arXiv:2302.02351v1 [math.OC] 5 Feb 2023

模型不确定性下具有代际风险分担和长寿趋势的混合型养老金最优投资问题

Ke Fu[a]、Ximin Rong[a, b]、Hui Zhao[a, *]a天津大学数学学院，中国天津 300350b天津大学应用数学中心，中国天津 300072

摘要

本文研究模型不确定性下混合型养老金计划的最优投资问题，其中缴费和给付均根据计划的表现进行调整。此外，本文考虑年龄和时间相关的死亡力以及线性最高年龄，以刻画长寿趋势。假设计划管理者厌恶模糊性，并可投资于无风险资产和股票。计划管理者旨在最坏情形下，通过最小化缴费不稳定风险成本、给付不稳定风险成本和不连续风险，求得最优投资策略和最优代际风险分担安排。通过应用随机最优控制方法，本文在惩罚二次成本函数下推导出闭式解。数值分析和三个特殊情形的结果表明，我们的集体混合型养老金计划有效实现了代际风险分担。此外，研究还表明，当人们寿命延长时，推迟退休似乎是缓解老龄化问题压力的可行方法。

关键词：稳健、混合型养老金、世代交叠、风险分担、长寿趋势、模型不确定性。

1 引言

近年来，由于预期寿命不断延长，退休人员数量持续增加；经济和

*通讯作者。电子邮箱：zhaohuimath@tju.edu.cn（H. Zhao）。

人口结构的变化也给养老金制度带来了巨大压力。固定给付型（DB）计划和固定缴费型（DC）计划是两种传统的养老金计划。在固定给付型（DB）计划中，计划受托人承担金融风险；而在固定缴费型（DC）计划中，由于参与者持有自己的个人账户，他们承担所有长寿和投资风险。此外，固定缴费型（DC）计划费用可负担且透明，因为参与者可以完全掌控自己的缴费。然而，退休时他们可能无法获得充足的养老金待遇，因为其待遇在一定程度上取决于资产回报和利率，而这些因素可能波动不定、难以预测。另一方面，固定给付型（DB）计划倾向于按预先确定的标准提供充足的养老金待遇。因此，这类计划通常不透明，而且未必负担得起，尤其是从计划受托人的角度来看。因此，这两类计划都无法理想地应对人口转型带来的挑战。社会伙伴一直在计划修订养老基金的监管框架。理想的养老金计划应当提供充足的养老金待遇，并在参与者与计划受托人之间实现风险分担。

近年来，许多研究者提出了结合固定给付型（DB）计划与固定缴费型（DC）计划优势的混合型养老金计划。混合型养老金计划介于这两种“极端”之间，因此具有更大的灵活性。于是，许多国家开始推行各种混合型养老金计划。例如，集体固定缴费型计划（Kortleve（2013）；Bovenberg 等人（2014））、目标给付型计划（Munnell 和 Sass（2013）；Wang 等人（2018））、风险分担型固定给付计划（Pugh 和 Yermo（2008））、底线抵消型计划（Chen 和 Hardy（2009））以及名义固定缴费型（NDC）计划（Alonso-Garcia 和 Devolder（2016），Alonso-Garcia 等人（2018））。Turner 和 Center（2014）概述了世界各地混合型养老金计划的发展情况，并将其分为四种类型：荷兰的混合型固定给付计划、瑞典的非金融型固定缴费计划、美国、加拿大和日本的现金余额计划，以及德国的里斯特计划。

混合型养老金计划旨在通过不同年龄群体之间的风险分担，以可持续、稳定且可负担的方式提供更好的退休保障。事实上，已有充分文献证明，代际风险分担可能提升福利。Gollier（2008）证明，与个人计划的参与者相比，在集体养老金计划中，代际风险转移能够提升所有当前及未来世代的福利。这是因为更完善的代际风险共担方案能够提高社会效率，使集体承担更高的风险敞口，从而利用较高的股权溢价。Cui 等人（2011）研究了一种积累制体系，并对金融市场中的风险作了现实描述。他们比较了不同类型积累制养老金体系中的风险分担，例如个人固定缴费型计划、集体固定缴费型计划和传统固定给付型计划，发现随时间发生的风险转移（源于调整机制）能够提高养老金计划中的效用。Jean-Franois（2020）在考虑波动率指数（VIX）的情况下，研究了采用随时间变化的缴费和给付水平的多种集体积累制养老金计划中的代际风险与成本分担。他还得出结论，具有完善的波动率风险调整成分的养老金计划能够提升新加入者及

未来群体的福利。类似研究还可见于 Teulings 和 De Vries（2006）、Beetsma 等人（2012）、Beetsma（2016）以及 Boes 和 Siegmann（2018）。此外，文献中还有其他研究尝试在混合型养老金基金中寻找最优缴费和／或待遇调整政策。参见 Khorasanee（2012）、Wang 和 Lu（2019）、He 等人（2020）及其中所引文献。

此外，在设计代际风险分担机制时，长寿问题也是一个重要因素。人们平均预期寿命的延长对传统养老金计划构成了威胁。Strulik 和 Vollmer（2013）指出，自20世纪下半叶以来，预期寿命的改善很大程度上是由最大年龄的提高推动的。因此，Knell（2018）认为，刻画预期寿命延长的一种直接方法，是假设最大年龄随时间线性增长。Devolder 和 Melis（2015）在两期模型中引入一个对预期生存概率产生随机影响的因子，以反映系统性长寿风险。此外，他们通过死亡力刻画长寿趋势，该死亡力不仅取决于年龄，还纳入了队列特定时间。具体而言，从长期来看，由于医疗进步和经济发展，人们的死亡力相对较低。另一方面，显而易见，死亡力会随着年龄增长而上升。此外，Knell（2018）、Alonso-Garcia 和 Devolder（2019）、Andr´es 等（2014）以及 Holzmann等（2017）在死亡率模型中都考虑了社会经济地位和收入。受 Knell（2018）的启发，本文假设最大年龄是时间的递增函数。此外，我们采用一种年龄和时间相关的死亡力，并称之为修正的梅克汉姆定律，以刻画长寿。

传统上，混合型养老金计划的管理者被假定能够准确了解金融市场的真实概率测度。然而，实践中决策者对真实模型并不确定。例如，参数（尤其是漂移参数）很难精确估计（Merton（1980））。因此，可以说，用于描述模型的任何特定概率测度都可能存在相当程度的模型设定错误。这种因缺乏有关概率测度的信息而导致的不确定性也称为模糊性，这显然不同于风险；风险对应的模型由单一概率测度刻画。为应对决策者的模糊厌恶，Anderson 等人（2003）在连续时间框架下提出了一种鲁棒控制方法。他们假设决策者不信任特定的概率测度，而是将其视为参考测度，并考虑一组在统计上难以与参考测度区分的替代测度。参考测度与替代测度之间的差异受到相对熵的约束，而相对熵在优化过程中起惩罚项的作用。该惩罚项反映了决策者对参考测度的模糊厌恶。最近，Wang 和 Li（2018）研究了一项稳健最优

投资问题，研究对象是缴费确定型（DC）养老金计划中面临随机利率和随机波动率的模糊厌恶成员。此外，Wang Peiqi 等人（2021）考虑了存在违约风险和模型不确定性的目标给付计划（TBP）的最优投资与给付支付问题。

然而，据我们所知，关于模糊性下混合型养老金计划投资问题的文献并不多。但计划管理者始终无法确定参考模型。因此，本文假设代表性混合计划成员具有模糊厌恶倾向。设在一个世代交叠经济中，所有参与者均属于一个由在职成员和退休人员组成的总合养老金基金。在职成员缴纳缴费，同时退休成员从养老金基金领取给付。让所有世代共同分担风险更为合理，而这可通过根据基金盈余（即资产与目标负债之差）调整缴费和给付来实现。这一调整方案以现实案例为依据（例如，见 Ponds and Van（2007））。在这一集体混合型养老金计划中，我们重点研究战略性投资组合配置决策以及养老金政策（即代际风险分担规则），以动态调整养老基金的财务状况。受 Wang 和 Lu（2019）的启发，本研究的最终目标是为退休人员提供充足且稳定的退休福利，并确保在职成员缴费公平有效。同时，计划管理者具有模糊厌恶倾向，旨在确保代际公平，并维持系统的财务可持续性。具体而言，这些目标通过在最坏情形下选择适当的成本函数，最小化代际风险的期望效用，以及缴费和给付的调整幅度来实现；后者分别称为不连续风险、缴费不稳定风险和给付不稳定风险。根据 Haberman（1997）、Josa-Fombellida 等人（2001）以及 Ngwira and Gerrard（2007），我们采用二次成本函数。

本文的贡献如下。首先，我们将模型不确定性纳入考虑，这反映了在许多情况下，决策者并不确定真实模型，并试图在最坏情形下为养老金计划寻找稳健策略。其次，与 Cui 等人（2011）和 Khorasanee（2012）相比，我们所考虑的模型处于世代交叠经济（OLG）中。该世代交叠模型允许人们在每个连续时点进入和退出，所有世代将共同分担风险。此外，我们考虑了年龄和时间相关的死亡力，即修正的梅克汉姆定律，这反映了人口的长寿趋势。最后，继 He 等人（2020）之后，我们考虑了劳动力供给的新进入者负增长率，这可以反映低生育率的事实。

本文其余部分的结构如下。第2节介绍金融市场模型和混合型养老金计划。第3节提出模型不确定性下混合型养老金的最优投资问题和稳健策略。

第4节给出三个特殊情形。第5节展示一些数值结果并进行敏感性分析。最后，第6节总结全文并提出一些进一步的研究思路。

2 模型构建

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 为完备概率空间，其中 $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ 是由二维标准布朗运动生成的完备且右连续的滤过；也就是说，$\mathscr{F}_t$ 是包含金融市场信息以及成员在 t 时退休时的工资信息的滤过，养老金计划的发起人可以获取这些信息，而 $\mathbb{P}$ 是 Ω 上的概率测度。

2.1 金融市场

金融市场由无风险资产（债券）和风险资产（股票）组成。无风险资产和风险资产在时刻 $t \geq 0$ 的价格分别描述为

$$\mathrm{d}S(t) = rS(t)\mathrm{d}t, \quad S(0) = 1, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{d}S_1(t) = S_1(t)\left(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B(t)\right), \quad S_1(0) = 1, \tag{2.2}$$

其中，$r > 0$ 表示无风险利率。μ 是股票的增值率，σ 是波动率，两者 μ 和 σ 均为正数，且 $B(t)$ 是标准布朗运动。为排除套利机会，我们假设 $\mu > r$。

2.2 人口动态

对于人口，我们将建立一个连续确定性框架，并将年龄和时间视为连续变量。假设计划成员在年龄 x_0 时进入劳动力市场，并一直保持活跃状态，直至退休年龄 x_r。如上所述，由于生育率下降和预期寿命延长，死亡力随时间 t 递减、随年龄 x 递增是合理的。这里，我们考虑一种年龄和时间相关死亡率 $\mu(x,t)$，该死亡率遵循修正的梅克汉姆定律，能够动态反映长寿趋势，如以下假设所述。

假设 2.1 年龄和时间相关的死亡力 $\mu(x,t)$ 记为

$$\mu(x,t) = \mathcal{A} + \mathcal{B}\theta^{x-\frac{1}{\omega}t},$$

其中，ω 是一个正参数，称为长寿参数，用来表示长寿趋势，即每过 ω 年，平均预期寿命就增加一年。更准确地说，对于

在时间 0 时，一个年龄为 x岁的队列，其死亡力为 $\mu(x,\ 0)$。 ω 年后，时间 ω的死亡力为 $\mu(x+\omega,\ \omega) = \mathcal{A}+\mathcal{B}\theta^{x+\omega-1}$。理论上，如果不存在长寿参数，时间 ω 的死亡力可能为 $\mathcal{A}+\mathcal{B}\theta^{x+\omega}$。因此，我们所考虑的模型表明，人们的死亡力相对较低，相当于年轻了一岁。总体而言，平均预期寿命将增加一年。

备注 2.1 在这个年龄和时间相关的死亡力模型中，我们注意到，ω越高，长寿趋势发展得越慢，也就是说，全体人口需要更长时间才能实现长寿。相反， ω越低，老龄化问题就越迫切。例如，根据欧盟委员会（*2015*），对于欧盟国家而言，未来 *50* 年出生时预期寿命预计将增加约 *7.5* 年，这意味着几乎 $\omega = 6.67$。

假设 2.2 最大年龄记为 $m\ (t)$

$$m(t) = m_0 + \xi t, 1 \geq \xi \geq 0$$

其中， m_0 是初始最大生存年龄。

这一假设表明，最大年龄呈线性增长，这与实证文献的结论一致。例如，Knell（2018）以及 Oeppen 和 Vaupel（2002）分析了 1840 年至 2000 年间的“女性预期寿命纪录”（即有数据可查的国家所报告的女性预期寿命最高值），并指出其发展趋势几乎完全呈线性。事实上，Strulik 和 Vollmer（2013）已经表明，从 20 世纪下半叶开始，预期寿命的提升在很大程度上是由最大年龄的延长推动的。

记 $p(x,\ t)$ 为生存函数，表示在时间 $t-(x-x_0)$ 进入系统的队列存活至年龄 x 的概率。满足 $p(x_0,\ t) = 1$， $p(m(t)\ t) = 0$，且生存率随年龄增长而下降，即 $\mathrm{d}p(x,\ t)/\mathrm{d}x \leq 0$，其中 $x \in [x_0, m(t)]$。队列在年龄 x 时的死亡风险率为

$$\mu(x,t) \equiv -\frac{\mathrm{d}p(x,t)}{\mathrm{d}x}\frac{1}{p(x,t)},$$

因此， $p(x,\ t)$ 和 $\mu(x,\ t)$ 不仅具有年龄特异性，还包含队列特异性时间指标。满足:

$$p(x,t) = \mathrm{e}^{-\int_0^x \mu(x,t)\mathrm{d}x},$$

因此，年龄和时间相关的生存函数 $p(x,\ t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \mathrm{e}^{-\int_0^{x-x_0}\mu(x_0+u,t-(x-x_0)+u)\mathrm{d}u} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathcal{A}(x-x_0)-\frac{\mathcal{B}}{ln\theta}(\theta^{x-\frac{1}{\omega}t}-\theta^{(1-\frac{1}{\omega})x_0+\frac{1}{\omega}(x-t)})}, \qquad t \geq 0, m(t) \geq x \geq x_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

我们用 $n(t)$ 表示进入率，它描述了在时间 t、年龄为 x_0 时进入工作期的新队列的规模密度。 $n(t)$ 遵循马尔萨斯人口模型$n(t) = n_0 e^{\kappa t}$，其中， n_0 表示时间 0 时新进入者中年龄为 x_0岁的群体密度， κ 表示新进入者的增长率。受 He 等人（2020）和 He 等人（2021）的启发， $\kappa < 0$表示存在严重老龄化问题的人口模型，该问题由低生育率和低死亡率造成。那么，在时间 t 达到年龄 x 的人数为

$$n(t-(x-x_0))p(x,t), \qquad x > x_0,$$

其中， $t-(x-x_0)$ 是该队列加入养老金制度的时间。注意，当 $t \geq 0$ 时， $t-(x-x_0)$ 的值可能为负，这意味着某成员在时间 $t \geq 0$ 的年龄为 x 时，已于 $x-x_0$ 年前加入养老金制度。时间 t 缴费的在职成员总数为

$$NC(t) = \int_{x_0}^{x_r} n(t-(x-x_0))p(x,t)\mathrm{d}x, \tag{2.4}$$

时间 t 领取养老金待遇的退休成员总数为

$$NB(t) = \int_{x_r}^{m(t)} n(t-(x-x_0))p(x,t)\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

这里假设，在工作期间，每个队列都获得劳动收入，并将其标准化为 1。因此，总缴费收入 $TC = \{TC(t) : t \geq 0\}$ 为

$$TC(t) = \int_{x_0}^{x_r} n(t-(x-x_0))p(x,t)c(t)\mathrm{d}x = NC(t)c(t), \tag{2.6}$$

总养老金支付 $TB = \{TB(t) : t \geq 0\}$ 为

$$TB(t) = \int_{x_r}^{m(t)} n(t-(x-x_0))p(x,t)b(t)\mathrm{d}x = NB(t)b(t),$$

其中， $c(t)$ 和 $b(t)$ 分别表示时间 t 的缴费金额和给付金额。关于 $c(t)$ 和 $b(t)$ 的具体形式将在下一节给出。

注 2.2 通过特定设置，可以得到方程（*2.4*）和（*2.5*）。例如，令 $\kappa = 0$，即可得到 *Wang* 等人（*2018*）所分析的模型，这意味着进入率为常数 $n(t) = n_0$。而 $\omega = \infty$ 意味着死亡力仅取决于年龄，这与 *He* 等人（*2020*）的研究一致。

缴费总收入与给付总支出之间的盈余（赤字）将增加（减少）养老金基金的积累。同时，基金积累将动态配置于无风险资产和风险资产。

2.3 混合型养老金计划

养老基金受托人负责资产负债管理。在时间 t 投入风险资产的金额记为 $\pi = \{\pi(t)\ t \geq 0\}$，投入无风险资产的金额则为 $A(t) - \pi(t)$。资产过程 $A(t)$ 的动态可描述为

$$\mathrm{d}A(t) = \pi(t)\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)} + [A(t) - \pi(t)]\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} + [TC(t) - TB(t)]\mathrm{d}t, \quad A(0) = a_0, \tag{2.7}$$

其中 a_0 是时点 0 的初始资产。利用 (2.1) 和 (2.2)，我们可以轻松地将 (2.7) 改写为 s

$$\mathrm{d}A(t) = [\pi(\mu - r) + A(t)r]\mathrm{d}t + [NC(t)c(t) - NB(t)b(t)]\mathrm{d}t + \sigma\pi\mathrm{d}B(t), \quad A(0) = a_0. \tag{2.8}$$

考虑时点 0 的目标缴费 c 和目标给付 b，以及有限时间间隔 $[0, T]$，其中 T 为所谓的终止时点。对于每个年龄群体（记为 x），目标负债等于无风险给付现值与尚未支付的无风险缴费现值之差。这与 Cui 等人（2011）的相关文献中的做法一致。

$$L(x) = \begin{cases} \int_0^T (NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t} - NC(t)c\mathrm{e}^{\tau t})\mathrm{e}^{-r(t-(x-x_0))}\mathrm{d}t, & for \quad x_r \geq x \geq x_0; \\ \int_0^T NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t}\mathrm{e}^{-r(t-(x-x_0))}\mathrm{d}t, & for \quad m(t) \geq x \geq x_r, \end{cases} \tag{2.9}$$

其中，τ 是目标缴费和目标给付的目标瞬时增长率。

在总体层面，基金的目标负债可以简单地计算为各年龄群体负债之和。

$$\begin{aligned} L = &\int_{x_0}^{x_r}\int_0^T (NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t} - NC(t)c\mathrm{e}^{\tau t})\mathrm{e}^{-r(t-(x-x_0))}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &+ \int_{x_r}^{m(t)}\int_0^T NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t}\mathrm{e}^{-r(t-(x-x_0))}\mathrm{d}t\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.10}$$

鉴于基金的年龄构成处于稳定状态，且目标给付水平固定，目标负债 L 具有时间不变性。实际上，如果基金将全部资金投资于无风险资产，那么实际负债将与目标负债 L完全一致。如果基金承担错配风险，例如投资于股票，则相对于目标负债可能出现资金盈余或赤字。

基　　金盈余定义为资产与目标负债水平之间的差额

$$SP(t) = A(t) - L.$$

请注意，集体养老金计划可能产生盈余或赤字，从而导致代际转移，进而实现代际风险分担。

除了如（2.8）所述将计划成员的目标负债与基金资产挂钩，并据此按照（2.10）进行调整外，对于集体混合养老金模型，我们还会动态且同步地调整在职成员当前缴纳的个人缴费以及应支付给退休人员的个人养老金给付；这些调整会受到养老金基金盈余水平的隐含影响，以实现代际风险分担。

为实现上述目标，我们设定一个简单的队列缴费 $c(t)$ 和给付 $b(t)$ 政策，其中每个队列的缴费取决于目标缴费率水平 $c\mathrm{e}^{\tau t}$ 以及每个在职群体的资金余额 $SP_{(t)NC(t)}$；每个队列的给付则取决于目标给付率水平 $b\mathrm{e}^{\tau t}$ 以及每个退休群体的资金余额$SP(t)NB(t)$。

——

$$c(t) = c\mathrm{e}^{\tau t} - \alpha\frac{SP(t)}{NC(t)} = c\mathrm{e}^{\tau t} - \lambda_1(t), \tag{2.11}$$

$$b(t) = b\mathrm{e}^{\tau t} + \beta\frac{SP(t)}{NB(t)} = b\mathrm{e}^{\tau t} + \lambda_2(t), \tag{2.12}$$

其中 $\lambda_1(t) = \alpha\frac{A(t)-L()}{NC\ t}$， $\lambda_2(t) = \beta\frac{A}{NB\ t}(\ t\ -L\ )()$ 分别表示对养老金缴费和养老金支付所作的调整。斜率系数 α 和 β 会随混合养老金制度的调整而随时间变化，因此反映了吸收资金失衡的速度；它们分别是缴费收入和养老金支付的分摊参数。 $\alpha = 1$ 或 $\beta = 1$ 意味着资金失衡会立即得到完全吸收。更具体地说，资金余额的 α 由雇员共同承担，资金余额的 β 由退休人员共同承担。 α 和 β 的值较低，意味着部分资金盈余会留到未来，并由不同世代共同承担；也就是说， α 和 β的值越低，代际风险分担的程度就越高。

这两个调整过程 $\{c(t); t \geq 0\}$ 和 $\{b(t);\ t \geq 0\}$ 描述了养老金制度随时间的运行情况，其中包括在时间 t为每个队列制定缴费和养老金支付决策。当底层基金在时间 t 的基金价值出现盈余（$SP(t) > 0$）时，表明资产投资表现超出预期，我们预计 $\lambda_1(t)$和 $\lambda_2(t)$都会作出正向政策调整，从而在时间 t 提高养老金给付，同时降低所需缴费。当底层基金因投资损失而出现赤字（$SP(t) < 0$）时，我们则预计 $\lambda_1(t)$和 $\lambda_2(t)$都会作出负向政策调整。在这种情况下，增加缴费并降低给付可以重新平衡预算。总之，基金资产回报的高低由在职成员和退休人员共同承担，这意味着存在代际风险转移或风险共担。这种混合养老金模型的数学结构与 Cui 等人（2011）、Khorasanee（2012）和 Wang 和 Lu（2019）研究的混合模型相似。

在下一节中，对于上述养老金模型，我们设定一个

针对混合型养老金计划的连续时间稳健随机最优控制问题。

3 模型不确定性下混合型养老金的最优投资问题

3.1 优化问题

在养老金计划或投资问题的传统框架中，假设成员是模糊中性的，这意味着管理者完全信任由概率测度 $\mathbb{P}$ 给出的上述模型。然而，事实上，在许多情况下，成员无法确切了解真实模型，因此，任何用于描述该模型的特定概率测度都可能导致模型设定错误。金融市场的参数在实践中难以精确估计，且大量实验研究表明，投资者不仅厌恶风险（已知的概率分布），也厌恶模糊性（未知的概率分布）（参见 Peter等（2010））。因此，我们假设管理者具有模糊厌恶，并力求保护自己免受最坏情形的影响。管理者认识到，参考概率 $\mathbb{P}$ 下的模型只是对真实模型的近似，并将一些替代模型纳入考量，这些模型可通过与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度族定义如下

$$\{\mathscr{Q} := \mathbb{Q} | \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}\}.$$

基于这一假设，我们可以利用Girsanov定理改变概率测度，使得由替代测度定义的模型仅在漂移函数方面有所不同。根据Girsanov定理，对于每个 $\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}$，都存在一个渐进可测过程 $\phi(t)$ $t \in [0, T]$，可称为概率扭曲过程，使得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}t} = \Lambda^{\phi}(t),$$

其中

$$\Lambda^{\phi}(t) = \exp\Big\{ \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \phi(s)^2 \mathrm{d}s \Big\}. \tag{3.1}$$

此外，如果 $\phi(t)$ $t \in [0, T]$ 满足Novikov条件

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi(s)^2 \mathrm{d}s\} < \infty,$$

那么，Radon-Nikodym导数过程 $\Lambda^{\phi}(t)$ 是一个 $\mathbb{P}$-鞅。

根据Girsanov定理，在替代测度 $\mathbb{Q}$下，随机过程 $B^{\mathbb{Q}}(t)$ 是一维标准布朗运动，并且有

$$\mathrm{d}B^{\mathbb{Q}}(t) = \mathrm{d}B(t) - \phi(t)\mathrm{d}t.$$

因此，对于给定的测度 $\mathbb{P}$，选择替代测度 $\mathbb{Q}$ 等价于确定过程 ϕ。此外，在替代测度 $\mathbb{Q}$ 下，股票价格和动态资产过程变为

$$\mathrm{d}S_1^{\mathbb{Q}}(t) = S_1(t)\left(\mu \mathrm{d}t + \sigma(\mathrm{d}B^{\mathbb{Q}}(t) + \phi \mathrm{d}t)\right), \quad S_1(0) = 1, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{d}A^{\mathbb{Q}}(t) = [\pi(\mu - r) + A(t)r]\mathrm{d}t + [NC(t)c(t) - NB(t)b(t)]\mathrm{d}t + \sigma\pi(\mathrm{d}B^{\mathbb{Q}}(t) + \phi \mathrm{d}t). \tag{3.3}$$

定义 3.1（可容许策略）。对于任意固定的 $t \in [0, T]$，若某策略

$$\boldsymbol{\pi} = \{(\pi(u), \lambda_1(u)), \lambda_2(u)\}_{u \in [t,T]}$$

满足以下条件，则称其为可容许策略：

(i) $\boldsymbol{\pi}$ 是 $\mathscr{F}_t$-适应的；(ii) 对所有 $u \in [t, T]$，$f(t) \geq 0$ 且 $\mathrm{E}\left[\int_t^T [\pi(u)]^2 \mathrm{d}u\right] < +\infty$；(iii) $(A^{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{\pi})$ 是随机微分方程（SDE）(2.8) 的唯一解。

回顾一下，本文所考虑的混合型养老金计划由在职成员和退休成员共同构成，前者向基金缴费，后者领取养老金给付。由于缴费和给付随时间变化，计划受托人必须选择资产配置、缴费和给付策略，在这两类成员的利益之间取得合理的平衡。理想情况下，基金应以稳定且可持续的方式向每个队列提供尽可能接近目标水平的缴费和给付。由于我们所考虑的养老金计划是一个涉及不同世代的集体计划，养老金受托人的目标是在综合考虑所有世代的基础上，使养老金计划能够稳定、可持续地运行，并在不同世代之间分担投资风险。

在数学上，这一连续时间混合型养老金系统的目标是寻求稳健最优策略 $\boldsymbol{\pi}$，以最小化时间间隔 $[t, T]$ 内缴费不稳定风险、给付不稳定风险和不连续风险的预期折现成本。模型设定与 He 等人（2020）和 Wang 等人（2018）一致。具体而言，缴费和给付应当相对于目标缴费和目标给付保持稳定且具有可比性；与初始积累额相比，最终积累额既不能过高，也不能过低。因此，我们提出了一个由三部分组成的成本函数。第一部分是实际缴费与目标缴费之间的偏差。目标缴费 $ce^{\tau t}$ 是一个参考水平。在任意时刻 $t \in [0, T]$，当 $c(t)$ 相对于 $ce^{\tau t}$ 较大（较小）时，当前在职群体（先前时刻的群体）自然会感到不满，因为与先前时刻的群体（当前在职群体）相比，他们承担了更高的缴费负担。在这种情况下，缴费不稳定风险会造成福利成本。第二部分是实际给付与目标给付之间的偏差

。与第一部分相同， b（t）应尽可能接近 $be^{\tau t}$ ，以确保对所有群体公平。否则，在这种情况下，给付不稳定风险也会造成福利成本。第三部分是用于刻画上述两种风险成本的初始积累额。当最终积累额小于（大于）初始积累额时，就会发生从当前在职群体（其他时刻的群体）向其他时刻的群体（当前在职群体）的代际转移。在这种情况下，积累额不连续风险会造成福利成本。因此，目标是在有限时间范围 $[t,T]$ 内最小化这些偏差。在相关文献中，Josa-Fombellida 等人（2001）、Ngwira and Gerrard（2007）以及 Wang 等人（2018）研究了有限和无限时间范围，其中有限时间范围从数年到数十年不等。本文假设一个合理的有限时间范围，因为养老金管理者更关注其任期内在职群体的利益，这意味着他们不会考虑尚未出生者的利益。关于有限时间范围的更多理由可参见 He 等人（2020）。采用二次偏差作为成本函数，我们将稳健最优投资问题表述如下：

$$V(t,a)=\min_{\boldsymbol{\pi}\in\Pi,\phi}\max_{\mathbb{Q}^{\phi}\in\mathcal{Q}}\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}_{(\boldsymbol{\pi},\phi)}\Big\{\int_t^T\big[\gamma_1(c(u)-c\mathrm{e}^{\tau t})^2\mathrm{e}^{-ru}+\gamma_2(b(u)-b\mathrm{e}^{\tau t})^2\mathrm{e}^{-ru}\big]\mathrm{d}u \\ +\gamma_3(A(T)-a_0\mathrm{e}^{rT})^2\mathrm{e}^{-rT}+\int_t^T\frac{(\phi(u))^2}{2\Psi(u)}\mathrm{d}u\Big\}, \tag{3.4}$$

其中， Π 是（π（t） λ_1（t） λ_2（t））的所有可行策略集合。 γ_1、γ_2 和 γ_3 为非负常数，分别作为权重参数，用以衡量缴费不稳定风险成本、给付不稳定风险成本和不连续风险成本在总成本函数中的重要性。期望是在由 ϕ定义的替代测度 $\mathbb{Q}$ 下计算的。（3.4）式最后一部分是依赖于相对熵的惩罚项，用于衡量替代测度与参考测度之间的差异；相对熵从 t 增加到 $t+$ 时，$\mathrm{d}t$ 等于$\frac{1}{2}\phi^2\mathrm{d}t$。该积分项由 Ψ（t）缩放，该项非负，代表模糊厌恶偏好参数，用于衡量对参考概率 $\mathbb{P}$的信任程度。 Ψ（t）越大，保险人就越厌恶模糊性，对偏离参考测度的惩罚就越小，管理者对参考测度的信任也越低。最后，当 $\Psi=0$时，管理者完全确信真实测度就是參考测度 $\mathbb{P}$。此时，问题（3.4）退化为不存在模糊性时的经典二次偏差最小化问题。当 $\Psi=\infty$时，惩罚项消失，这意味着成员极度模糊（见 Uppal 和 Wang（2003）；Yi 等人（2014）；Wang 和 Li（2018））。为便于解析处理，我们假设 Ψ（t） $=k/V$，其中 k 为正的常数，代表模糊厌恶参数，表示管理者对股票价格具有不同程度的模糊厌恶。

由此，混合型养老金计划的连续时间稳健随机最优控制问题得以建立。管理者通过选择策略，力求在最坏情形下最小化惩罚目标函数。下一节将求解该最优控制问题的最优策略。

3.2 优化问题的鲁棒策略

本节采用标准方法求解最优控制问题 (3.4)，并推导出所有可容许策略下最优策略的闭式表达式，记为 (ϕ^*、 π^*、 λ_1^*、 λ_2^*)。

首先，我们定义一个变分算子 $\mathscr{A}^{\boldsymbol{\pi},\ \phi}$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{\boldsymbol{\pi},\phi}V(t,a) =& V_t + \left[\pi(\mu-r) + ar + NC(t)(c\mathrm{e}^{\tau t} - \lambda_1) - NB(t)(b\mathrm{e}^{\tau t} + \lambda_2) + \sigma\pi\phi\right] V_a \\ &+ \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 V_{aa} + \left(\gamma_1\lambda_1^2 + \gamma_2\lambda_2^2\right)\mathrm{e}^{-rt},\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中， V_t、 V_a、 V_{aa} 是 $V(t,\ a)$ 的偏导数。

根据随机动态规划原理，哈密顿–雅可比–贝尔曼（HJB方程）可推导如下（参见 Uppal 和 Wang (2003)；Yi 等人 (2014)）：

$$\min_{\boldsymbol{\pi}\in\Pi,\phi}\max_{\mathbb{Q}}\left\{\mathscr{A}^{\boldsymbol{\pi},\phi}V(t,a) + \frac{(\phi(t))^2}{2\Psi(t)}\right\} = 0. \tag{3.6}$$

基于上述设定，我们求得 HJB方程 (3.6) 在 $\Psi(t) = k/V$ 条件下的解。以下定理将阐述我们关于鲁棒最优控制问题 (3.4) 中最优资产配置、缴费和待遇调整政策的研究结果。为简化符号，令 $\varphi = (\mu - r)/\sigma$，它表示风险资产的夏普比率。

定理 3.1 对于最优控制问题（3.4），最优资产配置策略、缴费和福利调整策略分别为：

$$\phi^* = -\frac{k\varphi}{2(2k-1)}, \tag{3.7}$$

$$\pi^*(t,a) = \frac{\varphi}{(2k-1)\sigma}(a + Q(t)), \tag{3.8}$$

$$\lambda_1^*(t,a) = \frac{\gamma_3}{\gamma_1}NC(t)P(t)(a + Q(t)), \tag{3.9}$$

$$\lambda_2^*(t,a) = \frac{\gamma_3}{\gamma_2}NB(t)P(t)(a + Q(t)), \tag{3.10}$$

其中， $NC(t)$ 和 $NB(t)$ 分别如式（2.4）和（2.5）所示。相应的价值函数为

$$V(t,a) = \gamma_3\mathrm{e}^{-rt}P(t)(a + Q(t))^2, \tag{3.11}$$

其中， $P(t)$ 和 $Q(t)$ 的表达式如下。记

$$g_1 = \frac{NC(t)^2}{4\gamma_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{rt}}} + \frac{NB(t)^2}{4\gamma_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{rt}}}; \qquad g_2 = NC(t)c\mathrm{e}^{\tau t} - NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t}; \qquad g_3 = \frac{\varphi^2}{2k-1}, \tag{3.12}$$

那么， $P(t)$ 和 $Q(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{R(t)}, \\ Q(t) &= \frac{g_2}{r}(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t)}) - a_0 \mathrm{e}^{rt}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中

$$R(t) = \mathrm{e}^{-(r+g_3)(T-t)} + \frac{4g_1\gamma_3}{2r+g_3}(\mathrm{e}^{-rt} - \mathrm{e}^{-(2r+g_3)T+(r+g_3)t}). \tag{3.14}$$

证明。 根据一阶最优性条件，对（3.6）中括号内的表达式关于 ϕ 求导，函数 $\phi^*(t)$ 为

$$\phi^* = -\frac{k\sigma\pi V_a}{V}. \tag{3.15}$$

将（3.15）代入（3.6），得到

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\pi}\in\Pi} \big\{ & V_t + \left[ar + NC(t)c\mathrm{e}^{\tau t} - NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t}\right] V_a - (NC(t)\lambda_1 + NB(t)\lambda_2)V_a \\ & + \pi(\mu - r)V_a - \frac{k\sigma^2\pi^2 V_a^2}{2V} + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 V_{aa} + \left(\gamma_1\lambda_1^2 + \gamma_2\lambda_2^2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{rt}} \big\} = 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

对（3.6）中括号内的表达式分别关于 π、 λ_1 和 λ_2 求导，令其等于零并求解，可立即得到

$$\pi^* = \frac{\varphi V_a}{\sigma(\frac{kV_a^2}{V} - V_{aa})}, \quad \lambda_1^* = \frac{NC(t)V_a}{2\gamma_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{rt}}}, \quad \lambda_2^* = \frac{NB(t)V_a}{2\gamma_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{rt}}}, \tag{3.17}$$

将（3.17）代入（3.16），记

$$g_1 = \frac{NC(t)^2}{4\gamma_1 \mathrm{e}^{-rt}} + \frac{NB(t)^2}{4\gamma_2 \mathrm{e}^{-rt}},$$

$$g_2 = NC(t)c\mathrm{e}^{\tau t} - NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t},$$

我们有

$$V_t + [ar + g_2]\, V_a - g_1 V_a^2 + \frac{\varphi^2 V_a^2}{2(\frac{kV_a^2}{V} - V_{aa})} = 0, \tag{3.18}$$

为求解 (3.18)，我们尝试猜测解具有以下形式

$$\begin{aligned} V(t,a) &= \gamma_3 \mathrm{e}^{-rt} P(t)(a + Q(t))^2, \\ P(T) &= 1, \quad Q(T) = -a_0 \mathrm{e}^{rT}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

其偏导数为

$$\begin{aligned} V_t &= \gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}\left[(P_t - rP(t))(a+Q(t))^2 + 2P(t)Q_t(a+Q(t))\right], \\ V_a &= 2\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}P(t)(a+Q(t)), \\ V_{aa} &= 2\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}P(t), \end{aligned} \tag{3.20}$$

将 (3.20) 代入 (3.18)，最优策略（控制变量）可表示为函数 $P(t)$、$Q(t)$ 的形式。我们有

$$\begin{aligned} &\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}\big\{(P_t + (r + \frac{\varphi^2}{2k-1})P(t) - 4g_1\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}P(t)^2)a^2 \\ &\quad + 2((P_t + (\frac{\varphi^2}{2k-1} - r)P(t) - 4g_1\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}P(t)^2)Q(t) + g_2P(t) + rP(t)Q(t) + P(t)Q_t)a \\ &\quad + (P_t + (\frac{\varphi^2}{2k-1} - r)P(t) - 4g_1\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}P(t)^2)Q(t)^2 + 2g_2P(t)Q(t) + 2P(t)Q_tQ(t)\big\} = 0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

a^2、a 的系数均为零，由此得到以下微分方程组

$$\begin{aligned} &P_t + (r + \frac{\varphi^2}{2k-1})P(t) - 4g_1\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}P(t)^2 = 0, \\ &2((P_t + (\frac{\varphi^2}{2k-1} - r)P(t) - 4g_1\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}P(t)^2)Q(t) + g_2P(t) + rP(t)Q(t) + P(t)Q_t) = 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

带有 (3.19) 中边界条件的微分方程 (3.22) 可轻松求解。记 $g_3 = \frac{\varphi^2}{2k-1}$，我们有

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{R(t)}, \\ Q(t) &= \frac{g_2}{r}(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t)}) - a_0\mathrm{e}^{rt}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中

$$R(t) = \mathrm{e}^{-(r+g_3)(T-t)} + \frac{4g_1\gamma_3}{2r+g_3}(\mathrm{e}^{-rt} - \mathrm{e}^{-(2r+g_3)T+(r+g_3)t}). \tag{3.24}$$

■

以上，我们推导出了最优投资策略和最优风险分担安排的闭式表达式，同时考虑了缴费率稳定性、给付稳定性和持续代际风险分担这三个相互竞争的目标。

注释 3.1 根据闭式结果，长寿参数 ω 的影响并不那么明显。实际上，π^*,λ_1^*,λ_2^* 与 ω密切相关，因为 $NC(t)$ 和 $NB(t)$ 的表达式中包含生存函数，而其中的 ω 是死亡力中体现的重要长寿参数。

接下来，我们将解读式 (3.8)、(3.9) 和 (3.10) 中给出的最优控制，并为其中一些更令人意外的行为提供经济直觉。

首先，式（3.22）中的 $Q(t)$ 可改写为精算符号形式：

$$Q(t) = g_2 \overline{a}_{\overline{T-t}|r} - a_0 \mathrm{e}^{rt},$$

其中，$\overline{a}_{\overline{T-t}|r}$ 是按利息力 r 估值、在剩余期限内连续支付的确定年金现值。此外，式（3.12）中的 g_2 表示目标总缴款与目标总给付之差。因此，$Q(t)$ 中的第一项是在时点 t 对剩余期限内目标总缴款与目标总给付之差所作的现值，第二项则是初始基金在时点 t 的累积资产。现在，我们可以给出以下注释。

注释3.2 式（*3.8*）中的 π^* 可改写为一个固定比例 $\left(\frac{\varphi}{(2k-1)\sigma}\right)$，乘以其总资产与计划目标现值之间的盈余或不足。

$$\pi^* = \frac{\varphi}{(2k-1)\sigma}(a + g_2 \overline{a}_{\overline{T-t}|r} - a_0 \mathrm{e}^{rt}),$$

这里的总资产既包括其金融资产 $a(t)$，也包括在剩余期限内将收取的目标总缴款与目标总给付之差的现值；而计划的“目标”反映的是目标累积资产。所有项目均按无风险利率估值，这与 *Wang* 等人（*2018*）的做法一致。因此，只有当计划的总资产不足以通过仅投资于无风险资产来满足计划目标时，才需要投资于风险资产。

接下来，我们将重点转向最优风险分担调整政策。与 $Q(t)$ 类似，$P(t)$ 也可以改写为精算符号：

$$\frac{1}{P(t)} = \mathrm{e}^{-(\gamma-r)(T-t)} + 4g_1\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt} \overline{a}_{\overline{T-t}|\gamma} \tag{3.25}$$

$$= \mathrm{e}^{-(\gamma-r)(T-t)} + \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1} NC(t)^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} NB(t)^2\right) \overline{a}_{\overline{T-t}|\gamma}, \tag{3.26}$$

其中，$\gamma = 2r + g_3$ 和 $\overline{a}_{\overline{T-t}|\gamma}$ 是在利息力为 γ 时，对期限剩余部分连续给付的确定年金现值。因此

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} NC(t)^2 P(t) = \frac{1}{\frac{\gamma_1}{\gamma_3 NC(t)^2} \mathrm{e}^{-(\gamma-r)(T-t)} + \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{NB(t)}{NC(t)}\right)^2\right) \overline{a}_{\overline{T-t}|\gamma}},$$

其中，分母表示在调整后利率 γ 下，对时点 t 起、持续 $T-t$ 年的连续投资 $1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{NB(t)}{NC(t)}\right)^2$ 进行估值所得的现值，同时在 $T-t$ 年末留下一笔一次性总额 $\frac{\gamma_1}{\gamma_3 NC(t)^2}$，并按调整后利率 $\gamma - r$ 估值。$\frac{\gamma_3}{\gamma_2} NB(t)^2 P(t)$ 也可以用同样的方法推导。

—

注3.3 λ_1^* 和 λ_2^* 的表达式具有相似的形式；在式 *3.9*（*3.10*）两边同乘 $NC(t)(NB(t))$，可得

$$NC(t)\lambda_1^* = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} NC(t)^2 P(t)(a + Q(t)),$$

$$NB(t)\lambda_2^* = \frac{\gamma_3}{\gamma_2} NB(t)^2 P(t)(a + Q(t)),$$

并且我们发现，时刻 t 的最优总缴费调整和最优总给付调整是动态调整：它们会将计划总资产相对于计划目标的当前盈余（不足）分摊到期限剩余的年数中，并将其中按比例留存的部分作为期限结束时的遗留基金。

4 特殊情形

4.1 无模型不确定性时混合型养老金的最优投资问题

在无不确定性的假设下，正如我们在第 3.1 节所述，当 $\Psi = 0$ 在 (3.4) 中时，管理者完全确信真实测度就是参考测度$\mathbb{P}$。在这种情况下，问题 (3.4) 退化为不存在模糊性时的经典二次偏差最小化问题。由于 $\Psi(t) = k/V$，其中 k 为正的常数，表示模糊厌恶参数，即管理者对股票价格的模糊厌恶程度，因此，我们可以在问题 (3.4) 中设定 $k = 0$。以下是在不存在模型不确定性时的经典二次偏差最小化问题。

$$\begin{aligned} V(t,a) = \min_{\boldsymbol{\pi}\in\Pi} \Big\{ \int_t^T \big[\gamma_1(c(u) - c\mathrm{e}^{\tau t})^2 \mathrm{e}^{-ru} + \gamma_2(b(u) - b\mathrm{e}^{\tau \mathrm{t}})^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{ru}}\big]\mathrm{d}u \\ + \gamma_3(A(T) - a_0\mathrm{e}^{rT})^2\mathrm{e}^{-rT} \Big\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

问题 (4.1) 的结果由下述定理 (4.1) 给出，该定理由定理 3.1 中的集合 $k = 0$ 推导得出。

定理4.1 最优资产配置策略、缴费和福利调整策略分别为：

$$\pi^*(t,a) = -\frac{\varphi}{\sigma}(a + Q(t)), \tag{4.2}$$

$$\lambda_1^*(t,a) = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} NC(t)P(t)(a + Q(t)), \tag{4.3}$$

$$\lambda_2^*(t,a) = \frac{\gamma_3}{\gamma_2} NB(t)P(t)(a + Q(t)), \tag{4.4}$$

其中， $NC(t)$ 和 $NB(t)$ 分别如式（2.4）和（2.5）所示。相应的价值函数为:

$$V(t,a)=\gamma_3 \mathrm{e}^{-rt}P(t)(a+Q(t))^2, \tag{4.5}$$

其中， $P(t)$和 $Q(t)$的表达式如下。记

$$g_1=\frac{NC(t)^2}{4\gamma_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{rt}}}+\frac{NB(t)^2}{4\gamma_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{rt}}}; \qquad g_2=NC(t)c\mathrm{e}^{\tau t}-NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t}; \qquad g_3=-\varphi^2, \tag{4.6}$$

则 $P(t)$和 $Q(t)$可表示为

$$\begin{aligned} P(t)&=\frac{1}{R(t)},\\ Q(t)&=\frac{g_2}{r}(1-\mathrm{e}^{-r(T-t)})-a_0\mathrm{e}^{rt}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中

$$R(t)=\mathrm{e}^{-(r+g_3)(T-t)}+\frac{4g_1\gamma_3}{2r+g_3}(\mathrm{e}^{-rt}-\mathrm{e}^{-(2r+g_3)T+(r+g_3)t}). \tag{4.8}$$

注释 4。1 g_1 和 g_2 不受不确定性影响，而 g_3 与不确定性有关。可以看出，随着时间推移，风险资产的投资比例逐渐降低，且低于存在模型不确定性时的比例。缴费低于存在模型不确定性时的缴费，而退休福利则高于存在模型不确定性时的水平。这主要是因为养老金管理者对模型有信心，不必承担模型不确定性风险。详细分析请参见第5节的数值分析。

4.2 不考虑长寿趋势的混合型养老金最优投资问题

在不考虑长寿趋势的假设下，我们可以在假设 2.1 中令 $\omega=\infty$ ，并在假设 2.2 中令$\xi=0$ 。因此，最高存活年龄为常数 m_0 ，生存函数 $p(x)$记为

$$p(x)=\mathrm{e}^{-\mathcal{A}(x-x_0)-\frac{\mathcal{B}}{ln\theta}(\theta^x-\theta^{x_0})}, \qquad m_0\geq x\geq x_0. \tag{4.9}$$

这与 Wang 和 Lu（2019）的结果相同。此外，最优投资问题与式（3.4）相同，该式由下式给出:

$$\begin{aligned} V(t,a)=\min_{\boldsymbol{\pi}\in\Pi,\phi}\max_{\mathbb{Q}^\phi\in\mathcal{Q}}\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}_{(\boldsymbol{\pi},\phi)}\Big\{\int_t^T\big[\gamma_1(c(u)-c\mathrm{e}^{\tau t})^2\mathrm{e}^{-ru}+\gamma_2(b(u)-b\mathrm{e}^{\tau t})^2\mathrm{e}^{-ru}\big]\mathrm{d}u\\ +\gamma_3(A(T)-a_0\mathrm{e}^{rT})^2\mathrm{e}^{-rT}+\int_t^T\frac{(\phi(u))^2}{2\Psi(u)}\mathrm{d}u\Big\}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

结果由以下定理 4.2 给出，该定理通过在定理 3.1 中设置 $\omega = \infty$ 和 $\xi = 0$ 得出。

定理 4.2 最优资产配置策略、缴费和福利调整策略分别为

$$\phi^* = -\frac{k\varphi}{2(2k-1)}, \tag{4.11}$$

$$\pi^*(t,a) = \frac{\varphi}{(2k-1)\sigma}(a + Q(t)), \tag{4.12}$$

$$\lambda_1^*(t,a) = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} NC(t)P(t)(a + Q(t)), \tag{4.13}$$

$$\lambda_2^*(t,a) = \frac{\gamma_3}{\gamma_2} NB(t)P(t)(a + Q(t)), \tag{4.14}$$

其中， $NC(t)$ 和 $NB(t)$ 表示为

$$NC(t) = \int_{x_0}^{x_r} n(t-(x-x_0))p(x)\mathrm{d}x, \tag{4.15}$$

且在时间 t 领取养老金待遇的退休成员总数为

$$NB(t) = \int_{x_r}^{m_0} n(t-(x-x_0))p(x)\mathrm{d}x. \tag{4.16}$$

其中， $p(x)$ 由式 (4.9) 给出。

相应的价值函数为

$$V(t,a) = \gamma_3 \mathrm{e}^{-rt} P(t)(a + Q(t))^2, \tag{4.17}$$

其中， $P(t)$ 和 $Q(t)$ 的表达式如下。记

$$g_1 = \frac{NC(t)^2}{4\gamma_1 \mathrm{e}^{-rt}} + \frac{NB(t)^2}{4\gamma_2 \mathrm{e}^{-rt}}; \qquad g_2 = NC(t)c\mathrm{e}^{\tau t} - NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t}; \qquad g_3 = \frac{\varphi^2}{2k-1}, \tag{4.18}$$

那么， $P(t)$ 和 $Q(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{R(t)}, \\ Q(t) &= \frac{g_2}{r}(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t)}) - a_0 \mathrm{e}^{rt}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中

$$R(t) = \mathrm{e}^{-(r+g_3)(T-t)} + \frac{4g_1\gamma_3}{2r+g_3}(\mathrm{e}^{-rt} - \mathrm{e}^{-(2r+g_3)T+(r+g_3)t}). \tag{4.20}$$

注4。2 g_1 和 g_2 受到长寿趋势的影响，而 g_3 则不受影响。可以看出，投资于风险资产的比例低于存在长寿趋势时的比例，最优缴费低于存在长寿趋势时的最优缴费，而最优退休福利则高于存在长寿趋势时的最优退休福利。主要原因在于，若不考虑长寿趋势的影响，养老金制度便不存在老龄化问题，而现实中的养老金制度会受到长寿趋势的影响。因此，必须考虑存在长寿趋势的养老金制度。详细分析请参见第*5*节的数值分析。

4.3 无模型不确定性并考虑长寿因素的混合型养老金最优投资问题

在无不确定性且不存在长寿趋势的假设下，设 $k=0$, $\omega=\infty$,$\xi=0$。最优投资问题与式 (4.1) 相同，表示为

$$\begin{aligned} V(t,a)=\min_{\boldsymbol{\pi}\in\Pi}\Bigg\{\int_t^T \big[\gamma_1(c(u)-c\mathrm{e}^{\tau t})^2\mathrm{e}^{-ru}+\gamma_2(b(u)-b\mathrm{e}^{\tau \mathrm{t}})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{ru}}\big]\mathrm{d}u \\ +\gamma_3(A(T)-a_0\mathrm{e}^{\mathrm{rT}})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}}\Bigg\} \end{aligned} \tag{4.21}$$

结果由以下定理4.3给出，该定理由在定理 3.1 中设定 $k=0$,$\omega=\infty$ and$\xi=0$ 推导而来。

定理4.3 最优资产配置策略、缴费和福利调整策略分别为

$$\pi^*(t,a)=-\frac{\varphi}{\sigma}(a+Q(t)), \tag{4.22}$$

$$\lambda_1^*(t,a)=\frac{\gamma_3}{\gamma_1}NC(t)P(t)(a+Q(t)), \tag{4.23}$$

$$\lambda_2^*(t,a)=\frac{\gamma_3}{\gamma_2}NB(t)P(t)(a+Q(t)), \tag{4.24}$$

其中 $NC(t)$ 和 $NB(t)$ 分别如式 (4.15) 和 (4.16) 所示。相应的价值函数为

$$V(t,a)=\gamma_3\mathrm{e}^{-rt}P(t)(a+Q(t))^2, \tag{4.25}$$

其中， $P(t)$ 和 $Q(t)$ 的表达式如下。我们记

$$g_1=\frac{NC(t)^2}{4\gamma_1\mathrm{e}^{-rt}}+\frac{NB(t)^2}{4\gamma_2\mathrm{e}^{-rt}};\qquad g_2=NC(t)c\mathrm{e}^{\tau t}-NB(t)b\mathrm{e}^{\tau t};\qquad g_3=-\varphi^2, \tag{4.26}$$

则 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{R(t)}, \\ Q(t) &= \frac{g_2}{r}(1-\mathrm{e}^{-r(T-t)}) - a_0\mathrm{e}^{rt}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

其中

$$R(t) = \mathrm{e}^{-(r+g_3)(T-t)} + \frac{4g_1\gamma_3}{2r+g_3}(\mathrm{e}^{-rt} - \mathrm{e}^{-(2r+g_3)T+(r+g_3)t}). \tag{4.28}$$

注4.3 无论是否考虑模型不确定性和长寿趋势，本研究都与 *He* 等人（*2020*）和 *Wang* 和 *Lu*（*2019*）的研究非常相似，所得结果也相近。因此，本文的研究结果涵盖了 *He* 等人（*2020*）和 *Wang* 和 *Lu*（*2019*）的研究成果。

5 数值示例

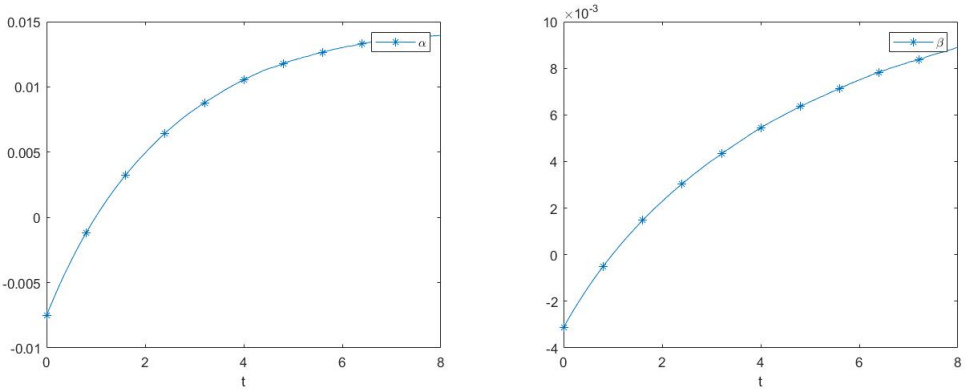
在第 3 节中，我们推导出了混合养老金模型中各队列稳健最优投资配置策略，以及缴费和给付的调整策略的显式表达式。本节将通过数值示例说明有关最优策略的研究结果。

数值模拟中的参数设置主要参照 Wang 和 Lu（2019）文献中的设定。在人口统计方面，我们假设新进入劳动力市场的人数呈负增长，以研究老龄化问题（$\kappa = -0.005$）的影响，该假设描述了劳动力供给负增长的情形。此假设与当前现实相去甚远，但可能很快就会出现。对于年龄和时间相关的生存函数，设定 $\theta = 1.124$、 $\mathcal{A} = 0.000022$、 $\mathcal{B} = 2.7^{-6}$。此外，我们设定 $\omega = 4$，这意味着平均预期寿命每 4 年增加 1 年。

表1：数值模拟中的参数设置

κ	θ	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	ω	x_0	x_r	n_0	a_0	T	m_0
-0.005	1.124	0.000022	2.7×10^{-6}	4	25	65	10	3000	20	100
c	b	τ	γ_1	γ_2	γ_3	r	μ	σ	k	ξ
0.1	0.7	0.02	2	2	2	0.01	0.05	0.15	2	0.25

在养老金规则方面，新进入者进入养老金制度的年龄为 x_0 =25 岁，退休年龄为 $x_r = 65$岁。时间 0 时的新进入者人数为 $n_0 = 10$。初始基金积累为 $a_0 = 3000$。时间范围为 $T = 20$。此外，目标缴费为 $c = 0.1$，目标给付为 $b = 0.7$。目标增长率为



(a) (b)

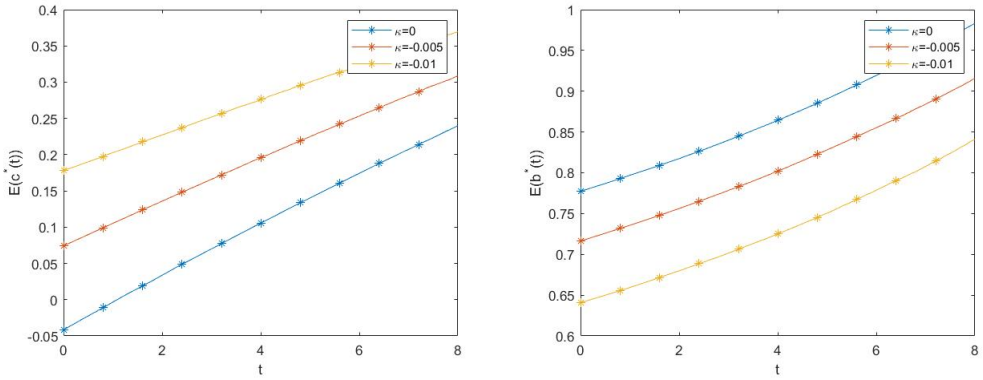
图1：缴费收入和养老金支付的分摊参数 α, β 随时间的变化

确定性利率 $r = 0.02$。我们假设权重参数为 $\gamma_1 = 2$， $\gamma_2 = 2$， $\gamma_3 = 2$，并将改变其值以分析影响。

在金融市场方面，无风险利率为 $r = 0.01$。风险资产的预期收益率和波动率分别为 $\mu = 0.05$ 和 $\sigma = 0.15$。因此，夏普比率为 $\varphi = 0.2667$。最后，模糊厌恶参数为 $k = 2$。

在下文中，我们使用蒙特卡洛方法进行数值分析。首先，将时间间隔 $[0, 20]$ 划分为 1000 个子区间。对于每个子区间，我们生成一个服从正态分布的随机变量，并将其应用于风险资产的共同随机源。根据工资水平和风险资产价格，以及第 3 节中得到的最优控制策略，我们可以得出子区间末的基金新积累额。然后，根据新的积累额，使用 (2.11)、(2.12)、(3.8)、(3.9)、(3.10) 重新计算最优缴费、最优给付和最优资产配置金额。按照上述步骤，在下一个子区间中使用新确定的 π^*、 c^*、 b^*重复这一过程，从而在时间间隔 $[0, 20]$内得到连续的 1000 个 π^*、 c^*、 b^* 值。将这一过程重复 1000 次后，我们得到每个子区间末 π^*、 c^*、 b^* 的经验分布，并将最优缴费率 $\mathbb{E}c^*(t)$ 的平均值、最优给付 $\mathbb{E}b^*(t)$ 的平均值以及最优风险投资比例 $\mathbb{E}\left(\pi^*_{(t)} A^*(t)\right)$ 的平均值用于后续分析。

根据表1中的参数设置，图1展示了混合养老金制度中缴费收入和养老金给付的分摊参数信息 α, β 。 α 和 β 呈现出相似的趋势。正如我们在第2节所述， α 和 β的值越低，代际风险分担程度越高。因此，养老金制度逐渐减少转移至未来的资金盈余部分，即降低代际风险分担程度。



(a) (b)

图2：新进入者增长率 κ 对最优缴费 $\mathbb{E}c^*(t)$ 和最优给付 $\mathbb{E}b^*(t)$ 的影响

在敏感性分析的第一部分，我们研究人口趋势和时间间隔对随时间变化的最优控制策略 t的影响。

首先，我们研究新进入者增长率 κ 对混合养老金模型最优策略的影响。如图2所示，当新进入者增长率下降时，抚养比会上升，进而导致养老金预算赤字增加。因此，缴费大幅增加，同时给付减少。如图3所示，当新进入者增长率下降时，投向风险资产的比例会上升。养老金管理者需要承担更多投资风险，以重新平衡养老金预算。此外，我们注意到，当 $\kappa = 0$ ，这意味着每年进入养老金计划体系的人数为 n_0 ，且人口在这20年间保持相对稳定。在这种情况下，前两年缴费和最优投资比例为负，因为初期财务压力并不大。

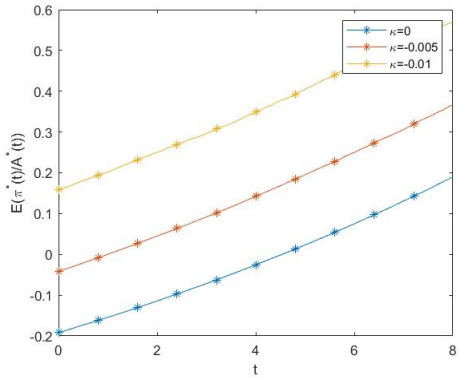
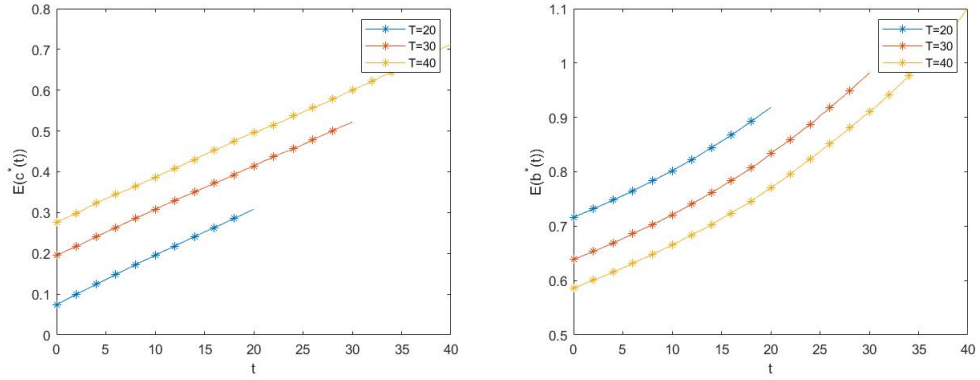


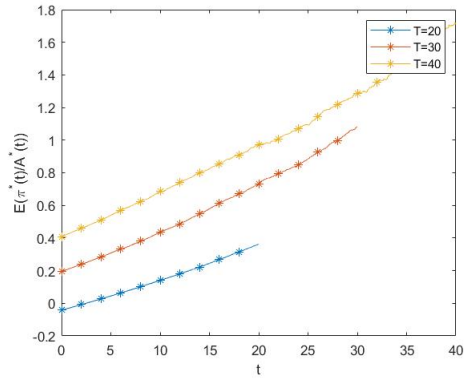
图3：新进入者增长率 κ 对最优投资比例$\mathbb{E}$（$\pi^*_{(t)}\, A^*(t)$）的影响



(a) (b)

图4：时间间隔 T 对最优缴费 $\mathbb{E}c^*$（t）和最优给付$\mathbb{E}b^*$（t）的影响

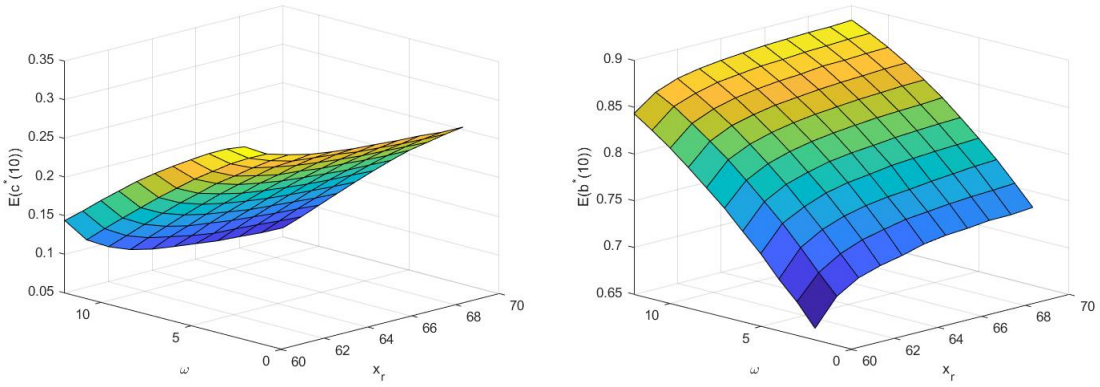
接下来，我们研究时间间隔 T 对最优策略的影响。如图4所示，时间间隔越长，缴费越高、给付越低，因为遥远未来的不确定性更大，因此我们必须向养老金制度投入足够的资金以满足预算要求。如图5（a）所示，当考虑的时间间隔相对较长时，投向风险资产的比例更高，因为养老金制度需要更多资金才能维持可持续性。



Figu图 5：时间间隔 T 对最优投资比例 $\mathbb{E}$ 的影响（$\frac{\pi^*(t)}{A^*(t)}$）

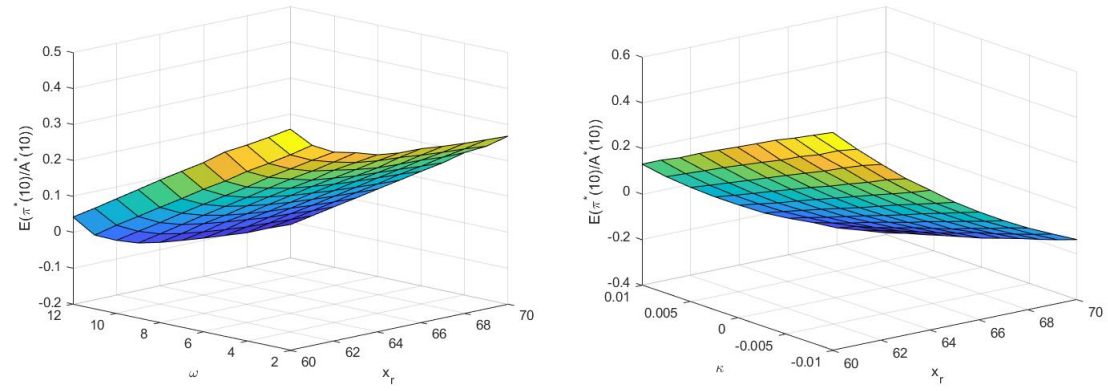
在敏感性分析的第二部分，我们研究两个维度参数在时间 10 对最优策略的交叉影响。

首先，我们研究退休年龄 x_r 和长寿参数 ω 对最优策略的影响。见图6和图7(a)。 ω 较低意味着老龄化问题相对紧迫，这会导致缴费更高、风险资产比例更高、给付更低。这是因为我们的养老金制度中退休人员会更多；提高缴费和风险资产比例能够增加资产，从而维持养老金制度的稳定和可持续性。同时，如果能够推迟退休年龄，风险资产比例和缴费会略有下降，而给付会增加，因为养老金制度中的在职群体更多，且有足够的积累额用于养老金支付。这可以减轻缴费负担，并在一定程度上降低风险承担和不连续风险。因此，根据长寿参数 ω的变化，我们可以选择合适的退休年龄，确保养老金制度平稳运行。



(a) (b)

图6：退休年龄 x_r 和 ω 对最优缴费 $\mathbb{E}c^*(t)$ 和最优给付 $\mathbb{E}b^*(t)$ 的影响

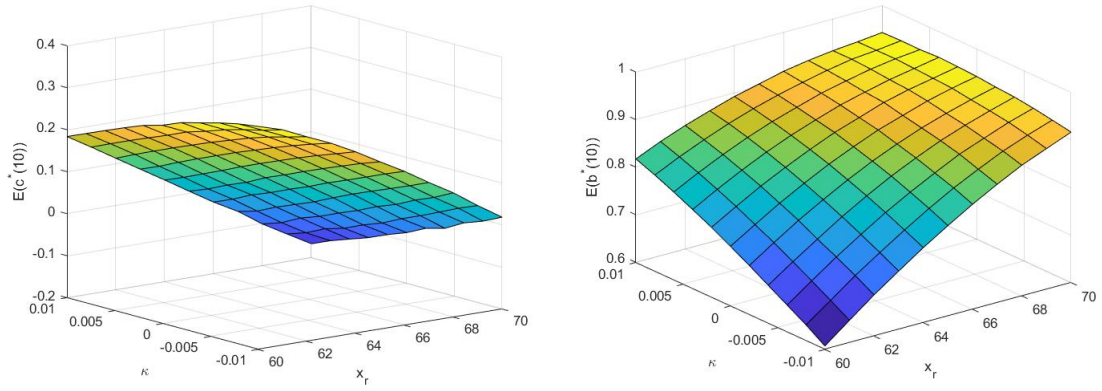


(a) (b)

图7：退休年龄 x_r 和 ω、退休年龄 x_r 以及新进入者增长率 κ 对最优投资比例 $\mathbb{E}(\frac{\pi^*(t)}{A^*(t)})$ 的影响

其次，我们研究退休年龄 x_r 和新进入者增长率 κ对最优策略的影响。见图7(b)和图8，当新进入者增长率较低且人们较早退休时，缴费率和风险投资比例都较高。同时，我们发现，将退休年龄从60岁推迟到70岁，可以抵消新进入者增长率从0.01降至-0.01所带来的负面影响。因此，推迟退休是缓解老龄化问题不利影响的重要措施。这一结论与 He 等人（2020）的研究一致。

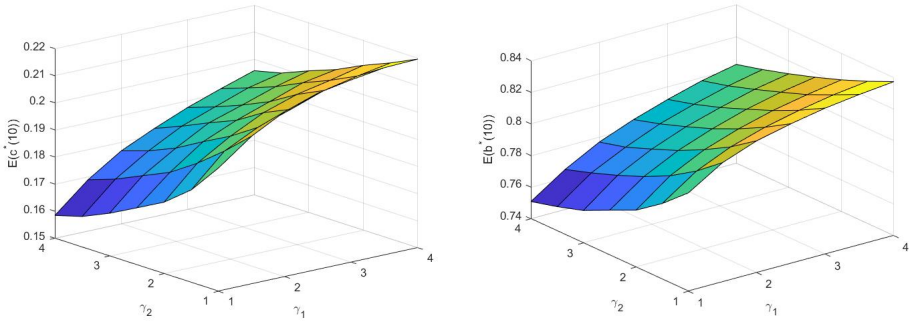
最后，我们考察不稳定缴费权重参数 γ_1



(a) (b)

图8：退休年龄 x_r 和新进入者增长率 κ 对最优缴费 $\mathbb{E}c^*(t)$ 和最优给付 $\mathbb{E}b^*(t)$ 的影响

和给付风险 γ_2 对最优策略的影响。图 9 显示，当 γ_1 较高、 γ_2 较低时，也就是说，我们更关注缴费不稳定风险，而非给付不稳定风险，此时缴费和给付都较高。这表明，只要保持缴费稳定且充足，给付自然就能得到满足。



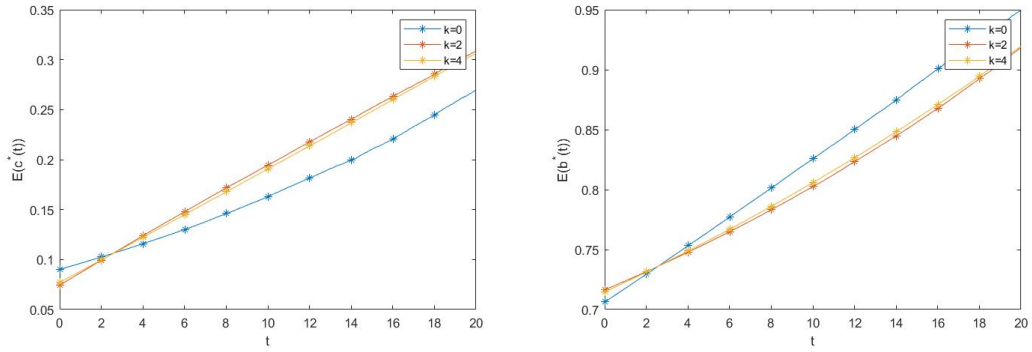
(a) (b)

图9： γ_1 和 γ_2 对最优缴费 $\mathbb{E}c^*(t)$ 和最优给付$\mathbb{E}b^*(t)$ 的影响

在敏感性分析的第三部分，我们研究了第4节讨论的特殊情形。

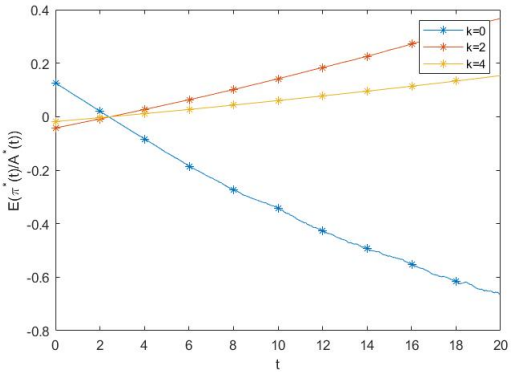
首先，在无不确定性的假设下，图10和图11是与 $k=2$ 和 $k=4$相比的数值分析。当不存在模型不确定性时，缴费相对较低，而给付相对较高。此外，投资比例呈现出完全不同的模式。这是因为养老金管理者相信

真实模型，且不存在模型不确定性风险。



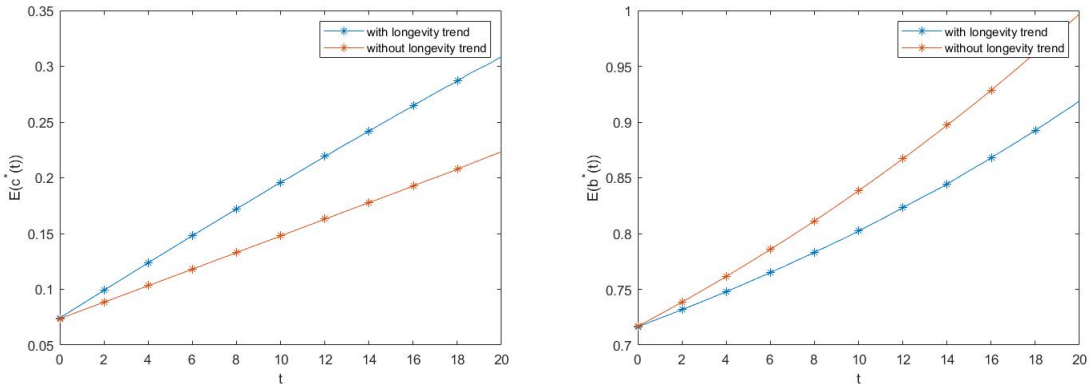
(a) (b)

图10：不确定性对最优缴费 $\mathbb{E}c^*(t)$ 和最优给付$\mathbb{E}b^*(t)$ 的影响



Fig图11：不确定性对最优投资比例 $\mathbb{E}(\pi^*_{(t)}A^*(t))$ 的影响

接下来，在存在长寿趋势的假设下，图12和图13是与包含长寿趋势的模型相比的数值分析。当不存在长寿趋势时，缴费和投资比例相对较低，而给付相对较高。没有长寿趋势，养老金计划面临的压力不大，因此可以将少量资产投资于金融市场。



(a) (b)

图12：长寿趋势对最优缴费 $\mathbb{E}c^*(t)$ 和最优给付 $\mathbb{E}b^*(t)$ 的影响

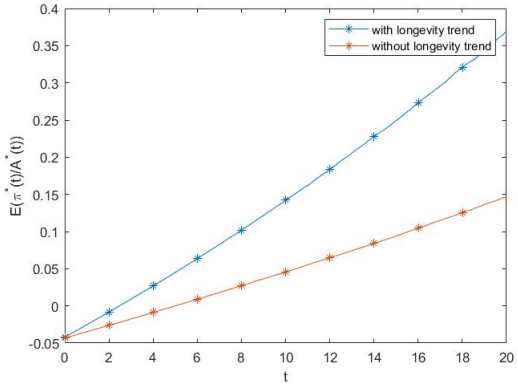
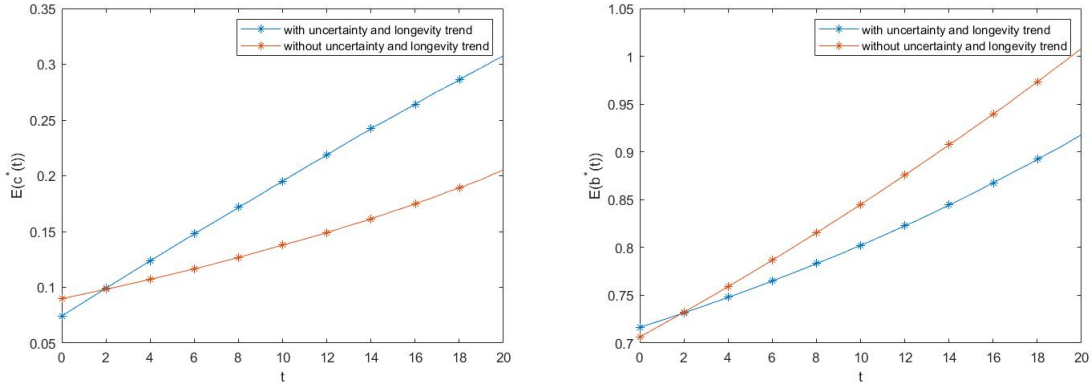


Figure 13：长寿趋势对最优投资比例 $\mathbb{E}\left(\frac{\pi^*(t)}{A^*(t)}\right)$

最后，在不存在不确定性和长寿趋势的假设下，缴费相对较低，而给付相对较高。此外，投资比例呈现出截然不同的模式。在不存在不确定性和长寿趋势的情况下，养老金管理者相信真实模型，也不存在老龄化问题带来的压力。因此，降低风险资产的投资比例和缴费是合理的，而退休人员退休后可以领取更多养老金，这与 He 等人（2020）和 Wang 等人（2018）的研究结论一致。



(a) (b)

图14：不确定性和长寿趋势对最优缴费 $\mathbb{E}c^*(t)$ 和最优给付 $\mathbb{E}b^*(t)$ 的影响

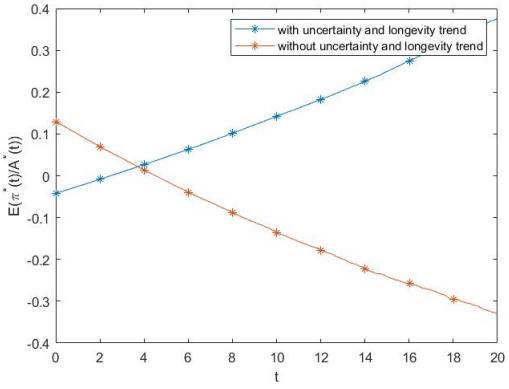


图15：不确定性和长寿趋势对最优投资比例 $\mathbb{E}(\pi^*(t)\ A^*(t))$ 的影响

6 结论

本文研究了模型不确定性下混合型养老金计划的最优缴费、最优给付支付和最优资产配置策略，以尽量降低缴费不稳定风险成本、给付不稳定风险成本和不连续风险。在世代交叠经济中，所有参与者均属于一个同时包含在职成员和退休人员的总合养老金基金。针对这一混合型养老金基金，我们提出了一个动态可控模型。此外，为刻画随时间推移而降低、随年龄增长而升高的长寿趋势，我们考虑了线性形式的最高存活年龄，以及年龄和时间相关的死亡力。基金资产投资于

投资于无风险资产和风险资产，并采用惩罚二次偏差作为成本函数。通过根据盈余或赤字（即基金资产与目标负债之间的差额）调整缴费率和给付，基金结余便可由不同世代共同承担，包括雇员和退休人员。我们在最坏情形下通过求解 HJB方程的最小化问题，得到了混合型养老金计划的鲁棒最优策略。在数值分析部分，我们考察了不同参数的影响。在大多数情况下，缴费率和给付呈现相反的变化趋势，因为养老金基金必须始终保持稳定和平衡。此外，时间间隔会对缴费和风险资产配置比例产生正向影响，这意味着我们必须备足资金，以应对长期运行的混合养老金制度。另外，推迟退休年龄能够抵消新进入者增长率下降带来的负面影响，从而降低缴费并提高给付。因此，推迟退休是缓解老龄化问题不利影响的一种可行措施。在三个特殊情形的分析中，我们发现，将不确定性和长寿因素纳入考量，会提高风险资产投资比例和缴费水平，并降低给付。

不过，未来的研究仍有许多方面值得探讨。首先，我们假设死亡力取决于年龄和时间。由于生育率下降、预期寿命延长，这一假设是合理的。此外，值得一提的是，一些研究强调了社会经济地位、收入与死亡率之间的关系；参见Andr´es等（2014）和Holzmann等（2017）。在死亡率模型中考虑社会经济地位和收入，或许能制定出在实践中更加公平的风险分担策略。其次，其他持续存在的系统性风险和市场不完备因素，例如通货膨胀风险和实际利率风险，可能进一步增强代际风险分担提升福利的潜力，因为这些风险往往无法在金融市场上对冲。此外，我们假设工资恒定为1，但这并不现实。实际上，采用随机工资过程会更合理，我们将把这一问题留待未来研究。最后，按照惯例，我们将无风险利率视为贴现率。然而，Jesus和Navas（2009）以及Josa-Fombellida和Navas（2020）在连续时间设定下，引入了具有非恒定贴现率的动态优化问题分析。这是一个非常符合实际的假设，因为非恒定贴现反映了决策者的时间偏好取决于其所处的时间位置，但这可能导致时间不一致性，因此我们需要修改HJB方程来求解这类问题。

7 致谢

作者衷心感谢审稿人提出的宝贵建议。本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：11871052,

12171360、11771329）、国家社会科学基金重点项目（项目编号：21AZD071）和天津市自然科学基金（项目编号：20JCY-BJC01160）的资助。

参考文献

Kortleve, N., 2013. “确定目标”养老金计划：一种荷兰式解读。SSRN电子期刊，6。

Bovenberg, A.L., Mehlkopf, R., Nijman, T., 2014. 确定目标计划的前景：对美国的启示。SSRN电子期刊，23，45-62。

Munnell, A.H., Sass, S.A., 2013. 新不伦瑞克省的新型风险共担养老金计划。州和地方养老金计划简报。

Wang, S.X., Lu, Y., Sanders, B., 2018. 目标给付养老金计划的最优投资策略与代际风险分担。保险数学与经济学。

Pugh, C., Yermo, J., 2008. 筹资监管规定与风险分担。经合组织保险与私人养老金工作论文。2008，163-196。

Chen, K., Hardy, M.R., 2009。《待遇确定型兜底混合养老金计划》。North American Actuarial Journal. 13, 407-424。

Alonso-Garcia, J., Devolder, P., 2016。《世代交叠模型中缴费确定型养老金计划现收现付制与基金积累制的最优组合》。保险数学与经济学. 70, 224-236。

Alonso-Garc´ıa, J., Boado-Penas, M.D.C., Devolder, P., 2018。《存在不确定性时名义缴费确定型账户的自动平衡机制》。Scandinavian Actuarial Journal. 2018, 85-108。

Turner, J.A., Center, P.P., 2014。《混合型养老金：养老金计划发起人与参与者的风险分担安排》。

Gollier, C., 2008。《养老金基金的代际风险分担与风险承担》。《公共经济学杂志》. 92, 1463-1485。

Cui, J., Jong, F.D., Ponds, E., 2011. 基金积累型养老金计划中的代际风险分担。《养老金经济学与金融学杂志》。10(1),1-29.

Jean-Franois, B., 2020. 拉平竞争环境：一种与 VIX 挂钩的基金积累型养老金计划结构。《保险：数学与经济学》。94.

Teulings, C.N., De Vries, C.G., 2006. 代际核算、团结互助与养老金损失。《经济学家》. 154, 63-83.

Beetsma, R.M.W.J., Romp, W.E., Vos, S.J., 2012. 积累制养老金体系中的自愿参与和代际风险分担。《欧洲经济评论》. 56. Beetsma, R., 2016. 代际风险分担。《人口老龄化经济学手册》. 311-380. Boes, M.J., Siegmann, A., 2018. 损失厌恶偏好下的代际风险分担。《银行学杂志》. 92, 269-279. Khorasanee, Z.M., 2012. 混合型养老金计划中的风险分担与待遇平滑。《北美精算学杂志》. 16. Wang, S.X., Lu, Y., 2019. 混合型养老金计划的最优投资策略与风险分担安排。《保险：数学与经济学》. 89. He, L., Liang, Z.X., Yuan, F., 2020. 面向习惯性缴费率的最优DB-PAYGO养老金管理。保险数学与经济学. 94. Strulik, H., Vollmer, S., 2013. 人类老龄化与长寿的长期趋势。《人口经济学杂志》. 26, 1303-1323. Knell, M., 2018. 预期寿命延长与名义账户制养老金体系。《养老金经济学与金融学杂志》. 17, 1-30. Devolder, P., Melis, R., 2015. 随机框架下现收现付制与基金积累制在养老金负债中的最优组合。《ASTIN通报》. 45, 551-575. Alonso-Garcia, J., Devolder, P., 2019. 名义缴费确定型养老金计划的连续时间模型：流动性与偿付能力。LIDAM Reprints ISBA. Andr´es, M., Villegas, S., Haberman, 2014. 社会经济死亡率差异的建模与预测：英格兰贫困与死亡率的应用。《北美精算学杂志》. 18, 168-193. Holzmann, R., Alonso-Garc´ıa, J., Labit-Hardy, H., Andr´es M.V., 2017. 名义账户制计划与长寿异质性：重新设计方案。SSRN电子期刊. Merton, R.C., 1980. 市场预期收益率估计：探索性研究。《金融经济学杂志》. 8. Anderson, E.W., Peter, H.L., Sargent, T.J., 2003. 用于模型设定、稳健性、风险价格和模型检测的四个半群。《欧洲经济学会杂志》. 68-123. Wang, P., Li, Z., 2018. 随机利率和随机波动率下DC养老金计划资产配置模型的稳健最优投资策略。保险数学与经济学. 80.

Wang Peiqi 等。《违约风险下目标给付养老金计划的鲁棒最优投资与给付调整策略》。《计算与应用数学杂志》，2021，391。Ponds, E.H.M., Van Riel, B., 2007。《风险共担：荷兰养老金制度的新路径》。蒂尔堡经济学院其他出版物。8，91-105。Haberman, S., 1997。《给付确定型养老金计划中的随机投资收益与缴费率风险》。《保险数学与经济学》，19，127-139。Josa-Fombellida, R., Juan Pablo R.Z., 2001。《通过缴费和投资组合选择降低养老金筹资风险》。《保险数学与经济学》，29，35-45。Ngwira, B., Gerrard, R., 2007。《泊松跳跃存在时的随机养老金基金控制》。《保险：数学与经济学》，40，283-292。欧盟委员会。2015。《2015年老龄化报告》：欧盟28个成员国的经济与预算预测（2013-2060）。《欧洲经济》，3。Oeppen, J.《预期寿命上限的突破》。《科学》，2002，296(5570):1029-1031。He, L., Liang, Z., Song, Y., Ye, Q., 2021。《现收现付养老金的最优缴费率》。《斯堪的纳维亚精算学杂志》，1-27。Peter, B., Paolo, G., Serena, G., Zame, W.R., 2010。《资产市场中的模糊性：理论与实验》。《金融研究评论》，4。Uppal, R., Wang, T., 2003。《模型设定错误与分散化不足》。《金融学杂志》，58。Yi, B., Viens, F., Li, Z., Zeng, Y., (2014)。《基于基准和均值—方差准则的保险人再保险与投资鲁棒最优策略》。《斯堪的纳维亚精算学杂志》。Marin-Solano, J., Navas, J., 2009。《有限时域下的非恒定贴现：自由终止时间情形》。《经济动态与控制杂志》，33，666-675。Josa-Fombellida, R., Navas, J., 2020。《非恒定贴现下给付确定型养老金计划的时间一致性养老金筹资》。《保险：数学与经济学》，94。