langle \nabla_{t,x}\phi_h, \boldsymbol{\alpha}_h^* \rangle_h + \frac{r}{2}\langle \boldsymbol{\alpha}_h^*, \boldsymbol{\alpha}_h^* \rangle_h, \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中

$$F_h^*(\boldsymbol{\alpha}_h^*) := \langle A^*(\alpha_{0,h}^* + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\alpha}_{1,h}^*|^2), 1\rangle_h, \tag{3.12}$$

$$G_h^*(\phi_h) := -(\phi_h(1,\boldsymbol{x}), \rho_1(\boldsymbol{x}))_h + (\phi_h(0,\boldsymbol{x}), \rho_0(\boldsymbol{x}))_h. \tag{3.13}$$

注意，离散增广拉格朗日函数 (3.11) 中的所有项均使用数值积分 $(\cdot,\cdot)_h$ 或 $\langle\cdot,\cdot\rangle_h$进行积分，但 (3.11) 第二行中的时空拉普拉斯算子项除外；该项使用精确积分 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，以避免拉普拉斯算子对应的奇异矩阵。

类似地，均场博弈 (2.15) 的离散格式如下：给定时空网格 $\mathcal{I}_h \otimes \mathcal{T}_h$和多项式次数 $k \ge 0$，求解 $\boldsymbol{\alpha}_h$，$\boldsymbol{\alpha}_h^* \in [W_h^k]^3$,$\rho_{1,h}$，$\rho_{1,h}^* \in M_h^k$ 和 $\phi_h \in V_h^{k+1}$，使得

$$\sup_{\boldsymbol{\alpha}_h \in [W_h^k]^3, \rho_{1,h} \in M_h^k} \inf_{\phi_h \in V_h^{k+1}, \boldsymbol{\alpha}_h^* \in [W_h^k]^3, \rho_{1,h}^* \in M_h^k} L_{r,h}^{MFG}(\phi_h, \boldsymbol{\alpha}_h, \rho_{1,h}, \boldsymbol{\alpha}_h^*, \rho_{1,h}^*), \tag{3.14}$$

其中，离散增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L_{r,h}^{MFG} =& F_h^*(\boldsymbol{\alpha}_h^*) + R_h^*(\rho_{1,h}^*) + (\rho_0, \phi_h(0,\cdot))_h \\ &+ \langle \boldsymbol{\alpha}_h, \nabla_{t,x}\phi - \boldsymbol{\alpha}_h^* \rangle_h \ - (\rho_{1,h}, \phi_h(1,\cdot) + \rho_{1,h}^*)_h \\ &+ \frac{r_1}{2}\langle \nabla_{t,x}\phi_h, \nabla_{t,x}\phi_h \rangle - r_1 \langle \nabla_{t,x}\phi_h, \boldsymbol{\alpha}_h^* \rangle_h + \frac{r_1}{2}\langle \boldsymbol{\alpha}_h^*, \boldsymbol{\alpha}_h^* \rangle_h \\ &+ \frac{r_2}{2}(\phi_h(1,\cdot), \phi_h(1,\cdot)) + r_2(\phi_h(1,\cdot), \rho_{1,h}^*)_h + \frac{r_2}{2}(\rho_{1,h}^*, \rho_{1,h}^*)_h, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$R_h^*(\rho_{1,h}^*) := (\Gamma^*(\rho_{1,h}^*), 1)_h. \tag{3.16}$$

3.3. ALG2 算法

离散鞍点问题 (3.10) 和 (3.14) 可使用 ALG2 算法 [20], 高效求解，其中 ϕ_h、 $\boldsymbol{\alpha}_h^*$ 和$\rho_{1,\ h}^*$ 的最小化彼此解耦。为简单起见，我们仅说明离散均场博弈问题 (3.14) 的主要步骤；另请参见 [9, 11]。ALG2 的一次迭代包含以下三个步骤。

步骤 *A*：更新 ϕ_h

通过求解椭圆问题，关于第一个分量最小化 $L_{r\ h}^{MFG}{}_{,}$ ：求 $\phi_h^{m+1} \in V_h^{k+1}$ ，使其满足

$$\inf_{\phi_h \in V_h^{k+1}} L_{r,h}^{MFG}(\phi_h, \boldsymbol{\alpha}_h^m, \rho_{1,h}^m, \boldsymbol{\alpha}_h^{*,m}, \rho_{1,h}^{*,m}).$$

这只是一个线性常系数时空扩散问题：求 $\phi_h^{m+1} \in V_h^{k+1}$ ，使其满足

$$\begin{aligned} & r_1 \langle \nabla_{t,x}\phi_h^{m+1}, \nabla_{t,x}\psi_h \rangle + r_2(\phi_h^{m+1}(1,\cdot), \psi_h(1,\cdot)) \\ & = \langle r_1 \boldsymbol{\alpha}_h^{*,m} - \boldsymbol{\alpha}_h^m, \nabla_{t,x}\psi_h \rangle_h - (r_2\rho_{1,h}^{*,m} - \rho_{1,h}^m, \psi_h(1,\cdot))_h - (\rho_0, \psi_h(0,\cdot))_h, \end{aligned} \tag{3.17}$$

对所有 $\psi_h \in V_h^{k+1}$ 。

步骤 *B*：更新 $\boldsymbol{\alpha}_h^*$ 和 $\rho_{1,\ h}^*$

通过求解以下非线性问题，使 $L_{r\ h}^{MFG}{}_{,}$ 关于最后两个分量达到最小值：求 ${\boldsymbol{\alpha}^*}_{,h}^{\ m+1} \in [W_h^k]^3$和 ${\rho^*}_{,1}^{\ m+1}{}_{,h} \in M_h^k$，使其满足以下解方程：

$$\inf_{\boldsymbol{\alpha}_h^* \in [W_h^k]^3, \rho_{1,h}^* \in M_h^k} L_{r,h}^{MFG}(\phi_h^{m+1}, \boldsymbol{\alpha}_h^m, \rho_{1,h}^m, \boldsymbol{\alpha}_h^*, \rho_{1,h}^*).$$

利用 (3.8) 和 (3.9) 中的基函数，我们写出

$$\boldsymbol{\alpha}_h = \sum_{\ell=1}^{M}\sum_{i_s=1}^{N_k}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i_t=1}^{k+1} \mathsf{a}_{\ell,i_s,j,i_t}\psi_{i_t}^{j}(t)\varphi_{i_s}^{\ell}(\boldsymbol{x}), \quad \rho_{1,h} = \sum_{\ell=1}^{M}\sum_{i_s=1}^{N_k} \mathsf{r}_{\ell,i_s}\varphi_{i_s}^{\ell}(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_h^* = \sum_{\ell=1}^{M}\sum_{i_s=1}^{N_k}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i_t=1}^{k+1} \mathsf{a}_{\ell,i_s,j,i_t}^*\psi_{i_t}^{j}(t)\varphi_{i_s}^{\ell}(\boldsymbol{x}), \quad \rho_{1,h}^* = \sum_{\ell=1}^{M}\sum_{i_s=1}^{N_k} \mathsf{r}_{\ell,i_s}\varphi_{i_s}^{\ell}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\mathsf{a}_{\ell,\ i_s,\ j,\ i_t}$，$\mathsf{a}^*_{\ell,\ i_s,\ j,\ i_t}$、$\mathsf{r}_{\ell,\ i_s}$ 和 $\mathsf{r}^*_{\ell,\ i_s}$。

通过为 W_h^k和 M_h^k选择数值积分和节点基，我们注意到，该优化问题对于 $\boldsymbol{\alpha}^{*,\ m+1}_{\ h}$和 $\rho^*_{1,\ h}$的每个自由度都是解耦的，因此可以逐点高效求解：对于每个ℓ，i_s，j，i_t，求一个$\mathsf{a}^{*\ \mathsf{m+1}}_{\ell\ ,\ ,\ \mathsf{i_s},\ \mathsf{j},\ \mathsf{i_t}} \in \mathbb{R}^3$，使其满足

$$\begin{aligned}\inf_{\mathsf{a}^*=(\mathsf{a}_0^*,\mathsf{a}_1^*)\in\mathbb{R}^3} & A^*(\mathsf{a}_0^* + \frac{1}{2}|\mathsf{a}_1^*|^2) + \frac{r_1}{2}|\mathsf{a}^*|^2 \\ & - (\mathsf{a}^m_{\ell,i_s,j,i_t} + r_1\nabla_{t,x}\phi_h^{m+1}(\eta_{i_t}^j, \boldsymbol{\xi}_{i_s}^{\ell}))\cdot \mathsf{a}^*, \end{aligned} \tag{3.18}$$

并求 $\mathbf{r}^{*\ \mathsf{m+1}}_{\ell\ ,\ ,\ \mathsf{i_s}} \in \mathbb{R}$，使其满足

$$\inf_{\mathsf{r}^*\in\mathbb{R}^+} \Gamma^*(\mathsf{r}^*) + \frac{r_2}{2}|\mathsf{r}^*|^2 - (\mathsf{r}^m_{\ell,i_s} - r_2\phi_h^{m+1}(1, \boldsymbol{\xi}_{i_s}^{\ell}))\cdot \mathsf{r}^*. \tag{3.19}$$

这两个优化问题都可以使用牛顿法高效地并行求解。

步骤 $\boldsymbol{C}$：更新 $\boldsymbol{\alpha}_h$ 和 $\rho_{1,\ h}$

这是对拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\alpha}_h$ 和 $\rho_{1,\ h}$的自由度进行的简单逐点更新：

$$\mathsf{a}^{m+1}_{\ell,i_s,j,i_t} = \mathsf{a}^m_{\ell,i_s,j,i_t} + r_1(\nabla_{t,x}\phi_h^{m+1}(\eta_{i_t}^j, \boldsymbol{\xi}_{i_s}^{\ell})) - \mathsf{a}^{m+1}_{\ell,i_s,j,i_t}), \tag{3.20}$$

$$\mathsf{r}^{m+1}_{\ell,i_s} = \mathsf{r}^m_{\ell,i_s} - r_2(\phi_h^{m+1}(1, \boldsymbol{\xi}_{i_s}^{\ell})) + \mathsf{r}^{m+1}_{\ell,i_s}). \tag{3.21}$$

我们使用拉格朗日乘子中的 ℓ_∞-误差

$$err_m^a := \max_{\ell,i_s,j,i_t} |\mathsf{a}^{m+1}_{\ell,i_s,j,i_t} - \mathsf{a}^m_{\ell,i_s,j,i_t}|, \tag{3.22}$$

$$err_m^r := \max_{\ell,i_s} |\mathsf{r}^{m+1}_{\ell,i_s} - \mathsf{r}^m_{\ell,i_s}|, \tag{3.23}$$

以监测 ALG2 算法的收敛。

注释 3.1. 我们特别指出，采用积分规则空间W_h^k 和数值积分，对于高效实现 *ALG2* 算法中的步骤 *B* 至关重要，这使得每个积分点都能进行逐点更新。如果没有谨慎选择该空间和数值积分，可能会引入额外且不必要的自由度耦合，从而减慢整个算法的运行速度。

4. 数值实验

本节通过全面的实验，展示所提出数值算法的效率和有效性。我们仅考虑结构化（超）矩形网格。非结构化网格的情形将在其他工作中讨论。首先，我们通过数值实验验证算法的收敛率与网格尺寸及多项式次数之间的关系。全文中，增广拉格朗日参数取为 $r = r_1 = r_2 = 1$。数值模拟使用开源有限元软件 NGSolve [43], `https://ngsolve.org/` 完成。

4.1. 收敛率

首先考虑具有已知精确解的最优传输问题。具体而言，取区域 $\Omega = \mathbb{R}^d$，其中 $d = 1$ 或 $d = 2$，并令（2.3）中的代价函数为 $A(\rho) = 0$，初始密度和终端密度为:

$$\rho_0(\boldsymbol{x}) = \exp(-50|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2), \quad \rho_1(\boldsymbol{x}) = \exp(-50|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1|^2),$$

其中，当空间维数为 $d = 1$ 时，$\boldsymbol{x}_0 = 0.25, \boldsymbol{x}_1 = 0.75$；当空间维数为 $d = 2$ 时，$\boldsymbol{x}_0$ =(0.25,0.25) $\boldsymbol{x}_1$ = (0.75,0.75)。精确解是一个简单的行波解:

$$\begin{aligned} \rho_{ex}(t, \boldsymbol{x}) &= \exp(-50|\boldsymbol{x} - (1 + 2t)\boldsymbol{x}_0|^2), \\ m_{ex,i}(t, \boldsymbol{x}) &= 0.5 \exp(-50|\boldsymbol{x} - (1 + 2t)\boldsymbol{x}_0|^2), \quad \forall 1 \le i \le d, \end{aligned}$$

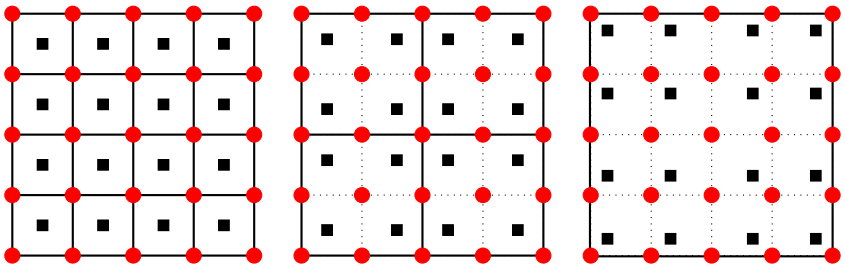
其中 $\boldsymbol{m}_{ex}$ =($m_{ex,\ 1}$, $\cdots$, $m_{ex,\ d}$)。我们将区域 Ω 截断为单位盒 $[0, 1]^d$, 并用边界源项替换齐次边界条件 (2.7d)

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}_{ex} \cdot \boldsymbol{n}, \quad \text{on } [0, 1] \times \partial\Omega.$$

进行此修改后，(2.6a) 中的 G-项包含一个额外的边界源项：

$$G(\phi) := \int_\Omega -\phi(1,\boldsymbol{x})\rho_1(\boldsymbol{x}) + \phi(0,\boldsymbol{x})\rho_0(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^1 \int_{\partial\Omega} \phi(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{m}_{ex}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

我们在一系列均匀超立方网格上，对每个方向含有 $2^{s+2}/(k+1)$ 个单元、$s=0$、1、2、3 时，采用多项式次数为 $k=0$、1、3 的格式（3.10）。对于每种多项式次数， s 层网格上的自由度总数相同： W_h^k 时为 $2^{(s+2)(d+1)}$，V_h^{k+1} 时为 $(2^{(s+2)}+1)^{d+1}$。因此，它们的计算成本相近。我们对格式（3.10）应用 ALG2 算法，停止容差设为 $err_m^a < 10^{-10}$，其中 err_m^a 由（3.22）给出。我们取参数 $r=1$。 $d=1$ 对应的最粗网格上的自由度如图 1 所示。



(a) $k=0$: 4×4 网格　(b) $k=1$: 2×2 网格　(c) $k=3$: 1×1 网格

图 1：粗网格自由度。圆形： V_h^{k+1}的自由度；方形： W_h^k的自由度。粗网格对于 $k=0$ 为 4×4，对于 $k=1$为 2×2，对于 $k=3$为 1×1。

我们记录了 ρ_h 和 $\boldsymbol{m}_h$的 $L^2(\Omega_T)$-收敛率，以及距离的收敛率

$$W_2^2 = \int_0^1 \int_\Omega \frac{|\boldsymbol{m}|^2}{2\rho}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$$

表 2 中为 $d=1$，表 3 中为 $d=2$。我们发现， $d=1$ 和 $d=2$的收敛行为相似。具体而言，在每种情况下，最细网格上均观察到 $k+1$ 的近乎最优L^2-收敛率，距离 W_2^2的平均收敛率介于 $2k+2$和$2k+4$之间。此外，在细网格上，高阶格式的优势显而易见： 8^{d+1} 网格上的 $k=3$ 情形产生的 L^2-误差

表 2：格式 3.10 应用于一维最优传输问题的收敛率。

k	mesh	L^2-误差（ρ）	阶	L^2-误差（$\boldsymbol{m}$）	阶	W_2^2 误差	阶
0	4^2	2.068E-01		1.097E-01		2.834E-03	
0	8^2	1.159E-01	0.84	5.985E-02	0.87	5.472E-04	2.37
0	16^2	6.007E-02	0.95	2.970E-02	1.01	5.788E-05	3.24
0	32^2	3.002E-02	1.00	1.497E-02	0.99	4.196E-06	3.79
1	2^2	1.868E-01		1.110E-01		1.127E-02	
1	4^2	7.496E-02	1.32	3.863E-02	1.52	4.625E-04	4.61
1	8^2	2.169E-02	1.78	1.077E-02	1.84	9.523E-06	5.60
1	16^2	5.683E-03	1.93	2.844E-03	1.92	1.611E-07	5.89
3	1^2	2.148E-01		1.301E-01		3.337E-02	
3	2^2	6.602E-02	1.70	3.548E-02	1.87	5.390E-04	5.95
3	4^2	7.234E-03	3.19	3.595E-03	3.30	5.044E-07	10.1
3	8^2	5.079E-04	3.83	2.542E-04	3.82	4.521E-09	6.80

比另一种小 50 倍，且 W_2^2 误差比 32^{d+1} 网格上的 $k=0$ 情形小三个数量级，尽管两者使用的自由度数量相同。

4.2. 含障碍物的 *MFP*

我们考虑一个类似的 MFP 问题 [13], ，其中空间域是一个方形区域，并排除了一些质量无法穿越的障碍物：

$$\Omega = [-1,1]^2 \backslash \{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4\},$$

其中障碍物为 $\Omega_1 = [-0.2,0.2]\times[-1.0,-0.7]$、$\Omega_2 = [-0.2,0.2]\times[-0.5,-0.1]$、$\Omega_3 = [-0.2,0.2]\times[0.1,0.5]$、$\Omega_4 = [-0.2,0.2]\times[0.7,1.0]$。我们将两个高斯分布作为初始密度和终端密度

$$\rho_0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2), \quad \rho_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|^2),$$

其中标准差为 $\sigma = 0.1$，且 $\boldsymbol{x}_0 = (-0.65,\ 0)$，$\boldsymbol{x}_1 = (0.65,\ 0)$。我们在 MFP 中选取以下 5 种相互作用代价函数

表 3：格式 3.10 应用于二维最优传输问题的收敛率。

k	mesh	L^2-误差（ρ 中）	阶	L^2-误差（$\boldsymbol{m}$ 中）	阶	W_2^2 误差	阶
0	4^3	1.172E-01		8.385E-02		1.602E-03	
0	8^3	6.832E-02	0.78	4.879E-02	0.78	1.646E-04	3.28
0	16^3	3.559E-02	0.94	2.505E-02	0.96	2.693E-05	2.61
0	32^3	1.787E-02	0.99	1.262E-02	0.99	2.391E-06	3.49
1	2^3	1.113E-01		8.196E-02		7.008E-03	
1	4^3	4.540E-02	1.29	3.260E-02	1.33	3.882E-05	7.50
1	8^2	1.326E-02	1.78	9.354E-03	1.80	3.563E-06	3.45
1	16^2	3.474E-03	1.93	2.457E-03	1.93	3.854E-08	6.53
3	1^2	1.432E-01		1.109E-01		2.278E-02	
3	2^2	3.873E-02	1.89	2.804E-02	1.98	2.795E-04	6.35
3	4^2	4.353E-03	3.15	3.072E-03	3.19	2.004e-07	10.4
3	8^2	3.068E-04	3.83	2.170E-04	3.82	3.977E-09	5.65

问题（2.3）的凸共轭也一并列出，以供参考：

$$
\begin{cases}
\text{Case 1}: A(\rho)=0, \quad A^*(\rho^*)=\begin{cases}0 & \text{if } \rho^*\le 0,\\ +\infty & \text{if } \rho^*>0.\end{cases},\\
\text{Case 2}: A(\rho)=c\rho^2, \quad A^*(\rho^*)=\begin{cases}0 & \text{if } \rho^*\le 0,\\ (\rho^*)^2/(4c) & \text{if } \rho^*>0.\end{cases},\\
\text{Case 3}: A(\rho)=c\rho\log(\rho), \quad A^*(\rho^*)=\exp(\rho^*/c-1),\\
\text{Case 4}: A(\rho)=c/\rho, \quad A^*(\rho^*)=\begin{cases}-2\sqrt{-c\rho^*} & \text{if } \rho^*\le 0,\\ +\infty & \text{if } \rho^*>0.\end{cases}\\
\text{Case 5}: A(\rho)=\begin{cases}0 & \text{if } 0\le\rho\le\rho_{\max},\\ +\infty & \text{else.}\end{cases} \quad A^*(\rho^*)=\rho_{\max}(\rho^*)_+
\end{cases}
$$

其中，我们在情形 2–4 中取缩放常数 $c=0.1$，在情形 5 中取最大密度 $\rho_{\max}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}$。

我们在结构化六面体网格上应用多项式次数为 $k=3$ 的格式（3.10）。该网格由网格尺寸为 $\Delta x=0.1$ 的均匀空间矩形网格与时间步长为 $\Delta t=0.1$ 的均匀时间网格作张量积得到。Ω 的空间网格如图 2 所示。当误差 err_m^a 小于 0.01 时，我们终止 ALG2 算法。所需迭代次

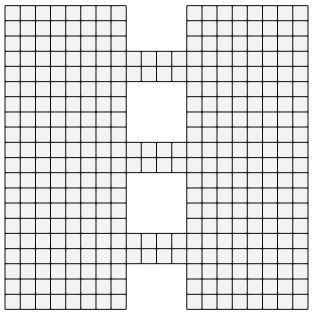


图 2：空间域 Ω 上的均匀矩形网格，$\Delta t = 0.1$

数记录在表 4 中，展示了 5 种情况达到收敛所需的迭代次数；其中情况 2 所需迭代次数最少。

	情况 1	情况 2	情形 4	情形 4	情形 4
迭代次数	780	72	245	503	552

表 4：例 4.2。每种情况下的 ALG2 迭代次数。

图3展示了不同时间的密度等高线快照。可以清楚地观察到不同相互作用代价函数对密度分布的影响。

4.3. 带障碍的 *MFG*

我们考虑与例 4.2 类似的设置，其中考虑一个具有终端成本的均场博弈问题

$$\Gamma(\rho) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\rho - \rho_T)^2 & \text{if } \rho \geq 0, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中目标密度

$$\rho_T := \frac{1}{2\pi\sigma^2}\left(\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}|\boldsymbol{x} - (0.65, 0.3)|^2) + \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}|\boldsymbol{x} - (0.65, -0.3)|^2)\right)$$

其中包含 $\sigma = 0.1$。请注意，这里我们允许 ρ_T 和 ρ_0 的总质量不同。

我们在与例 4.2 相同的网格上采用多项式次数为 $k = 3$ 的格式 (3.14)，并使用相同的停止准则。5 种情况达到

	情况 1	情况 2	情况 3	情形 4	情形 5
迭代次数	3510	82	476	503	798

表 5：例 4.3。每种情况下的 ALG2 迭代次数。

收敛所需的迭代次数记录在表 5 中，我们再次发现情况 2 的迭代次数最少。

图 4 展示了不同时间的密度等值线快照。结果与例 4.2 中的结果相似，其中不同的相互作用代价函数会导致不同的密度演化。

4.4. 吉祥物图像之间的 *MFP*

我们的最后一个例子涉及图像之间的 OT 和 MFP（2.3）。初始或终端密度分别是来自圣母大学（小矮妖）、加州大学洛杉矶分校（棕熊队）和南卡罗来纳大学（斗鸡队）的体育吉祥物的归一化图像；见图 5。空间域是单位正方形 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$，初始/终端密度均归一化为单位质量。

我们在大小为 $64 \times 64 \times 16$ 的结构化六面体网格上采用多项式次数为 $k = 3$ 的格式（3.10），其中时间步长为 $\Delta t = 1/16$。考虑三组初始/终端密度对：(i) ND→UCLA，其中初始密度为 ND 图像，终端密度为 UCLA 图像；(ii) UCLA→ USC，其中初始密度为 UCLA 图像，终端密度为 USC 图像；(iii) USC→ ND，其中初始密度为 USC 图像，终端密度为 ND 图像。对于每一对数据，我们考虑三种相互作用代价，即情况 1：$A(\rho) = 0$（OT）、情况 2：$A(\rho) = 0.01\rho\log(\rho)$，以及情况 3：$A(\rho) = 0.01/\rho$。当 err_m^a 小于 0.001 时，ALG2 算法终止。收敛所需的迭代次数记录在表 6 中。

	情况 1	情况 2	情况 3
圣母大学→加州大学洛杉矶分校	2440	471	892
加州大学洛杉矶分校→南加州大学	1511	211	244
南加州大学→圣母大学	3577	496	907

表 6：例 4.4。各个案例的 ALG2 迭代次数。

不同时间的密度等高线快照显示在图6中，对应 (i) 圣母大学→ 加州大学洛杉矶分校；图 7 中对应 (ii) 加州大学洛杉矶分校→ 南加州大学；图 8 中对应

(iii) 南加州大学→ 圣母大学。从这些图中可以看出，情况 1（最优传输）产生的密度演化结果最为锐利，而情况 2/3 中的两种相互作用代价都具有很强的平滑效果，会使密度分布变得模糊；其中，情况 3 使用 $A(\rho) = 0.01/\rho$ 还会使密度处处为正。

5. 结论

本文采用高阶精度有限元方法计算最优传输（OT）和均值场博弈（MFG）。据我们所知，这是首次将高阶数值方法应用于最优传输和均值场博弈。我们通过数值算例验证了算法的精度。未来，我们将研究高阶精度有限元方法在最优传输及均值场博弈相关动力学中的数值性质。我们预计这些方法将在计算物理、社会科学、生物建模、疫情控制和计算机视觉领域得到广泛应用。我们还希望将高阶有限元方法应用于广义平均场控制形式体系，以计算时间隐式流体动力学 [35, 36, 37, 40]。

参考文献

[1] Yves Achdou 和 Italo Capuzzo-Dolcetta，《均值场博弈：数值方法》，SIAM 数值分析杂志 **48** （2010），第 3 期，1136–1162。[2] Yves Achdou 和 Mathieu Lauri`ere，《拥挤条件下的均值场类型控制（II）：增广拉格朗日方法》，《应用数学与优化》**74** （2016），第 3 期，535–578。[3] ，《均值场博弈及其应用：数值方面》，arXiv 预印本 arXiv:2003.04444（2020）。[4]Sudhanshu Agrawal、Wonjun Lee、Samy Wu Fung 和 Levon Nurbekyan，《高维非局部平均场博弈的随机特征》，计算物理学杂志 **459** （2022），111136。[5] Roman Andreev，《带扩散的非定常均值场博弈的增广拉格朗日方法预条件化》，SIAM 科学计算杂志 **39**（2017），第 6 期，A2763–A2783。MR 3731033

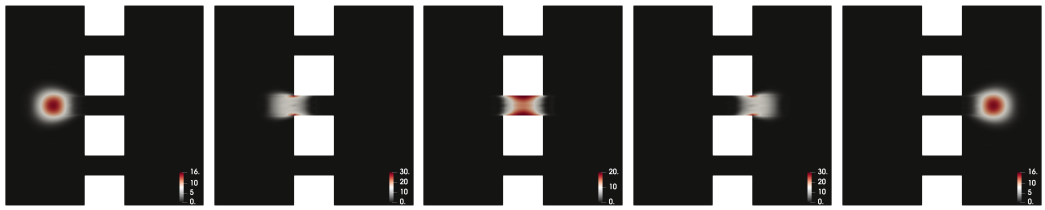
[6] Alexander Aurell 和 Boualem Djehiche，《行人群体动力学中的非局部人群排斥均值场型建模》，SIAM 控制与优化杂志 **56** （2018），第 1 期，434–455。[7] Fabio Bagagiolo 和 Dario Bauso，《电网中的均值场博弈与动态需求管理》，《动态博弈与应用》**4**（2014），155–176。[8] J.-D. Benamou、G. Carlier 和 F. Santambrogio，《变分均值场博弈》，《活性粒子》第 1 卷：理论、模型与应用进展，《建模、仿真、科学、工程与技术》，Birkh¨auser/Springer，尚，2017，第 141–171 页。MR 3644590[9] Jean-David Benamou 和 Yann Brenier，《最优连续时间质量传输问题及相关问题的数值方法》，《当代数学》**226** （1999），1–12。[10] ，《Monge-Kantorovich 质量传输问题的计算流体力学解法》，《数值数学》**84** （2000），第 3 期，375–393。[11] Jean-David Benamou 和 Guillaume Carlier，《传输优化、均值场博弈与退化椭圆方程的增广拉格朗日方法》，《优化理论与应用杂志》**167** （2015），第 1 期，1–26。MR 3395203[12]L. Brice˜no Arias、D. Kalise、Z. Kobeissi、M. Lauri`ere、´A. Ma´teos Gonz´alez 和 F. J. Silva，《局部耦合二阶时变均值场博弈的原始-对偶算法实现》，CEMRACS 2017——随机模型数值方法：控制、不确定性量化、均值场，《ESAIM 会议录与综述》，第 65 卷，EDP Sci.，莱于利，2019，第 330–348 页。MR 3968547[13] G. Buttazzo、C. Jimenez 和 E. Oudet，《具有拥挤动力学的质量运输优化问题》，《SIAM 控制与优化杂志》**48** （2009），第 3 期，1961–1976。MR 2516195[14]P. Cardaliaguet，《均值场博弈讲义》，2013，https://www.ceremade.dauphine.fr/cardaliaguet/。

[15]Pierre Cardaliaguet 和 Saeed Hadikhanloo，均值场博弈中的学习：虚拟博弈，ESAIM：控制、优化与变分法 **23** (2017)，第 2 期，569–591。[16] Elisabetta Carlini 和 Francisco J Silva，一阶均值场博弈问题的全离散半拉格朗日格式，SIAM 数值分析杂志 **52** (2014)，第 1 期，45–67。[17] Ren´e Carmona、Jean-Pierre Fouque 和 Li-Hsien Sun，均值场博弈与系统性风险，数学科学通讯 **13** (2015)，第 4 期，911–933。[18] Philippe Casgrain 和 Sebastian Jaimungal，用于算法交易的信念各异的均值场博弈，数学金融**30** (2020)，第 3 期，995–1034。[19] Kai Cui 和 Heinz Koeppl，通过熵正则化深度强化学习近似求解均值场博弈，人工智能与统计国际会议，PMLR，2021年，第 1909–1917 页。[20] Michel Fortin 和 Roland Glowinski，增广拉格朗日方法，《数学及其应用研究》，第 15 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1983年，《边值问题数值求解中的应用》，由 B. Hunt 和 D. C. Spicer 从法文译出。MR 724072[21] Diogo A. Gomes 和 J. Sa´ude，均值场博弈模型——简要综述，动态博弈及其应用**4** (2014)，第 2 期，110–154。MR 3195844[22] Olivier Gu´eant、Jean-Michel Lasry 和 Pierre-Louis Lions，均值场博弈及其应用，《2010年巴黎—普林斯顿数学金融讲座》，《数学讲义》，第 2003 卷，Springer，柏林，2011年，第 205–266 页。MR 2762362 [23] Xin Guo、Anran Hu、Renyuan Xu 和 Junzi Zhang，均值场博弈学习的通用框架，《运筹学研究》（2022年）。

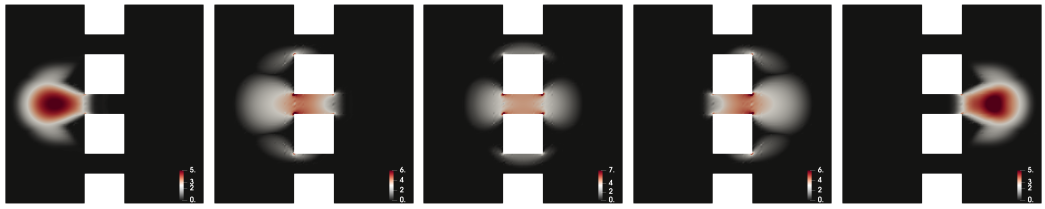
[24] Saeed Hadikhanloo 和 Francisco J Silva，有限均值场博弈：虚拟博弈及收敛到一阶连续均值场博弈，《纯粹与应用数学杂志》´132 ´(2019)，369–397。[25] Minyi Huang、Roland P Malham´e、Peter E Caines 等，大规模随机动态博弈：闭环 *McKean–Vlasov* 系统与纳什确定性等价原理，《信息与系统通讯》**6** (2006)，第 3 期，221–252。[26]Noureddine Igbida 和 Van Thanh Nguyen，求解最优部分运输的增广拉格朗日方法，IMA 数值分析杂志**38**(2018)，第 1 期，156–183。MR 3800018[27] Arman C Kizilkale、Rabih Salhab 和 Roland P Malham´e，基于均值场博弈的智能电网负载大规模协调的积分控制表述，Automatica **100** (2019)，312–322。[28] Aim´e Lachapelle 和 Marie-Therese Wolfram，基于均值场博弈方法对行人群体拥堵与厌恶进行建模，《交通研究 B 辑：方法论》**45** (2011)，第 10 期，1572–1589。[29] Jean-Michel Lasry 和 Pierre-Louis Lions，均值场博弈，《日本数学杂志》**2** (2007)，第 1 期，229–260。[30] , 均值场博弈，《日本数学杂志》**2** (2007)，第 1 期，229–260。MR 2295621[31] Mathieu Lauriere，均值场博弈与均值场类型控制的数值方法，arXiv 预印本 arXiv:2106.06231 (2021年)。[32] Mathieu Lauri`ere、Sarah Perrin、Sertan Girgin、Paul Muller、Ayush Jain、´Theophile Cabannes、Georgios Piliouras、Julien P´erolat、Romuald Elie、Olivier Pietquin 等，用于均值场博弈的可扩展深度强化学习算法，国际机器学习大会，PMLR，2022年，第 12078–12095 页。[33] Wonjun Lee、Siting Liu、Wuchen Li 和 Stanley Osher，用于疫苗分配的均值场控制问题，数学科学研究**9** (2022年)，第 3 期，51。

[34] Wonjun Lee、Siting Liu、Hamidou Tembine、Wuchen Li 和 Stanley Os- her，通过均值场控制遏制流行病传播，SIAM 应用数学杂志 **81** (2021年)，第 1 期，190–207 页。[35] Wuchen Li、Wonjun Lee 和 Stanley Osher，与反应扩散方程相关的计算平均场信息动力学，计算物理学杂志 **466** (2022年)，111409。[36] Wuchen Li、Siting Liu 和 Stanley Osher，控制守恒律 I：熵-熵通量，arXiv:2111.05473 (2021)。[37] ，控制守恒律 II：可压缩纳维–斯托克斯方程，计算物理学杂志 **463** (2022 年)，111264。[38] Alex Tong Lin 、 Samy Wu Fung 、 Wuchen Li、Levon Nurbekyan 和 Stanley J Osher，交替使用群体与控制神经网络求解高维随机平均场博弈，美国国家科学院院刊 **118** (2021 年)，第 31 期，e2024713118。[39] Siting Liu、Matthew Jacobs、Wuchen Li、Levon Nurbekyan 和 Stanley J Osher，一阶非局部平均场博弈的计算方法及其应用，SIAM 数值分析杂志 **59**(2021年)，第 5 期，2639–2668 页。[40] Siting Liu、Stanley Osher、Wuchen Li 和 Chi-Wang Shu，一种求解守恒律的原始-对偶方法：采用时间隐式近似，计算物理学杂志 **472** (2023年)，111654。[41]Alessio Porretta，关于一类均值场博弈的规划问题，数学报告**351** (2013)，第 11–12 期，457–462 页。[42] Lars Ruthotto、Stanley J Osher、Wuchen Li、Levon Nurbekyan 和 Samy Wu Fung，用于求解高维均值场博弈和均值场控制问题的机器学习框架，美国国家科学院院刊 **117** (2020年)，第 17 期，9183–9193 页。[43] J. Sch¨oberl，*C++11* 在 ***NGSolve*** 中实现有限元，2014年，ASC 报告 30/2014，维也纳工业大学分析与科学计算研究所。

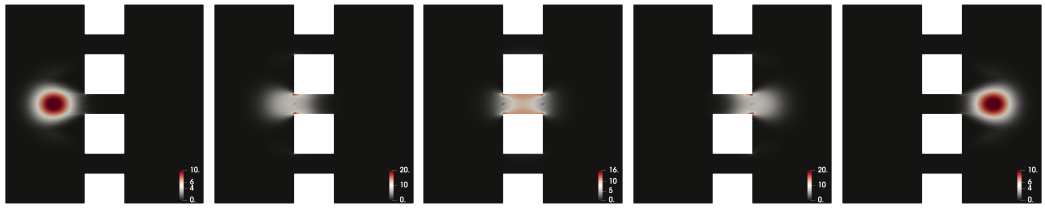
[44] F. D. Witherden 和 P. E. Vincent，关于有限元方法中对称求积公式的识别，Comput. Math. Appl. 69(2015)，第 10 期，1232–1241 页。MR 3333661[45] Jiajia Yu、Rongjie Lai、Wuchen Li 和 Stanley Osher，流形上的计算均值场博弈，arXiv:2206.01622 (2022年)。[46] Linbo Zhang、Tao Cui 和 HuiLiu，定义在三角形和四面体上的一组对称求积公式，J. Comput. Math. 27(2009)，第 1 期，89–96 页。MR 2493559



(a) 情况 1



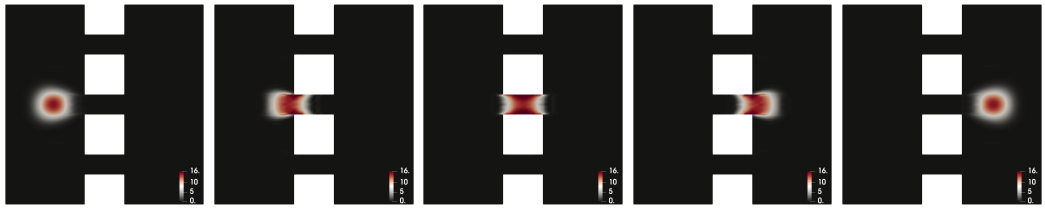
(b) 情况 2



(c) 情况 3

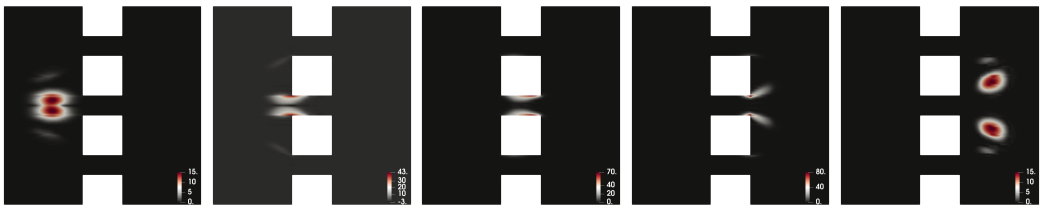


(d) 情形 4

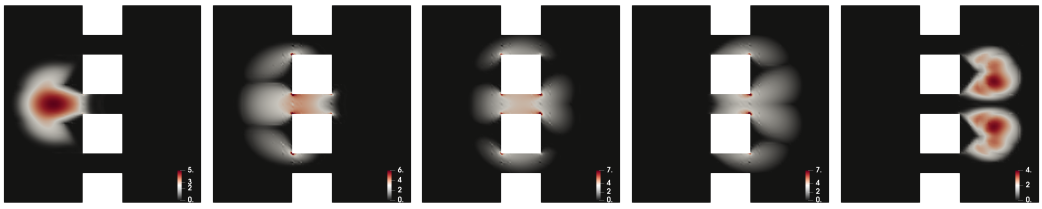


(e) 情形 5

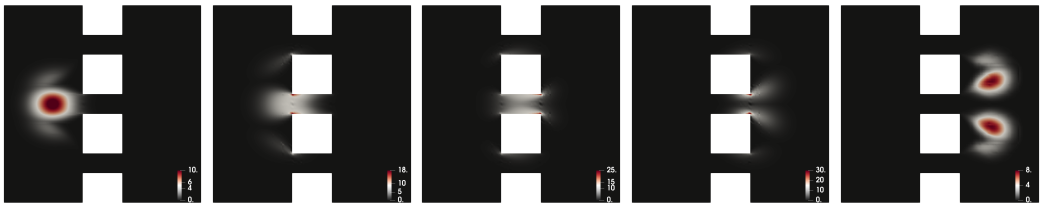
图3：例 4.2。 ρ 在 $t = 0.1$，0。3，0。5，0。7，0。9（从左到右）的快照。



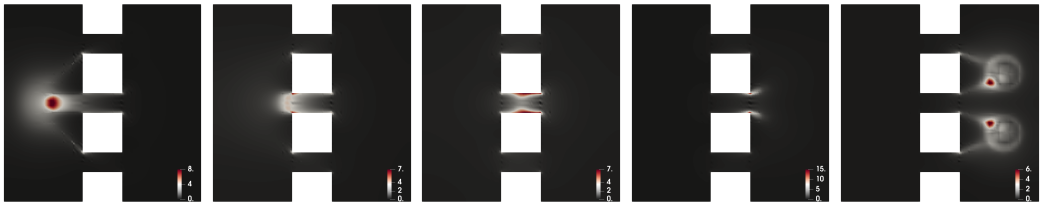
(a) 情况 1



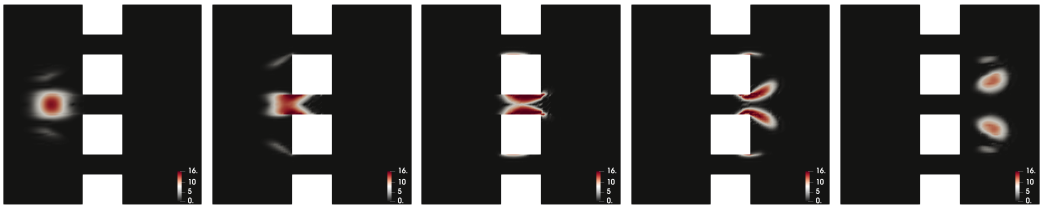
(b) 情况 2



(c) 情况 3



(d) 情形 4



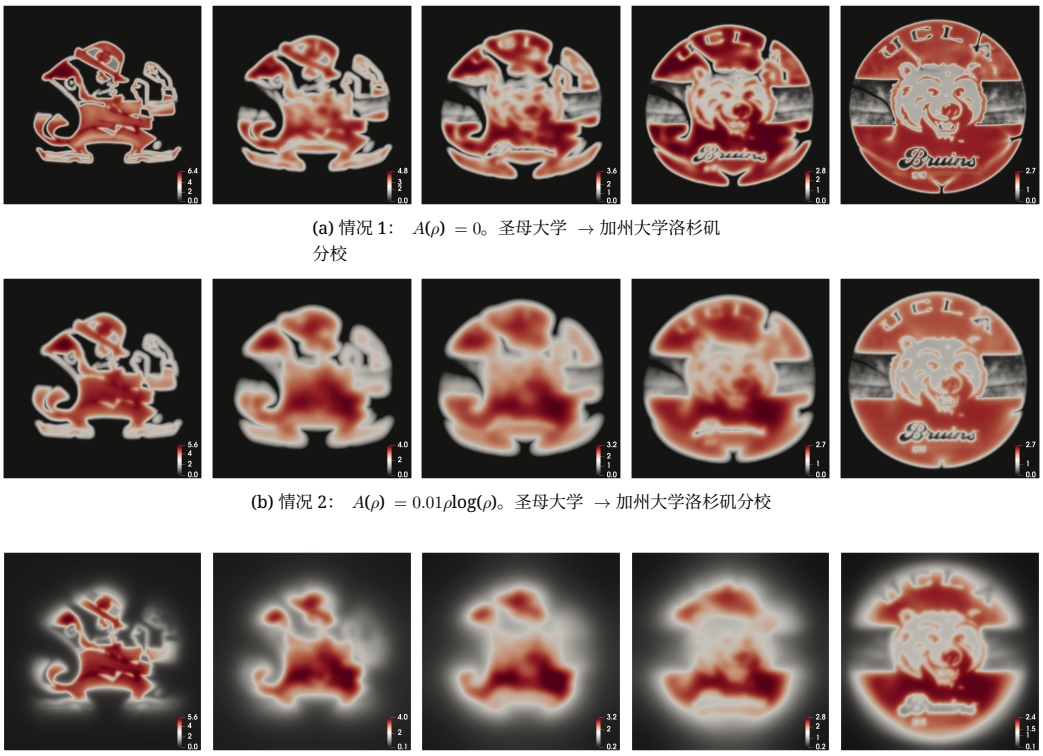
(e) 情形 5

图 4：例 4.3。 ρ 在 $t = 0.1$，0。3， 0。5， 0。7， 0。9 的快照（从左到右）。



(a) 圣母大学（小矮妖）　(b) 加州大学洛杉矶分校（棕熊队）　(c) 南加州大学（斗鸡队）

图 5：例 4.4。初始/终端密度。

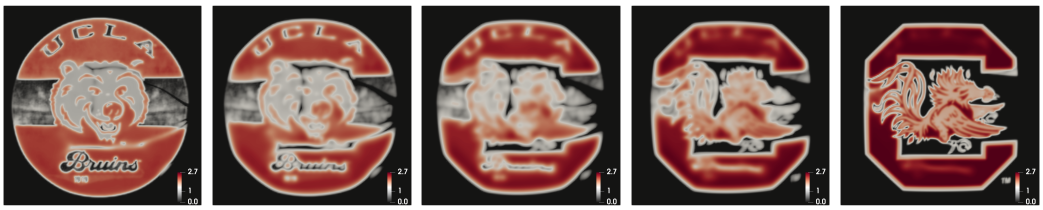


(a) 情况 1：$A(\rho) = 0$。圣母大学 $\rightarrow$ 加州大学洛杉矶分校

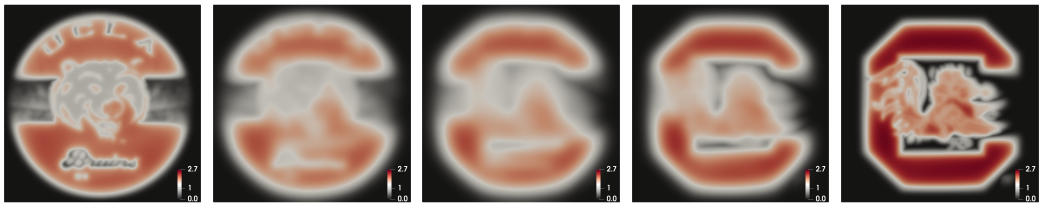
(b) 情况 2：$A(\rho) = 0.01\rho\log(\rho)$。圣母大学 $\rightarrow$ 加州大学洛杉矶分校

（c）情况 3：$A(\rho) = 0.01/\rho$。圣母大学 $\rightarrow$ 加州大学洛杉矶分校

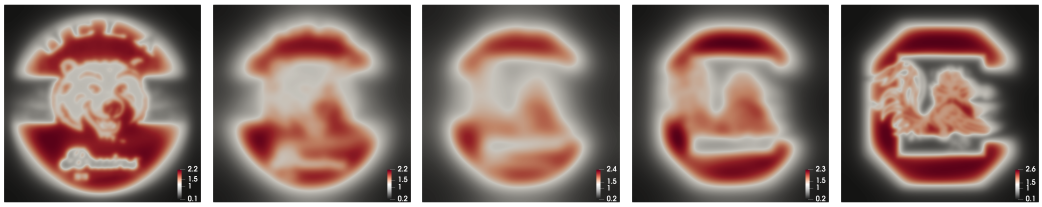
图 6：例 4.4。初始密度：圣母大学。终端密度：加州大学洛杉矶分校。ρ 在$t = 0.1$、0.3、0.5、0.7、0.9 时的快照（从左到右）。



(a) 情况 1： $A(\rho) = 0$。加州大学洛杉矶分校 $\rightarrow$ 南加州大学

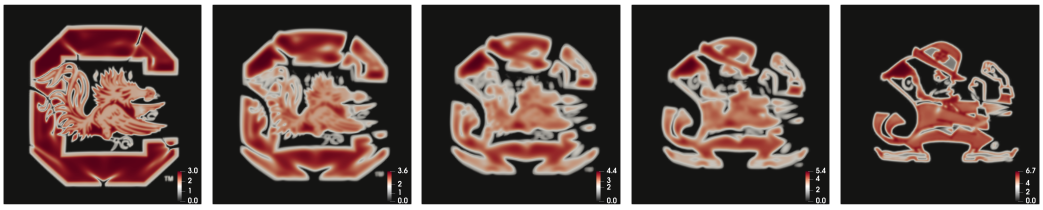


(b) 情况 2： $A(\rho) = 0.01\rho\log(\rho)$。加州大学洛杉矶分校 $\rightarrow$ 南加州大学

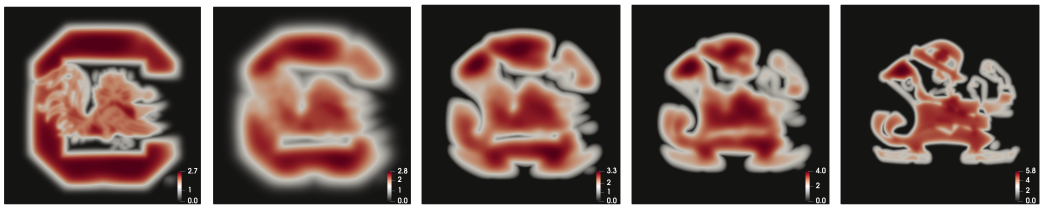


(c) 情况 3： $A(\rho) = 0.01/\rho$。加州大学洛杉矶分校 $\rightarrow$ 南加州大学

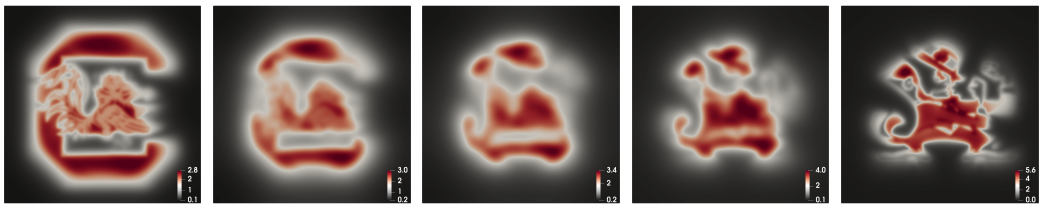
图 7：例 4.4。初始密度：加州大学洛杉矶分校。终端密度：南加州大学。 ρ at$t = 0$的快照。1,0.3,0.5,0.7,0.9（从左到右）。



(a) 情况 1： $A(\rho) = 0$。南加州大学 $\rightarrow$ 圣母大学



(b) 情况 2： $A(\rho) = 0.01\rho\log(\rho)$。南加州大学 $\rightarrow$ 圣母大学



(c) 情况 3： $A(\rho) = 0.01/\rho$。南加州大学 $\rightarrow$ 圣母大学

图 8：例 4.4。初始密度：南加州大学。终端密度：圣母大学。 ρ 在$t = 0$处的快照：1,0.3,0.5,0.7,0.9（从左到右）。