arXiv:2302.02340v1 [quant-ph] 5 Feb 2023

分数阶弗洛凯理论

[《混沌、孤子与分形》168 (2023) **113196**]

Alexander Iomin

Department of Physics, Technion, Haifa, 32000, *Israel,*
Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, 01187 Dresden, Germany

摘要

本文为具有时变周期哈密顿量的分数阶薛定谔方程（FTSE）提出了弗洛凯定理的分数阶推广。所得结果称为分数阶弗洛凯定理（fFT），其形式为米塔格-莱夫勒函数，该函数被视为卡普托分数阶导数的特征函数。所提出的公式使得能够将 FTSE 化为具有时变哈密顿量的标准量子力学问题，在此情形下标准弗洛凯定理成立。文中还讨论了两个与量子共振有关的例子，以支持所得结果。

关键词：弗洛凯定理，分数阶薛定谔方程，卡普托分数阶导数，米塔格-莱夫勒函数

1. 引言

本文研究分数阶时间薛定谔方程的弗洛凯理论。弗洛凯定理和分数阶量子力学这两个问题各自都有明确的定义，并且已有充分综述。弗洛凯理论用于处理系数随时间周期变化的线性微分方程 [1] ，并广泛应用于描述驱动量子系统，例如辐射与物质的相互作用、量子非线性共振、量子混沌等 [2, 3, 4, 5]。弗洛凯定理指出，若含时哈密顿量 $H(t) = H(t+T)$ 随时间以 T 为周期，则作为相应薛定谔方程解的波函数具有如下形式： $\psi(t) = e^{-i\epsilon t}u(t)$。这里， $u(t+T) = u(t)$ 是所谓弗洛凯算符 F 的周期特征函数，

$$\hat{F}u(t) \equiv [\hat{H}(t) - i\hbar\partial_t]u(t) = \epsilon u(t), \tag{1.1}$$

其中， $\hbar$ 是有效无量纲普朗克常数， ϵ 是准能谱 [6, 7] （另见参考文献 [3]）。值得一提的是，在许多情况下，

Email address: iomin@physics.technion.ac.il (Alexander Iomin)

方程（1.1）没有解析解，如量子混沌中的情况 [4]。此外，谱可能具有分形能带结构，例如霍夫施塔特蝴蝶[8, 9], 另见一篇扩展综述 [5]。这一情形也体现在对量子材料弗洛凯工程的探索中 [10, 11]。

分数阶时间薛定谔方程属于分数阶量子力学领域。后者由文献[12, 13] 引入，目前已成为量子力学中一个成熟的领域 [14, 15, 16, 17], ，并且得到了实验证据的支持 [18, 19, 20]。分数阶时间薛定谔方程（FTSE）是通过类比分数阶扩散方程 [21], 引入的，其中时间导数被分数阶时间导数取代，即 $i\hbar\partial_t \to (i\hbar)^{\alpha}\partial_t^{\alpha}$，其中 $\alpha \in (0,2)$，∂_t^{α}为卡普托分数阶导数，

$$\partial_t^{\alpha} \equiv {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} (t-\tau)^{\alpha-n} d\tau, \tag{1.2}$$

其中 $n-1 < \alpha < n$。在本研究中，我们考虑 $\alpha < 1$、$(n = 1)$和$t_0 = 0$。文献 [16, 22] 还提出了另一种替换时间导数的方法，$i\hbar\partial_t \to i(\hbar)^{\alpha}\partial_t^{\alpha}$，其主要论点是，对时间导数进行这种“分数阶化”不会导致任何人为的非物理效应。值得注意的是，薛定谔方程中这种处理分数阶时间导数的方法基于文献 [23], 提出的广义泰勒级数，并与系统中的一般记忆有关，例如渐消记忆 [24]。文献 [25] 研究了分数阶扩散方程及其量子对应物之间关系的一个精确实例。

迄今为止，对分数阶时间薛定谔方程的扩展研究仅限于保守系统，即哈密顿量与时间无关。这一限制的主要原因是，卡普托分数阶导数会破坏任意周期函数的周期性，见附录 A。处理含时哈密顿量的分数阶时间薛定谔方程时，另一项重要障碍是分数阶导数不满足广义莱布尼茨法则，参见例如文献[26]。

本文研究具有时间周期算符的分数阶时间薛定谔方程，$\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$。我们还提出将弗洛凯定理推广至分数阶时间薛定谔方程，

$$\partial_t^{\alpha}\Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t). \tag{1.3}$$

我们将这一理论称为“分数阶弗洛凯定理”（fFT）。为了将这一理论应用于各种物理系统，使用无量纲变量和参数[1] [21]会比较方便。

[1]根据文献 [21, 27], ，引入普朗克长度 $L_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$、时间 $T_P = \sqrt{\hbar G/c^5}$、质量 $M_P = \sqrt{\hbar c/G}$和能量 $E_P = M_P c^2$，其中 $\hbar$、 G和 c 分别为普朗克常数、引力常数和光速。因此，无量纲质量为 $m/M_P \to m$ 的粒子的量子力学由无量纲

本文结构如下。第 2 节中，我们阐述 fFT 并给出证明。随后，第 3 节以从属关系的形式，将 fFT 的结果表述为弗洛凯定理的推论。第 4 节中，我们在傅里叶–拉普拉斯空间内考察弗洛凯定理和 fFT。我们还讨论两个例子，说明如何将 fFT 应用于相应的分数阶时间薛定谔方程。第一个例子见第 5 节，讨论的是一个玩具模型，其未受扰谱不随时间变化。第二个例子见第 6 节，我们考察处于时变势中的量子粒子，并在分数阶时间薛定谔方程的框架下对其进行描述。后一种情况也与量子非线性共振有关 [28, 29, 30]。在结论部分，我们总结关于 fFT 的研究结果。附录具有双重作用：首先，它给出了关于周期函数分数阶微分的一项原创结果；同时，也简要概述了分数阶微积分。

2. 分数阶弗洛凯定理

我们将分数阶弗洛凯定理表述为以下命题。

命题1. 考虑 FTSE（1.3）

$$\partial_t^\alpha \Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t)$$

其中含有时变周期哈密顿量 $\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$。FTSE（1.3）的解可表示如下

$$\Psi(t) = \sum_n E_\alpha \left[i\hbar^{1-\alpha}(\omega n - \epsilon)t^\alpha \right] C_n, \tag{2.1}$$

其中，$E_{\alpha.1} \equiv E_\alpha(z)$ 是单参数 Mittag -Leffler 函数 *[31]*；$\omega = \frac{2\pi}{T}$ 和 C_n 是 $u(t)$ 的傅里叶级数系数，该函数在方程（1.1）中为标准弗洛凯定理所定义。

证明1. 讨论中的重要部分是方程（1.1）中弗洛凯算符的特征值问题，经过傅里叶展开后，可表示如下

$$\sum_n \left[\hat{H}\left(\frac{i}{\omega}\frac{d}{dn} \right) C_n + \hbar(\omega n - \epsilon) C_n \right] e^{i\omega n t} = 0, \tag{2.2}$$

参见式 (4.10) 和注释 4.2。由于傅里叶基$e^{i\omega n t}$的完备性，可得特征值方程

$$\hat{H}\left(\frac{i}{\omega}\frac{d}{dn} \right) C_n = \hbar(\epsilon - \omega n) C_n, \ \forall n.$$

坐标和时间的单位为 $x/L_P \to x$, $t/T_P \to t$，而无量纲普朗克常数为 $\hbar/(E_P T_P) \to 1$。不过，我们保留 $\hbar$ 的记号。请注意，无量纲频率为 $\hbar\omega/E_P \to \omega$，因此 ωt 仍是无量纲参数。

接下来我们考虑到，米塔格-莱夫勒函数是卡普托分数阶导数的特征函数，

$$\partial_t^\alpha E_\alpha(iat^\alpha) = iaE_\alpha(iat^\alpha),$$

其中 $a = \hbar^{1-\alpha}(\omega n - \epsilon)$，见注释4.2-3。因此，将分数阶傅里叶变换 (4.17) 直接代入 FTSE (1.3)，可得

$$\sum_n \left[\hbar(-\omega n - \epsilon)C_n + \hat{H}(t)C_n\right] E_\alpha\left[i\hbar^{1-\alpha}(\omega n - \epsilon)t^\alpha\right] = 0, \tag{2.3}$$

见注释4.2-2。方括号中的表达式正是方程（2.2）中的表达式，它将 FTSE 化为方程（1.1）中的标准弗洛凯理论。

这就证明了关于分数阶傅里叶变换的命题1。

3. 从属关系与弗洛凯定理

方程 (2.1) 可以写成从属形式，其中弗洛凯定理从属于分数阶傅里叶变换。考虑到米塔格-莱夫勒函数的拉普拉斯像，我们得到如下变换链 [16]

$$\begin{aligned} E_\alpha(iat^\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^{\alpha-1}e^{st}ds}{s^\alpha - ia} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}e^{st}ds}{s^\alpha - ia}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^{\alpha-1}e^{st}ds}{s^\alpha - iz}\delta(z-a)dz\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia\xi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\xi}E_\alpha(izt^\alpha)\right]d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi,t)\exp\left[i\xi(\omega n - \epsilon)\right]d\xi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，米塔格-莱夫勒函数的傅里叶变换，

$$\mathcal{K}(\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz\xi}E_\alpha(-izt^\alpha)dz \tag{3.2}$$

可以化简为 z 和 ξ 的奇函数与偶函数的叠加。因此，我们得到

$$\begin{aligned} E_\alpha(-izt^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z^2t^{2\alpha})^n}{\Gamma(n2\alpha+1)} - izt^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z^2t^{2\alpha})^n}{\Gamma(n2\alpha+\alpha+1)} \\ &= E_{2\alpha}(-z^2t^{2\alpha}) - izt^\alpha E_{2\alpha,1+\alpha}(-z^2t^{2\alpha}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

这里的第一项是关于 z 的偶函数，代表余弦傅里叶变换，相应地得到关于 ξ 的偶函数。第二项是关于 z 的奇函数，代表正弦傅里叶变换，并得到关于 ξ 的奇函数。因此，对 $\xi \in (-\infty,\infty)$ 的积分可简化为对 $\xi \in (0,\infty)$ 的积分。相应地，ξ 被视为时间参数。最后，类比连续

时间随机游走（CTRW）理论 [32], ，我们提出， $\mathcal{K}(\xi,t)$ 是从属器 [33, 34], ，它使时间尺度为 t（物理时间）的分数阶演化从属于时间尺度为 ξ （操作时间）的幺正演化。换言之，分数阶傅里叶变换从属于弗洛凯定理:

$$\Psi(t)=\sum_n\int_0^\infty \mathcal{K}(\xi,t)e^{-i\epsilon\xi}e^{i\omega n\xi}C_n d\xi=\int_0^\infty \mathcal{K}(\xi,t)e^{-i\epsilon\xi}u(\xi). \tag{3.4}$$

4. 讨论：傅里叶-拉普拉斯空间中的弗洛凯定理

我们从 $\alpha=1$ 的情形开始讨论，此时 $E_\alpha\left[i\hbar^{1-\alpha}(\omega n-\epsilon)t^\alpha\right]=e^{i(\omega n-\epsilon)t}$。于是，方程 (2.1) 化为标准的弗洛凯定理，该定理指出，薛定谔方程的解

$$i\hbar\partial_t\psi(t)=\hat{H}\psi(t),\qquad \hat{H}(t+T)=\hat{H}(t) \tag{4.1}$$

is

$$\psi(t)=\sum_n e^{i(\omega n-\epsilon)t}C_n=e^{-i\epsilon t}u(t), \tag{4.2}$$

其中， $u(t)$ 是周期函数，它与哈密顿量一起可表示为傅里叶展开的形式

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{in\omega t},\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}, \tag{4.3a}$$

$$\hat{H}(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{h}(m)e^{im\omega t}. \tag{4.3b}$$

对方程 (4.2) 和 (4.3a) 作拉普拉斯变换，得到

$$\mathcal{L}\left[\psi(t)\right]=\tilde{\psi}(s)=\sum_n C_n\left(s+i\epsilon-i\omega n\right)^{-1}, \tag{4.4}$$

对薛定谔方程 (4.1) 作拉普拉斯变换，得到

$$i\hbar s\sum_n\frac{C_n}{s+i\epsilon-i\omega n}=\sum_n\left(\sum_m\frac{\hat{h}(m)C_{n-m}}{s+i\epsilon-i\omega n}+i\hbar C_n\right), \tag{4.5}$$

根据弗洛凯定理 (4.2) 和方程 (4.3a)，这里考虑到初始条件为 $\Psi_0=\psi_0=\psi(t=0)=\sum_n C_n$。

将 C_n 视为“晶格振幅”，我们有

$$C_n=\sum_q U_q e^{iqn}, \tag{4.6}$$

将公式（4.6）的级数代入公式（4.5），可得:

$$\sum_q\sum_n\left[\frac{1}{s+i\epsilon-i\omega n}\left(i\hbar s-\sum_m\hat{h}(m)e^{-iqm}\right)-i\hbar\right]U_q e^{iqn}=0. \tag{4.7}$$

根据公式（4.3b），对 m 求和得到 $\sum_m \hat{h}(m)e^{-iqm} = \hat{H}(-q/\omega)$。然后考虑公式（4.6）以及以下事实:

$$\hat{H}\left(\frac{i}{\omega}\frac{d}{dn}\right)e^{iqn} = \hat{H}\left(-\frac{q}{\omega}\right)e^{iqn}, \tag{4.8}$$

由此得到公式（4.7）：

$$\sum_n \frac{1}{s+i\epsilon-i\omega n}\left[\hat{H}\left(\frac{i}{\omega}\frac{d}{dn}\right)C_n - (\hbar\epsilon-\hbar\omega n)C_n\right] = 0. \tag{4.9}$$

因此，对于任意的 ϵ 和 n，系数 C_n 都是厄米算符 $\hat{H}\left(\frac{i}{\omega}\frac{d}{dn}\right)$ 的特征函数，即

$$\hat{H}\left(\frac{i}{\omega}\frac{d}{dn}\right)C_n = (\hbar\epsilon-\hbar\omega n)C_n. \tag{4.10}$$

请注意，拉普拉斯变换参数 s 也不受限制，因为进行拉普拉斯反演后，公式（4.9）中的分母就变成了指数函数 $e^{-it(\epsilon-\omega n)}$。

4.1. FTSE 的弗洛凯定理

让我们回到 FTSE（1.3），并考虑其如下形式的解

$$\Psi(t) = \sum_n \Lambda_n(t)C_n e^{i\omega nt}, \tag{4.11}$$

其中 $\Lambda_n(t)$ 是一个未知的时间函数。FTSE（1.3）和解（4.11）的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} i\hbar^\alpha s^\alpha\tilde{\Psi}(s) &= \sum_m \hat{h}(m)\sum_n C_n\mathcal{L}\left[\Lambda_n(t)e^{it\omega(n+m)}\right] + i\hbar^\alpha s^{\alpha-1}\Psi_0 \\ &= \sum_m\sum_n \hat{h}(m)C_n\tilde{\Lambda}(s-i\omega n-i\omega m) + i\hbar^\alpha s^{\alpha-1}\Psi_0, \qquad (4.12a) \\ \tilde{\Psi}(s) &= \sum_n \tilde{\Lambda}(s-i\omega n)C_n, \qquad \Psi_0 = \Lambda(0)\sum_n C_n. \qquad (4.12b) \end{aligned}$$

对指标进行移位 $\sum_n \Lambda(s-i\omega n-i\omega m)C_n = \sum_n \Lambda(s-i\omega n)C_{n-m}$，由方程 (4.12a) 和 (4.12b) 可得关于 $\Lambda(s-i\omega n)$ 的方程如下

$$\sum_n\left[\tilde{\Lambda}(s-i\omega n)\left(i\hbar^\alpha s^\alpha C_n - \sum_m \hat{h}(m)C_{n-m}\right) - i\hbar^\alpha s^{\alpha-1}\Lambda(0)C_n\right] = 0. \tag{4.13}$$

应当牢记，系数 C_n 和哈密顿量 $\hat{H}(t)$与标准弗洛凯理论中的相同。因此，对晶格振幅 C_n 进行展开（4.6），然后求和

对 m求和后，我们得到 $\sum_m \hat{h}(m)e^{-iqm} = \hat{H}(-q/\omega)$。接着，考虑到式（4.8）和本征值方程（4.10），可得式（4.13）如下

$$\begin{aligned}
&\sum_n \sum_q \left\{ \tilde{\Lambda}(s - i\omega n) \left[i\hbar^\alpha s^\alpha - \hat{H}(-q/\omega) \right] - i\hbar^\alpha s^{\alpha-1} \Lambda(0) \right\} U_q e^{iqn} \\
&\quad = \sum_n \left\{ \tilde{\Lambda}(s - i\omega n) \left[i\hbar^\alpha s^\alpha - \hat{H}\left(\frac{i}{\omega} \frac{d}{dn} \right) \right] - i\hbar^\alpha s^{\alpha-1} \Lambda(0) \right\} C_n \\
&\quad = \sum_n \left\{ \tilde{\Lambda}(s - i\omega n) \left[i\hbar^\alpha s^\alpha - \hbar(\epsilon - \omega n) \right] - i\hbar^\alpha s^{\alpha-1} \Lambda(0) \right\} C_n = 0. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

由于系数 C_n 是弗洛凯理论中所讨论的函数，因此有理由假设拉普拉斯像为

$$\tilde{\Lambda}(s - i\omega n) = \frac{s^{\alpha-1}\Lambda(0)}{s^\alpha + i\hbar^{1-\alpha}(\epsilon - \omega n)}, \quad (4.15)$$

它是米塔格-莱夫勒函数 [31] 的拉普拉斯像。进行拉普拉斯反演并令 $\Lambda(0) = 1$，我们得到以单参数米塔格-莱夫勒函数表示的解：

$$\Lambda_n(t) e^{i\omega n t} = E_\alpha \left[i\hbar^{1-\alpha}(\omega n - \epsilon) t^\alpha \right]. \quad (4.16)$$

考虑到定义（4.11），我们得到如下波函数

$$\Psi(t) = \sum_n \Lambda_n(t) e^{i\omega n t} C_n = \sum_n E_\alpha \left[i\hbar^{1-\alpha}(\omega n - \epsilon) t^\alpha \right] C_n. \quad (4.17)$$

我们强调，第 2 节已经证明，式（4.17）形式的波函数就是 fFT。

4.2. 注释

1 演化算符

FTSE (1.3) 的波函数按照演化算符 $U(t)$ 演化（不要将其与能带振幅 U_q 混淆），因此 $\Psi(t) = \hat{U}(t)\Psi_0$。然而，演化算符的显式算符形式未知，因为分数阶卡普托导数会破坏波函数的周期性，见附录 A。因此，式 (4.3a) 和 (4.11) 中的傅里叶展开只是形式上的，系数 C_n 既可以是算符值函数，也可以是坐标空间中的函数，具体取决于哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 的显式算符形式。第 5 节将前一种情况作为示例讨论，而第 6 节则以后一种情况为例。

2 晶格振幅

分析中的一个重要部分是将振幅 C_n 视为“晶格振幅”，并按展开式 (4.6) 的形式表示，即

$C_n = \sum_q U_q e^{iqn}$。然后，考虑到展开式 (4.3b)，并对 m 求和，可得哈密顿量中的时间依赖性可替换为如下形式 $\sum_m \hat{h}(m)e^{-iqm} = \hat{H}(-q/\omega)$。由此得到表达式 (4.8)，即

$$\hat{H}\left(\frac{i}{\omega}\frac{d}{dn}\right)e^{iqn} = \hat{H}\left(-\frac{q}{\omega}\right)e^{iqn}.$$

因此，考虑到这一系列变换（总是可以进行），我们可以作如下形式上的替换

$$\hat{H}(t)C_n \equiv \hat{H}(\omega t)C_n \to \hat{H}\left(i\frac{d}{dn}\right)C_n.$$

3 米塔格-莱夫勒函数

注意，米塔格-莱夫勒函数是卡普托分数阶导数的特征函数。事实上，考虑到式 (A.7)，我们得到

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha E_\alpha(iat^\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ia)^k}{\Gamma(k\alpha+1)}\partial_t^\alpha t^{k\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ia)^k}{\Gamma(k\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha-\alpha+1)}t^{(k-1)\alpha} \\ &= ia\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ia)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = iaE_\alpha(iat^\alpha),\end{aligned}$$

其中 $a = \hbar^{1-\alpha}(\omega n - \epsilon)$。

5. 示例1：玩具模型

在本节中，我们考虑如下形式的玩具哈密顿量

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0\cos(\omega t), \tag{5.1}$$

其中，H_0 可以是任意与时间无关的哈密顿量，能够描述各种保守系统。玩具模型（5.1）的标准薛定谔方程可以轻松求解，初始波函数ψ_0 的演化为

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(t')dt'\right)\psi_0 = \exp\left[-i\frac{\hat{H}_0}{\hbar\omega}\sin(\omega t)\right]\psi_0. \tag{5.2}$$

初始波函数 ψ_0 可以是例如 H_0 的特征函数，即 $H_0\psi_0 = e\psi_0$。那么 $\psi(t) = \exp[-i(e/\hbar\omega)\sin(\omega t)]$。由于对于 $t = kT$ (k 为整数),

$\psi(kT) = \psi_0$，相应地，准能量为零，$\epsilon = 0$ 且 $\psi(t) = u(t)$。傅里叶变换得到

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}\left(\frac{\hat{H}_0}{\hbar\omega}\right) e^{i\omega nt}, \tag{5.3}$$

其中 $C_n = (-1)^n J_n(z) \equiv J_{-n}\left(\frac{\hat{H}_0}{\hbar\omega}\right)$ 是第一类贝塞尔函数，它也满足特征值方程（4.10）。后者为

$$z\cos\left(\frac{d}{dn}\right) J_{-n}(z) = -nJ_{-n}(z), \tag{5.4}$$

这正是贝塞尔函数 [35] 的递推关系：

$$zJ_{n+1}(z) + zJ_{n-1}(z) = 2nJ_n(z).$$

5.1. 分数阶玩具模型

玩具模型的分数阶推广在 FTSE 框架下表述如下

$$i\hbar^{\alpha}\partial_t^{\alpha}\Psi(t) = \hat{H}_0\cos(\omega t)\Psi(t) \tag{5.5}$$

其中初始条件为 $\Psi_0 = \psi_0$。根据分数阶傅里叶变换，我们将 FTSE (5.5) 的解设为如下形式

$$\Psi(t) = \sum_n E_\alpha\left(i\hbar^{1-\alpha}\omega nt^{\alpha}\right)(-1)^n J_n\left(\frac{\hat{H}_0}{\hbar\omega}\right)\psi_0, \tag{5.6}$$

当 $\alpha = 1$ 时，它简化为方程（5.2）。

将这个分数阶傅里叶变换解代入 FTSE（5.4）。考虑注释4.2-3，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_n(-\hbar\omega n)E_\alpha\left(i\hbar^{1-\alpha}\omega nt^{\alpha}\right)(-1)^n J_n\left(\frac{\hat{H}_0}{\hbar\omega}\right)\psi_0 \\ = \hat{H}_0\cos(\omega t)\sum_n E_\alpha\left(i\hbar^{1-\alpha}\omega nt^{\alpha}\right)(-1)^n J_n\left(\frac{\hat{H}_0}{\hbar\omega}\right)\psi_0.\end{aligned} \tag{5.7}$$

按照注释4.2-2依次进行变换，我们得到方程（5.7）的右端如下

$$\hat{H}_0\sum_n E_\alpha\left(i\hbar^{1-\alpha}\omega nt^{\alpha}\right)\cdot\left[\cos\left(\frac{d}{dn}\right)(-1)^n J_n\left(\frac{\hat{H}_0}{\hbar\omega}\right)\right]\psi_0.$$

然后由式 (5.4)，我们得到式 (5.7) 的恒等式。

6. 示例 2：时变势中粒子的分数阶量子动力学

本节中，我们考虑另一个更贴近现实的例子，其中系数 $C_n = C_n(x)$ 定义在坐标空间 $x \in R$ 中。这是一个处于非线性时变势 $V(x)\cos(\omega t)$ 中的量子粒子，可用薛定谔方程描述，例如：

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = \hat{H}(t)\psi(x,t) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\cos(\omega t)\right]\psi(x,t), \tag{6.1}$$

其中， m 是量子粒子的质量，该粒子受到时变势 $V(x)\cos(\omega t)$的作用，其中 $V(x)$是关于 x的非线性函数。此类系统可描述量子非线性共振 [28, 29]。我们将重点研究薛定谔方程（6.1）的弗洛凯理论，不讨论量子共振的物理机制，因为该问题在文献中已有充分研究和综述 [36, 37, 38]。因此，根据弗洛凯定理，弗洛凯算符的特征值问题为

$$\hat{H}(t)u(x,t) - i\hbar\partial_t u(x,t) = \hbar\epsilon u(x,t), \tag{6.2}$$

其中 $u(x,t) = \sum_n C_n(x)e^{i\omega nt}$。由此得到系数$C_n(x)$满足的方程如下

$$\hat{K}C_n(x) \equiv$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}C_n(x) + \frac{1}{2}V(x)\left[C_{n+1}(x) + C_{n-1}(x)\right] + \hbar(\omega n - \epsilon)C_n(x) = 0. \tag{6.3}$$

对角化后，当 $C_n(x) = \sum_q U_q(x)e^{iqn}$时，公式（6.3）为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}U_q(x) + V(x)\cos(qn)U_q(x) + \hbar\omega n U_q(x) = \hbar\epsilon U_q(x). \tag{6.4}$$

根据势函数 $V(x)$ 的具体形式，该方程既可以解析求解，也可以数值求解 [36, 37, 38]。不过，正如上文所述，我们不讨论这个问题。

方程 (6.3) 是在 FTSE (6.1) 框架下研究分数阶量子非线性共振的基本方程，现可写为

$$i\hbar\partial_t^\alpha\Psi(x,t) = \hat{H}(t)\Psi(x,t) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\cos(\omega t)\right]\Psi(x,t), \tag{6.5}$$

为得到公式（6.3），将表达式（2.1）代入 FTSE（6.5）。根据注释4.2-2，我们得到

$$\sum_n \hbar(\epsilon - \omega n)E_\alpha\left[i\hbar^{1-\alpha}(\epsilon - \omega n)t^\alpha\right]C_n(x)$$
$$= \sum_n E_\alpha\left[i\hbar^{1-\alpha}(\epsilon - \omega n)t^\alpha\right]\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2C_n(x)}{dx^2} + V(x)\cos(\omega t)C_n\right]. \tag{6.6}$$

根据注释 4.2，我们有 $\cos(\omega t)C_n \to \frac{1}{2}(C_{n+1}+C_{n-1})$。因此，在拉普拉斯空间中，公式（6.6）的实部和虚部为

$$\sum_n \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha}+\hbar^{2-2\alpha}(\epsilon-\omega n)^2}\left[\hat{K}C_n(x)\right]=0, \tag{6.7a}$$

$$i\hbar^{1-\alpha}\sum_n \frac{(\epsilon-\omega n)}{s^{2\alpha}+\hbar^{2-2\alpha}(\epsilon-\omega n)^2}\left[\hat{K}C_n(x)\right]=0. \tag{6.7b}$$

于是得到公式（6.3）：$\hat{K}C_n(x)=0$。

7. 结论

本文关注由时变周期哈密顿量描述的系统的分数阶薛定谔方程（FTSE）。我们提出了一个著名的弗洛凯定理的类比，用于求解这类分数阶时间薛定谔方程，并将这一新结果称为分数阶弗洛凯定理（fFT）。主要结果可表述为以下针对波函数的弗洛凯定理推广。具体而言，考虑如下标准弗洛凯定理

$$\psi(t)=e^{-i\epsilon t}u(t)=\sum_n C_n e^{-i\epsilon t+i\omega n t}, \tag{7.1}$$

我们用单参数米塔格-莱夫勒函数$E_\alpha\left[i\hbar^{1-\alpha}(\omega n-\epsilon)t^\alpha\right]$推广指数函数，由此得到如下分数阶弗洛凯定理（2.1）

$$\Psi(t)=\sum_n C_n E_\alpha\left[i\hbar^{1-\alpha}(\omega n-\epsilon)t^\alpha\right], \tag{7.2}$$

当 $\alpha=1$ 时，它退化为弗洛凯定理（7.1）。将公式（2.1）直接代入分数阶时间薛定谔方程，即可验证分数阶弗洛凯定理，并得到恒等式。此外，我们还考虑了两个例子来支持所得结果。

总之，应当承认，借助米塔格-莱夫勒函数，分数阶傅里叶变换将含时哈密顿量的 FTSE (1.3) 化归为标准弗洛凯定理的讨论。在这种情况下，FTSE 的准能谱存在，并由标准弗洛凯定理确定。

致谢

我很荣幸能感谢马克斯·普朗克复杂系统物理研究所（德累斯顿）提供的热情接待，本研究的部分工作正是在那里完成的。

附录 A. 周期函数的分数阶微分

在本文中，我们以周期函数的分数阶微分为例来探讨分数阶微积分。近年来，这一问题因分数阶动力系统中周期解的不存在性而受到了一些关注 [39]。在梅林变换分析框架下，研究表明，对周期函数进行分数阶微分会破坏其周期性。该结果适用于卡普托、黎曼-刘维尔和格伦瓦尔德-莱特尼科夫分数阶导数的定义。我们提出一种替代方法，遵循文献 [26]，的基础性工作，并以傅里叶变换和拉普拉斯变换作为分析的主要工具。

任意周期为 T 的周期函数 $g(t)$，只要满足 $g(t+T) = g(t)$，就可以表示为其傅里叶级数

$$g(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l e^{i\bar{l}t}, \quad g_l = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\bar{l}t}dt, \quad \bar{l} = 2\pi l/T. \tag{A.1}$$

因此，若傅里叶级数 (A.1) 收敛，则 $g(t)$ 由其傅里叶像 g_l 确定。特别地， n 阶导数是一个周期函数，当式 (A.1) 中 $g^{(n)}(t) = {}^{d^n g_{(t)}}{}_{dt^n}$ 收敛时，它由 $\bar{l}^n g_l$ 确定。因此，要确定 $g(t)$ 的分数阶积分~~微分~~是否具有周期性，只需考察指数函数 $\exp[2\pi i l t/T]$ 。

附录 A.1. 黎曼-刘维尔分数阶积分

注意，卡普托和黎曼-刘维尔分数阶导数是对分数阶导数进行正则化的结果

$${}_{a+}D_t^{\mu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t (t-\tau)^{-\mu-1} f(\tau)\, d\tau, \tag{A.2}$$

其中我们取 $a = 0$。因此，取 $n-1 < \mu < n$ 和 $\nu = n - \mu$，并不考虑导数的整数阶部分后，便得到指数函数 $f(t) = e^{i\bar{l}\tau}$ 的黎曼-刘维尔分数阶积分，

$${}_0D_t^{-\nu} f(t) \equiv I_{0+}^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} e^{i\bar{l}\tau}\, d\tau. \tag{A.3}$$

为处理这个积分，我们使用卷积积分的拉普拉斯变换，并将其写成如下恒等式：

$$I_{0+}^{\nu} e^{i\bar{l}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[I_{0+}^{\nu} e^{i\bar{l}t}\right]\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{s^{\nu} e^{st}}{s - i\bar{l}} ds = t^{-\nu} E_{1,1-\nu}\left(i\bar{l}t\right), \tag{A.4}$$

其中，最后一行是双参数米塔格-莱夫勒函数的积分表示 $E_{\alpha,\,\beta}(z)$， [31]。考虑到 $1-\nu = \{\mu\}$ 是

μ 的小数部分，并将米塔格-莱夫勒函数表示为实部和虚部的叠加，我们得到

$$E_{1,\{\mu\}}\left(i\bar{l}t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\left(i\bar{l}t\right)^{2k}}{\Gamma(2k+\{\mu\})}+\frac{\left(i\bar{l}t\right)^{2k+1}}{\Gamma(2k+1+\{\mu\})}\right]$$
$$=E_{2,\{\mu\}}\left(-\bar{l}^2t^2\right)+i\bar{l}tE_{2,1+\{\mu\}}\left(-\bar{l}^2t^2\right). \quad \text{(A.5)}$$

最后，我们证明黎曼-刘维尔分数阶积分会破坏周期函数的周期性。因此，卡普托分数阶导数和黎曼-刘维尔分数阶导数的作用方式相同。

附录 A.2. Fox H-函数

我们将指数函数表示为 Fox H-函数的形式：

$$e^{-z}=H_{0,1}^{1,0}\left[z\middle|\begin{pmatrix}\\(0,1)\end{pmatrix}\right].$$

因此，指数函数可以表示为梅林-巴恩斯积分[40]的形式

$$e^{i\bar{l}t}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\Gamma(\xi)(-i\bar{l}t)^{-\xi}d\xi \quad \text{(A.6)}$$

令变量作变换 $\xi\to-\xi$，我们得到伽马函数 $\Gamma(-\xi)$ 在 $\Re\xi\geq0$ 处的奇点。（在此情形下，式 (A.6) 对应于 Meijer$G$-函数 [31]。）现在考虑幂律函数 t^{ξ} 的卡普托分数阶导数 $\partial_t^{\{\mu\}}$，可得

$$\partial_t^{\{\mu\}}(-i\bar{l}t)^{\xi}=(-i\bar{l})^{\xi}\frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(1-\{\mu\})}\int_0^t\tau^{\xi-1}(t-\tau)^{-\{\mu\}}d\tau$$
$$=(-i\bar{l})^{\xi}\frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(\xi-\{\mu\}+1)}t^{\xi-\{\mu\}}, \quad \text{(A.7)}$$

其中 $\{\mu\}=\mu+1-n$。将此结果与式 (A.6) 结合，再进行变量替换 $\xi\to-\xi$，并对积分路径作相应变形，即可得到米塔格-莱夫勒函数的梅林-巴恩斯积分

$$\partial_t^{\{\mu\}}e^{i\bar{l}t}=\frac{t^{-\{\mu\}}}{2\pi i}\int_C\frac{\Gamma(\xi)\Gamma(1-\xi)}{\Gamma(1-\mu-\xi)}(-i\bar{l}t)^{-\xi}d\xi=t^{-\{\mu\}}E_{1,1-\{\mu\}}\left(i\bar{l}t\right) \quad \text{(A.8)}$$

附录 A.3. 黎兹分数阶导数

本节将在对称黎兹-费勒积分框架下处理周期函数 $g(x)=g(x+L)$，其中 $x\in R$。下面考虑对称黎兹-费勒导数，它可以在傅里叶空间中定义

$$\mathcal{F}\left[{}^{\mathrm{RF}}_{0}D_x^{\mu}f(x)\right](k)=-|k|^{\mu}\mathcal{F}\left[f(x)\right](k). \quad \text{(A.9)}$$

其积分表示为

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{RF}}_{0}D^{\mu}_{x}f(x) &= \frac{\Gamma(1+\mu)}{\pi}\sin\frac{\mu\pi}{2}\int_{0+}^{\infty}\frac{f(x+\xi)-2f(x)+f(x-\xi)}{\xi^{1+\mu}}d\xi \\
&= \frac{\mu}{2\Gamma(1-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x+\xi)-2f(x)+f(x-\xi)}{\xi^{1+\mu}}d\xi \quad \text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

令 $f(x) = e^{i\bar{l}x}$，其中 $\bar{l} = 2\pi l/L$，对式 (A.10) 积分可得

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{RF}}_{0}D^{\mu}_{x}f(x) &= \frac{\mu e^{i\bar{l}x}}{2\Gamma(1-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2(\bar{l}\xi)}{\xi^{1+\mu}}d\xi \\
&= -\frac{2e^{i\bar{l}x}}{\Gamma(1-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}\sin^2(\bar{l}\xi)d(\xi^{-\mu}) = A(\mu)e^{i\bar{l}x}, \quad 0<\mu<2\,, \quad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

其中 $A(\mu) = (2\bar{l})^{\mu}$。因此，周期函数的对称 Riesz-Feller 微分不会破坏周期性，即 ${}^{\mathrm{RF}}_{0}D^{\mu}_{x}g(x)$ 是与 $g(x)$ 具有相同周期 L 的周期函数，其中 $0<\mu<2$。

附录 A.4. 傅里叶空间中的 Riesz 分数阶导数

考虑左侧 (+) 和右侧 (–) 分数阶积分

$$
(I^{\mu}_{+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{-\infty}^{x}(x-y)^{\mu-1}f(y)dy, \tag{A.12a}
$$

$$
(I^{\mu}_{-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{x}^{\infty}(y-x)^{\mu-1}f(y)dy. \tag{A.12b}
$$

相应地，Riemann–Liouville 分数阶导数为 [26](§ 5.1)

$$
(D^{\mu}_{+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{x}(x-y)^{n-\mu-1}f(y)dy, \tag{A.13a}
$$

$$
(D^{\mu}_{-}f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\mu)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{x}^{\infty}(y-x)^{n-\mu-1}f(y)dy, \tag{A.13b}
$$

其中 $n-1<\mu<n$。于是，式 (A.13) 的傅里叶变换为 [26](§ 7.1)

$$
\mathcal{F}\left[(D^{\mu}_{\pm}f)(x)\right](k) = (\mp ik)^{\mu}\tilde{f}(k)\,. \tag{A.14}
$$

引入 Riesz 分数阶导数后，我们考虑式（A.14）中傅里叶像的叠加，即

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left[(D^{\mu}_{-}f)(x)\right](k) + \mathcal{F}\left[(D^{\mu}_{+}f)(x)\right](k) \\
&\qquad = \left[(ik)^{\mu}+(-ik)^{\mu}\right]\tilde{f}(k) = 2|k|^{\mu}\cos\frac{\pi\mu}{2}\tilde{f}(k)\,. \quad \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

将这一结果应用于周期函数 $f(x) = e^{i\bar{l}x}$，我们得到 $\tilde{f}(k) = 2\pi\delta(k-l)$，这保证了分数阶算子保持 $g(x)$ 的周期性，这可由傅里叶反演直接得出。

对式 (A.15) 进行傅里叶反演，可定义 Riesz 分数阶导数 $(-\Delta)^{\frac{\mu}{2}}$。在一维情形下，它为

$$(-\partial_x^2)^{\frac{\mu}{2}} f(x) \equiv \partial_{|x|}^{\mu} f(x) = \frac{1}{2\cos\frac{\pi\mu}{2}} \left[D_+^{\mu} + D_-^{\mu}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k|^{\mu} e^{-ik(x-y)} dk\,, \quad \text{(A.16)}$$

其中 $\mathcal{F}^{-1}[|k|^{\mu}](x-y)$ 是核。让我们求出它在 $\mu \in (0,2)$ 时的表达式。因此，我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |k|^{\mu} e^{-ik(x-y)} dk &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} k^{\mu}\cos[k(x-y)]dk \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)\int_0^{\infty} k^{\mu-2}\cos[k(x-y)]dk \\ &= \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{(x-y)^{1-\mu}}{2\Gamma(2-\mu)\cos\left[\frac{(2-\mu)\pi}{2}\right]} = \frac{(x-y)^{-\mu-1}}{2\Gamma(-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}\,. \end{aligned} \quad \text{(A.17)}$$

最终，我们得到

$$\begin{aligned} \partial_{|x|}^{\mu} f(x) &= \frac{1}{2\Gamma(-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y|^{-\mu-1} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)|y|^{-\mu-1}\,, \end{aligned} \quad \text{(A.18)}$$

对于 $\mu > 0$，该式发散，因此需要进行正则化。如这里所示，对 $\mu \in (0,2)$ 进行正则化的一种方法是

$$\partial_{|x|}^{\mu} f(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}} \int_{0+}^{\infty} y^{-\mu-1}\left[f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)\right] dy\,. \quad \text{(A.19)}$$

考虑到 $\Gamma(1-\mu) = -\mu\Gamma(-\mu)$，式 (A.19) 可以改写为 Gr¨unwald-Letnikov-Riesz 分数阶导数 [26] 的形式

$$f^{\mu)}(x) = \frac{\mu}{2\Gamma(1-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}} \int_{0+}^{\infty} \frac{2f(x) - f(x+y) - f(x-y)}{y^{\mu+1}} dy\,. \quad \text{(A.20)}$$

附录 A.5. Gr ¨unwald-Letnikov 导数

Gr¨unwald-Letnikov 分数阶导数与定义在 x 轴上的函数 $f(x)$ 的 $\Delta_h^{\mu} f(x)$ 阶差分有关：$x \in R$。它可以表示为函数 $f(x)$ 的 μ 阶有限差分，步长为 h

$$\Delta_h^{\mu} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\mu}{k} f(x-kh)\,, \quad \mu > 0\,. \quad \text{(A.21)}$$

那么函数

$$f_{\pm}^{\mu)}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_{\pm h} f)(x)}{h^{\mu}}, \quad \mu > 0 \tag{A.22}$$

称为格伦瓦尔德–莱特尼科夫分数阶导数 [26]。已严格证明，表达式 (A.22) 与定义域相同的马尔绍导数 [26](§ 20.1) 一致，其形式为

$$f_{\pm}^{\mu)}(x) = D_{\pm}^{\mu} f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mu}{\Gamma(1-\mu)} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(x \mp y)}{y^{\mu+1}} dy\,, \quad 0 < \mu < 1\,, \tag{A.23}$$

其对称形式为

$$\begin{aligned} f^{\mu)}(x) &= \frac{1}{2\cos\frac{\mu\pi}{2}} \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_{+h} f)(x) + \Delta_{-h} f)(x)}{h^{\mu}} \\ &= \frac{\mu}{2\Gamma(1-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}} \int_{0+}^{\infty} \frac{2f(x) - f(x+y) - f(x-y)}{y^{\mu+1}} dy\,, \end{aligned} \tag{A.24}$$

这与式 (A.20) 一致。由式 (A.10) 和 (A.11) 可知，分数阶算子 (A.24) 保持 $g(x)$ 的周期性。

值得注意的是，式 (A.23) 中的马尔绍导数 $f_{\pm}^{\mu)}(x)$ 对 $0 < \mu < 1$ 采用正则化形式，而式 (A.24) 中的对称组合则对 $0 < \mu < 2$ 进行了正则化。这两种形式都不会破坏指数函数 $e^{i\tilde{l}x}$的周期性。

参考文献

[1] G. Teschl，《常微分方程与动力系统》，数学研究生教材第 140 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012 年。

[2] M. Grifoni，P. H¨anggi，驱动量子隧穿，《物理报告》304 (5) (1998) 229–354。doi:https://doi.org/10.1016/S0370-1573(98)00022-2。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157398000222[3] G. E. Santoro，弗洛凯理论导论，讲义，国际高等研究院，的里雅斯特。URL https://www.ggi.infn.it/sft/SFT_2019/LectureNotes/Santoro.pdf[4] G. Casati，L. Molinari，含周期性含时哈密顿量的“量子混沌”，《理论物理进展增刊》98 (1989) 287–322。doi:10.1143/PTPS.98.287。[5] I. I. Satija，《量子世界中的蝴蝶：最迷人的量子分形的故事》，摩根与克莱普尔出版社，美国加利福尼亚州圣拉斐尔，2016。

[6]J. S. Howland，含时哈密顿量的定态散射理论，《数学年鉴》207 (1974) 315–335。doi:https://doi.org/10.1007/BF01351346。

[7] J. S. Howland，含时哈密顿量的两个问题，载于：J. A. DeSanto、A. W. S´aenz、W. W. Zachary（编），《散射理论的数学方法与应用》，《物理学讲义》第 130 卷，施普林格，柏林，1980 年，第 163–168 页。

[8]R. Ketzmerick、K. Kruse、D. Springsguth、T. Geisel，磁场中的布洛赫电子：为什么混沌会让电子走弯路？，Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 2929–2932。doi:10.1103/PhysRevLett.84.2929。网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.2929

[9] L. Hufnagel、M. Weiss、A. Iomin、R. Ketzmerick、S. Fishman、T. Geisel，由于 av，周期性半导体纳米结构回旋共振中的金属-绝缘体转变
《物理评论B》62 (2000) 15348–15351。doi:10.1103/PhysRevB.62.15348。
URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.62.15348

[10] M.Holthaus，利用周期驱动光学晶格的准能带进行弗洛凯工程，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》49 (1) (2015年) 013001。doi:10.1088/0953-4075/49/1/013001。URL https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/49/1/013001

[11]M. Bukov、L. D’Alessio、A. Polkovnikov，周期驱动系统的普适高频行为：从动力学稳定化到弗洛凯工程，《物理学进展》64 (2) (2015年) 139–226。doi:10.1080/00018732.2015.1055918。

[12]N. Laskin，《分形与量子力学》，《混沌：非线性科学跨学科期刊》10 (4) (2000) 780–790。doi:10.1063/1.1050284。[13] N. Laskin，《分数阶量子力学》，Phys. Rev. E 62 (2000) 3135–3145。doi:10.1103/PhysRevE.62.3135。[14] N. Laskin，《时间分数阶量子力学》，《混沌、孤子与分形》102 (2017) 16–28。[15] V. E. Tarasov，《非哈密顿量与耗散系统的量子力学》，爱思唯尔，阿姆斯特丹，2008年。[16] A. Iomin，《量子力学中的分数阶演化》，《混沌、孤子与分形：X》1 (2019) 100001。doi:https://doi.org/10.1016/j.csfx.2018.100001。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590054418300010

[17] V. E. Tarasov，《具有记忆的开放量子系统的非马尔可夫动力学》，《物理学年鉴》434 (2021年) 168667。doi:https://doi.org/10.1016/j.aop.2021.168667。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491621002736[18]J.-N. Wu、C.-H. Huang、S.-C. Cheng、W.-F. Hsieh，《各向异性单带光子晶体中二能级原子的自发辐射：

《物理评论A》81（2010）023827。doi:10.1103/PhysRevA.81.023827。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.023827[19] S. Longhi，光学中的分数阶Schr¨odinger方程，《光学快报》40（6）（2015）1117–1120。doi:10.1364/OL.40.001117。URL https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-40-6-1117[20] P. Barthelemy、J. Bertolotti、D. S. Wiersma，光的L´évy飞行，《自然》453（2008）495–498。[21] M. Naber，时间分数阶Schr¨odinger方程，《数学物理学杂志》45（2004）3339。[22] B. N. N. Achar、B. T. Yale、J. W. Hanneken，重新审视时间分数阶Schr¨odinger方程，《数学物理进展》2013（2013）290216。[23] J. Trujillo、M. Rivero、B. Bonilla，关于Riemann–Liouville广义Taylor公式，《数学分析及其应用杂志》231（1）（1999）255–265。doi:https://doi.org/10.1006/jmaa.1998.6224。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X98962242[24] V. E. Tarasov，广义记忆：分数阶微积分方法，《分形与分数阶》2（4）（2018）。URL https://www.mdpi.com/2504-3110/2/4/23[25] A. Iomin，梳状湍流扩散中的量子动力学与弛豫，《混沌、孤子与分形》139（2020）110305。doi:https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110305。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077920307013[26] S. G. Samko、A. A. Kilbas、O. I. Marichev，《分数阶积分与导数：理论与应用》，戈登与布里奇出版社，伦敦，1993年。[27] A. Iomin，分数阶时间Schr¨odinger方程：梳状结构上的分数阶动力学，《混沌、孤子与分形》44（4）（2011）348–352。doi:https://doi.org/10.1016/j.chaos.2011.03.005。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077911000403[28] E. Shuryak，量子系统中的非线性共振，《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》44（1976）1070–1080。[29] G. P. Berman、G. M. Zaslavsky，量子非线性共振理论，《物理快报A》61（1977）295–296。

[30]G. P. Berman、A. M. Iomin、G. M. Zaslavsky，相干态中c数投影的准经典近似方法基底，《Physica D：非线性现象》4 (1) (1981) 113–121。doi:https://doi.org/10.1016/0167-2789(81)90008-7。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/01672789819[31] H. Bateman，A. Erd´elyi，《高等超越函数》 [第一至三卷],麦格劳-希尔，纽约，1953–1955。URL http://authors.library.caltech.edu/43491/[32] I. M. Sokolov，J. Klafter，从扩散到反常扩散：爱因斯坦布朗运动诞生一个世纪后，《Chaos：非线性科学跨学科期刊》15 (2) (2005) 026103。doi:10.1063/1.1860472。[33] S. Bochner，扩散方程与随机过程，《美国国家科学院院刊》35 (1) (1949) 368–370。[34] E. Nelson，使用奇异拉普拉斯积分的泛函演算，Transac- tions of the American Mathematical Society 88 (2) (1958) 400–413。URL https://doi.org/10.2307/1993224[35] M. Abramovitz，I. A. Stegun，《数学函数手册：公式、图表与数学表格》，多佛出版社，纽约，1972年。[36] G. M. Zaslavsky，动力系统中的混沌，Harwood Academic，库尔，瑞士，1985年。[37] G. P. Berman，D. I. Kamenev，量子混沌：单色波中的谐振子，Rinton Press，普林斯顿，新泽西州，2001年。[38] L. Reichl，《通向混沌》，施普林格，纽约，2004年。[39] E. Kaslik，S. Sivasundaram，分数阶系统中周期解的不存在

00087

动力系统与

《非线性分析：现实世界应用》13 (3) (2012) 1489–1497. doi:https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.11.013. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1468121811

00321X

[40]A. M. Mathai、R. K. Saxena、H. J. Haubold，《H 函数：理论与应用》，施普林格，纽约，2010年。URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9