arXiv:2302.02313v1 [cs.GT] 5 Feb 2023

求解罗马支配问题的博弈论方法

Xiuyang Chen、Changbing Tang *IEEE* 会员、Zhao Zhang *IEEE* 会员和 Guanrong Chen *IEEE* 终身会士

摘要—罗马支配问题是一项重要的组合优化问题，其源于一个关于保卫罗马帝国的古老故事。如今，鉴于动态网络安全需求下对备份机制的考量，该问题在网络空间安全领域重新焕发重要意义。本文首先提出一种罗马支配博弈（RDG），并证明该博弈的每个纳什均衡（NE）都对应一个强极小 Roman 支配函数（S-RDF），同时也是一个帕累托最优解。其次，我们证明 RDG 是一种精确势博弈，从而保证纳什均衡的存在。第三，我们设计一种基于博弈的同步算法（GSA），该算法可分布式实现，并能在 $O(n)$ 轮次内收敛至纳什均衡，其中 n 为顶点数。在 GSA 中，所有参与者均依据局部信息做出决策。此外，我们将 GSA 改进为增强型 GSA（EGSA），使其能在 $O(n^2)$ 轮次内收敛至更优的纳什均衡。最后，我们通过数值模拟表明，与当前最先进的算法相比，EGSA 能在可观的计算时间内获得更优的近似解。

索引词—罗马支配函数、博弈论、多智能体系统、分布式算法、势博弈。

I. 引言

THE 最小罗马支配(MinRD)问题源于一个有趣的历史故事 [1]: 为维护罗马帝国的安全，君士坦丁皇帝采用了“跳岛战术”——将部队从一个岛屿调往邻近岛屿，但只有在能够留下足够大的驻军以确保第一个岛屿安全时才这样做。麦克阿瑟在第二次世界大战期间的军事行动中也采用了这一策略。用图论语言来说，MinRD要求在某些顶点上部署数量最少的部队，使得任何没有部队的顶点都必须与一个至少有两名部队的顶点相邻。

MinRD在当代也有应用，尤其是在动态安全环境下的服务器部署 [2]和无线传感器网络[3] 领域。例如，在无线传感器网络中，会在一些节点上部署一组传感器，以监测周边环境。当某个空置节点面临需要通过移动相邻传感器来解决的安全问题时，移动的传感器应至少留下一台备用传感器。换言之，没有部署传感器的节点必须与部署了至少两台传感器的节点相邻。从经济角度来看，在满足上述要求的前提下，传感器总数应尽可能少。这一考量引出了MinRD问题。

罗马支配问题在 [4] 中首次以数学方式提出。在此之前， [5] 和 [1]中已隐含地给出了罗马支配函数（RDF）的定义。 [6] 通过从3-可满足性问题进行多项式归约，证明了 MinRD 在一般图上是 NP难的。[2], 提出了一种用于一般图上 MinRD 的（$2+2\ln n$）-近似算法，并为平面图上的 MinRD 设计了一种多项式时间近似方案（PTAS）。 [7], 证明了即使在单位圆盘图上，MinRD 仍是 NP难的；此外，研究利用单位圆盘图的几何性质，设计了一个5-近似算法和一个 PTAS。 [8],提出了一种名为连通强 k-罗马支配集问题的广义罗马支配问题，并证明该问题在单位球图上是 NP难的，同时为单位球图设计了一种6($k+2$)-近似算法。此外，还有罗马支配问题的其他变体[9]–[11], , 以及许多关于特殊图上 MinRD 的研究[12]–[16]。

上述文章中提出的大多数算法都是集中式的，也就是说，由一个中央控制器管理所有流程。这类算法通常容易受到网络攻击。此外，集中式算法难以满足大规模网络中实际应用对灵活性和多样性的要求。因此，分布式算法更为理想，尤其是在多智能体系统中。

在多智能体系统中，每个智能体都可以利用当前的局部信息自行做出决策。智能体的自主性消除了对中央控制器的依赖，并显著提升了系统的抗攻击能力。然而，个体利益可能与社会福利相冲突，因此，分布式算法可能会导致不理想的解决方案。博弈论是协调此类冲突的有效方法。在博弈论中，假设所有参与者都是自私、理性且聪明的，他们只关心最大化自身利益。为了使个体利益与社会福利保持一致，一项关键任务是为参与者设定合适的效用函数，使他们的自私行为能够自主演化为令人满意且稳定的集体

本研究得到国家自然科学基金委员会（U20A2068）和浙江省自然科学基金（LD19A010001）的部分资助。X. Chen就职于新疆大学数学与系统科学学院，新疆乌鲁木齐，830000，中国（电子邮箱：xi-uyangchen@126.com）。C. Tang就职于浙江师范大学物理与电子信息工程学院，中国金华321004（电子邮箱：tangcb@zjnu.edu.cn）。Z. Zhang就职于浙江师范大学数学与计算机科学学院，中国浙江金华，321004（电子邮箱：hx-hzz@sina.com）。G. Chen就职于香港城市大学电气工程系，中国香港九龙，999077（电子邮箱：eegchen@cityu.edu.hk）。通信作者：Changbing Tang和Zhao Zhang。

行为，其中稳定意味着没有参与者愿意单方面改变其当前策略。这种稳定状态称为纳什均衡 （NE）。

随着多智能体系统和大规模网络的快速发展，博弈论已广泛应用于组合优化问题的研究，例如支配集问题及其变体。文献[17], 研究了一种多重支配博弈，并证明该博弈的每个纳什均衡都是极小多重支配集，同时也是帕累托最优解。在该博弈中，设计了一种分布式算法，所有玩家按给定顺序作出决策。随后，文献 [18], 提出了一种独立支配博弈，并证明每个纳什均衡都是极小独立支配集。同样，所有玩家只能按给定顺序作出决策。此外，文献 [19] 研究了一种连通支配博弈，并证明每个纳什均衡都是极小连通支配集，但不是帕累托最优解。之后，文献 [20], 研究了一种安全支配博弈，并证明每个纳什均衡都是极小安全支配集，同时也是帕累托最优解。此外，研究者设计了一种分布式算法，使所有玩家能够同时作出决策，并且所有玩家仅使用局部信息。然而，针对罗马支配问题的分布式算法鲜有研究，而且该问题的许多研究针对的是特殊图。据我们所知，本文或许是首篇运用博弈论研究一般图上罗马支配问题的论文。我们提出一种罗马支配博弈（RDG），并证明该博弈的每个纳什均衡不仅是极小 *Roman* 支配函数（M-RDF），而且还是强极小 （S-RDF），在强传感器中具有局部最优性质。我们设计了一种基于博弈的同步算法 （GSA），使玩家能够同时作出决策，且都只使用局部信息。此外，我们将 GSA 增强为增强型 GSA（EGSA），其收敛到的纳什均衡优于 GSA 所得到的纳什均衡。

与本文主题密切相关的另一个问题是最小顶点覆盖（MinVC）问题。在 [21], 中，研究了雪堆博弈视角下的 MinVC 问题，并提出了一种分布式算法。在 [22], 中，研究了最小权重顶点覆盖（MinWVC）问题，并基于非对称博弈设计了一种算法，该算法能够找到权重更小的顶点覆盖。在 [23], [24], 中，利用势博弈论求解 MinWVC 问题，并提出了一种基于有限记忆松弛贪心算法的分布式算法。随后，在 [25]中，设计了一种基于群体的博弈论优化器，将学习与优化相结合。在 [26], 中，提出了一种采用两跳调整方案的加权顶点覆盖博弈，以获得更好的解。除了上述研究外，还有一些工作从不同角度运用博弈论研究覆盖问题。例如，在 [27],[28] 中，集合覆盖博弈采用了成本分摊和策略无关机制。在 [29], 中，研究了顶点覆盖博弈的核心稳定性。在 [30], 中，研究了支配集博弈的核心。在 [31], 中，研究了连通支配集博弈的核心。在 [32],中，分析了覆盖博弈的无政府代价和计算复杂度。

本文聚焦于多

表 I 符号列表

记号	含义
Γ	博弈
n	顶点的数量，也是参与者的数量
v_i	图中的一个顶点，也是博弈中的一名参与者
V	参与者或顶点的集合 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$
S_i	$S_i=\{0,1,2\}$ 是玩家 v_i 的策略集
Σ	$\Sigma=S_1\times\cdots\times S_n$ 是策略空间
C	$C=(c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots,\ c_n)\in\Sigma$ 是一个策略组合
$d(i,\ j)$	顶点 v_i 与 v_j之间最短路径的长度
N_i	$N_i=\{v_j\in V:\ v_j$ 与 $v_i\}$ 相邻是 v_i的邻居集
$\bar{N}_i$	$\bar{N}_i=N_i\cup\{v_i\}$ 是 v_i的闭邻居集
$N_{i,k}$	$N_{i,\ k}=\{v_j\in V:\ 0<d(i,\ j)\ \leq k\}$ 是 v_i的 k跳邻居集
$\bar{N}_{i,k}$	$\bar{N}_{i,k}=N_{i,k}\cup\{v_i\}$ 是 v_i的闭 k跳邻居集
$N_i^j(C)$	$N_i^j(C)=\{v_k\in N_i:\ c_k=j\}$

智能体系统中的 MinRD问题。本文的主要贡献如下:

- 我们为 MinRD问题构建了一个多智能体系统博弈框架，并证明了 RDG 中纳什均衡的存在性。此外，我们将 RDF 分为三类： $S_{\text{M-RDF}}$、 $S_{\text{S-RDF}}$ 和 $S_{\text{G-RDF}}$；我们表明， $S_{\text{G-RDF}}\subseteq S_{\text{演化纳什均衡}}\subseteq S_{\text{纳什均衡}}\subseteq S_{\text{S-RDF}}\subseteq S_{\text{M-RDF}}\subseteq S_{\text{RDF}}$, 并证明每个纳什均衡都是帕累托最优解。其中， $S_{\text{演化纳什均衡}}$ 和 $S_{\text{纳什均衡}}$ 分别表示增强型纳什均衡集合和纳什均衡集合。

- 我们为 RDG 提出了三种算法，分别称为基于博弈的异步算法 （GAA）、基于博弈的同步算法 （GSA）和增强型基于博弈的同步算法 （EGSA）。在 GAA 中，纳什均衡经过 $O(n)$ 轮交互后收敛，参与者做出决策时所依赖的局部信息至多来自一跳范围。在 GSA 中，它不仅能达到与 GAA 相同的性能，还能以分布式方式实现计算，所有参与者同时做出决策。在 EGSA 中，尽管运行时间较长$O(n^2)$，但可以获得优于 GSA 的解。

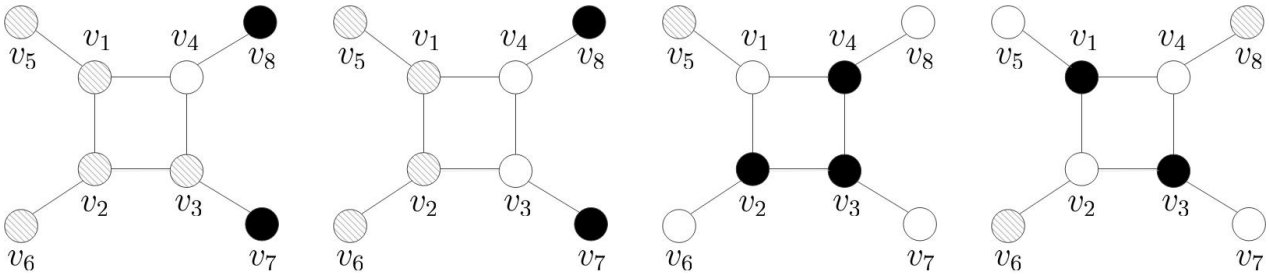
- 我们的数值模拟表明，在随机图上，所提出的算法优于现有算法。在随机树图上，我们的算法所得结果更接近最优解，而 EGSA 的结果与最优解之间的差距小于 0.01%。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍博弈论和 MinRD 的预备知识，并构建 RDG。第 3 节对博弈进行严格的理论分析，并探讨纳什均衡与三类 RDF 之间的关系。第 4 节详细介绍这三种算法，并对其收敛性进行理论分析。第 5 节通过大量模拟评估这三种算法的性能。第 6 节总结全文，并讨论未来的研究工作。

II. 将罗马支配问题建模为博弈

A. 预备知识

博弈 Γ 表示为 $\Gamma=(V,\ \{S_i\}_{i=1}^n,\ \{u_i\}_{i=1}^n)$，其中 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 是参与者的集合， S_i 是 v_i的策略集，而 u_i 是 v_i的效用函数。该博弈的策略空间



(a) $f^{(1)}$: 一个 RDF (b) $f^{(2)}$: 一个 M-RDF (c) $f^{(3)}$: 一个 S-RDF (d) $f^{(4)}$: 一个 G-RDF

图1. 展示四种 RDF 的示例。

为 $\Sigma = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$。策略组合 是一个 n-元组 $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \Sigma$。对于参与者 v_i，记作 $C = (c_i, C_{-i})$，其中 $C_{-i} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n)$表示除 v_i之外其他参与者所采用的策略。令 $u_i(C)$ 表示 v_i 在策略组合 C下的效用。假设参与者都是自私、聪明且理性的，这意味着每个参与者的目标都是最大化自身效用。参与者 v_i 针对当前策略组合的最佳响应是

$$\mathrm{BR}(v_i, C) = \arg\max\{u_i(c_i', C_{-i}) : c_i' \in S_i\}.$$

如果不存在任何玩家愿意单方面偏离 C，则称策略组合 C 为纳什均衡(NE)，其正式定义如下。

定义 1 （纳什均衡 [33]）。给定一个博弈 $\Gamma = (V, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$，若策略组合 $C^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*)$满足以下条件，则称其为纳什均衡(NE)：

$$u_i(c_i^*, C_{-i}^*) \geq u_i(c_i, C_{-i}^*) \text{ for any } v_i \in V \text{ and any } c_i \in S_i.$$

注意，NE不一定是全局最优解。尤其对于NP难问题，在许多情况下，帕累托最优解已足够令人满意。

定义 2 （帕累托最优解）。给定一个博弈 $\Gamma = (V, \{S_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^n)$，如果对于所有索引 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$C'(\geq u_i)\ C(u_i)$ 均成立，并且存在一个索引 $j \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $C'(\ u_j)\ C(\ > u_j)$，则称策略组合 $C' = (c_1', \ldots, c_n')$严格支配策略组合 $C = (c_1, \ldots, c_n)$。如果不存在严格支配策略组合 $C^* = (c_1^*, \ldots, c_n^*)$ 的策略组合，则称其为帕累托最优解 C^*。

定义 3 （罗马支配函数（RDF））。给定一个图 $G = (V, E)$，函数 $f\colon V(G) \to \{0, 1, 2\}$ 是 G 的一个 RDF，当且仅当每个满足 $f(v) = 0$ 的顶点 $v \in V$ 都与一个满足 $f(u) = 2$的顶点 $u \in V$ 相邻。

定义 4 （最小罗马支配问题（MinRD））。给定一个图 $G = (V, E)$，对于任意 RDF f，令 $\gamma_R(G, f) = \sum_{v \in V} f(v)$ 为 RDF f 的权重。MinRD 的目标是在所有 RDF f中使 $\gamma_R(G, f)$ 最小。

用 S_{RDF} 表示 RDF 的集合，并根据其性质定义以下三种 RDF。

定义 5 （全局最小 Roman 支配函数（G-RDF））。图 G的 RDF f^* 是 G-RDF，当且仅当 $\gamma_R(G, f^*) = \min_{f \in S_{\mathrm{RDF}}} \gamma_R(G, f)$。令 $S_{\mathrm{G\text{-}RDF}}$ 为 G-RDF 的集合。

定义 6 （极小 Roman 支配函数（M-RDF））。图 G 的 RDF f 是 M-RDF，当且仅当不存在图 G 的 RDF f'满足：对于某个 $v_i \in V$，$f'(v_i) = f(v_i) - 1$，且对于任意 $j \neq i$，$f'(v_j) = f(v_j)$。令 $S_{\mathrm{M\text{-}RDF}}$ 为 M-RDF 的集合。

定义 7 （强极小罗马支配函数（S-RDF））。若某个 M-RDF f 不存在满足 $\gamma_R(G, f') < \gamma_R(G, f)$ 的 RDF f'，使得对某个 $v_i \in V$ 有 $f'(v_i) = 2$，且对任意满足 $f(v_j) = 1$ 的 $v_j \in N_i$，$f'(v_j) = 0$，并且对任意其他 v_k，$f'(v_k) = f(v_k)$，则该 M-RDF f 为 S-RDF。令 $S_{\mathrm{S\text{-}RDF}}$为 S-RDF 的集合。

图1展示了四种不同类型的 RDF。为便于表述，若 $f(v_i)$ =分别为 0、1 和 2，则称顶点 v_i 为白色、灰色或黑色。在图1中，$f(1)$ $f(2)$ $f^{(3)}$和 $f(4)$ 都是 RDF，因为每个白色顶点都与至少一个黑色顶点相邻。但 $f^{(1)}$不是 M-RDF，因为按以下方式定义的 f'也是 RDF：$f'(v_3) = f(1)(v_3) - 1$，以及对任意 $v_j \neq v_3$，$f'(v_j) = f(1)(v_j)$。可以验证，$f(2)$ $f^{(3)}$ 和 $f(4)$ 都是 M-RDF。例如，在图1（b）中，将一个灰色顶点 v_i 与 $i \in \{1, 2, 5, 6\}$ 改为白色顶点后，就没有黑色顶点与 v_i相邻；将一个黑色顶点 v_7（或 v_8）改为灰色顶点后，就没有黑色顶点与 v_3（或 v_4）相邻。在这两种情况下，f' 都不再是 RDF。注意，$f^{(2)}$ 不是 S-RDF，因为按以下方式定义的 f'是一个 RDF，且 $\gamma_R(G, f') = 7 < 8 = \gamma_R(G, f^{(2)})$：对 $j = 2$，5，$f'(v_1) = 2$，$f'(v_j) = 0$；对 $k = 3$，4，6，7，8，$f'(v_k) = f(v_k)$。可以验证，$f(3)$和 $f^{(4)}$都是 S-RDF。此外，$f(4)$是 G-RDF，而 $f^{(3)}$ 不是。

为便于阅读，表 I 总结了主要记号。

B. 罗马支配博弈

本小节介绍 RDG。给定一个图$G = (V,\ E)$，每个顶点 $v \in V$都可以视为一个玩家。对于玩家 v_i，其策略 $c_i = 0$，1 或 2 分别表示 $f(v_i)$ =0，1 或 2。

需要指出的是，RDF具有单调性：如果 C 是对应于某个RDF的配置，且 C' 是另一个满足 $C' \geq C$ 的配置（即对每个 i，$c_i' \geq c_i$），那么 C' 也对应于一个RDF；而且，如果 C 不是RDF，那么 $C' \leq C$也不是RDF。

假设所有参与者都是自私、聪明且理性的，那么他们在追求自身利益最大化时，不会考虑其他参与者的利益。博弈的关键任务是为参与者设计一个良好的效用函数，使参与者通过合作与竞争达到稳定且相当理想的社会状态，而该状态的优劣由以下标准衡量。

(*i*) 自稳定性：从任意初始状态出发，博弈最终可以达到一个纳什均衡，该均衡对应一个 RDF。

(*ii*) 解的质量：与纳什均衡对应的 RDF 的权重应当足够小。由于即使使用集中式算法，计算 G-RDF 也是 NP难，因此无法指望在合理时间内求得 MinRD 的最小解。另一项基本要求是，计算出的 RDF 应当是极小的，也就是说，将任意一个顶点 v_i 的 f 值减少一位后，$f(v_i) \neq 0$ 将不再是 RDF。此外，还希望最大化社会福利，而帕累托最优性是衡量这一点的重要指标。

(*iii*) 高效执行：博弈达到纳什均衡所需的时间应当是输入规模的多项式级。参与者使用的信息应当是局部的。此外，分布式算法更受青睐。

对于策略组合 $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$，我们将 v_i 的效用函数定义为

$$u_i(C) = g_i(C) + q_i(C), \tag{1}$$

with

$$g_i(C) = -\lambda_1 c_i^2, \tag{2}$$

$$q_i(C) = -\lambda_2 \sum_{v_j \in \bar{N}_i} (2 - c_j) m_j(C), \tag{3}$$

其中

$$m_j(C) = \begin{cases} 1, & \bar{N}_j^2(C) = \emptyset, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

且 λ_1，λ_2 是满足 $0 < \frac{2}{3}\lambda_2 < \lambda_1 < \frac{3}{4}\lambda_2$ 的常数。

接下来，对于策略组合 C，若存在一个顶点 $v_j \in N_i$ 满足 $c_j = 2$，则称顶点 v_i 被强支配；否则称 v_i 为自由。注意，玩家

$$v_i \text{ is strongly dominated if and only if } m_i(C) = 0. \tag{5}$$

可以看出，黑色顶点被其自身强支配。若一个顶点是黑色、灰色或被强支配的白色顶点，则称其为受支配。注意，C 是一个 RDF，当且仅当所有顶点都受支配。

此外，假设 G 没有孤立顶点。事实上，若 v_i 是孤立顶点，为使 C 成为 M-RDF，v_i必须为灰色。从博弈的角度来看，v_i 的最佳响应也为灰色，因为 $u_i(c_i = 0, C_{-i}) = -2\lambda_2$，$u_i(c_i = 1, C_{-i}) = -\lambda_1 - \lambda_2$ 且 $u_i(c_i = 2, C_{-i}) = -4\lambda_1$。因此，后续讨论中将忽略这种平凡情况。

III. 理论分析

本节将分析上一节所设计 RDG 的理论性质。以下用 C 同时表示一个策略组合 $(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma$ 以及对应的函数 f，其中 $f(v_i) = c_i$，$(i = 1, \ldots, n)$。假设玩家只有在能够严格获益时才愿意改变策略，也就是说，只有当改变当前策略后其效用严格增大时才会改变。

A. 纳什均衡

纳什均衡 [33] 是博弈中的稳定状态。本小节将分析 RDG 中纳什均衡的性质。

观察 **1**。根据 $m_j(C)$ 的定义，(a) 将 v_i 的策略在 *0* 和 *1* 之间改变，不会影响任何 v_j 对应的 $m_j(C)$；(b) 将灰色顶点改为白色，不会使其他顶点变为强支配或自由。

引理 **1**。对于任何满足 $c_i = 2$ 的玩家 v_i，在策略组合下 C, $u_i(C) = -4\lambda_1$.

证明。每个玩家 $v_j \in N_i$ 都受到强支配，因为$c_i = 2$，因此根据观察（5），$m_j(C) = 0$。由效用函数的定义可得该引理。 □

引理 **2**。在任何策略组合 C 中，对于任何玩家 $v_i \in V$，$u_i(c_i = 1, C_{-i}) > u_i(c_i' = 0, C_{-i})$ 当且仅当 $m_i(C) = 1$。

证明。令 $C = (c_i = 1, C_{-i})$ 和 $C' = (c_i' = 0, C_{-i})$。则

$$u_i(C) = -\lambda_1 - \lambda_2 m_i(C) - \lambda_2 \sum_{v_j \in N_i} (2 - c_j) m_j(C),$$

$$u_i(C') = -2\lambda_2 m_i(C') - \lambda_2 \sum_{v_j \in N_i} (2 - c_j) m_j(C').$$

根据观察 1（a），$m_j(C) = m_j(C')$，$\forall v_j \in V$。因此，$u_i(C) - u_i(C') = \lambda_2 m_i(C) - \lambda_1 > 0$ 当且仅当 $m_i(C) = 1$，由 $\lambda_2 > \lambda_1$ 得出。 □

定理 **1.** *RDG* 的每个纳什均衡都是一个 *RDF*。

证明。假设结论不成立。设 C 是一个不是 RDF 的纳什均衡。于是，$\exists v_i \in V$ 满足 $c_i = 0$，且 $N_i^2(C) = \emptyset$。根据 $m_i(C)$的定义可知，$m_i(C) = 1$。令 C' 为 $(c_i' = 1, C_{-i})$。根据引理2，$u_i(c_i' = 1, C_{-i}) > u_i(c_i = 0, C_{-i})$。这与 C 是纳什均衡相矛盾。因此，C 是一个 RDF。 □

定理 **2**。每个 *RDG* 的纳什均衡都是 *M-RDF*。

证明。假设 C 是一个纳什均衡，但不是 M-RDF。根据定理 1，只需考察 C的极小性。假设 $v_i \in V$是一个顶点，满足 $c_i \geq 1$，且此时 $C' = (c_i' = c_i - 1, C_{-i})$ 仍然是一个 RDF。需要考虑两种情形。

情形 1：$c_i = 1$

在这种情况下，假设 $C' = (c_i' = 0, C_{-i})$ 是一个 RDF，这意味着 $N_i^2(C') = N_i^2(C) \neq \emptyset$，因此 $m_i(C') = m_i(C) = 0$。根据引理2，$u_i(c_i' = 0, C_{-i}) > u_i(c_i = 1, C_{-i})$，这与 C 是纳什均衡的假设矛盾。

Case 2: $c_i = 2$



(a) (b)

图2. 一些“坏”子结构（a）至少有两个灰色邻居的灰色顶点；（b）至少有三个灰色邻居的白色顶点。

在这种情况下，$C'=(c'_i=1,C_{-i})$ 也是一个 RDF。如果 $N_i^1(C)\neq\emptyset$，令 $v_j\in N_i^1(C)$。那么根据观察 1（b），$(c'_j=0,C_{-j})$ 仍然是一个 RDF。这种情况可归约为情形 1（其中 v_j 扮演 v_i 的角色）。因此，假设 $N_i^1(C)=\emptyset$。假设 $C'=(c'_i=1,C_{-i})$ 是一个 RDF，这意味着对于任意 $v_j\in N_i^0(C')$，都存在一个 $v_k\in N_j^2(C')$，因此根据观察（5），$m_j(C')=0$。于是，$u_i(c'_i=1,C_{-i})=-\lambda_1-\lambda_2 m_i(C')\geq-\lambda_1-\lambda_2$（注意，$m_i(C')\leq 1$）。由于根据引理 1，$u_i(c_i=2,C_{-i})=-4\lambda_1$，因此根据 $0<\frac{2}{3}\lambda_2<\lambda_1$ 的假设，$u_i(c'_i=1,C_{-i})-u_i(c_i=2,C_{-i})\geq 3\lambda_1-\lambda_2>\lambda_2>0$，这与 C 是纳什均衡相矛盾。 □

推论 **1.** 在任意纳什均衡 C 中，以下三个条件均成立：

(i) 没有灰色顶点与黑色顶点相邻，(ii) 任意白色顶点 v_i 至少与一个黑色顶点相邻，(iii) 若顶点 v_i 为灰色，则 $m_i(C)=1$。

证明。性质（i）由 C 的极小性和观察 1（b）得出。事实上，若存在一个与黑色顶点 v_j 相邻的灰色顶点 v_i，则 $C'=(c'_i=0,C_{-i})$ 也是一个 RDF，这与 C 的极小性矛盾。

性质（ii）直接由 RDF 的定义和定理 1 得出。

性质（iii）由性质（i）推出，因为对于任意灰色顶点 v_i，$N_i^2(C)=\emptyset$，因此根据 $m_j(C)$ 的定义，$m_i(C)=1$。 □

定理**3**。*RDG* 的每个纳什均衡都是 *S-RDF*。

证明。假设 C 是一个纳什均衡。根据定理2，C 是一个 M-RDF。因此，如果 C 不是 S-RDF，那么 $\exists$ 存在一个 RDF C'，满足 $\gamma_R(G,C')<\gamma_R(G,C)$，且对于某个 $v_i\in V$ 有 $c'_i=2$，对于任意 $v_j\in N_i$ 满足 $c_j=1$时有 $c'_j=0$，而对于其他 $v_k\notin N_i$则有 $c'_k=c_k$。

如果 $c_i=2$，那么根据推论1（i），N_i 中没有顶点的值为1。因此，$C'=C$，这与 $\gamma_R(G,C')<\gamma_R(G,C)$ 矛盾。

如果 $c_i=1$，那么根据 $\gamma_R(G,C')<\gamma_R(G,C)$，至少存在两个顶点 v_j，$v_k\in N_i$ 满足 $c_j=c_k=1$ 且 $c'_j=c'_k=0$。根据推论1（iii），$m_i(C)=m_j(C)=m_k(C)=1$。于是 $u_i(C)\leq-\lambda_1-3\lambda_2$。考虑一个策略组合 $C''=(c''_i=2,C_{-i})$。根据引理 1，$u_i(C'')=-4\lambda_1$。由此可得$u_i(C'')-u_i(C)\geq 3\lambda_2-3\lambda_1>0$，这与 C 是纳什均衡矛盾。

若 $c_i=0$，则 $\gamma_R(G,C')<\gamma_R(G,C)$ 意味着至少存在三个顶点 v_j，v_k，$v_l\in N_i$，满足 $c_j=c_k=c_l=1$ 且 $c'_j=c'_k=c'_l=0$。与上述情况类似，$m_j(C)=m_k(C)=m_l(C)=1$，因此 $u_i(C)\leq-3\lambda_2$，而 $C''=(c''_i=2,C_{-i})$ 有 $u_i(C'')=-4\lambda_1$。因此 $u_i(C'')-u_i(C)\geq 3\lambda_2-4\lambda_1>0$，这与 C 是纳什均衡相矛盾。 □

在上述证明中可以看出，图2中的两个子结构不会出现在纳什均衡中。

推论 **2**。*RDG* 的纳什均衡都不包含图*2*所示的两种“坏”子结构。

事实上，任何 S-RDF 中都不会出现这两种子结构。

引理 **3**。对于任意 *S-RDF* C，图*2*所示的两种子结构都不会出现。

证明。定义

$$C'=\begin{cases}2, & \text{for } v_1,\\ 0, & \text{for } v_j\in N_1\wedge(c_j\neq 2),\\ c_j, & \text{for other } v_j.\end{cases}$$

那么，对于图2中的两种情况，可以验证 C' 也是一个 RDF，且 $\gamma_R(G,C')\leq\gamma_R(G,C)-1<\gamma_R(G,C)$，由 S-RDF 的定义即可得出引理。 □

根据定理3，$S_{\text{NE}}\subseteq S_{\text{S-RDF}}$，其中 S_{NE} 是 RDG 的纳什均衡集合。接下来，可以证明 $S_{\text{G-RDF}}\subseteq S_{\text{NE}}$。这是引理11的结果（在研究博弈的算法方面时）。下面给出存在性证明。此处给出该证明是为了在理论上完整起见。为此，首先建立一个引理。

引理 **4.** 在任何 *S-RDF* 中，都不存在愿意单方面提高其 c_i-值的玩家 $v_i\in V$。

证明。设 C 是一个 S-RDF。若 $c_i=2$，则 v_i 无法提高其值。

假设 v_i 将其值从 $c_i=1$ 提高到 $c'_i=2$。由于 C 是一个 S-RDF，因此每个白色顶点都至少与一个黑色顶点相邻。所以，对于任何满足$c_j=0$的 v_j，$m_j(C)=0$。因此，$u_i(C)=-\lambda_1-\lambda_2\sum_{v_j\in\bar{N}_i^1(C)}(2-c_j)m_j(C)$。根据引理3，至多有一个灰色顶点 $v_k\in N_i^1(C)$。因此，$u_i(C)\geq-\lambda_1-2\lambda_2$。由于根据引理 1，$u_i(c'_i=2,C_{-i})=-4\lambda_1$，所以 $u_i(C)-u_i(c'_i=2,C_{-i})\geq 3\lambda_1-2\lambda_2>0$。

假设 v_i 将其值从 $c_i=0$ 增加到 $c'_i=1$。由于 C 是一个 S-RDF，$N_i^2(C)\neq\emptyset$，因此 $m_i(C)=0$。根据引理2，$u_i(C)>u_i(c'_i=1,C_{-i})$。

假设 v_i 将其值从 $c_i=0$ 增加到 $c'_i=2$。由于 C 是一个 S-RDF，对于任意满足 $c_j=0$的 v_j，都有 $m_j(C)=0$。根据引理3，$N_i^1(C)$中至多有两个灰色顶点。

因此，$u_i(C) \geq -2\lambda_2$。根据引理 1，由于 $u_i(c_i'=2, C_{-i}) = -4\lambda_1$，$u_i(C) - u_i(c_i'=2, C_{-i}) \geq 4\lambda_1 - 2\lambda_2 > 0$。

无论如何，v_i 都不愿意将其策略从c_i 提高到 c_i'。□

注意，引理4意味着在 S-RDF 中，没有玩家愿意“提高”取值，但仍可能“降低”取值。

下一个引理给出了 G-RDF 的一些性质，这些性质将用于证明任何 G-RDF 都是纳什均衡。对于策略组合 C，若 v_j 是由 v_i 唯一强支配的，则$_v_i$ 是 N_j 中唯一取值为 2 的顶点。注意，此定义允许 v_i 就是其自身。

引理5。设 C 是一个G-RDF，则以下两个性质成立：

（i）没有灰色顶点与黑色顶点相邻。（ii）对于任意黑色顶点 v_i，$_N_i$ 中至少有两个顶点被 v_i唯一强支配。

证明。假设 C 中有一个灰色顶点 v_i 与一个黑色顶点相邻。那么，如果将 v_i 的状态从灰色改为白色，它仍然是一个受支配顶点。根据观察 1（b），其他顶点（无论是否受支配）的状态不会因这一变化而受到影响。由于 C中的所有顶点都受支配，因此 $C' = (c_i'=0, C_{-i})$ 中的所有顶点也都受支配。然而，此时 C' 是一个权重小于 C的 RDF，这与 C 是 G-RDF 矛盾。性质（i）得证。

考虑一个黑色顶点 v_i。根据（i），v_i的所有邻居要么是黑色顶点，要么是白色顶点。由于已假设 G没有孤立顶点，因此有 $N_i \neq \emptyset$。如果 v_i 的所有邻居都是黑色顶点，那么 $C' = (c_i'=0, C_{-i})$ 是一个 RDF，且$\gamma_R(G, C') = \gamma_R(G, C) - 2$，这与 C是 G-RDF 矛盾。因此，$|N_i^0(C)| \geq 1$。如果 $N_i^0(C)$ 中的每个顶点都有另一个黑色邻居，那么 $C' = (c_i'=1, C_{-i})$ 是一个 RDF，且$\gamma_R(G, C') = \gamma_R(G, C) - 1$，同样矛盾。因此，$N_i^0(C)$ 中至少有一个顶点，记作 v_j，被 v_i唯一强支配。如果 v_i 的所有邻居都是白色顶点，那么v_i 是一个被自身强支配的顶点，性质（ii）成立。接下来，假设 v_i 有一个黑色邻居。如果v_j 是 $N_i^0(C)$ 中唯一被 v_i唯一强支配的顶点，那么 $C' = (c_i'=0, c_j'=1, C_{-\{i,j\}})$ 是一个 RDF，且 $\gamma_R(G, C') = \gamma_R(G, C) - 1$，再次矛盾。因此，在这种情况下，$N_i^0(C)$ 中至少有两个顶点被 v_i唯一强支配。性质（ii）得证。□

现在可以证明 $S_{\text{G-RDF}} \subseteq S_{\text{NE}}$了。

定理 4。在*RDG*中，每个*G-RDF*都是纳什均衡。

证明。假设 C 是一个G-RDF。由于G-RDF也是S-RDF，根据引理4，没有玩家愿意增加其 c值。因此，要证明 C 是纳什均衡，只需证明没有玩家 v_i 愿意将其 c值从 c_i 降低到 $c_i' < c_i$。

若 $c_i = 2$，则 $u_i(C) = -4\lambda_1$，且根据引理5（ii），至少有两个顶点 v_j，$v_k \in N_i$ 被 v_i唯一强支配。将 $c_i = 2$ 缩减为 $c_i' = 1$ 或$c_i' = 0$，会得到一个策略组合 C'。注意，在 C'中，v_j 和 v_k不再被强支配，因此 $m_j(C') = m_k(C') = 1$。若 $v_i \in \{v_j, v_k\}$，则另一个顶点位于 $\{v_j, v_k\}$根据引理5（i）为白色，因此 $u_i(c_i'=1, C_{-i}) \leq -\lambda_1 - 3\lambda_2$，$u_i(c_i'=0, C_{-i}) \leq -4\lambda_2$。若 $v_i \notin \{v_j, v_k\}$，则 v_j，v_k 均为白色，因此 $u_i(C') \leq -4\lambda_2$。无论如何，$u_i(C) > u_i(C')$，且 v_i 不愿改变。

如果 $c_i = 1$，那么根据引理5（i），$\bar{N}_i^2(C) = \emptyset$。由此可得 $m_i(C) = 1$。因此，根据引理2，$u_i(C) > u_i(c_i'=0, C_{-i})$，从而 v_i 不愿意改变。□

根据定义3、6和7，$S_{\text{S-RDF}} \subseteq S_{\text{M-RDF}} \subseteq S_{\text{RDF}}$。结合定理3和定理4，可得到以下推论。

推论 3。在一个 *RDG* 中，$S_{\text{G-RDF}} \subseteq S_{\text{NE}} \subseteq S_{\text{S-RDF}} \subseteq S_{\text{M-RDF}} \subseteq S_{\text{RDF}}$.

这些集合之间的关系如图3所示。

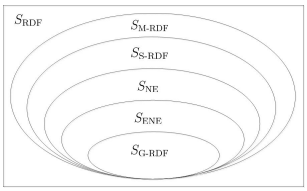


图3。不同类型 RDF 之间的关系，其中 S_{ENE} 是通过第 IV 节中定义的算法 3 得到的演化纳什均衡集合

从图1可以看出，$S_{\text{S-RDF}}$ 可能是 $S_{\text{M-RDF}}$ 的真子类。接下来将说明这种差异可能非常大。为此，定义参数 ρ_n 如下，用以衡量差异的大小。

定义 8。设 $\mathbb{G}$ 为所有具有 n 个顶点的图的集合。定义

$$\rho_n = \max_{G \in \mathbb{G}} \frac{\min_{C' \in S_{\text{M-RDF}} \setminus S_{\text{S-RDF}}} \gamma_R(G, C')}{\max_{C'' \in S_{\text{S-RDF}}} \gamma_R(G, C'')}.$$

考虑图4中的例子。可以验证 $S_{\text{M-RDF}} \setminus S_{\text{S-RDF}} = \{C_1, C_2\}$，且 $S_{\text{S-RDF}} = \{C_3\}$。因此，$\rho_n \geq \frac{n}{2}$。

已证明 $S_{\text{NE}} \subseteq S_{\text{S-RDF}}$。图5中的例子表明，这种包含关系可能是严格的。事实上，图5中的策略组合 C（a）满足 $C \in S_{\text{S-RDF}} \setminus S_{\text{NE}}$，因为 $u_2(C) = -4\lambda_1 < -2\lambda_2 = u_2(c_2'=0, C_{-2})$。注意，$C'$ 既是纳什均衡，也是 S-RDF。

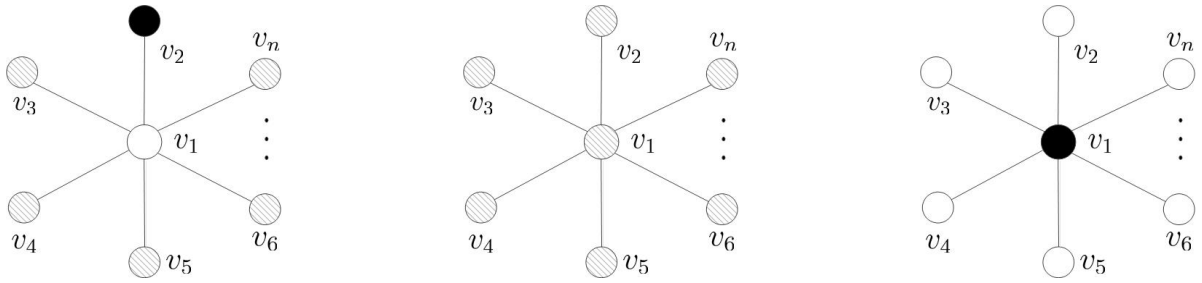
B. 势博弈

本小节将证明，所提出的 RDG 是一个精确势博弈，因此纳什均衡存在。此外，如果允许参与者逐一确定策略，则经过线性交互轮次即可达到一个纳什均衡。

定义 9（精确势博弈 [34]）。若存在势函数 $\pi: \Sigma \mapsto \mathbb{R}$，使得对于任意玩家 $v_i \in V$以及任意 c_i，$c_i' \in S_i$，$C_{-i} \in S_{-i}$，下列等式成立，则称 $\Gamma = (V; \{S_i\}_{i=1}^n; \{u_i\}_{i=1}^n)$ 为一个精确势博弈：

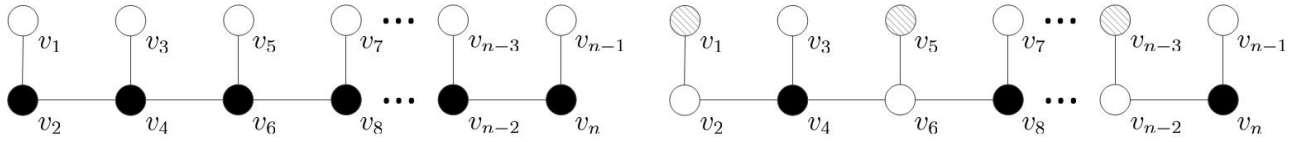
$$\pi(c_i, C_{-i}) - \pi(c_i', C_{-i}) = u_i(c_i, C_{-i}) - u_i(c_i', C_{-i}).$$

引理 6. 所提出的 *RDG* 是一个精确势博弈。



(a) C_1 (b) C_2 (c) C_3

图4. 一个示例，说明 $S_{\text{M-RDF}} \setminus S_{\text{S-RDF}}$ 与 $S_{\text{S-RDF}}$ 之间的差异可能非常大。



(a) $C \in S_{\text{S-RDF}} \setminus S_{\text{NE}}$ 与 $\gamma_R(G, C) = n$ (b) $C' \in S_{\text{S-RDF}} \cap S_{\text{NE}}$, $\gamma_R(G, C') = \frac{3}{4}n$

图5. 一个示例，表明 $S_{\text{S-RDF}} \setminus S_{\text{NE}} \neq \emptyset$。

证明。下面将证明，以下函数是一个势函数：

$$\pi(C) = -\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} c_j^2 - \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} (2 - c_j) m_j(C).$$

将 $\pi(C)$ 的两项分别记为 $\pi^{(1)}(C)$ 和 $\pi^{(2)}(C)$。

设 $C = (c_i, C_{-i})$ 和 $C' = (c_i', C_{-i})$ 分别为某个 v_i 将其策略从 c_i 改为 c_i'之前和之后的两个策略组合。可以验证，

$$\pi^{(1)}(C) - \pi^{(1)}(C') = \lambda_1(c_i'^2 - c_i^2) = g_i(C) - g_i(C'). \quad (6)$$

注意，改变 v_i 的状态不会影响 N_i 之外那些顶点的 m-值，因此有

$$\begin{aligned} \pi^{(2)}(C) - \pi^{(2)}(C') &= -\lambda_2 \sum_{v_j \in \bar{N}_i} (2 - c_j) m_j(C) \\ &\quad + \lambda_2 \sum_{v_j \in \bar{N}_i} (2 - c_j') m_j(C') \\ &= q_i(C) - q_i(C'), \end{aligned} \quad (7)$$

结合 (6) 和 (7)，得到 $\pi(C) - \pi(C') = u_i(C) - u_i(C')$。证明完毕。 □

根据引理 6，纳什均衡存在。此外，正如下面的定理所示，在异步交互的线性步数内即可达到一个纳什均衡；其中“异步”是指参与者逐一确定自己的策略，因此每一轮中，尽管有许多参与者愿意改变策略，实际上只有一人采取行动。

定理 5. 从任意初始状态出发，*RDG* 达到纳什均衡所需的迭代次数至多为 $\frac{(4\lambda_1+2\lambda_2)n}{\min\{3\lambda_1-2\lambda_2, -4\lambda_1+3\lambda_2\}} = O(n)$。

证明。只要 C 不是纳什均衡，就存在一位玩家 v_i 愿意将其策略从 c_i 改为 c_i'。记 $\Delta u_i = u_i(C') - u_i(C)$，其中 $C' = (c_i', C_{-i})$。因为只有当 v_i 能够获得严格更好的结果时，他才愿意改变策略。因此，$\Delta u_i > 0$。于是，根据引理 6，$\pi(C') - \pi(C) = u_i(C') - u_i(C) > 0$，也就是说，在每一轮交互中，势函数$\pi$ 都严格递增。为了证明该定理，需要估计 π 的取值范围，以及 Δu_i的正下界（也就是说，在$\Delta u_i > 0$的条件下，Δu_i 的下界）。

显然，$-(4\lambda_1 + 2\lambda_2)n \leq \pi(C) \leq 0$。在不同的 c_i 和 c_i'情况下，Δu_i的正下界如表 II 所示。例如，当 $c_i = 2$和 $c_i' = 0$时，根据引理

1 u_i c_i' $= 0$ C_{-i} $= -\lambda_2 \sum_{v_j \in \bar{N}_i} 2 -$ 和 (,) c_j m_j C $4\lambda_1 - 2\lambda_2 > 0$ $4\lambda_1 - 3\lambda_2 < 0$ ( ) ( ), $u_i(C) = -4\lambda_1$。由于 和 , 在此情况下, $u_i(c_i' = 0, C_{-i})$ $- u_i(C)$ 的正 值必定为 $\geq 4\lambda_1 - 2\lambda_2$。对所有情况应用这一论证，即可得到表 II 中的估计。随后可以验证，min $\{3\lambda_1 - 2\lambda_2, -4\lambda_1 + 3\lambda_2\}$ 是 Δu_i的正下界。因此，迭代次数至多为 $\frac{(4\lambda_1+2\lambda_2)n}{\min\{3\lambda_1-2\lambda_2, -4\lambda_1+3\lambda_2\}}$，即 $O(n)$，因为 λ_1和 λ_2是满足 $\frac{2}{3}\lambda_2 < \lambda_1 < \frac{3}{4}\lambda_2$的常数。 □

表 II Δu_i正下界的估计。

c_i	c_i'	$\min\{\Delta u_i, \Delta u_i > 0\}$
2	0	$4\lambda_1 - 2\lambda_2$
2	1	$3\lambda_1 - 2\lambda_2$
1	0	λ_1
0	1	$-\lambda_1 + \lambda_2$
1	2	$-3\lambda_1 + 3\lambda_2$
0	2	$-4\lambda_1 + 3\lambda_2$

C. 帕累托最优性

在上述小节中，讨论了纳什均衡的存在性以及与纳什均衡对应的 RDF 的质量。在本小节中，将从社会福利的角度进一步分析纳什均衡，并说明纳什均衡具有帕累托最优性。

定理 6. *RDG* 的每个纳什均衡都是帕累托最优解。

证明。 假设 $C=(c_1,\dots,c_n)$ 是一个纳什均衡，但不是帕累托最优解。那么，存在一个策略组合 $C'=(c'_1\dots,c'_n)\neq C$，使得

$$\begin{aligned} &u_i(C')\geq u_i(C) \text{ for any } i\in\{1,...,n\}, \text{ and} \\ &\exists j\in\{1,...,n\} \text{ with } u_j(C')>u_j(C). \end{aligned} \tag{8}$$

由于 C 是一个纳什均衡，根据推论1和推论 2，对于任意 $i\in\{1,\dots,n\}$，都有

$$u_i(c_i=1,C_{-i})=-\lambda_1-\lambda_2 \text{ or } -\lambda_1-2\lambda_2, \text{ and} \tag{9}$$

$$u_i(c_i=0,C_{-i})=0,\ -\lambda_2, \text{ or } -2\lambda_2. \tag{10}$$

断言 1. 对于任意满足 $c_i\neq 2$ 的 v_i，都有 $c'_i\neq 2$

若 $c'_i=2$，则根据引理 1，$u_i(C')=-4\lambda_1$。由 (9) 和 (10)，$u_i(C)\geq-\lambda_1-2\lambda_2$。因此，$u_i(C)>u_i(C')$，这与条件 (8) 矛盾。

断言 2. 对于任意满足 $c_i=1$ 的 v_i，都有 $c'_i=1$。

根据断言 1，有 $c'_i=1$ 或 0。若该断言不成立，则 $c'_i=0$。考虑 (9) 中所示的 $u_i(C)$ 的两个可能取值。

若 $u_i(C)=-\lambda_1-\lambda_2$，则根据推论1，在策略组合 C中，v_i 是 N_i 中的唯一灰色顶点，且 N_i中的所有顶点都是白色。由条件 (8)，$u_i(C')\geq-\lambda_1-\lambda_2$。因此，必有 $N_i^2(C')\neq\emptyset$，否则 $u_i(C')\leq-2\lambda_2 m_i(C')=-2\lambda_2<-\lambda_1-\lambda_2$。令 v_k 为 $N_i^2(C')$ 中的一个顶点。则根据引理 1，$u_k(C')=-4\lambda_1$。由于在 C 中 v_k 是白色的，由 (10) 可知，$u_k(C)\geq-2\lambda_2$。然而，这样一来，$u_k(C)>u_k(C')$，与条件 (8) 矛盾。

若 $u_i(C)=-\lambda_1-2\lambda_2$，则由推论 2 可知，$N_i$ 中恰有两个顶点 v_i 和 v_l 在 C中为灰色，而 $N_i\cup N_l$ 中的其他顶点在 C中均为白色。由条件 (8)，有 $u_i(C')\geq-\lambda_1-2\lambda_2$。于是，必定存在 $v_k\in N_i^2(C')\cup N_l^2(C')$，否则 $u_i(C')\leq-2\lambda_2 m_i(C')-\lambda_2 m_l(C')=-3\lambda_2<u_i(C)$。若 $v_k=v_l$，则v_k 在 C中为灰色，且 $u_k(C)=-\lambda_1-2\lambda_2$。若 $v_k\neq v_l$，则 v_k 在 C 中为白色，且由 (10) 可得 $u_k(C)\geq-\lambda_2(m_i(C)+m_l(C))=-2\lambda_2$。无论哪种情况，均有 $u_k(C)>u_k(C')=-4\lambda_1$，矛盾。

断言3。 对于任意满足 $c_i=0$ 的 v_i，都有 $c'_i=0$

若该断言不成立，则根据断言 1，有 $c'_i=1$。根据推论1 (ii)，有 $u_i(C)=-|N_i^1(C)|\lambda_2$。对于任意灰色顶点 $v_k\in N_i^1(C)$，根据断言 2，v_k 在 C' 中也为灰色。由于 C 是纳什均衡，根据推论1 (i)，$N_k^2(C)=\emptyset$，因此根据断言 1，$N_k^2(C')=\emptyset$。于是 $m_k(C')=1$，因此 $u_i(C')\leq-\lambda_1-|N_i^1(C)|\lambda_2$。因此，$u_i(C')-u_i(C)\leq-\lambda_1<0$，矛盾。

断言4。 对于任意满足 $c_i=2$的 v_i，都有 $c'_i=2$

假设 $c'_i\neq 2$。根据定理2，C 是一个 M-RDF，因此策略组合 $(c'_i\neq 2,\ C_{-i})$ 不是 RDF。所以，那里存在一个白色顶点 $v_l\in N_i^0(C)$，满足 $N_l^2(c'_i\neq 2,\ C_{-i})=\emptyset$。根据断言 2 和断言3，任何满足 $k\neq i$ 的顶点 $v_k\in N_l$ 都有 $c'_k=c_k$。因此，$N_l^2(C')=\emptyset$，从而 $m_l(C')=1$，$u_l(C')=-2\lambda_2-\lambda_2\sum_{v_k\in N_l}(2-c_k)m_k(C')$，且 $u_l(C)=-\lambda_2\sum_{v_k\in N_l}(2-c_k)m_k(C)$。注意，$m_k(C)\leq m_k(C')$（如果 $m_k(C)=1$。因此，$\bar{N}_k^2(C)=\emptyset$，并且根据断言 2 和断言3，有 $\bar{N}_k^2(C')=\emptyset$，这意味着$m_k(C')=1$）。于是，$u_l(C')-u_l(C)\leq-2\lambda_2<0$，矛盾。

结合以上内容可得出矛盾，即 $C'=C$。

□

IV. 算法设计与分析

本节将介绍三种算法：基于博弈的异步算法（GAA）、基于博弈的同步算法（GSA）和增强型基于博弈的同步算法（EGSA）。GAA是对RDG的直接模拟。它经过 $O(n)$ 轮交互后收敛到一个纳什均衡，并且每个玩家的决策仅取决于其邻域中的局部信息。不过，GAA是一种顺序算法。GSA通过分布式实现博弈提高了GAA的效率，因此更适合由多智能体系统实现。EGSA进一步将受合作博弈启发的私人契约概念引入GSA。我们将证明EGSA能够获得比GSA更好的解。

A. 基于博弈的异步算法

GAA 的伪代码如算法 1 所示。它是对 RDG 的一种朴素模拟。根据效用函数的定义，每位玩家都可以在本地做出决策：假设每位玩家 v_j 存储了关于当前解 C 的 $SS_j=(c_j,m_j(C))$。那么，每位玩家 v_i 都可以根据 $\{SS_j\}_{v_j\in\bar{N}_i}$ 决定其最佳响应 $BR(v_i,\ C)$。在算法中，参数 $T=(4\lambda_1+2\lambda_2)\ n\ \min\{3\lambda_1-2\lambda_2,-4\lambda_1+3\lambda_2\}$。根据定理 5，至多经过这么多次迭代即可达到一个纳什均衡。

请注意，GAA 中的玩家按一定顺序做出决策。因此，GAA 是一种顺序算法。为了以分布式方式实现博弈，一个自然的想法是让玩家同时做出决策。然而，这种方法可能会引发混乱，导致算法无法收敛。考虑图 **??** 中的例子。假设当前策略组合为$C=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$。对于任意玩家 v_i，由于 $u_i(c'_i=2,\ C_{-i})=-4\lambda_1>-\lambda_1-5\lambda_2=u_i(c''_i=1,\ C_{-i})>-6\lambda_2=u_i(C)$，$v_i$ 的最佳响应是将 0 改为 2。如果所有玩家同时采取各自的最佳响应，那么下一个策略组合就是 $C'=(2,\ 2,\ 2,\ 2)$。此时，对于任意玩家 v_i，由于 $u_i(c'_i=0,\ C_{-i})=0>-\lambda_1=u_i(c''_i=1,\ C_{-i})>-4\lambda_1=u_i(C)$，其最佳响应是将 2 改为 0。同时采取行动会使策略组合回到 $C=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$。

为避免这种混乱，我们将同时进行的变更限制为由一组彼此独立的参与者执行，这引出了将在下一小节讨论的 GSA。

B. 基于博弈的同步算法

GSA 的伪代码见算法 2。参数 T 也是 $(4\lambda_1+2\lambda_2)\ n$ 最小 $\{3\lambda_1-2\lambda_2,-4\lambda_1+3\lambda_2\}$的，其依据

算法 1 基于博弈的异步算法（GAA）

输入： 一个初始策略组合 $C^{(0)}=(c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)})$

输出： 一个纳什均衡 C'

1: $C \leftarrow C^{(0)}$。
2: **对于** $t=1,2,\ldots,T$ **do**
3: **对于** $i=1,2,\ldots,n$ **执行**
4: 通过访问 SS_j，获取 $c_i' \leftarrow BR(v_i,C)$
5: **若** $u_i(c_i',C_{-i}) > u_i(c_i,C_{-i})$，**则**
6: $c_i \leftarrow c_i'$
7: **结束条件判断**
8: **结束循环**
9: **如果** $C=C^{(t-1)}$ **则**
10: 中断并转到第 15 行
11: **else**
12: $C^{(t)} \leftarrow C$
13: **结束如果**
14: **结束循环**
15: 输出 $C' \leftarrow C$

由引理 7 提供支持。对于当前的策略配置 C，将 $mu_i(C) = u_i(BR(v_i, C)_{-i}) - u_i(c_i, C_{-i})$ 记为玩家 v_i 的边际效用 。在每个迭代轮次中，所有参与者同时计算各自的边际效用，但并非所有边际效用为正的参与者都会采取行动。参与者 v_i 只有在以下情况下才会决定改变其策略

$$i = \arg\min\{j : v_j \in \bar{N}_{i,2} \text{ and } mu_j(C) > 0\}. \tag{11}$$

也就是说，只有当玩家 v_i 在 $N_{i,2}$ 中边际效用为正的参与者里标识符最小时，他才有优先权改变策略。

算法 2 基于博弈的同步算法（GSA）

输入： 一个初始策略组合 $C^{(0)}=(c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)})$

输出： 一个纳什均衡 C'

1: $C \leftarrow C^{(0)}$。
2: **对于** $t=1,2,\ldots,T$ **do**
3: **对于** 每个玩家 v_i（同时执行）**执行**
4: 通过访问 SS_j，为 $v_j \in N_i$ 获取 $c_i' \leftarrow BR(v_i, C)$
5: $mu_i \leftarrow u_i(c_i', C_{-i}) - u_i(c_i, C_{-i})$
6: **如果** v_i 满足方程 (11)，**则**
7: $c_i \leftarrow c_i'$
8: **结束如果**
9: **结束循环**
10: **如果** $C=C^{(t-1)}$，**则**
11: 中断并转到第 15 行
12: **else**
13: $C^{(t)} \leftarrow C$
14: **结束 if**
15: **结束 for**
16: 输出 $C' \leftarrow C$

以下观察表明，实际改变策略的参与者构成一个独立集。

观察 **2.** 假设 $\mathcal{I}$ 是在算法 *2* 的并行 *for* 循环的一轮中实际同时改变策略的参与者集合。那么，$\mathcal{I}$ 是一个独立集，具体来说：

$$\bar{N}_i \cap \bar{N}_j = \emptyset,\ \forall v_i, v_j \in \mathcal{I}.$$

事实上，如果 $\bar{N}_i \cap \bar{N}_j \neq \emptyset$，那么 $d(i,j) \leq 2$，因此 $v_i \in \bar{N}_{j,2}$ 并且 $v_j \in N_{i,2}$。根据（11）中的规则，对于 v_i 和 v_j，只有标识符较小的那个才能属于 $\mathcal{I}$。

直观而言，由于每个 v_i 只根据 $N_i(C)$ 作出决策，并且仅取决于 C_{-i}，如果 N_i 中没有其他参与者同时改变策略，那么 v_i 作出的决策对于改变后的策略组合仍然是其最佳响应。因此，允许独立集中的参与者同时改变策略，可以有效地消除相互影响。以下将进行更详细的分析。

引理 **7.** 设 C 为当前策略组合。经过算法 *2* 的并行 *for* 循环一轮后，新的策略组合为 $C'=(C'_{\mathcal{I}}, C_{-\mathcal{I}})$，其中 $\mathcal{I}$ 是本轮策略发生改变的参与者集合。那么

$$\pi(C') - \pi(C) = \sum_{v_i \in \mathcal{I}} (u_i(c_i', C_{-i}) - u_i(c_i, C_{-i})).$$

证明。设 $\mathcal{I}=\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t}\}$。根据观察 2，玩家集 V 可分解为若干互不相交的集合$V = \bar{N}_{i_1} \cup \bar{N}_{i_2} \cup \ldots \cup \bar{N}_{i_t} \cup V_r$的并，其中 $V_r = V \setminus \bigcup_{l=1}^{t} \bar{N}_{i_l}$。于是，势函数 $\pi(C)$ 和 $\pi(C')$ 可改写为

$$\begin{aligned}\pi(C) = &-\lambda_1 \sum_{v_i \in \mathcal{I}} c_i^2 - \lambda_2 \sum_{v_i \in \mathcal{I}} \sum_{v_j \in \bar{N}_i} (2-c_j) m_j(C) \\ &- \lambda_1 \sum_{v_i \notin \mathcal{I}} c_i^2 - \lambda_2 \sum_{v_j \in V_r} (2-c_j) m_j(C),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\pi(C') = &-\lambda_1 \sum_{v_i \in \mathcal{I}} c_i'^2 - \lambda_2 \sum_{v_i \in \mathcal{I}} \sum_{v_j \in \bar{N}_i} (2-c_j') m_j(C') \\ &- \lambda_1 \sum_{v_i \notin \mathcal{I}} c_i'^2 - \lambda_2 \sum_{v_j \in V_r} (2-c_j') m_j(C').\end{aligned}$$

注意，对于任意 $v_i \notin \mathcal{I}$，$c_i' = c_i$。对于任意 $v_i \in I$ 和任意 $v_j \in N_i$，根据 $\mathcal{I}$ 的独立性，v_i 是 N_j 中唯一一个 c 值发生变化的顶点。由于 m_j 的值由 N_j中的 c值决定，因此有 $m_j(C') = m_j(c_i', C_{-i})$。对于任意 $v_j \in V_r$，有 $N_j \cap \mathcal{I} = \emptyset$。所以 $m_j(C') = m_j(C)$。因此，$\pi(C')$ 可以写为

$$\begin{aligned}\pi(C') = &-\lambda_1 \sum_{v_i \in \mathcal{I}} c_i'^2 - \lambda_1 \sum_{v_i \notin \mathcal{I}} c_i^2 - \lambda_2 \sum_{v_j \in V_r} (2-c_j) m_j(C) \\ &- \lambda_2 \sum_{v_i \in \mathcal{I}} \left((2-c_i') m_i(c_i', C_{-i}) + \sum_{v_j \in N_i} (2-c_j) m_j(c_i', C_{-i}) \right).\end{aligned} \tag{13}$$

该引理由（13）减去（12）即可得出。 □

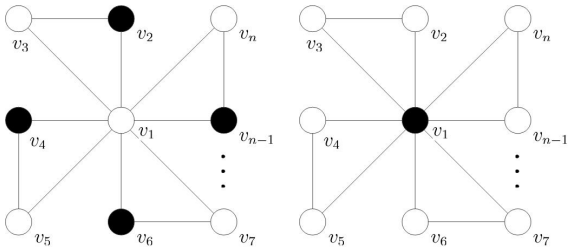
定理 7. 从任意初始策略组合 $C^{(0)}$ 出发，*GSA 2* 达到纳什均衡所需的轮次最多为 $(4\lambda_1+2\lambda_2)n\ \min\{3\lambda_1-2\lambda_2,-4\lambda_1+3\lambda_2\} = O(n)$。

证明。注意，只有当 $mu_i(C) > 0$ 时，玩家 v_i 才愿意改变其策略。根据引理 7，$\pi(C') - \pi(C) = \sum_{v_i\in\mathcal{I}}(u_i(c'_i, C_{-i}) - u_i(c_i, C_{-i})) \geq u_i(c'_i, C_{-i})\ u_i\ c_i\ C_{-i} = mu_i\ C$ (,) ()。其余证明与定理 5 的证明类似。

□

C. 增强型基于博弈的同步算法

虽然 GSA 能在多项式轮次的迭代中得到一个纳什均衡（NE），但根据推论3，它是一种 S-RDF；不过，纳什均衡与全局最优解之间的差距可能很大。考虑图 6 中的例子，其中 C 是一个纳什均衡（NE），且 $\gamma_R(G, C) = n-1$，而 C' 是一个 G-RDF，且 $\gamma_R(G, C') = 2$。



(a) $C, \gamma_R(G, C) = n-1$ (b) C'、$\gamma_R(G, C') = 2$

图 6. 一个示例，表明纳什均衡与 G-RDF 之间的差距可能非常大。

上述问题可能有两个原因：
(1) 玩家使用的信息范围较小；(2) 假设玩家是自私的，即玩家只最大化自身效用，而不考虑其他参与者。

为避免陷入图 6（a）所示的糟糕纳什均衡，玩家应当更加合作，也就是说，可以形成一个联盟，通过合作同时做出决策。大规模联盟难以处理，而局部联盟在性能和计算复杂性方面可能已足够理想。为此，提出了私人契约 这一概念，具体如下；该概念借鉴了合作博弈论中的契约思想。

定义 10（私人契约）。在当前策略组合C中，玩家 v_i 提出一项私人契约，建议联盟 $\tau_i \subseteq V$ 中的所有参与者 v_j（其中 $v_i \in \tau_i$）将其策略从 c_j 更改为 c'_j。如果 τ_i 中的所有参与者都同意该契约，则该私人契约有效，下一个策略组合变为（C'_{τ_i}，$C_{-\tau_i}$）。

下文将使用由 v_i $c'_i = 2$ $c'_j = 0$ $v_j \in$ 提出的私人契约 $\mathcal{A}$，该契约建议，对于任意，其中 $\tau_i\backslash\{v_i\}$ $\tau_i\backslash\{v_i\} = N_i^1\ C \cup \{v_j \in N_i^2\ C$ $m_{i\,j}\ C =$ () () :. () 1}，且

$$m_{i,j}(C) = \begin{cases} 1, & \widetilde{N}_j(C) \subseteq N_i, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{14}$$

and $\widetilde{N}_j(C) = \{v_k \in N_j^0(C) : N_k^2(C) = \{v_j\}\}$.

算法 3 增强型基于博弈的同步算法（EGSA）

输入： 初始策略组合 $C^{(0)} = (c_1^{(0)}, .., c_n^{(0)})$
输出： 一个纳什均衡 C'

```
C ← C^(0)。
对于 t = 1、2、.....、T执行
    对于每个玩家 v_i （同时执行此操作）执行
        c'_i ← BR(v_i, C) 通过访问 SS_j 对于 v_j ∈ N̄_i
        mu_i ← u_i(c'_i, C_{-i}) − u_i(c_i, C_{-i})
        如果 v_i 满足方程 (11)则
            c_i ← c'_i
        结束 if
    结束 for
    如果 C = C^(t−1) 那么
        对于 i = 1, 2, . . . , n 执行
            如果 c_i = 0 并且 w_i(C) ≥ 3 那么
                v_i 提出一份私人契约 A
                C ← (C'_{τ_i}, C_{−τ_i})（每位玩家 v_j ∈ τ_i 同意
                与 A 依据引理 9）
                C^(t) ← C
                中断并转到第 21 行
            结束 if
        结束 for
    else
        C^(t) ← C
    结束 if
结束 for
输出 C' ← C
```

给定由 v_i 提出的私人契约，假设联盟 τ_i 中的所有参与者在以下条件下都会同意该契约：

$$\Delta_u(C'_{\tau_i}, C) = \sum_{v_j\in\tau_i}(u_j(C'_{\tau_i}, C_{-\tau_i}) - u_j(C)) > 0. \tag{15}$$

理想情况下，严格正的效用增益 $\Delta_u(C'_{\tau_i}, C)$ 可以在联盟中合理分配，使得 τ_i 中的每个玩家都能获得严格正的效用增益。因此，这一假设是合理的。

增强算法 EGSA 在算法 3 中进行了描述，其中算法第 12 行的 $w_i(C)$ 定义如下：

$$w_i(C) = \sum_{v_j\in N_i^1(C)} m_j(C) + 2\sum_{v_j\in N_i^2(C)} m_{i,j}(C).$$

我们将证明，如果满足第 12 行中的条件，则 v_i 提出的契约总能获得同意。算法 EGSA 首先生成一个纳什均衡 C，该均衡可由判据 $C = C^{(t-1)}$ 识别。如果玩家 v_i 提出一个联盟同意的私人契约 $\mathcal{A}$，那么 C 将变为 $C' = (C'_{\tau_i}, C_{-\tau_i})$。算法继续从 C' 生成纳什均衡。重复这一过程，直到没有玩家再提出新的私人契约（即没有玩家满足 EGSA 第 12 行中的条件）。算法终止时，输出为一个纳什均衡。

以下引理描述了一项性质，有助于证明契约 $\mathcal{A}$ 有效的条件，并分析 EGSA 的时间复杂度。

引理 **8**。 在策略组合 C中，对于任意满足$c_i = 0$ 的玩家 v_i 以及任意玩家 $v_j \in N_i^2$（C），如果 $m_{i,\ j}$（C） $= 1$，那么$C' =$（$c_i' = 2$、$c_j' = 0$、$C_{-\{i,j\}}$）不会创建任何新的白色自由顶点。

证明。 如果 v_j 将其策略从 2 改为 0，那么所有新出现的白色自由顶点（若有）都必须属于 $N_j(C)$。由于 $m_{i,\ j}(C) = 1$，因此有 $N_j(C) \subseteq N_i$。由于 v_i 将其策略从 0 改为 2，因此它可以强支配 $N_i \supseteq N_j(C)$ 中的所有白色顶点。□

下一个引理给出了使私人契约得到预期联盟同意的充分条件。

引理 **9**. 对于任意纳什均衡 C，由玩家v_i 在 $c_i = 0$ 和 $w_i(C) \geq 3$ 下提出的契约 $\mathcal{A}$ 是有效的。

证明。 为证明该引理，需要证明不等式 (15)。令 $x_1 = |N_i^1(C)|$和 $x_2 = |\{v_j \in N_i^2(C) : m_{i,\ j}(C) = 1\}|$。

由于 C 是纳什均衡，根据推论1，每个灰色顶点 v_j都不与任何黑色顶点相邻，因此 $m_j(C) = 1$；并且每个白色顶点 v_k 都至少与一个黑色顶点相邻，因此 $m_k(C) = 0$。所以，$u_i(C) = -\lambda_2 x_1$。根据引理 1，$u_i(C'_{\tau_i},\ C_{-\tau_i}) = -4\lambda_1$。因此，$u_i(C'_{\tau_i},\ C_{-\tau_i}) - u_i(C) = \lambda_2 x_1 - 4\lambda_1$ 且 $w_i(C) = x_1 + 2x_2$。

对于任意顶点 $v_j \in N_i^1(C)$，基于与上述类似的理由，可得 $u_j(C) = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_2|N_j^1(C)|$。根据引理8，在 $C' = (C'_{\tau_i},\ C_{-\tau_i})$中不会产生白色自由顶点，因此 $u_j(C') = -\lambda_2|N_j^1(C')|$。注意，$N_j^1(C') \subseteq N_j^1(C)$。所以，$u_j(C') \geq -\lambda_2|N_j^1(C)|$，因此$u_j(C') - u_j(C) \geq \lambda_1 + \lambda_2 > 0$。

对于任意顶点 $v_k \in N_i^2(C)$，若 $m_{i,j}(C) = 1$，根据推论1，有 $N_k^1(C) = \emptyset$。注意，C中的灰色顶点在 C'中仍然是灰色。因此，$N_k^1(C') = \emptyset$。所以，根据引理8，$u_k(C') = 0$；根据引理 1，$u_k(C) = -4\lambda_1$。由此，$u_k(C') - u_k(C) = 4\lambda_1 > 0$

因此，$\sum_{v_j \in \tau_i} u_j\ C'_{\tau_i}\ C_{-\tau_i} - u_j\ C \geq -4\lambda_1 + (\ ,\ )(\ )(\ )(\ )\lambda_2 x_1 + \lambda_1 + \lambda_2\ x_1 + 4\lambda_1 x_2 > 2\lambda_1\ x_1 + 2x_2 + (\ ,\ )(\ )(\ )(\ )\lambda_2 x_1 - 4\lambda_1$。因为 $w_i(C) \geq 3$ 意味着 $x_1 + 2x_2 \geq 3$，$\sum_{v_j \in \tau_i} u_j\ C'_{\tau_i}\ C_{-\tau_i} - u_j\ C \geq 6\lambda_1 + \lambda_2 x_1 - 4\lambda_1 = (\ ,\ )(\ )(\ )(\ )2\lambda_1 + \lambda_2 x_1 > 0$。该契约有效。□

接下来，目标是确定 EGSA 的收敛时间。为此，首先将建立两个引理。思路如下。当算法找到纳什均衡 C 时，如果同意 v_i 提出的私人契约，则策略组合变为 $C' = (C'_{\tau_i},\ C_{-\tau_i})$。引理10表明，$\gamma_R(G,\ C') < \gamma_R(G,\ C)$。由于 γ_R 只能取整数值，γ_R 值至少会严格 减少 1。注意，除私人契约部分外，EGSA 与 GSA 相同。因此，根据定理7，从 C' 开始，算法在 $O(n)$ 轮次内达到纳什均衡 C''。引理11意味着，$\gamma_R(G,\ C'') \leq \gamma_R(G,\ C')$。因此，在整个过程中，$\gamma_R$ 值单调不减，并且在至多 $O(n)$ 轮次内，γ_R 值至少减少 1。由于 γ_R 值的上界为 $2n$，算法将在 $O(n^2)$ 轮次内终止。接下来将给出证明以验证这些结果。

引理 **10**。 设 C 为纳什均衡。如果玩家 v_i 提出有效的私人契约，则所得策略组合$C' = (C'_{\tau_i}, C_{-\tau_i})$ 是 *RDF*，并且 $\gamma_R(G, C') < \gamma_R(G, C)$。

证明。 由于 C 是纳什均衡，根据定理 1，它是一个 RDF，因此在 C中不存在自由白色顶点。注意，在 C' 中，任何满足 $c_j = 1$ 的顶点 $v_j \in \tau_i$都被 v_i 支配（因为 $c_i' = 2$），且将 $c_j = 1$ 改为 $c_j' = 0$ 不会影响白色顶点是否被强支配（根据观察 1）。此外，根据引理8，改变满足$c_j = 2$ 的顶点 $v_j \in \tau_i$ 的策略不会产生新的自由白色顶点。因此，C' 中也不存在自由白色顶点，所以 C' 也是一个 RDF。

注意，只有当 $w_i(C) \geq 3$时，玩家 v_i 才会提出私人契约。设 x_1 和 x_2 分别为 τ_i中的灰色顶点数和黑色顶点数。由于$w_i(C) \geq 3$ 蕴含 $x_1 + 2x_2 \geq 3$，因此有 $\gamma_R(G,\ C') = \gamma_R(G,\ C) + 2 - x_1 - 2x_2 \leq \gamma_R(G,\ C) - 1$。□

引理 **11**。 从任意 *RDF* C出发，设 C' 是算法经过 C后首次到达的纳什均衡。那么，$\gamma_R(G,C') \leq \gamma_R(G, C)$。

证明。 设 x_{ij} 为从 i 到 j 的迭代过程中，改变策略的玩家数量。将证明

$$x_{01} + x_{12} + 2x_{02} - x_{10} - x_{21} - 2x_{20} \leq 0, \qquad (16)$$

这意味着 γ_R的单调性。详情见附录。□

将 EGSA 的输出称为增强纳什均衡（ENE）。如前所述，它确实是一个纳什均衡。此外，正如引理10和引理11所示，只要提出了某个私人契约，ENE 的规模就小于 GSA 输出的纳什均衡规模。EGSA 的时间复杂度如下，这可由引理10和引理 11以及其证明之前的论述得出。

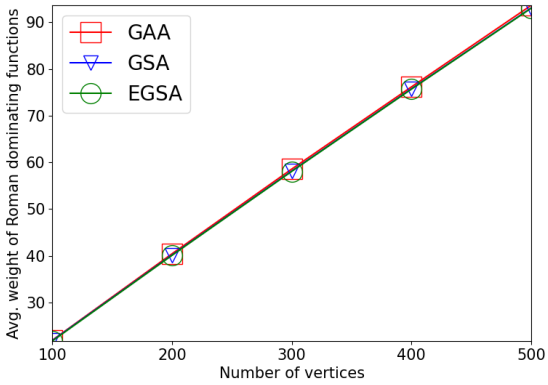
定理 **8**。 从任意初始状态 $C^{(0)}$出发，*EGSA* 收敛到 *ENE* 所需的轮次数为 $O(n^2)$。

设 S_{ENE} 为 EGSA 可能输出的解的集合。如图 6 所示，并非所有 NE 都属于 S_{ENE}。此外，每个 G-RDF 都是一个演化纳什均衡。事实上，定理4表明，任何 G-RDF 都是一个 NE。若其不是演化纳什均衡，则引理10表明其 γ值可以严格降低，这与 G-RDF 的定义相矛盾。结合推论3，可得到以下关系，这些集合之间的关系如图3所示。

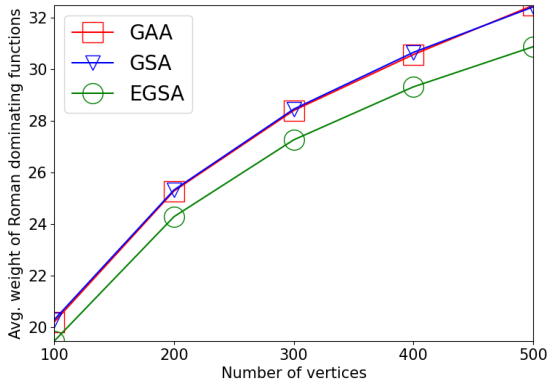
推论 **4**。在一个 *RDG* 中，$S_{\text{G-RDF}} \subseteq S_{\text{ENE}} \subseteq S_{\text{NE}} \subseteq S_{\text{S-RDF}} \subseteq S_{\text{M-RDF}} \subseteq S_{\text{RDF}}$。

V. 仿真结果

本节报告了算法 GAA、GSA 和 EGSA 的性能实验结果。所有实验均使用 Python 编写，并在相同配置下运行：AMD Ryzen 5 3500U 处理器、Radeon Vega Mobile Gfx 显卡和 16GB 随机存取存储器。



(a)



(b)

图 7. GAA、GSA 和 EGSA 的比较。(a) BA，$m = 5$；(b) ER，$p = 0.2$。

A. GAA、GSA 和 EGSA 的比较

本节从准确率和时间复杂度两个方面对三种算法 GAA、GSA 和 EGSA 进行比较。实验所用的图采用以下两种模型随机生成。

(i) 巴拉巴´西-阿尔伯特图(BA) [35]：从一个顶点数较少的图开始，逐步添加新顶点。每添加一个新顶点，就将其连接到 m 个已有顶点，其中 $m \leq m_0$；已有顶点与新顶点相连的概率与其当前度成正比。

(ii) 厄$\ddot{o}$尔-雷´尼图(ER) [36]：在该图中，每对顶点都以概率p通过一条边相连。

图 7 中，横轴表示顶点数n ，纵轴表示在 1000 个随机抽样的图上得到的解的平均权重。可以看出，EGSA 优于 GSA，在 ER 图中尤为明显。而 GSA 与 GAA 相近，这意味着分布式算法能够达到与集中式算法相同的准确率。为便于说明，图中仅展示 BA 图在 $m = 5$ 、ER 图在 $p = 0.2$ 时的情况。事实上，对于参数各异的 BA 图和 ER 图，所有实验都显示出相似的结果。

表 III 展示了三种算法的平均轮次数，其中一轮指外层 *for* 循环的一次迭代。尽管 GAA 的轮数似乎少于 GSA 和 EGSA，但需要注意的是，在 GAA 的每一轮中，集中式控制器都必须依次计算n 个参与者的最佳响应；而在 GSA 的每一轮中，所有参与者都会同时计算各自的最佳响应。因此，GAA 的实际运行时间为轮数的 n 倍，而 GSA 的实际运行时间则仅为轮数。设 n_{GAA} 和 n_{GSA} 分别为 GAA 和 GSA 的轮数。定义 $\eta = \frac{n_{GSA}}{n_{GAA} \times n}$ ，并用其衡量实际运行时间之比。 η 的值见表 IV。可以看出，就实际运行时间而言，GSA 比 GAA 快得多。此外，还可以观察到随着n的增加，加速效果更加显著，尤其是在 ER 上。

表 III GAA、GSA 和 EGSA 的平均轮次

图	算法	$\|V\| = 100$	200	300	400	500
BA	GAA	2.332	2.491	2.615	2.744	2.879
	GSA	17.968	30.278	41.199	50.679	59.314
	EGSA	18.093	30.372	41.296	50.777	59.391
ER	GAA	2.846	3.062	3.111	3.190	3.152
	GSA	22.309	27.267	29.520	31.369	32.287
	EGSA	23.364	28.586	31.031	33.030	34.241

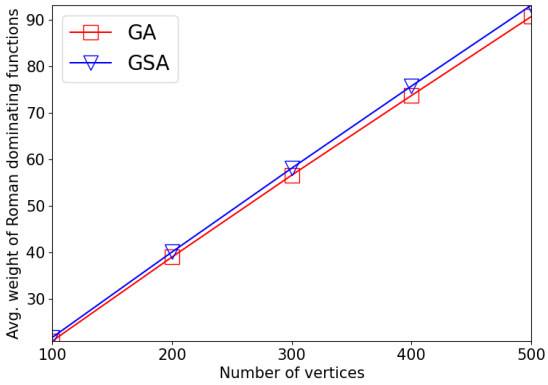
表 IV 通过 η测量 GA 和 GSA 的时间复杂度比较

图	$\|V\| = 100$	200	300	400	500
BA	7。70%	6.08%	5.25%	4.62%	4.12%
ER	7.84%	4.45%	3.16%	2。46%	2.05%

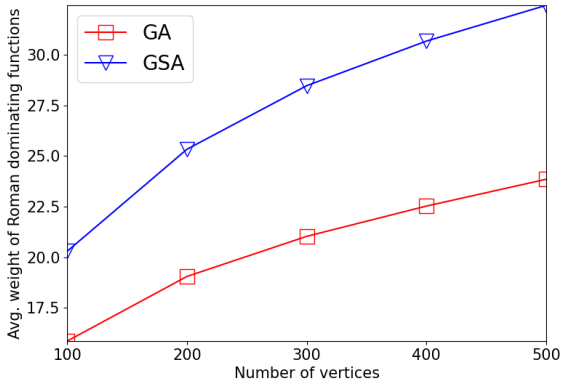
B. 比较 GSA 与贪心算法

由于 MinRD问题是 NP难，因此不能指望通过多项式时间算法获得精确解。目前已知的 MinRD 最佳近似算法是 [37]，提出的贪心算法 （GA），它可以实现渐近紧的对数近似比。

为了比较 GSA 与 GA 在 BA 和 ER 上的表现，图8展示了 GSA（三角形折线）和 GA（矩形折线）计算所得解的平均权重。从权重来看，GA 的权重低于 GSA，尤其是在 ER 上。这是合理的，因为 GA 是一种集中式 算法。GSA 的优势在于它是一种分布式 算法。此外，在图8的实验中，GSA 总是从初始策略组合 $(0, \ldots, 0)$ 开始。一个问题是：如果算法从不同的初始策略重新启动，表现会不会更好？请注意，定理 7保证 GSA 可以从任意 初始策略组合收敛到一个纳什均衡。图9展示了分别重启100次和500次（也测试了

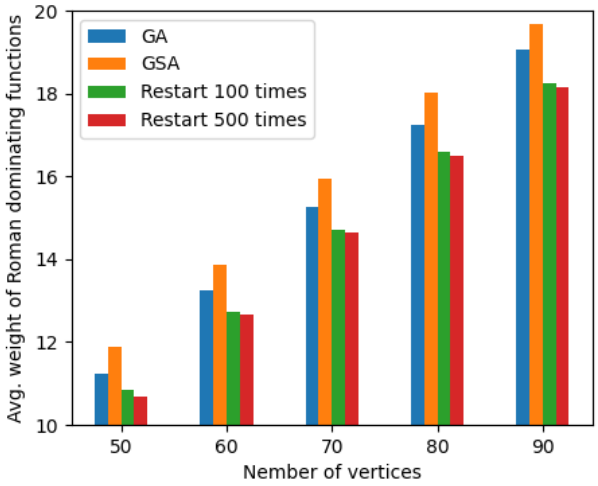


(a)

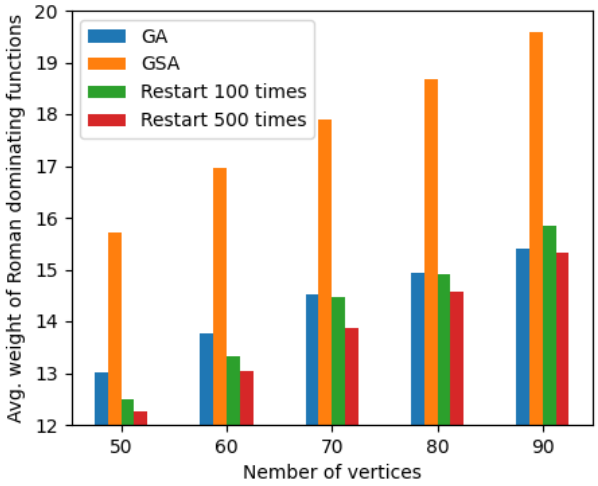


(b)

图8. GA 和 GSA 的比较。(a) BA，$m = 5$；(b) ER，$p = 0.2$。



(a)



(b)

图9. 使用重启策略比较 GA 和 GSA。(a) BA，$m = 5$；(b) ER，$p = 0.2$。

重启200、300和400次）的平均权重。可以看出，重启 GSA 能够获得比 GA 更好的解。请注意，GA 是一种确定性算法，无法从重启中获益。测试结果还表明，重启次数超过100次后，平均权重不会有显著改善。

C. 与树上的精确解进行比较 *ree*

为考察所提出的三种算法的准确率，我们将其与用于树上 MinRD 的精确算法（动态规划）进行比较。该算法是一种动态规划，由 [6] 提出。实验所用的树通过以下两种方式生成。

(*i*) 巴拉巴´西-阿尔伯特树 (BAT)：由 BA 模型根据 $m_0 = 2$ 和 $m = 1$构造一棵树。(*ii*) 随机树 (RT)：设 V 为包含 n 个顶点的顶点集，F 为由 V中顶点之间所有可能的边组成的边集。从由顶点集 V构成的空图开始，迭代添加一条边 e，该边来自 F 随机且均匀地选取，只要不形成环就继续添加，直到得到 V 上的一棵生成树。

对于每个 n，随机抽取 1000 棵大小为 n 的树。表 V 展示了算法（GA、GSA 和 EGSA）得到的~~RDF f 与动~~态规划生成的最优解 f^* 之间的相对误差 $\omega = \frac{\gamma_R(G,\ f)-\gamma_R(G,\ f^*)}{\gamma_R(G,\ f^*)}$。此处未列出 GAA 的结果，因为 GSA 与 GAA 的准确率相同；同时，为便于比较，列出了贪心算法 GA 的结果。从表 V 可以看出，在 RT 上，GSA 优于 GA。尽管在 BAT 上 GA 优于 GSA，但采用重启策略后，GSA 明显优于 GA。此外，EGSA 在树上的表现相当不错，尤其是在 BAT 上。值得注意的是，即使 GAS 重启 100 次，EGSA 的表现仍优于 GSA。

VI. 结论

本文通过博弈论研究多智能体系统中的最小罗马支配问题（MinRD）。我们提出了一种罗马支配博弈，并保证其纳什均衡（NE）的存在

表 V 所提出的算法与动态规划的相对误差（由 ω 测得）

图	算法	$\|V\| = 100$	200	300	400	500
RT	GA	1.81%	2.10%	1。87%	1.82%	1。82%
	GSA	1.09%	1.26%	1。15%	1。15%	1.16%
	GSA(100)	0.24%	0。41%	0。60%	0.80%	0。92%
	EGSA	0.12%	0.37%	0。31%	0.33%	0.32%
BAT	GA	0.17%	0.14%	0.19%	0.19%	0.18%
	GSA	0。41%	0.35%	0.40%	0.37%	0。36%
	GSA(100)	0.002%	0.004%	0。01%	0.02%	0。02%
	EGSA	0.01%	0.01%	0。01%	0.02%	0.004%

。此外，只需有限轮次的交互即可找到一个纳什均衡。我们提出了一种分布式算法 GSA 来寻找纳什均衡，其中每位玩家都可以根据局部信息做出决策。我们证明，任何纳什均衡都是强 RDF 和帕累托最优解。此外，我们还表明，通过增强算法 EGSA 可以获得增强的纳什均衡，从而进一步提高解的质量。未来，我们将探索支配问题中的合作博弈论，以期获得更好的性能。

参考文献

[1] I. Stewart，《捍卫罗马帝国！》，《科学美国人》，第281卷，第6期，第136–138页，1999年12月。[2] A. Pagourtzis、P. Penna、K. Schlude、K. Steinh¨ofel、D. S. Taylor和P. Widmayer，《服务器部署、罗马支配及其他支配集变体》。波士顿，马萨诸塞州：Springer US，2002年，第280–291页。[3] F. Ghaffari、B. Bahrak和S. P. Shariatpanahi，“通过罗马支配集实现无线传感器网络部分覆盖的新方法”，*IET Networks*，第11卷，第2期，第58–69页，2022年。[4] E. J. Cockayne、P. A. Dreyer、S. M. Hedetniemi和S. T. Hedetniemi，“图中的罗马支配”，《离散数学》，第278卷，第1期，第11–22页，2004年。[5] C. S. ReVelle和K. E. Rosing，“Defendens imperium romanum：军事战略中的一个经典问题”，《美国数学月刊》，第107卷，第7期，第585–594页，2000年。[6] P. A. Dreyer，“图支配的应用与变体”，2000年。[7] W. Shang和X. Hu，“单位圆盘图中的罗马支配问题”，载于计算科学。Springer Berlin Heidelberg，2007年，第305–312页。[8] L. Wang、Y. Shi、Z. Zhang、Z.-B. Zhang和X. Zhang，“单位球图中广义罗马支配问题的近似算法”，《组合优化杂志》，第39卷，第1期，第138–148页，2020年。[9] H. A. Abdollahzadeh、A. M. Henning、V. Samodivkin和G. I. Yero，“图中的全罗马支配”，《应用分析与离散数学》，第10卷，第501–517页，2016年。[10] A. Ghaffari-Hadigheh，“具有不确定定位和部署成本的罗马支配问题”，《软计算》，第24卷，第4期，第2637–2645页，2020年。[11] M. Hajjari、H. A. Ahangar、R. Khoeilar、Z. Shao和S. M. Sheik- holeslami，“图的三重罗马支配数的新界”，《数学杂志》，第2022卷，第1–5页，2022年。[12] X. Chen、G. Hao和Z. Xie，“关于有向图罗马支配的一则注记”，*Discussiones Mathematicae Graph Theory*，第39卷，21，2019 1，13期。[13] L. Ouldrabah、M. Blidia和A. Bouchou，“定向树中的罗马支配”，《图论与应用电子期刊》，第9卷，第1期，第95–103页，2021年。[14] P. Pavli˘c和J. ˘Zerovnik，“路径与圈的笛卡尔积的罗马支配数”，《组合学电子期刊》，第19卷，第3期，第19–56页，2012年。[15] M. Reddappa和D. C. J. S. Reddy，“特殊类型区间图中的全罗马支配”，*International Journal of Engineering Research & Technology*，第8卷，第10期，第343–348页，2019年。

[16] E. Cockayne、P. Grobler、W. Gr¨undlingh、J. Munganga和J. Vuuren，“图的保护”，Utilitas Mathematica，第67卷，第19–32页，2005年。[17] L.-H. Yen和Z.-L. Chen，“极小多重支配集的自稳定分布式构造的博弈论方法”，IEEE并行与分布式系统汇刊，第25卷，第12期，第3201–3210页，2014年。[18] L.-H. Yen和G.-H. Sun，“极小独立支配集自稳定的博弈论方法”，载于《互联网与分布式计算系统》，尚，2018年，第173–184页。[19] X. Chen和Z. Zhang，“极小连通支配集的博弈论方法”，理论计算机科学，第836卷，第29–36页，2020年。[20] X. Chen、C. Tang和Z. Zhang，“极小安全支配集的博弈论方法”，即将发表于IEEE/CAA自动化学报。[21] Y. Yang和X. Li，“面向网络顶点覆盖的雪堆博弈优化”，IEEE控制论汇刊，第43卷，第3期，第948–956页，2013年。[22] C. Tang、A. Li和X. Li，“非对称博弈：解决网络加权顶点覆盖问题的利器”，IEEE控制论汇刊，第48卷，第10期，第2994–3005页，2018年。[23] C. Sun、W. Sun、X. Wang和Q. Zhou，“分布式网络系统中极小加权顶点覆盖的势博弈论学习”，IEEE控制论汇刊，第49卷，第5期，第1968–1978页，2019年。[24] C. Sun、H. Qiu、W. Sun、Q. Chen、L. Su、X. Wang和Q. Zhou，“通过博弈论学习改进分布式加权顶点覆盖的近似效果”，IEEE系统、人类与控制论汇刊：系统，第52卷，第8期，第5308–5319页，2022年。[25] C. Sun、X. Wang、H. Qiu和Q. Chen，“最小加权顶点覆盖的博弈论求解器”，载于2019年IEEE系统、人类与控制论国际会议（SMC），2019年，第1920–1925页。[26] J. Chen、K. Luo、C. Tang、Z. Zhang和X. Li，“优化网络加权顶点覆盖博弈的多项式时间解”，IEEE/CAA自动化学报，第1–12页，2022年。[27] X.-Y. Li、Z. Sun、W. Wang、X. Chu、S. Tang和P. Xu，“针对自利元素代理人的集合覆盖博弈机制设计”，理论计算机科学，第411卷，第1期，第174–187页，2010年。[28] X.-Y. Li、Z. Sun、W. Wang和W. Lou，“集合覆盖博弈中的成本分摊与策略防护机制”，组合优化期刊，第20卷，第259–284页，2010年。[29] Q. Fang和L. Kong，“顶点覆盖博弈的核心稳定性”，载于《互联网与网络经济学》。Springer Berlin Heidelberg，2007年，第482–490页。[30] B. van Velzen，“支配集博弈”，运筹学快报，第32卷，第6期，第565–573页，2004年。[31] H. K. Kim，“关于连通支配集博弈”，韩国数据与信息科学学会会刊，第22卷，第1275–1281页，2011年。[32] X. Ai、V. Srinivasan和C. Tham，“覆盖博弈中纯纳什均衡的最优性与复杂性”，IEEE通信领域精选期刊，第26卷，第7期，第1170–1182页，2008年。[33] J. F. Nash，“n人博弈中的均衡点”，美国国家科学院院刊，第36卷，第1期，第48–49页，1950年。[34] D. Monderer和L. Shapley，“势博弈”，博弈与经济行为，第14卷，第124–143页，1996年5月。[35] A.-L. Barab´asi和R. Albert，“随机网络中标度的出现”，科学，第286卷，第5439期，第509–512页，1999年。[36] P. Erd¨os和A. R´enyi，“关于随机图I”，Publicationes Mathematicae Debrecen，第6卷，第290–297页，1959年。[37] K. Li、Y. Ran、Z. Zhang和D.-Z. Du，“（连通）罗马支配集的近乎紧确近似算法”，优化快报，第16卷，第8期，第2261–2276页，2022年。

附录 A
引理11的证明

引理 11 由下面的一系列引理证明。证明思路如下。在 C 和 C'中，都不存在白色自由顶点。需要在各种情况下估计所产生和减少的白色自由顶点数量，从而得到白色自由顶点数量增加量的上界，并将其与 0 进行比较。由于 C' 是一个纳什均衡，每个灰色顶点都是自由的。记 y 为

C 中受到强支配的灰色顶点数量。那么，它们将在 C'中减少。因此，到达 C'时，受到强支配的灰色顶点总数减少了y。受此观察启发，接下来需要估计从 C 到 C'的演化过程中产生和减少的受到强支配的灰色顶点数量，并将其与总减少量 y进行比较。利用这些关系，通过一些代数运算，可以得到不等式（16），这意味着 γ的单调性。

下文估算策略组合 C 之后状态发生变化的次数，并将其改为 C'。注意，当玩家 v_i 改变策略时，只会影响 N_i 中那些玩家的状态¯（使其变为自由或受到强支配）。因此，只需考虑N_i中的那些顶点。

引理 12。 对于任意策略配置 C，当玩家 v_i 将策略从2 改为 0时，以下两种情况之一成立。

(1) 至多产生一个自由白色顶点，且没有灰色顶点变为自由；(2) 至多有两个灰色顶点变为自由，且不会产生自由白色顶点。

证明。令 $C=(c_i=2,C_{-i})$ 和 $C'=(c'_i=0,C_{-i})$。根据¯引理 1，$u_i(C)=-4\lambda_1$。注意，N_i 中的所有顶点都受到 v_i 在 C中的强支配。

如果在 v_i 改变策略后，N_i^0（C）中至少两个白色顶点变为自由，那么 u_i（C'）$\leq -4\lambda_2 < -4\lambda_1 = u_i$（$C$），这与 v_i 愿意将其策略从 2 改为 0 相矛盾。

如果在 v_i 改变策略后，N_i^1（C）中至少三个灰色顶点在 C'中变为自由，那么 u_i（C'）$\leq -3\lambda_2 < -4\lambda_1 =u_i$（$C$），矛盾。

如果 N_i^0（C）中恰有一个白色顶点，且 N_i^1（C）中至少一个灰色顶点变为自由，那么 u_i（C'）$\leq -3\lambda_2 <-4\lambda_1 = u_i$（$C$），矛盾。因此，如果产生了一个自由的白色（分别为灰色）顶点，就不会有灰色（分别为白色）顶点变为自由。

综合以上论证，引理得证。 □

以下证明与引理 12 的证明类似，并使用类似的记号。

引理 13. 在任意策略组合 C 中，当玩家 v_i 将策略从 2 改为 1 时，强支配灰色顶点的数量至多减少一个，而自由白色顶点的数量不会增加。

证明。因为 $BR(v_i,\ C)=1$，根据引理2可得 $m_i(C')=1$。根据 $m_i(C')$ 的定义，可得 $N_i^2(C')=\emptyset$，因此 $N_i^2(C)=\emptyset$。由此，C 中的黑色顶点v_i 在 C' 中变成一个自由灰色顶点。如果强支配灰色顶点的数量至少减少两个，那么 N_i 中至少有两个在 C 中为灰色的顶点会在 C' 中变成自由顶点，因此 $u_i(C')$ $\leq -\lambda_1-3\lambda_2<-4\lambda_1=u_i(C)$，产生矛盾。如果白色自由顶点的数量至少增加一个，那么 N_i 中至少有一个在 C 中为白色的顶点会在 C' 中变成自由顶点，因此 $u_i(C')$ $\leq -\lambda_1-3\lambda_2<-4\lambda_1=$ $u_i(C)$，同样产生矛盾。这些矛盾证明了该引理。 □

为简化表述，称白色顶点或灰色顶点的状态 时，是指该顶点处于强支配或自由的状态。

引理 14. 在任意策略组合 C 中，当玩家 v_i 将策略从 1 改为 0 时，强支配灰色顶点的数量恰好减少一个，而自由白色顶点的数量不会增加。

证明。由于 $BR(v_i,C)=0$，根据引理2可得 $m_i(C')=0$，这意味着 v_i 在 C' 中有一个 c 值为 2 的邻居，因此在 C 中也如此。根据观察 1，$m_j(C)=m_j(C')\forall v_j\in V$，因此每个 $v_j\in V\setminus\{v_i\}$ 在 C 和 C' 中的状态都相同。于是，由于 C 中强支配灰色顶点 v_i 在 C' 中变为强支配白色顶点，引理得证。 □

引理 15。 在任意策略组合 C 中，当玩家 v_i 将其策略从 0 更改为1时，自由白色顶点的数量恰好减少一个，而强支配的灰色顶点数量不会减少。

证明。由于 $BR(v_i,\ C)=1$，可得 $m_i(C')=1$，因此 $N_i^2(C)=\emptyset$。与上述引理的证明类似，每个 $v_j\in V\setminus\{v_i\}$ 在两个 C 和C'中的状态都相同。于是，根据自由白色顶点 v_i 在 C 中变为自由灰色顶点 C'这一事实，引理得证。 □

引理 16。 在任意策略组合 C 中，当玩家 v_i 将其策略从 0 更改为2时，以下三种情况之一成立。

(1) 白色自由顶点的数量至少减少两个，而强支配的灰色顶点数量不会减少；(2) 强支配的灰色顶点数量至少增加三个，而自由白色顶点的数量不会增加；(3) 自由白色顶点的数量恰好减少一个，而强支配的灰色顶点数量至少增加一个。

证明。如果在 C中，$N_i^1(C)$里至多有两个自由灰色顶点，且 $\bar{N}_i^0(C)$里没有自由白色顶点，那么 $u_i(C)\geq -2\lambda_2>-4\lambda_1=u_i(C')$，矛盾。因此，至少有三个自由灰色顶点，或至少有一个自由白色顶点在 C'中变为强支配。换言之，以下两种情况之一会发生：(a) 强支配灰色顶点的数量至少增加三个；或(b) 自由白色顶点的数量至少减少一个。

注意，将 $c_i=0$ 改为 $c'_i=2$ 绝不会增加自由白色顶点的数量。因此，如果出现(a)，则会出现情况（2）。

接下来，考虑 (b) 发生的情况。如果自由白色顶点的数量恰好减少一个，且强支配灰色顶点的数量没有增加，那么在 $\bar{N}_i^0(C)$ 中恰好有一个自由白色顶点，并且在 $N_i^1(C)$ 中没有自由灰色顶点。因此，$u_i(C)=-2\lambda_2>-4\lambda_1=$

$u_i(C')$，矛盾。因此，如果自由白色顶点的数量恰好减少一个，那么就会出现情况（3）。

如果自由白色顶点的数量至少减少两个，那么将 $c_i = 0$ 改为 $c_i' = 2$ 绝不会减少强支配灰色顶点的数量，因此情况（1）成立。 □

引理 17. 在任意策略组合 C中，当玩家 v_i将策略从1 改为2时，以下三种情况之一成立。

（1）自由白色顶点的数量至少减少一个，且强支配灰色顶点的数量不减少；（2）强支配灰色顶点的数量至少增加两个，且自由白色顶点的数量不增加。（3）自由白色顶点的数量至少减少两个，且强支配灰色顶点的数量恰好减少一个。

证明。 如果 $\bar{N}_i^1$（C）中自由灰色顶点至多有两个，且 N_i^0（C）中没有自由白色顶点，那么 u_i（C）$\geq -\lambda_1 - 2\lambda_2 > -4\lambda_1 = u_i$（$C'$），矛盾。因此，以下两种情况之一成立：(*a*) $\bar{N}_i^1$（C）中至少有三个自由灰色顶点，或(*b*) N_i^0（C）中至少有一个自由白色顶点。

如果出现 (*a*)，那么强支配灰色顶点的数量至少增加两个（注意，如果 v_i 是自由的，由于它在 C' 中变为黑色，因此不能将其计作新增加的强支配灰色顶点）。结合将 $c_i = 1$ 改为 $c_i = 2$ 永远不会增加自由白色顶点数量这一事实，可得情形 (2)。

接下来，假设出现 (*b*)。注意，如果 v_i 在 C 中是一个强支配灰色顶点，且自由白色顶点的数量恰好减少一个，那么 $u_i(C) = -\lambda_1 - 2\lambda_2 > -4\lambda_1 = u_i(C')$，这就产生了矛盾。还要注意，将 $c_i = 1$ 改为 $c_i' = 2$ 不会产生新的自由灰色顶点。因此，强支配灰色顶点的数量至多减少一个，且只有当 v_i 是 C 中的强支配灰色顶点时才会发生这种减少。综合这些观察可知，如果 v_i 是 C 中的强支配灰色顶点，则可得情形 (3)。如果 v_i 是 C 中的自由灰色顶点，则可得情形 (1)。 □

现在，可以证明引理11了。

引理*11*的证明。 在从 C 到C'的演化过程中，其中 C 和 C' 是引理11条件所指定的策略组合，令 x_{ij} 表示将策略从 i 改为 j的玩家数量。接下来将证明

$$x_{01} + x_{12} + 2x_{02} - x_{10} - x_{21} - 2x_{20} \leq 0. \tag{17}$$

在引理 12 中，有两种情况。用 x_{20}^1 和 x_{20}^2 分别表示情况 (1) 和情况 (2) 发生的次数。于是，$x_{20} = s_{20}^1 + x_{20}^2$。类似地，$x_{21} = x_{21}^1$、$x_{10} = x_{10}^1$、$x_{01} = x_{01}^1$。注意，引理 16 中的三种情况与引理 17 中的三种情况可能存在重叠，因此 $x_{02} \leq x_{02}^1 + x_{02}^2 + x_{02}^3$ 和 $x_{12} \leq x_{12}^1 + x_{12}^2 + x_{12}^3$。

根据引理 12 至引理 17，该过程中产生的白色自由顶点数至多为 $x_{20}^1 - x_{01}^1 - 2x_{02}^1 - x_{02}^3 - x_{12}^1 - 2x_{12}^3$，而该过程中强支配灰色顶点的数量至多减少 $2x_{20}^2 + x_{21}^1 + x_{10}^1 - 3x_{02}^2 - x_{02}^3 - 2x_{12}^2 + x_{12}^3$。

由于 C' 是一个纳什均衡，根据推论1， C' 中不存在白色自由顶点，并且 C' 中的任意灰色顶点都是自由的。由于 C是一个RDF， C'中不存在白色自由顶点。令 y 表示 C中的强支配灰色顶点数量。那么，

$$x_{20}^1 - x_{01}^1 - 2x_{02}^1 - x_{02}^3 - x_{12}^1 - 2x_{12}^3 \geq 0, \tag{18}$$

$$2x_{20}^2 + x_{21}^1 + x_{10}^1 - 3x_{02}^2 - x_{02}^3 - 2x_{12}^2 + x_{12}^3 \geq y \tag{19}$$

将(19)和(18)相加，得到

$$\begin{aligned} &x_{20}^1 + 2x_{20}^2 + x_{21}^1 + x_{10}^1 - x_{01}^1 - 2x_{02}^1 \\ &-3x_{02}^2 - 2x_{02}^3 - x_{12}^1 - 2x_{12}^2 - x_{12}^3 \geq y \end{aligned} \tag{20}$$

结合 x_{ij} 与 x_{ij}^k之间的关系，可得

$$x_{01} + x_{12} + 2x_{02} - x_{10} - x_{21} - 2x_{20} \leq -y - x_{20}^1 - x_{02}^2 - x_{12}^2.$$

由于变量 y 和 x_{ij}^k均为非负数，不等式(17)得证，从而完整地证明了引理11。 □