arXiv:2302.02358v1 [math.PR] 5 Feb 2023

非光滑曲面上的布朗环与 Polyakov-Alvarez公式

Minjae Park 芝加哥大学 Joshua Pfeffer 哥伦比亚大学 Scott Sheffield MIT

2023年2月7日

摘要

设 ρ 在$D \subset \mathbb{R}^2$上紧支撑。赋予 $\mathbb{R}^2$ 度量$e^{\rho}(dx_1^2 + dx_2^2)$。当以$D$ 为中心、长度至少为 δ 的布朗环的集合的测度为

$$\frac{\mathrm{Vol}(D)}{2\pi\delta} + \frac{1}{48\pi}(\rho,\rho)_\nabla + o(1).$$

当 ρ 光滑时，这可由经典的 Polyakov-Alvarez公式推出。我们证明，即使 ρ 不光滑，上述结论仍然成立，例如 ρ 仅为利普希茨函数时也成立。这个事实也可以用热核迹、特征值渐近或 ζ正则化行列式来表述。这一结论的变体适用于更一般的非光滑流形，在这些流形上考虑的是所有环（而不仅仅是以某个区域D为中心的环）。

我们还证明，对于满足某些条件的任意 族， ρ ， $o(1)$ 误差是均匀的。这意味着，如果我们用（ ν -截断的）布朗回路汤配分函数对该族上的测度δ加权，并取模糊 $\delta \to 0$ 极限，就会得到一个测度，其相对于 ν 的拉东-尼科迪姆导数为 $\exp\left(\frac{1}{48\pi}(\rho,\ \rho)_\nabla\right)$。当该测度是某种正则化的 Liouville 量子引力测度时，相关工作 [APPS20] 表明，这种加权会改变曲面的所谓中心荷。

致谢。我们感谢 Morris Ang、Ewain Gwynne、Camillo De Lellis、Sung-jin Oh 和 Peter Sarnak 提供的宝贵意见。作者获得了美国国家科学基金会 DMS 1712862 和 DMS 2153742 项目的部分资助。J.P. 获得了美国国家科学基金会博士后研究奖学金的部分资助（项目编号 2002159）。

1 引言

我们先回顾几个标准定义和观察。在带边界的紧曲面上，热核迹可以写作 $Z = Z(t) = \mathrm{sp}e^{t\Delta} = \sum e^{t\lambda_n}$其中 λ_n 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ 的特征值。如果 $I(s)$ 表示小于 s 的 $-\lambda_n$ 数量，那么

$$\int_0^\infty e^{-ts} I(s)\,ds = \int_0^\infty e^{-ts} \sum_{n=0}^\infty 1_{s>-\lambda_n}\,ds = \sum_{n=0}^\infty \int_{-\lambda_n}^\infty e^{-ts}\,ds = \frac{1}{t}\sum e^{t\lambda_n} = Z(t)/t.$$

换言之，Z/t是I的拉普拉斯变换。因此，Z（当$t \to 0$时）的渐近行为与 λ_n（当$n \to \infty$时）的渐近行为密切相关。Weyl 针对有界平面区域D 研究了后者（见 [MS+67]中的讨论），证明了 $-\lambda_n \sim {}^{2\pi}n\,\mathrm{Vol}(D)$，当 $n \to \infty$ 时；这等价于

$$Z \sim \frac{\mathrm{Vol}(D)}{4\pi t} \tag{1.1}$$

当 t $\to 0$ 时。1966年，Kac 在题为“你能听出鼓的形状吗？”的著名论文中，给出了具有分段线性边界的区域上 Z 的高阶修正项（计入边界长度和角点的影响）。该论文探讨了能从 I（或等价地从 Z）[Kac66]中推断出 D 的几何特征。McKean 和 Singer 将这些渐近结果从平面区域推广到具有非零曲率的光滑流形 [MS$^+$67]，其中常数阶修正项是某种曲率积分。对于度量由 e^{ρ} 乘以平坦度量给出的二维曲面，积分$\int_{\delta}^{\infty}$ Z(t) t d t 是一个自然的量，其小 δ 渐近行为中包含一个常数阶项，该项对应于 ρ 的狄利克雷能量（即所谓的 Polyakov-Alvarez公式，也称为 Polyakov-Ray-Singer公式或 Weyl 异常公式） [RS73, Pol81, Alv83, Sar87, OPS88]。这个常数阶狄利克雷能量项（也可以用布朗环汤来表述，见下文）是本文关注的主要内容。

许多文献假设 ρ 是光滑的，并经常使用曲率等对象；若 ρ 不是C^2，这些对象便没有良好定义。但众所周知， [Hör68] 指出，若 ρ 仅为C^2，Weyl 定律仍然成立，即$-\lambda_n \sim$ $2\pi n$ 体积$_{\rho}(D)$ [AHT18，例 4。9] 此外，在某些~~光滑性~~较低的情形下，Weyl 定律也已得到证明。[1] 当正则性低于C^2, 时，问题则有所不同，因为曲率不再处处有定义，相关估计也不再逐点成立，而是以平均意义成立。本文的主要目的是将这一领域关于共形异常（ ρ的狄利克雷能量）的若干基本结果推广到 ρ 正则性较低的情形——例如仅为利普希茨连续——并说明收敛速率可以在某些 ρ取值族上均匀成立。

本文部分动机源于作者的另一项工作 [APPS20]，其中类似的结果是用所谓的布朗环测度来表述的。这些测度最早在 [LW04] 中引入，并且与平面区域上的热核迹有关，例如见 [Dub09、Wan18] 以及 [APPS20]。本文的结果对 [APPS20] 的研究也很有用，因为它们进一步阐明了这样一种说法：在正则化的 Liouville 量子引力曲面上“装饰”布朗回路汤，会改变其中心荷。本文的结果将完全用布朗环测度及其推广来表述。（关于它们与热核的关系，见 [APPS20]。）

除了采用较弱的正则性假设和使用广义环测度外，我们的表述与经典方法（例如 [MS$^+$67]）还有几处较小的差异：我们始终采用共形规范，并以 ρ进行所有计算；我们以欧几里得中心而非环路上的典型点为环路编索引（后者与热核方法更为相似）；此外，我们直接用狄利克雷能量建立 Polyakov-Alvarez公式，而不是先建立一个等价的曲率积分公式。

尽管由于 ρ 的非光滑性会遇到一些复杂问题，但我们也利用了二维情形的额外简洁性：在这种情形下，流形完全由一个共形因子决定。

最后，我们指出，这一领域还有大量其他研究成果，我们无法一一综述。例如， [BGV03、Gil18] 等参考文献对热核迹进行了更一般的探讨

[1]我们指出，度量测度空间存在一套一般理论，即所谓的“黎曼曲率-维数”（RCD）条件理论，它并不局限于平坦度量的共形变化。此类空间包括里奇极限空间 [Stu06, LV09],带权黎曼流形 [Gri06], 亚历山德罗夫空间 [Pet10], 以及许多其他空间。里奇曲率下界是几何分析中许多有用估计的关键要素，因此 Sturm、Lott 和 Villani [Stu06, LV09] 开始研究一类满足广义里奇曲率下界条件的度量测度空间。在过去十年中，这一直是一个活跃的研究课题；综述见 [Gig18] 。经典的 Weyl 定律以及这些非光滑度量测度空间上热核的短时间渐近展开仍然成立 [ZZ17, AHT18]。该理论的许多方面在带基点测度的 Gromov-Hausdorff 拓扑下保持稳定；例如，特征值、热核和格林函数均匀收敛 [Din02, ZZ17],布朗运动弱收敛 [Suz19], 等等。因此，对于测度能够以合理方式逼近的任何 RCD空间，Weyl 定律都成立。另一方面，用于定义泛函行列式的短时展开在这种非光滑情形下并不存在，因此 ζ正则化过程是否也稳定尚不明确。

：研究了二维以外的维数、拉普拉斯算子以外的算子等。还有一些研究将紧致光滑流形上的已知行为推广到特定的非光滑流形，例如具有锥形奇点或边界角点的流形（这两种情形都会对应 ρ中的对数奇点）。 [Moo99、Kok13、She13、She15、AR18、Gre21、Kal21]；也有研究涉及非紧致曲面 [AAR13]。这一领域还存在许多未解问题，涉及概率论、几何、数论、数理物理和分析学。我们在第6节提出其中几个问题。我们希望，本文介绍的技术和视角能够推动这些问题取得进展，也希望它们能应用于韦尔公式和 Polyakov-Alvarez 项出现的其他情境。

1.1 主要结果

令 $\mathscr{L}$ 表示 $\mathbb{R}^2$中的零中心单位长度环集合。我们通过将平面中的每个环路编码为 $\mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \times \mathscr{L}$中的一个元素，并将布朗环测度定义为该乘积空间上的测度，来定义平面中的布朗环测度。

定义 1.1。 我们将 $\mathbb{R}^2$ 中的每个环路 L 表示为三元组(x, t, ℓ)，其中

- $t = \text{len}(L)$ 是 L 的长度，这里我们将路径的长度定义为其参数化区间的长度。
- $x = \text{cen}(L)$ 是 L 的中心，即 L 的欧几里得质心，其等于 $t^{-1}\int_0^t L(s)\,ds$。
- ℓ 是零中心单位长度环 $s \mapsto t^{-1/2}(L(ts) - x)$，它由 L 经平移使其中心移至原点，并将时间按 t^{-1} 缩放、空间按 $t^{-1/2}$缩放得到。

定义 1.2. 我们将 $\mathbb{R}^2$ 上的布朗环测度 定义为 $\mathbb{R}^2$ 中环路 (x,t,ℓ) 上的测度，其定义如下：

$$\frac{1}{2\pi t^2}\,dx\,dt\,d\ell,$$

其中，dx 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的勒贝格测度，dt 表示$(0,\infty)$上的勒贝格测度，而 $d\ell$ 表示 $\mathscr{L}$ 中随机环的概率律：先在 $[0,1]$ 上采样一个二维布朗桥，再减去其均值。[2]

T中心位于D且大小大于 δ 的布朗环集合的测度为 y

$$\int_D \int_\delta^\infty \frac{1}{2\pi t^2}\,dt\,dx = \frac{\text{Vol}(D)}{2\pi\delta}. \tag{1.2}$$

特别地，(1.2) 表明，无论 δ 多么小，大多数长度为 $t \in (\delta,\infty)$ 的环，其长度都在 δ 量级：其中一半满足 $t < 2\delta$，百分之九十五满足 $t < 20\delta$，依此类推。此外，(1.2) 在 $\delta \to \infty$ 时趋于 0，这非正式地意味着，以 D 为中心的大环很少。

我们的主要结果描述了：当我们在平面上用不同的度量$e^\rho|dz|^2$ 来测量布朗环的长度时，这些布朗环的质量如何变化，其中 ρ 是一个支撑于D上的利普希茨函数。我们首先定义布朗环在度量$e^\rho|dz|^2$下的长度，称为其 ρ-长度。如果环路是一条光滑曲线，我们可以通过沿曲线积分$e^{\rho/2}$ 来计算其 ρ-长度。由于布朗环的豪斯多夫维数为 2，我们改为沿环路积分e^ρ 来定义其 ρ-长度，使其具有与面积相同的缩放因子。

[2]等价地，复平面上的 $d\ell$ 服从以单位长度圆为指标集的复值 GFF 的概率律，其中加性常数的选取使其均值为零。特别地，$d\ell$ 在该圆的旋转下保持不变。

定义 1.3。 设(M,g)为一个光滑二维黎曼流形，并且 ρ是 M 上的一个函数。我们将环路 L 的 ρ-长度定义为 l en$_\rho(L)$，即 $\int_{\text{len}(L)0} e^{\rho(L(s))} d\,s$。我们将 ρ-体积形式Vol$_\rho$定义为与$(M,e^\rho g)$相关联的体积形式，并记作Vol:= Vol$_0$。

除了定理 1.9和第 4节外，我们始终在定义 M,g中取欧几里得平面。我们首先描述本节涉及的函数空间。

定理 1.4. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的有界开子集，Lip(D) 表示在 D 外取值为零的实值利普希茨函数空间。设 $\mathscr{B} \subset$ Lip(D) 是一个函数族，满足：*(1)* 其 *Lipschitz* 常数一致有界；*(2)* 该函数族在 $W^{1,1}(D)$ 中预紧。

那么当 $\delta \to 0$ 时，关于布朗环测度，中心位于 D 内且 ρ-长度至少为 δ 的环的 μ^{loop}-测度为

$$\frac{\text{Vol}_\rho(D)}{2\pi\delta} + \frac{1}{48\pi}(\rho,\rho)_\nabla + o(1) \tag{1.3}$$

且收敛关于 $\rho \in \mathscr{B}$ 是均匀的。

注 1.5（均匀有界性）。 条件 (1) 和 (2) 蕴含 $\mathscr{B}$ 中的函数一致有界。

注 1.6（一般的 p）。由于目前我们要求利普希茨常数一致有界且区域有界，因此对于任意固定的 p $\in$(1, ∞)，W ^{1,1} 中的预紧性等价于 W ^{1,p} 中的预紧性。特别地，定理 1.4 本可以用 W ^{1,2} 中的预紧性来表述，而不是 W ^{1,1}中的预紧性。我们还要指出，空间 W ^{1,2}(D) 等价于空间 H ^{1}(D)，后者由满足 $(\rho,\rho)_\nabla$有限的 ρ构成。

注 1.7（预紧性与一致等度连续性）。 回顾弗雷歇-科尔莫戈洛夫定理（例如，参见 [BB11]）：设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，且 $1 \le p < \infty$。子集 $\mathscr{A} \subset L^p(D)$ 是预紧的，当且仅当 $\mathscr{A}$在 $L^p(D)$ 中有界，并且

$$\sup_{u\in\mathscr{A}} \int_D |u(x+h)-u(x)|^p \, dx \to 0 \quad \text{as } h \to 0, \tag{1.4}$$

其中，u扩展为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，且在D之外取值为零。

我们将在一些证明中使用这一预紧性的等价刻画，通常称为 一致等度连续性条件（定义在 L^p中）。特别地，对于 $p = 1$的情形，我们将把它应用于集合 $\mathscr{A}$，即定理 1.4陈述中的集合 $\mathscr{B}$ 内函数的梯度所构成的集合。

注 1.8（一致等度连续条件是必要的）。如上所述，预紧假设等价于一种一致等度连续假设。要使定理 1.4（或定理 1.12）的结论成立，这一假设——或对函数 $\rho \in \mathscr{B}$ 施加某种类似条件——是必要的。仅仅要求 $\mathscr{B}$ 中所有曲面均为 C ^{1}，且 $|\nabla\rho|$ 有统一上界，并不足以保证结论成立。例如，在定理 1.4 的设定中，$\mathscr{B}$ 可以包含一个序列 $\rho_1,\rho_2,\ldots$，其中各项均为 C ^{1} 函数，且一致收敛于零，同时对每个 j 都有 $(\rho_j,\rho_j)_\nabla = 1$。我们可以构造这样一个函数序列 ρ_j：令 $\nabla\rho_j$ 在固定的两个相反值之间振荡，并使振荡频率随 j $\to\infty$ 而加快。（在环面 $[0,2\pi$ 上，这类函数的一个简单例子是 ^{2} 常数倍的 ρj $\big((a,b)\big)$ =j $^{-1}$sin(j a);在平面区域 D 上，我们可以类似地定义 ρj，只需让正弦函数在 D 的边界附近逐渐衰减至零。）我们还可以对这些函数作扰动，使得对所有 j 均有 Vol$_{\rho_j}$(D) = Vol$_\rho$(D)。这组函数 $\mathscr{B}$ 不满足 (1.3)：对于任意固定的 δ，很容易证明

$$\lim_{j\to\infty} \mu\{L : \text{cen}(L) \in D, \text{len}_{\rho_j}(L) \ge \delta\} - \frac{\text{Vol}(D)}{\delta} = 0, \tag{1.5}$$

尽管对于每个固定的 j，我们都有

$$\lim_{\delta\to 0}\Big(\mu\{L:\mathrm{cen}(L)\in D,\mathrm{len}_{\rho_j}(L)\geq\delta\}-\frac{\mathrm{Vol}(D)}{\delta}\Big)=b/2. \tag{1.6}$$

如果（1.6）中的极限关于 j均匀收敛，我们就可以选取一个 δ，使得 $\mu\{L:\mathrm{cen}(L)\in D,\ \mathrm{len}^{\rho_j}(L)\geq\delta\}>b/4$ 对所有 j成立，而（1.5）对该 δ不成立。[3]

我们将这一结果推广到一般曲面。该定理的陈述涉及拉普拉斯算子的 ζ 正则化行列式这一概念，例如其定义见 [Alv83、Sar87]。（不过，要理解定理 1.9 的证明，并不需要了解 ζ 正则化行列式的定义。）

定理 1.9。令$(M,\ g)$为一个固定的紧致光滑二维黎曼流形，并令μ^{loop}表示$(M,\ g)$上的布朗环测度。令 K 表示 M 上的高斯曲率，令 Δ表示与$(M,\ g)$相关联的拉普拉斯算子，并令$\det'_\zeta\Delta$表示其 ζ 正则化行列式。令 $\mathscr{B}$为一族利普希茨函数，满足 *(1)* 利普希茨常数均匀有界，且 *(2)* 在 $W^{1,1}(M)$中预紧。那么

$$\begin{aligned}&\mu_{\text{环质量 }o}\quad f\,loop^{s\ with}\quad\rho\text{-}length\ between\ \delta\ and\ C\ is\quad g^{iven\ b}\quad y\\&\frac{\mathrm{Vol}_\rho(M)}{2\pi\delta}-\frac{\chi(M)}{6}(\log\frac{\delta}{2}+\gamma)+\log C+\gamma+\frac{1}{48\pi}\int_M(\|\nabla\rho\|^2+2K\rho)\mathrm{Vol}(dz)\\&\quad+\log\mathrm{Vol}(M)-\log\mathrm{Vol}_\rho(M)-\log\det{}'_\zeta\Delta+o_\delta(1)+o_C(C^{(-1+\varepsilon)/2}),\end{aligned} \tag{1.7}$$

with the convergence as $\delta\to 0$ *and* $C\ \to\infty$ 均匀分布 *over* $\rho\in\mathscr{B}$*, where* $\gamma\approx 0.5772$ *is the* 欧拉-马歇罗尼常数*.*

为简单起见，我们这里只讨论紧致流形的情形，但也可以证明带边界流形的类似结果，参见问题 6.3，我们在前一段中给出了启发式论证；所得表达式将包含一个阶为 $\delta^{-1/2}$ 的边界项。

注意，对于光滑的 ρ，上述表达式第二行（1.7）中的式子等于 $-\log\det'_\zeta\Delta_\rho$，其中 Δ_ρ是与（M，$e^\rho g$）相关联的拉普拉斯算子。对于 $-\log\det'_\zeta\Delta_\rho$，式（1.7）称为 Polyakov-Alvarez公式；例如，参见 [APPS20，命题 6。9]。因此，对于光滑的 ρ，定理1.9 归结为布朗环测度与ζ正则化拉普拉斯行列式之间的一个关系，该关系已由 [APPS20的定理 1 证明。3]。

事实上，我们证明了定理1.4 的一个稍作推广的版本，其中考虑了一类更一般的环测度。

定义 1.10。 随机变量 Z的期望占据测度： $[0,T\ ]\to\mathbb{R}^2$ 是函数θ： $\mathbb{R}^2\to(0,\ \infty)$，满足对每个可测集 $A\subset\mathbb{R}^2$，集合$\{t\ \in[0,T\ ]:\ Z(t)\in T\}$ 的期望勒贝格测度为$\int_A\theta(x)dx$。

定义 1.11。 我们将广义环测度 μ定义为环路上的一个测度$(x,\ t\ ,\ \ell)$，定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，其表达式为

$$\frac{1}{t^2}dx\,dt\,d\ell,$$

其中，dx 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的勒贝格测度，dt 表示 $(0,\infty)$上的勒贝格测度，而 $d\ell$ 是 $\mathscr{L}$ 上环路的任意旋转不变测度，其期望占据测度是施瓦茨分布（但不一定像布朗环测度那样是高斯分布）。我们用 b 表示一个随机变量的第一坐标（等价地，也可以是第二坐标）的二阶中心矩，该随机变量的密度就是这个期望占据测度。

[3]有人可能会问，是否只需满足 ρ 属于由内积 $(\rho,\ \rho)_\nabla$定义的希尔伯特空间，即索伯列夫空间$W^{1,2}(D)\ =H^1(D)$，并且（比如）满足零边界条件。这样的 ρ 函数可能处处不可微 [Ser61]，，因此还需要修改关于 $\mathscr{B}$的条件。参见问题6.1。

定义 1.11 与定义 1.2 相同，只是不再要求 $\mathrm{d}\ell$ 是布朗桥（并且去掉了 2π 因子，因为对于一般的 $\mathrm{d}\ell$ 来说，这样更自然）。测度 $\mathrm{d}\ell$ 可以支撑在圆形环路、正方形环路或布朗环路的外边界等空间上。定义 1.11 中的 μ 不必具有与布朗环测度相同的共形对称性。即使 $\mathrm{d}\ell$ 支撑在光滑环路（而非布朗环）上，我们仍按定义 1.1 中的方式参数化环路空间，因此 $(0, \mathrm{t}, \ell)$ 表示在时长 t 内描绘 $\sqrt{\mathrm{t}}\,\ell$ 的环路。在布朗环测度这一特殊情形下，$\mathrm{b} = 1/12$。（见命题 3.9。）定义 1.11 中的施瓦茨分布假设似乎并非定理 1.12 成立所必需，但我们加入该假设是为了简化下文命题 3.1 证明中的计算。

定理 1.12。 设 D 和 $\mathscr{B}$ 满足定理 *1.4*中的条件，并设 μ 是定义 *1.11*意义下的广义环测度。那么当 $\delta \to 0$时，μ测度下以 D 为中心且 ρ长度至少为 δ 的环路的质量由下式给出

$$\frac{\mathrm{Vol}_\rho(D)}{\delta} + \frac{b}{2}(\rho,\rho)_\nabla + o(1), \tag{1.8}$$

其中收敛关于 $\rho \in \mathscr{B}$ 是均匀的。

1.2 证明概要

本节中，设 $\mathscr{B}$ 是一个固定的函数族 ρ，满足定理 1.12的假设。为证明定理 1.12，我们将 len_ρ 与关于 $e^\rho|dz|^2$的环路长度的一个较简单定义进行比较；在该定义中，我们用环路中心处的值来近似 e^ρ 沿环路的取值。

定义 1.13。 我们将环路 L 在 $\mathbb{R}^2$ 中以点 x 为中心时的中心 ρ-长度 $\mathrm{clen}_\rho(L)$ 定义为 $\int_0^t e^{\rho(x)} ds = e^{\rho(x)} t$ 。

我们注意到，截断值 $\mathrm{clen}_\rho(L) = \delta$ 对应着 $\mathrm{len}(L)$ 的唯一取值：

命题 1.14. 令 $\delta > 0$，$x \in D$ 且 $\ell \in \mathscr{L}$，并设 $\beta := e^{-\rho(x)}\delta$。环路 $L = (x, t, \ell)$ 满足 $\mathrm{clen}_\rho(L) = \delta$ 当且仅当 $t = \beta$，并且 $\mathrm{clen}_\rho(L) \geq \delta$ 当且仅当 $t \geq \beta$。

证明。 由中心长度的定义，结论显然成立。 □

命题 1.14 立即推出定理 1.12 关于中心 ρ- 长度的一个平凡类似结论。

命题 1.15. 相对于布朗环测度，中心位于 D 且满足 $\mathrm{clen}_\rho \geq \delta$ 的环路 L 的质量为

$$\int_D \int_{\mathscr{L}} \int_\beta^\infty \frac{1}{t^2}\, dt\, d\ell\, dx = \int_D \beta^{-1} dx = \int_D \frac{e^{\rho(x)}}{\delta} dx = \frac{\mathrm{Vol}_\rho(D)}{\delta}. \tag{1.9}$$

证明。 结论由命题 1.14立即得到。 □

因此，我们可以将定理1.12 重新表述为：如果将环长度的定义从 clen_ρ 改为 len_ρ，那么长度为 $\geq \delta$ 的环的 μ-质量将增加$b2\,(\rho,\rho)_\nabla$，误差至多为$o(1)$，且当 $\delta \to 0$ 时，该结论关于 $\rho \in \mathscr{B}$均匀成立。

我们将定理1.12 的证明分为两个阶段。首先，在第2 节中，我们证明，除一个均匀的$o(1)$ 误差外，将 clen_ρ 替换为 len_ρ，其效果相当于减去 δ^{-1} 乘以布朗环上e^ρ 的取值与e^ρ 在其中心处的取值之间的平均差异。

引理 1.16. 考虑从 μ 中抽取的一个环路，其条件是中心位于 D 且长度为 β。令 X 表示其中心，Z 表示按长度均匀抽取的环路上一点。那么，中心位于 D 且 $\mathrm{len}_\rho(L) \geq \delta$ 的环路 L 的μ-质量，等于中心位于 D 且 $\mathrm{clen}_\rho(L) \geq \delta$ 的环路 L 的 μ-质量，减去

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{E}[e^{\rho(Z)} - e^{\rho(X)}] + o(1), \tag{1.10}$$

满足 $o(1)$ 误差趋于 0 $\delta \to 0$，其收敛速率关于 $\rho \in \mathscr{B}$是均匀的。（在 (1.10) 中，期望是相对于上述所述的 X 和 Z 的整体概率律而言的。）

接着，我们在第3 节完成定理1.12 的证明，证明量（1.10）等于$b_2(\rho,\rho)_\nabla$，相差一个均匀的$o(1)$ 误差。–

引理 1.17. 量(1.10) 等于 $b_2(\rho,\rho)_\nabla$，再加上一个当 $\delta \to 0$ 时趋于0 的误差项，且关于 $\rho \in \mathscr{B}$均匀收敛。

2 环路质量差异与预期长度差异

本节分三个步骤证明引理1.16 。

步骤 1：建立与 ρ-长度 δ对应的长度阈值 $\alpha > 0$。我们在命题 1.14 中看到，对于 $\beta = e^{-\rho(x)}\delta$，当且仅当 $t = \beta$时，$\mathrm{clen}_\rho(L) = \delta$；当且仅当 $t \geq \beta$时，$\mathrm{clen}(L) \geq \delta$。为证明引理 1.16，我们针对 ρ-长度建立类似结果。我们将在下文的命题 2.4 中证明，对于 $x \in D$ 且 $\ell \in \mathscr{L}$满足 (x, δ, ℓ) 的直径足够小，存在一个阈值 $\alpha > 0$，使得当且仅当 $t = \alpha$时，$\mathrm{len}_\rho((x, t, \ell)) = \delta$；当且仅当 $t \geq \alpha$时，$\mathrm{len}((x, t, \ell)) \geq \delta$。注意，与 β 不同，阈值 α 可能同时依赖于 ℓ、x 和 δ。

步骤 *2*：将环路质量之差与量 α^{-1}联系起来。我们在命题1.15 中看到，μ-质量的环路（中心为 ρ，长度为 $\geq \delta$）可以表示为 β^{-1} 的积分。在下文的命题 2.5 中，我们同样将 μ- 质量的环路（长度为 ρ）表示为 α^{-1}的积分，外加一个均匀的$o(1)$ 误差。这样，只需分析被积函数之差 $\alpha^{-1} - \beta^{-1}$，即可证明引理 1.16。

步骤 *3*：将差值 $\alpha^{-1} - \beta^{-1}$ 表示为长度之差。我们首先将差值$\alpha - \beta$ 表示为环路的 ρ-长度与中心 ρ-长度之差（命题 2.7）。然后在命题 2.8 中应用这一结果，推导出 $\alpha^{-1} - \beta^{-1}$的类似表达式，从而立即得到引理 1.16。

介绍完引理 1.16 证明的主要步骤后，我们现在进行步骤 1——证明阈值 α 的存在。正如我们在命题 1.14 中所观察到的，类似的中心 ρ-长度阈值 β 的存在显而易见，因为对于固定的 ρ、x 和 ℓ，函数 $t \mapsto \mathrm{clen}_\rho(L)$ 是斜率为 $e^{\rho(x)}$ 的线性函数。ρ-长度则并非如此，因此我们将证明其关于 t 的导数在一个足够大的区间上为正。首先注意到，由于函数 $\rho \in \mathscr{B}$ 有一致的上下界，我们可以粗略地将函数 $t \mapsto \mathrm{len}_\rho(L)$ 夹在两个线性函数之间，且该界对 ρ、x 和 ℓ 均成立。

命题 2.1。存在一个常数 $\Lambda > 0$，使得对于每个 $\rho \in \mathscr{B}$、$x \in D$ 和 $\ell \in \mathscr{L}$，环路 $L = (x, t, \ell)$满足

$$\Lambda^{-1} \leq \frac{\mathrm{len}_\rho(L)}{\mathrm{len}(L)} \leq \Lambda. \tag{2.1}$$

换言之，$\mathrm{len}(L)$ 和 $\mathrm{len}_\rho(L)$ 的长度相差一个通用常数因子。

证明。 该引理可直接由以下事实得出： ρ 其上下界均由一个与 $\rho \in \mathscr{B}$无关的常数给出，正如备注 1.5中所述。 □

此外，函数族 $\{e^{\rho}\}_{\rho\in\mathscr{B}}$ 满足与 $\mathscr{B}$ 相同的条件，只是界可能不同。

命题 2.2. 对于 $\rho \in \mathscr{B}$ ，函数 e^{ρ} 也具有 *Lipschitz* 常数一致有界性，并且在 $W^{1,1}(D)$ 中预紧。

证明。 由于函数 $\rho \in \mathscr{B}$ 均一致有界，其像包含于某个有限闭区间内。指数函数在任意有限闭区间上都是 Lipschitz 的，因此复合函数 $\exp\circ\rho$ 也是 Lipschitz 的。其他条件显然成立。

□

现在，我们利用对于 $\rho \in \mathscr{B}$， e^{ρ} 的 Lipschitz 常数一致有界这一性质来证明：当 $\operatorname{diam}(L) = \operatorname{diam}(\ell)\sqrt{t}$不太大时，函数 $t \mapsto \operatorname{len}_{\rho}(L)$ 的导数与线性函数 $t \mapsto \operatorname{clen}_{\rho}(L)$ 的导数均匀接近。

命题 2.3. 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $d = d(\varepsilon) > 0$ 以及一个集合族 $\{D^{\rho,\varepsilon}\}_{\rho\in\mathscr{B}}$，满足 体积$(D^{\rho,\varepsilon}) \le \varepsilon$，使得以下结论成立。对于每个 $\rho \in \mathscr{B}$，$x \in D \setminus D^{\rho,\varepsilon}$，以及 $\ell \in \mathscr{L}$，导数

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{len}_{\rho}((x,t,\ell))$$

存在，且与.....的差至多为

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{clen}_{\rho}((x,t,\ell)) = e^{\rho(x)}$$

ε直径$(\ell)\sqrt{t}$，对几乎处处的 $t > 0$ 满足 直径$(\ell)\sqrt{t} < d$）。此外，存在一个常数 $\Lambda > 0$，使得前述结论对于任意 d 和 $D^{\rho,\varepsilon} = \emptyset$ 均成立，只要我们选取 $\varepsilon = \Lambda$。

证明。根据 Rademacher 定理，任意利普希茨函数几乎处处可微。特别地，根据命题 2.2，存在某个不依赖于 ρ 的常数 $\widetilde{\Lambda} > 0$，使得对于所有 $\rho \in \mathscr{B}$， $|\nabla(e^{\rho})| < \frac{2}{3}\widetilde{\Lambda}$ 对几乎处处的 $x \in D$ 成立，其中 $\nabla(e^{\rho})$ 是 e^{ρ} 的弱梯度。此外，由于 $\mathscr{B}$ 在 $W^{1,1}(D)$ 中预紧，由 (1.4) 可知存在某个 $d > 0$，使得集合

$$D^{\rho,\varepsilon} := \{x \in D : \operatorname*{ess\,sup}_{|h|\le d} \left|(\nabla e^{\rho})(x+h) - \nabla e^{\rho}(x)\right| > \frac{2}{3}\varepsilon\} \tag{2.2}$$

满足 $\operatorname{Vol}(D^{\rho,\varepsilon}) \le \varepsilon$ 对每个 $\rho \in \mathscr{B}$。

固定 $\rho \in \mathscr{B}$、$x \in D$ 和 $\ell \in \mathscr{L}$，我们可以将 $\operatorname{len}_{\rho}((x,t,\ell))$ 写作 $A(\sqrt{t})t$，其中 $A(r) = A_{\rho,x,\ell}(r) := \int_0^1 e^{\rho}(r\,\ell(s) + x)ds$。我们用 A 表示 $\operatorname{len}_{\rho}((x,t,\ell))$ 的弱 t-导数，如下所示：

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{len}_{\rho}((x,t,\ell)) = \frac{\partial}{\partial t}(A(\sqrt{t})\,t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}A'(\sqrt{t})\,t + A(\sqrt{t}) = \frac{1}{2}A'(\sqrt{t})\sqrt{t} + A(\sqrt{t}). \tag{2.3}$$

由于

$$A'(r) = \int_0^1 \ell(s)\cdot(\nabla e^{\rho})(r\ell(s)+x)ds \tag{2.4}$$

$$= \int_0^1 \ell(s)\cdot((\nabla e^{\rho})(r\ell(s)+x) - (\nabla e^{\rho})(x))ds, \tag{2.5}$$

我们可以将 $|A'(\sqrt{t})|$ 从上方估计为

$$\operatorname{diam}(\ell)\sup_{h\in\mathbb{R}^2}\left|(\nabla e^{\rho})(x+h)\right| \le \frac{2}{3}\widetilde{\Lambda}\operatorname{diam}(\ell)$$

对几乎所有的 $t>0$，利用式（2.4）。另一方面，若 $x\in D\setminus D^{\rho,\varepsilon}$，我们利用式（2.2）和（2.5）将$|A'(\sqrt{t})^{-}|$从上方估计为

$$\operatorname{diam}(\ell)\operatorname*{ess\,sup}_{|h|\le\operatorname{diam}(\ell)\sqrt{t}}\left|(\nabla e^{\rho})(x+h)-\nabla e^{\rho}(x)\right|\le\frac{2}{3}\varepsilon\operatorname{diam}(\ell)$$

对于几乎所有的$t>0$，满足直径$(\ell)\sqrt{t}\le d$。

注意，（2.3）给出

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{len}_{\rho}((x,t,\ell))-A(\sqrt{t})\right|=\frac{1}{2}\left|A'(\sqrt{t})\right|\sqrt{t},$$

并且我们还有

$$|A(\sqrt{t})-e^{\rho(x)}|=|A(\sqrt{t})-A(0)|\le\int_0^{\sqrt{t}}|A'(s)|ds\le\sup_{0\le s\le\sqrt{t}}\left|A'(s)\right|\sqrt{t}.\tag{2.6}$$

将这两个不等式与两种不同情形下$\left|A'(\sqrt{t})\right|$的估计结合起来，即得所需结果。

□

我们使用命题 2.3 证明，与中心 ρ长度的情形一样，存在一个唯一的值 α，使得 $\operatorname{len}(L)$ 对应于 $\operatorname{len}^{\rho}(L)=\delta$。

命题 *2.4*。我们可以选取 $d_*>0$，使得下述结论成立。对于每个 $\rho\in\mathscr{B}$ 和 $x\in D$，若 $L=(x,\delta,\ell)$ 是一个环路，且其直径$(\ell)\sqrt{\delta}$小于 d_*，则存在唯一的正数 $\alpha=\alpha(x,\delta,\ell,\rho)$，使得 $\operatorname{len}^{\rho}((x,t,\ell))=\delta$ 当且仅当 $t=\alpha$，且 $\operatorname{len}^{\rho}((x,t,\ell))>\delta$ 当且仅当 $t>\alpha$。（若直径$(\ell)\sqrt{\delta}$等于 $\ge d_*$，则我们任意设定$\alpha=\delta$，从而对每个环路 $L=(x,\delta,\ell)$，α 均有定义。）

证明。设 Λ 为命题 2.1 中的常数。若 $t\ge\Lambda\delta$，则根据命题 2.1，有 $\operatorname{len}^{\rho}((x,t,\ell))\ge\Lambda^{-1}t\ge\delta$。因此，只需证明：当 $\operatorname{diam}(\ell)\sqrt{\delta}$ 足够小时，函数 $\operatorname{len}^{\rho}((x,t,\ell))$ 关于 t 严格递增，其中 $t\in(0,\Lambda\delta)$。我们利用命题 2.3 分析 $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{len}^{\rho}((x,t,\ell))$，以证明这一事实。

令 Λ 为命题 2.3 中的常数，使得对所有 $\rho\in\mathscr{B}$，$x\in D$，$\ell\in\mathscr{L}$以及几乎处处的 $t>0$，

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{len}_{\rho}((x,t,\ell))-e^{\rho(x)}\right|\le\tilde{\Lambda}\operatorname{diam}(\ell)\sqrt{t}.\tag{2.7}$$

我们取 $\operatorname{diam}(\ell)\sqrt{\delta}$ 足够小，使其小于 $d_*>0$，从而对几乎处处的 $t\le\Lambda\delta$，式（2.7）中的界 $\tilde{\Lambda}\operatorname{diam}(\ell)\sqrt{t}$ 小于 $\frac{1}{2}e^{\rho(x)}$。这意味着 $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{len}^{\rho}((x,t,\ell))$ 对几乎处处的 $t\le\Lambda\delta$ 严格为正。由于 $\operatorname{len}^{\rho}((x,t,\ell))$ 是 t 的连续函数，我们得出结论：$\operatorname{len}^{\rho}((x,t,\ell))$ 在 $(0,\Lambda\delta)$ 上严格递增。

□

当 x和 ℓ 固定时，α 给出对应于 t的欧几里得值 δ len 的值ρ。我们得到以下命题 1.15 的类似结论，其中以 $\operatorname{len}^{\rho}$ 代替 $\operatorname{clen}^{\rho}$。

命题 2.5。中心位于 D 且 $\operatorname{len}^{\rho}(L)\ge\delta$ 的环路集合 L 的 μ-质量等于

$$\int_D\int_{\mathscr{L}}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{t^2}\,dt\,d\ell\,dx=\int_D\int_{\mathscr{L}}\alpha^{-1}\,d\ell\,dx\tag{2.8}$$

再加上一个误差项；当 $\delta\to0$ 趋近于0 时，该误差项趋于零，且其收敛速度关于 $\rho\in\mathscr{B}$是均匀的。

环路的质量并不恰好等于（2.8），原因在于 α 在 $\operatorname{diam}(\ell)\sqrt{\delta}\ge d_*$时定义不当，其中 d_* 如命题 2.4所述。命题 2.5 断言，在 $\delta\to0$ 极限下，由此产生的误差可以忽略。

为证明命题　　命题 2.5，我们使用以下界来估计 $d\ell$直径较大的环的测度　　.

命题 2.6。 当 K 趋于无穷时，直径大于 K 的环的 $d\ell$-测度趋于0，且速度快于 K 的任意负次幂。

证明。如果 ℓ 的直径为 $>K$，那么命题2.1意味着 $\int_{\mathrm{len}(\ell)_0} \mathbf{1}_{|\ell(s)|>K/3} dt > cK$其中某个常数为$c>0$。由马尔可夫不等式可知，该事件的概率至多为（$cK$）$^{-1}\mathbb{E}$（$\int_{\mathrm{len}(\ell)_0} \mathbf{1}_{|\ell(s)|>K/3} dt$）。根据定义1.11中的Schwartz条件，后者随$K\to\infty$的衰减速度快于K的任意负幂。

□

命题2.5的证明。根据 α的定义，（2.8）中的积分给出 μ质量的环路L，其 $\mathrm{cen}(L)\in D$，且满足以下任一条件

- 直径$(\ell)\sqrt{\delta}<d_*$ 且 $\mathrm{len}_\rho(L)\geq\delta$，或
- 直径$(\ell)\sqrt{\delta}\geq d_*$ 且 $t\geq\delta$。

因此，误差项——即（2.8）与命题陈述中所考虑的环路测度之差——是 μ-环路测度，其中环路 L 满足直径$(\ell)\sqrt{\delta}\geq d_*$，且符合以下任一条件

- $t\geq\delta$ 且 $\mathrm{len}_\rho(L)<\delta$，或者
- $t<\delta$ 和 $\mathrm{len}_\rho(L)\geq\delta$.

为了界定这个误差，我们回顾命题 2.1：当 $t>\Lambda\delta$ 时，$\mathrm{len}_\rho(L)$ 为 $>\delta$；当 $t<\Lambda^{-1}\delta$时，则为 $<\delta$。因此，误差至多为满足中心位于 D、直径$(\ell)\sqrt{\delta}\geq d_*$ 且 $\Lambda^{-1}\delta\leq t\leq\Lambda\delta$ 的环路 L 的 $\bar{\mu}$-测度。该测度等于 D 的勒贝格测度乘以 $(\Lambda-\Lambda^{-1})\delta$，再乘以满足直径$(\ell)\sqrt{\delta}>d_*$ 的环路集合的 $d\ell$-测度。由命题 2.6 可得，当 $\delta\to 0$ 时，误差趋于 0，且其收敛速率关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 均匀。

□

命题 2.5 将证明引理 1.16 的问题归结为分析被积函数之差的问题 α^{-1}和 β^{-1}在（2.8）和（1.9）中。我们首先推导出 $\alpha-\beta$的表达式，它以环路的 ρ长度与中心 ρ长度之差表示，环路为（x，β，ℓ）。

命题 2.7。 设 ε，$K>0$ 为固定值。则对于所有直径不超过 K 的 $\ell\in\mathscr{L}$，当 $\delta\to 0$ 时，

$$\alpha-\beta=e^{-\rho(x)}\Big(\mathrm{len}_\rho(x,\beta,\ell)-\mathrm{clen}_\rho(x,\beta,\ell)\Big)+o(\delta^2), \tag{2.9}$$

误差关于 $\rho\in\mathscr{B}$, ℓ（直径不超过 K）以及 $x\in D\setminus D^{\rho,\varepsilon}$的选取均匀趋于零，其中 $\{D^{\rho,\varepsilon}\}_{\rho\in D}$ 的定义同命题2.3。若去掉对 $\mathrm{diam}(\ell)$ 的限制，则误差为 $O(\delta^2\mathrm{diam}(\ell)^2)$，且关于 、 $x\in D\setminus D^{\rho,\varepsilon}$ 和 $\ell\in\mathscr{L}$..

证明。设 $d_*>0$ 如命题 2.4 所述。注意，如果我们将范围限制在直径至多为某个常数 K 的 ℓ 上，那么对于足够小的 δ，必然有 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}<d_*$。如果不施加 $\mathrm{diam}(\ell)\leq K$ 的限制，那么对于任意小的 δ，都可能有 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}>d_*$。然而，在这类 δ 和 ℓ 的范围内，命题陈述显然成立：根据命题 2.1，命题陈述中的误差必定被某个均匀常数乘以 δ 所界定；当 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}>d_*$ 时，由于 $\delta^2\mathrm{diam}(\ell)^2>d_*^2\delta$，该乘积为 $O(\delta^2\mathrm{diam}(\ell)^2)$。因此，在证明余下部分中，我们可以假设 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}<d_*$。

在整个证明中，对于固定的 $\rho\in\mathscr{B}$，我们会用图 1 中 $\ell\in\mathscr{L}$ 所表示的 $x\in D\setminus D^{\rho,\varepsilon}$，来讨论函数 $t\mapsto\mathrm{clen}_\rho(L)$ 和 $t\mapsto\mathrm{len}_\rho(L)$ 的函数图像。红点、蓝点和绿点的定义见图注。根据命题 2.4，$\alpha-\beta$ 是红点与蓝点之间的距离，而 (2.9) 右侧的量 $e^{-\rho(x)}\big(\mathrm{len}_\rho(x,\beta,\ell)-\mathrm{clen}_\rho(x,\beta,\ell)\big)$ 是蓝点与紫点之间的距离。我们可以用两条曲线的斜率来表示这两个距离：

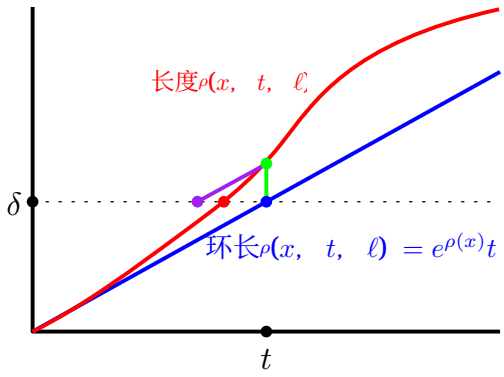


图 1：命题 2.7 中所考虑量的示意图。给定 $\rho \in \mathscr{B}$、$x \in D \setminus D^{\rho,\varepsilon}$ 和 $\ell \in \mathscr{L}$，蓝色曲线是 $t \mapsto \mathrm{clen}_\rho(L)$ 的图像，红色曲线是 $t \mapsto \mathrm{len}_\rho(L)$ 的图像。蓝色曲线是一条斜率为 $e^{\rho(x)}$的直线，红色曲线可微，且在原点处具有相同的导数 $e^{\rho(x)}$。这里，我们考虑满足 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta} < d_*$ 的 $\delta > 0$，其中 d_* 如命题 2.4 所述。根据命题 2.4，红色曲线与高度为 δ 的水平（点）线相交于唯一的红点 (α,δ)。蓝色曲线与高度为 δ 的直线相交于蓝点 (β,δ)。绿点是红色曲线上位于蓝点正上方的点；紫色线段是从绿点到点线（紫点）的、平行于蓝色直线的线段。命题 2.7 断言，蓝点与红点之间的距离可以用蓝点与紫点之间的距离近似。后者的距离恰好等于绿色线段的长度除以蓝色直线的斜率 $e^{\rho(x)}$。

- 蓝点与紫点之间的距离，等于绿色线段的长度除以蓝线的斜率（即 $e^{\rho}(x)$）。
- 蓝点与红点之间的距离，等于绿色线段的长度除以红色曲线在红点与绿点之间的平均导数。

我们需要界定的误差是这两个距离之差，也就是红点与紫点之间的距离。根据命题 2.3，红色曲线在红点与绿点之间的导数与蓝色直线的导数相差至多 $c\,\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}$，其中 c 是一个常数，在 $\rho \in \mathscr{B}$ 和 $x \in D \setminus D^{\rho,\varepsilon}$ 上均匀有界；当 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}$ 足够小时，该常数可以任意小。根据命题 2.1，这意味着这两个导数的倒数相差至多一个均匀常数乘以 $c\,\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}$。此外，绿色线段的长度为 $\mathrm{len}_\rho(x,\beta,\ell) - \delta$，并且根据 (2.6),

$$\mathrm{len}_\rho(x,\beta,\ell) - \delta = \beta(A(\sqrt{\beta}) - e^{\rho(x)}) \le c\,\mathrm{diam}(\ell)\beta^{3/2}, \tag{2.10}$$

其中 c 如上所述。因此，误差项——即红点与紫点之间的距离——有界于某个均匀常数乘以 c 直径$(\ell)\sqrt{\delta}\cdot c$ 直径$(\ell)\delta^{3/2} = c^2\delta^2$直径$(\ell)^2$。若不限制直径$(\ell) \le K$，则误差为 $O(\delta^2$直径$(\ell)^2)$，且对 $\rho \in \mathscr{B}$、$x \in D \setminus D^{\rho,\varepsilon}$ 和 $\ell \in \mathscr{L}$ 均一致成立。若限制直径$(\ell) \le K$，则 $c \to 0$ 以 $\delta \to 0$ 均匀的速率趋于 $\delta \to 0$，因此当直径$(\ell) \le K$ 时，误差为 $o(\delta^2)$，且对 $\rho \in \mathscr{B}$、$x \in D \setminus D^{\rho,\varepsilon}$ 和 ℓ 均一致成立。

□

命题 2.7 立即给出 $\alpha^{-1} - \beta^{-1}$ 的以下表达式。

Pr命题 2.8。令 $\varepsilon, K > 0$ 为固定值。那么，对于所有直径至多为 K 的 ℓ，当 $\delta \to 0$ 时，

$$\alpha^{-1} - \beta^{-1} = -\delta^{-1}\beta^{-1}\Big(\mathrm{len}_\rho(x,\beta,\ell) - \mathrm{clen}_\rho(x,\beta,\ell)\Big) + o(1), \tag{2.11}$$

误差关于直径至多为 K 的 $\rho\in\mathscr{B}$, ℓ 的选取均匀收敛，且 $x\in D\setminus D^{\rho,\varepsilon}$，其中 $\{D^{\rho,\varepsilon}\}_{\rho\in D}$ 的定义与命题 2.3 中相同。若去掉对 $\mathrm{diam}(\ell)$ 的限制，则误差为 $O(\mathrm{diam}(\ell)^2)+o(\delta^2)$，且关于 $\rho\in\mathscr{B}$、$x\in D\setminus D^{\rho,\varepsilon}$ 和 $\ell\in\mathscr{L}$ 均匀。

证明。 在以下证明中，每个$O(\cdot)$和$o(\cdot)$误差均随 $\delta\to 0$ 在 $\rho\in\mathscr{B}$、$x\in D\setminus D^{\rho,\varepsilon}$ 和 ℓ 的选择中一致收敛。

由$f(r)=1/r$在 β 处的泰勒展开，得

$$\alpha^{-1}-\beta^{-1}=-\beta^{-2}(\alpha-\beta)+2\gamma^{-3}(\alpha-\beta)^2$$

对于某个 γ 介于 α 与 β之间。命题 2.7 给出

$$-\beta^{-2}(\alpha-\beta)=-\delta^{-1}\beta^{-1}\Big(\mathrm{len}_\rho(x,\beta,\ell)-\mathrm{clen}_\rho(x,\beta,\ell)\Big)+o(1).$$

现在处理 $2\gamma^{-3}(\alpha-\beta)^2$ 项。由 (2.1)，有 $\Lambda^{-1}\le\alpha/\delta\le\Lambda$；因此， $\gamma^{-3}=\mathrm{O}(\delta^{-3})$。接下来，由 (2.10) 和命题 2.7，$(\alpha-\beta)^2=\mathrm{O}(\mathrm{c}^2\mathrm{diam}(\ell)^2\delta^3)+\mathrm{o}(\delta^4)$，其中 c 是一个关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 一致有界的常数，并且当 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}$ 足够小时，可以使其任意小。因此， $\gamma^{-3}(\alpha-\beta)^2=\mathrm{O}(\mathrm{c}^2\mathrm{diam}(\ell)^2)+\mathrm{o}(\delta^2)$。在对 $\mathrm{diam}(\ell)$ 的限制下，后者为 $\mathrm{o}(1)$；否则为 $\mathrm{O}(\mathrm{diam}(\ell)^2)+\mathrm{o}(\delta^2)$。

□

我们还给出一个类似的估计，供记录之用，可能对问题 6.5有所帮助。

命题 2.9。 在与命题 2.8 相同的假设下，且不对 $\mathrm{diam}(\ell)$作限制，我们有$\alpha^{-2}-\beta^{-2}=O(c\,\mathrm{diam}(\ell)\delta^{-1/2})$ 关于 $\rho\in\mathscr{B}$、$x\in D\setminus D^{\rho,\varepsilon}$ 和 $\ell\in\mathscr{L}$ 均匀成立，其中 c 是一个关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 一致有界的常数；当 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}$ 充分小时，该常数可以任意小。

证明。由 $\mathrm{f}(\mathrm{r})=1/\mathrm{r}$ 在 β 处的泰勒展开，对于某个介于 α 和 β 之间的 γ，我们有 $\alpha^{-2}-\beta^{-2}=-2\gamma^{-3}(\alpha-\beta)$。由 (2.1)，可得 $\Lambda^{-1}\le\alpha/\delta\le\Lambda$；因此， $\gamma^{-3}=\mathrm{O}(\delta^{-3})$。接下来，由 (2.10) 和命题 2.7，$\alpha-\beta=\mathrm{O}(\mathrm{c}\,\mathrm{diam}(\ell)\delta^{3/2})$，其中 c 是一个关于 $\rho\in\mathscr{B}$一致有界的常数；当 $\mathrm{diam}(\ell)\sqrt{\delta}$ 充分小时，该常数可以任意小。因此， $\gamma^{-3}(\alpha-\beta)=\mathrm{O}(\mathrm{c}\,\mathrm{diam}(\ell)\delta^{-1/2})$。

□

引理 1.16 的证明。设 $\varepsilon>0$ 和 $\{\mathrm{D}^{\rho,\varepsilon}\}_{\rho\in D}$ 如命题 2.3 中所定义，使得 $\mathrm{Vol}(\mathrm{D}^{\rho,\varepsilon})\le\varepsilon$。根据命题 1.15 和 2.5，对 $\mathrm{x}\in\mathrm{D}\setminus\mathrm{D}^{\rho,\varepsilon}$ 上的 $\alpha^{-1}-\beta^{-1}$ 积分并 $\ell\in\mathscr{L}$，所得结果等于以 D 为中心且 $\mathrm{len}_\rho(\mathrm{L})\ge\delta$ 的环 L 的 μ-质量，减去以 D 为中心且 $\mathrm{clen}_\rho(\mathrm{L})\ge\delta$的环 L 的 μ-质量，误差为均匀的 $\mathrm{o}(1)$。根据命题 2.8，对于每个固定的 $\mathrm{x}\in\mathrm{D}\setminus\mathrm{D}^{\rho,\varepsilon}$ 且 $\ell\in\mathscr{L}$，被积函数 $\alpha^{-1}-\beta^{-1}$ 等于

$$-\delta^{-1}\Big(\beta^{-1}\mathrm{len}_\rho(x,e^{-\rho(x)}\delta,\ell)-e^{\rho(x)}\Big)\tag{2.12}$$

再加上一个误差项，其极限行为如下， $\delta\to 0$:

(a) 误差为 $O(\mathrm{diam}(\ell)^2)+o(\delta^2)$，在 $\rho\in\mathscr{B}$ 以及 $(x,\ell)\in(D\setminus D^{\rho,\varepsilon})\times\mathscr{L}$上均匀成立。

(b) 对每个固定的 $K>0$，误差关于 $\rho\in\mathscr{B}$均匀地为$o(1)$，并且 $(x,\ell)\in(D\setminus D^{\rho,\varepsilon})\times\mathscr{L}$满足直径$(\ell)\le K$。

现在我们对 $\alpha^{-1}-\beta^{-1}$ 在 $x\in D\setminus D^{\rho}$ 上积分$^{\varepsilon}$，并且 $\ell\in\mathscr{L}$然后取 $\delta\to 0$极限。(2.12) 的积分恰好等于项 $\frac{1}{\delta}\mathbb{E}[e^{\rho(Z)}-e^{\rho(X_\ell)}]$ 在 (1.10) 中的值，因此我们只需证明，表达式中误差项的积分 $\alpha^{-1}-\beta^{-1}$ 趋于 0，当 $\delta\to 0$ 关于 $\rho\in\mathscr{B}$均匀成立时。

为分析这一误差项的积分，我们将积分域划分。对于任意关于 $\delta>0$的函数 $\mathrm{K}(\delta)$，我们可以将 $(\mathrm{D}\setminus\mathrm{D}^{\rho,\varepsilon})\times\mathscr{L}$划分为两个子域：由满足 $\mathrm{diam}(\ell)\le\mathrm{K}(\delta)$ 的点对 (x,ℓ) 构成的集合，以及由满足 $\mathrm{diam}(\ell)>\mathrm{K}(\delta)$ 的点对 (x,ℓ) 构成的集合。界限 (a) 表明，在满足 $\mathrm{diam}(\ell)>\mathrm{k}$ 的 (x,ℓ) 上，误差的积分等于一个均匀常数乘以 $\int\{\mathrm{diam}(\ell)>\mathrm{k}\}(\mathrm{diam}(\ell)^2+\delta^2)\mathrm{d}\ell$，当 $\mathrm{k}\to\infty$ 时以关于（较小的） $\delta>0$ 和 $\rho\in\mathscr{B}$均匀的速率趋于零。此外，(b) 表明，如果 $\mathrm{k}>0$ 固定，

在满足 $\operatorname{diam}(\ell) \le k$ 的 (x,ℓ) 上，误差的积分当 $\delta \to 0$ 时趋于 0，且关于 $\rho \in \mathscr{B}$ 均匀。因此，如果我们选择一个函数 $K(\delta)$，使其随着 $\delta \to 0$ 趋于无穷且速度足够慢，那么在 $(D \setminus D^{\rho,\varepsilon}) \times \mathscr{L}$ 的两个子域上的误差项积分，当 $\delta \to 0$ 时都趋于 0，且关于 $\rho \in \mathscr{B}$ 均匀。

最后，$\alpha^{-1} - \beta^{-1}$ 在 $x \in D^{\rho}$、ε 以及 $\ell \in \mathscr{L}$ 的积分被一个与 $\varepsilon\delta$ 成正比的均匀常数所界定，这是由于（2.1），由此证明完成。 □

3 期望长度偏差与狄利克雷能量

现在，我们通过证明引理1.17来完成定理1.12的证明。证明该引理的主要步骤是证明以下命题。

命题 3.1。设 Z 和 X 如引理*1.16*中所定义，则量 $\beta^{-1}\mathbb{E}[\rho(Z) - \rho(X)]$ 收敛于0，当 $\delta \to 0$ 时，在 $\rho \in \mathscr{B}$ 上均匀成立。此处的期望是相对于引理*1.16*中定义的 X 和 Z 的整体概率律而言。

我们通过傅里叶分析论证证明命题 3.1。在本节中，我们将函数 ϕ 的傅里叶变换定义为 $\widehat{\phi}(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\zeta\cdot z}\phi(z)\,dz$（采用特征函数的约定）。为证明命题 3.1，我们用给定长度和中心的条件密度来表示在给定 Z 条件下的 $X = x$，它是从 μ 中抽取的环路的期望占据测度。下面的命题中，我们为该期望占据测度引入一些记号，并记录其若干基本性质。

命题 3.2. 对于 $z \in \mathbb{R}^2$ 和 $s > 0$，令 $\theta(z,s)$ 表示从 μ 采样并以长度为 s、中心为零为条件的环路的期望占据测度。对于固定的 s，测度 $\theta(z,s)$ 是径向对称的施瓦茨函数，也是概率测度。每个坐标的二阶中心矩均为 bs。此外，θ 满足缩放关系 $\theta(z/\sqrt{t}, s) = t\theta(z, ts)$，其中 $t \ge 0$ 任意。最后，我们有 $\lim_{s\to 0}\widehat{\theta}(z,s) = 1$。

证明. 由于 $\theta(z, s)$ 是从 $d\ell$ 采样的 With ℓ 的概率律，环路 $t \mapsto \sqrt{s}\ell(t/s)$ 的概率律为 $\theta(z, s)$。由定义 1.11 可知，$\theta(z, s)$ 是径向对称的施瓦茨函数，也是具有所需二阶中心矩的概率测度。缩放关系也可立即推出。最后，二阶中心矩表明，当 $s \to 0$ 趋于某值时，测度 $\theta(z, s)$ 弱收敛于 0 处的点质量，因此其特征函数收敛于 1。

□

我们首先将证明命题 3.1 的问题归结为分析一个适当选取的测度的逆拉普拉斯算子的狄利克雷能量。

命题 3.3。 假设 $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的函数

$$\Delta\phi(y) = \int_D \beta^{-1}(\theta(y-x,\beta) - \boldsymbol{\delta}(y-x))\,dx \qquad \textit{and} \qquad \lim_{|y|\to\infty}\phi(y) = 0, \tag{3.1}$$

其中 θ 在命题 *3.2* 中定义，且 $\boldsymbol{\delta}$ 是位于 0处的点质量。则

$$\beta^{-1}\mathbb{E}[\rho(Z) - \rho(X)] \le (\rho,\rho)_{\nabla}^2(\phi,\phi)_{\nabla}^2$$

证明。 给定 $X = x$ 时，Z 的条件密度为 $\theta(\cdot - x, \beta)$。因此，

$$\beta^{-1}\mathbb{E}[\rho(Z) - \rho(X)] = \int_D \Big(\rho, \beta^{-1}\big(\theta(\cdot - x,\beta) - \boldsymbol{\delta}(\cdot - x)\big)\Big)\,dx = (\rho, \Delta\phi)$$

根据 ϕ 的定义。分部积分（或应用格林恒等式）可得 $(\rho,\Delta\phi) = -(\rho,\phi)_{\nabla}$，并且

$$(\rho,\phi)_{\nabla}^2 \le (\rho,\rho)_{\nabla}(\phi,\phi)_{\nabla}.$$

通过应用柯西-施瓦茨不等式。 □

因此，只需在证明中均匀地证明 $(\phi,\ \phi)_{\nabla} \to 0$。为了用傅里叶积分表示满足（$\phi$ （3.1）的函数[4],，我们首先定义一族辅助函数，并将其记作 Θ_t，由$t>0$索引。

命题 3.4. 采用记号 $\widehat{\theta_s}(\zeta,s_0) := \frac{\partial\theta}{\partial s}(\zeta,s)\big|_{s=s_0}$，对 $t>0$ 定义为 $|\zeta|^{-2}\widehat{\theta_s}(\zeta,t)$ 的傅里叶反演的函数是径向对称施瓦茨函数。此外，对于所有 $t>0$ 和 $\zeta\in\mathbb{R}^2$，$\Theta_t(y)=\Theta_1(y/\sqrt{t})/t$ 和 $\widehat{\Theta_t}(\zeta)$ 均有界。

证明。固定 $t>0$。回顾一下，$\widehat{\theta}(r,t)$ 关于 $r\geq 0$是施瓦茨函数，因此在本证明中我们采用记号 $\widehat{\theta_r}(r,t) := \frac{\partial\widehat{\theta}}{\partial|\zeta|}(|\zeta|,t)\Big|_{|\zeta|=r}\widehat{\ }$。$\theta$ 的缩放关系和径向对称性（命题 3.2）意味着 $\Theta_t(\zeta)=|\zeta|^{-2}\widehat{\theta_s}(\zeta,t)=\widehat{\theta_s}(1,t|\zeta|^2)$。因此，只需证明 $\widehat{\Theta_t}(r)=\widehat{\theta_s}(1,tr^2)$作为 $r\geq 0$的函数是施瓦茨函数。这也意味着 $\widehat{\Theta_t}(\zeta)=\widehat{\Theta_1}(\sqrt{t}\,\zeta)$ 由 $\sup_{t\geq 0}|\widehat{\Theta_1}(t)|$一致有界，而 $\Theta_t(y)=\Theta_1(y/\sqrt{t})/t$ 则由傅里叶反演得出。

首先，我们反复对关系 $\widehat{\theta}(1,tr^2)=\widehat{\theta}(r,t)$ 两边求导，运用链式法则，并注意到 $\partial_s^k\widehat{\theta}(1,tr^2)|_{r=0}$存在，且是 $\partial_r^{2k}\widehat{\theta}(r,t)|_{r=0}$的常数倍。此外，第一次求导可得

$$\widehat{\Theta_t}(r)=\widehat{\theta_s}(1,tr^2)=\frac{\widehat{\theta_r}(r,t)}{2tr}.$$

设 $P(r)$ 是关于 r 的任意多项式，k 为任意非负整数。另一方面，对于固定的 $\varepsilon>0$，有

$$\sup_{r>\varepsilon}\left|P(r)\frac{d^k}{dr^k}\frac{\widehat{\theta_r}(r,t)}{2tr}\right|<\infty.$$

因为 $\widehat{\theta_r}(r,t)$ 及其关于 r 的导数都迅速衰减。另一方面，注意到 $\left|P(r)\,\frac{d^k}{dr^k}\widehat{\theta_s}(1,tr^2)\right|$ 在 $(0,\varepsilon]$ 上连续，且在 0 处有界。这证明了 Θ_t 是施瓦茨函数。□

命题 3.5。 设 Θ_t 由命题 3.4定义。对 $x\in\mathbb{R}^2$，令 $\phi^x:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\phi^x(y) := -\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \Theta_{te^{-\rho(x)}}(y-x)\,dt.$$

且 $\phi:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\phi(y) := \int_D \phi^x(y)\,dx \tag{3.2}$$

对每个$y\in\mathbb{R}^2$，则 ϕ 满足 (3.1)。

证明。由傅里叶变换可得

$$\begin{aligned}\widehat{\phi^x}(\zeta) &= -\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{i\zeta\cdot x}\widehat{\Theta_{te^{-\rho(x)}}}(\zeta)\,dt\\ &= -\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{i\zeta\cdot x}|\zeta|^{-2}\widehat{\theta_s}\left(\zeta,te^{-\rho(x)}\right)dt\\ &= -e^{i\zeta\cdot x}|\zeta|^{-2}\beta^{-1}\left(\widehat{\theta}(\zeta,\delta e^{-\rho(x)})-1\right),\end{aligned}$$

正如我们所定义的 $\beta=\delta e^{-\rho(x)}$。因此，对 $\widehat{\Delta\phi^x}=-|\zeta|^2\widehat{\phi^x}$ 进行傅里叶反演即可得到所需结果。此外，第一个恒等式表明，根据命题 $\widehat{\phi^x}\in L^1$，可得3.4。由黎曼－勒贝格引理可知，$\lim_{|y|\to\infty}\phi^x(y)=0$，因此由控制收敛定理可得 $\lim_{|y|\to\infty}\phi(y)=0$。

□

[4]或者，也可以用格林函数的卷积来表示 ϕ。

命题 3.6。 令 ϕ 定义为 (3.2)，并令 Θ_t 如命题 3.4 中所定义，定义

$$G^y_{\rho,r}(z) := e^{3\rho(y-rz)/2}\nabla\Theta_1(ze^{\rho(y-rz)/2}) \tag{3.3}$$

对每个 $\rho\in\mathscr{B}$、$y\in\mathbb{R}^2$、$r\in\mathbb{R}$ 和 $z\in\mathbb{R}^2$。那么

$$\nabla_y\phi(y) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\frac{y-D}{\sqrt{t}}} G^y_{\rho,\sqrt{t}}(z)\,dz\,dt. \tag{3.4}$$

证明。 由命题 3.4,

$$\phi(y) = -\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \Theta_{te^{-\rho(x)}}(y-x)\,dx\,dt = -\frac{1}{\delta}\int_0^\delta\int_D \frac{\Theta_1\big((y-x)(te^{-\rho(x)})^{-\frac{1}{2}}\big)}{te^{-\rho(x)}}\,dx\,dt,$$

取梯度并代入 $y-x=\sqrt{t}z$，得到

$$\nabla_y\phi(y) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\frac{y-D}{\sqrt{t}}} e^{3\rho(y-\sqrt{t}z)/2}\nabla\Theta_1(ze^{\rho(y-\sqrt{t}z)/2})\,dz\,dt,$$

因此结论成立。 □

命题 3.7。 对于每个 $\rho\in\mathscr{B}$、$r\in\mathbb{R}$ 和 $y\in\mathbb{R}^2$，令

$$F_{\rho,r}(y) := \int_{\mathbb{R}^2} G^y_{\rho,r}(z)\,dz \tag{3.5}$$

其中 G^y_ρ,r 定义为 (3.3)。那么 $F_{\rho,r}$ 和 $\partial_r F_{\rho,r}$ 都在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中收敛到 0；当 $r\to 0$ 时，这一收敛关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 是均匀的。

证明。 由于 $\nabla\Theta_1$ 快速衰减，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $K=K(\epsilon)$，使得

$$\int_{|z|\geq K}\left|G^y_{\rho,r}(z)\right|^2 dz < \varepsilon \tag{3.6}$$

对所有 $\mathrm{r}\in\mathbb{R}$、$\mathrm{y}\in\mathbb{R}^2$，以及 $\rho\in\mathscr{B}$，当 ρ 时，均有界。由径向对称性可知，对于所有 ρ 和 y，$\mathrm{F}\rho$, $0(\mathrm{y})=0$，因为 $\nabla\Theta_1$ 是奇函数。现在，我们根据 $\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2$ 的符号，将积分 (3.5) 的定义域分成两个区域。写作 $\mathrm{z}=(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2)\in\mathbb{R}^2$ 时，每个区域上的积分便成为

$$\int_{\pm z_1 z_2>0,|z|<K} G^y_{\rho,r}(z)\,dz = \int_{z_1>0,\pm z_2>0,|z|<K}\big(G^y_{\rho,r}(z)-G^y_{\rho,-r}(z)\big)\,dz.$$

由于 $\nabla\Theta_1$ 作为施瓦茨函数是利普希茨的，$L^2(D)$ 中 ρ 的一致等度连续性（按照注释 1.7 的意义）意味着 $G_{\rho,r}$作为 rz 的函数，在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中也一致等度连续。因此，记 $A_\pm=\{z\in\mathbb{R}^2\colon z_1>0,\pm z_2>0,|z|<K\}$，则存在 $d=d(\varepsilon)>0$，使得

$$\int_D\left|\int_{|z|<K} G^y_{\rho,r}(z)\right|^2 dy \leq \sum_{i\in\{\pm\}}\int_{A_i}\int_D\left|G^y_{\rho,r}(z)-G^y_{\rho,-r}(z)\right|^2 dy\,dz \leq 2\varepsilon$$

对所有 $\rho\in\mathscr{B}$，只要 $|r|<d$。结合（3.6），我们得出，随着$r\to 0$，$F_{\rho,r}$在$L^2(D)$ 中关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 均匀收敛到 0。

类似的论证也适用于 $\partial_r F_{\rho,r}$。特别地，作为 ρ 和 $\nabla\rho$的函数，注意到 ∇G^ρ 是 Lipschitz 连续的。因此，ρ 在$W^{1,2}(D)$ 中的一致等度连续性（按注 1.7的含义）蕴含一致

均匀分布等度连续性 $\nabla G^{y}_{\rho,r}(z)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上关于 rz，其中 $\rho\in\mathscr{B}$ 作为函数。由于 Θ_1 快速衰减，由分部积分可得，

$$\frac{\partial}{\partial r}F_{\rho,r}(y)\Big|_{r=0}=-\int_{\mathbb{R}^2}\nabla_z G^{y}_{\rho,0}(z)\cdot z\,dz=\int_{\mathbb{R}^2}2G^{y}_{\rho,0}(z)\,dz=0$$

再次利用$G^{y}_{\rho,0}$的奇性。重复前面的论证，我们得出 $\partial_r F_{\rho,r}$ 在 $\rho\in\mathscr{B}$ 上均匀收敛于 0（在$L^2(\mathbb{R}^2)$中），当$r\to 0$时。 □

命题 3.8. 对每个 $y\in\mathbb{R}^2$，定义

$$\Phi(y):=\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\frac{F_{\rho,\sqrt{t}}(y)}{\sqrt{t}}\,dt. \tag{3.7}$$

那么，$\nabla\phi-\Phi$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中于 $\rho\in\mathscr{B}$ 上均匀收敛于 0，当 $\delta\to 0$时。

证明。给定 $\varepsilon>0$，令 K $=$K (ε) 满足 (3.6)。取足够小的 d(ε)，使得只要 0 $<$r $<$d，就有 $\left|$G y $_{\rho}$,r (z) $-$ G y $_{\rho}$,0(z))$\right|<\varepsilon/\pi$K ^{2}，且 (y $-$D)/r 的直径大于 K。利用三角不等式，由 (3.4) 和 (3.7) 可得所需结果。 □

命题 *3.1* 的证明。根据中值定理，令 Φ 在命题 3.8中定义，则有

$$\int_D|\Phi(y)|^2\,dy\le\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\int_D\left|\frac{F_{\rho,\sqrt{t}}(y)}{\sqrt{t}}\right|^2dy\,dt=\int_D|\partial_r F_{\rho,r}(y)|^2\,dy$$

对某个 $r\in(0,\sqrt{\delta})$，即 Φ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中，当 $\delta\to 0$ 时在 $\rho\in\mathscr{B}$ 上均匀收敛于 0，由命题 3.7。由命题 3.8，可得 $\nabla\phi$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中，当 $\delta\to 0$ 时也在 $\rho\in\mathscr{B}$上均匀收敛于 0。证明完毕。 □

引理 *1.17* 的证明。设 $Y=\rho(Z)-\rho(X)$，于是

$$\begin{aligned}\delta^{-1}\mathbb{E}[e^{\rho(Z)}-e^{\rho(X)}]&=\delta^{-1}\mathbb{E}\left[e^{\rho(X)}\left(Y+\frac{Y^2}{2!}+\frac{Y^3}{3!}+\dots\right)\right]\\&=\delta^{-1}\mathbb{E}[e^{\rho(X)}Y]+\delta^{-1}\mathbb{E}\left[e^{\rho(X)}\left(\frac{Y^2}{2!}+O(Y^3)\right)\right])\end{aligned} \tag{3.8}$$

由命题 3.1，项 $\delta^{-1}\mathbb{E}[$e$^{\rho(X)}$Y $]$ 是 o(1)，且其收敛关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 均匀。现在分析 (3.8) 中的第二项。由于梯度 $\nabla\rho$ 关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 在 L^1 中均匀等度连续（按注 1.7 的意义），我们可以几乎必然地将 Y 表示为 $\nabla\rho$(X) $\cdot$ (Z $-$X) $+\varepsilon$，其中 ε 是一个误差项，其期望关于 |Z $-$X |$\to 0$ 均匀为 o(|Z $-$X |)。在给定 X 的条件下，Z $-$X 的每个坐标的均值为 X，方差为 βb。因此，令 U $\sim$ 均匀分布 $[0,2\pi]$，

$$\mathbb{E}((\nabla\rho(X)\cdot(Z-X))^2|X)=|\nabla\rho(X)|^2\mathbb{E}\left[|Z-X|^2|X\right]\mathbb{E}(\cos^2(U))=\beta b|\nabla\rho(X)|^2.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2|X]&=\mathbb{E}\left[(\nabla\rho(X)\cdot(Z-X)+\varepsilon)^2|X\right]\\&=\beta b|\nabla\rho(X)|^2+\mathbb{E}[2\varepsilon\nabla\rho(X)\cdot(Z-X)+\varepsilon^2|X]\\&=\beta b|\nabla\rho(X)|^2+o(\delta),\end{aligned}$$

其中，$o(\delta)$ 误差关于 ρ 和 X均匀分布。类似地，我们可以证明 $\mathbb{E}[Y^3|X]$ 关于 ρ 和 X一致为 $o(\delta)$。将两边乘以 $\delta^{-1}e^{\rho(X)}$ 并取期望，可推得（3.8）中的第二项等于 $_b2\,(\rho,\rho)_\nabla$，再加上一个关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 一致收敛的 $o(1)$ 误差。 □

定理 *1.12*的证明。 该结论可由命题 1.15、引理 1.16和引理 1.17立即推出。 □

最后，为了从定理 1.4 推出定理 1.12，我们明确刻画期望占据测度。

命题 3.9。 对于布朗环测度，从$(\mathscr{L}, d\ell)$ 中抽取的环路的期望占据测度，是方差为1/12的复高斯分布的密度。

证明。 从 $(\mathscr{L}, d\ell)$ 中抽取的环路，其概率律等同于以圆为指标集的布朗桥减去其均值。在任意给定时刻，以圆为指标集的布朗桥的取值减去其均值，是方差为 1/12 的复零均值高斯随机变量；例如， [She07]中就有这项计算。[5] □

定理 *1.12* 的证明。 结论由定理 1.12 和命题 3.9推出。 . □

4 曲面上的布朗环

本节证明定理 1.9。在本节中，固定一个紧致光滑二维黎曼流形（M, g），并令 μ^{loop} 表示（M, g）上的布朗环测度。此外，固定 $\mathscr{B}$ 为 $W^{1,1}(M)$ 中的一个预紧利普希茨函数集，且这些函数的 Lipschitz 常数均有界。

为证明定理1.9，我们分别分析相对于 ρ-长度的“大”环的质量和“小”环的质量。我们首先证明关于大环上 ρ-长度的中心极限定理，以此分析大环的质量：

命题 4.1。 我们可以选取常数 $c > 0$，使得对于每个 ε，$t > 0$ 和 $\rho \in \mathscr{B}$，以及从 $\mu(z,z;t)$中抽取的每个环路 L，

$$\left| \int_0^t e^{\rho(L(s))}\, ds - t\mathrm{Vol}_\rho(M)/\mathrm{Vol}(M) \right| \le c t^{(1+\varepsilon)/2} \tag{4.1}$$

其发生的概率为 $1-O(e^{-t^{\varepsilon}})$，当 $t \to \infty$时，且收敛速率关于 $\rho \in \mathscr{B}$均匀。

为证明命题 4.1，我们将马尔可夫中心极限定理应用于 (M,g) 上的布朗运动，然后利用以下拉东-尼科迪姆估计，将布朗运动与从 $\mu(z,z;t)$ 中抽取的环路进行比较。

命题 4.2。 设 $z \in M$ 为固定点，L 是从 $\mu(z,z;t)$中抽取的环路。L 的概率律相对于限制在 $[0,s]$上的布朗运动的拉东-尼科迪姆导数为 $1+O(e^{-\alpha(t-s)})$，其中 $\alpha = \alpha(M,g) > 0$。

证明。 根据命题 4.3， $\|\mu(\cdot, z; t-s)/\mu(z, z; t)\|_\infty = 1 + O(e^{-\alpha(t-s)})$，其中存在某个 $\alpha = \alpha(M, g) > 0$，且误差关于 $z \in M$均匀。由此可得导数界。 □

为了将马尔可夫中心极限定理应用于 (M, g) 上的布朗运动，我们需要布朗运动转移核 $\mu(\cdot,\cdot; t)$ 在 $t \to \infty$ 时满足以下收敛结果。

[5]一种理解方式是考虑一个以圆为指标的高斯自由场 h，并注意到，在由 $[-1/2,1/2]$ 参数化的圆上，函数 $f(x) = x^2/2$ 的狄利克雷能量为 1/12，因此 $(f,f)_\nabla = 1/12$。但对于圆上的函数 g，根据分部积分有 $(f(x), g(x))_\nabla = g(0) - \int_{-1/2}^{1/2} g(x)dx$。然后，利用上述结果和 GFF 的定义，我们有 $\mathrm{Var}\big((h,f)_\nabla\big) = \mathrm{Var}\big(h(1/2) - \int_0^1 h(x)dx\big) = (f,f)_\nabla = 1/12$。根据旋转对称性，将 $[-1/2,1/2]$ 中的 0 替换为任意其他数，该结论仍然成立。She07] 也通过傅里叶级数推导出了 1/12；我们指出，比较这两种推导方式，是证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ 的一种方法。

命题 4.3。我们有

$$\|\mu(\cdot,\cdot;t) - (\mathrm{Vol}(M))^{-1}\|_{L^\infty(M\times M)} = O(e^{-\alpha t}).$$

其中 $\alpha > 0$ 为某个常数。

证明。令 $0 = \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ 表示 Δ 的特征值，并令 $\{\phi_n\}$ 为相应的特征函数希尔伯特基。由热方程可知，p 可写为

$$p(x,y;t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t\lambda_n}\phi_n(x)\phi_n(y).$$

已知 $\|\phi_n\|_\infty \le c\lambda_n^{1/4}$其中某个常数 c仅依赖于（M，g）[Don01]。因此，$\|\mu(\cdot,\cdot;t)$–(体积$(M))^{-1}\|_{L^\infty}$($M\times$ M) 有一个上界，该上界是关于 t 的函数，并且当 $t\to\infty$ 时呈指数衰减。 □

命题 4.1 的证明。（在下文的证明中，O(·)误差的收敛速率对 $\rho\in\mathscr{B}$ 的选择是一致的。）令 B_t 为 (M，g) 上的布朗运动，其初始点取自与 (M，g) 相关的体积测度。令 $\mathrm{Y}_n = \mathrm{B}|_{[n,n+1]}$，并令 $\mathrm{f}(\mathrm{Y}n) = \int \mathrm{n}+1\mathrm{n}\ \mathrm{e}^{\rho(B_t)}$ d t。对于 y $\in$M，令 f_*(y) 为 $\int \mathrm{n}+1\mathrm{n}\ \mathrm{e}^{\rho(B}\mathrm{y}\ \mathrm{t}\ )\mathrm{d}\ \mathrm{t}$ 的期望值，其中 B y t 是从 y 出发的 (M，g) 上的布朗运动。由命题 4.3，给定 Y_0 时 f (Yn) 的条件期望为 $\int \mathrm{M}\ \mathrm{p}(\mathrm{B}_1,\mathrm{y};\mathrm{n}\ -1)\ \mathrm{f}_*(\mathrm{y})\mathrm{Vol}(\mathrm{d}\ \mathrm{y}) = \mathbb{E}(\ \mathrm{f}\ (\mathrm{Y}_0)) + \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\alpha n})$，其中某个 $\alpha = \alpha(\mathrm{M},\ \mathrm{g})$。因此，$\mathrm{Cov}(\ \mathrm{f}\ (\mathrm{Y}_0),\ \mathrm{f}\ (\mathrm{Y}n)) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\alpha n})$，其中某个 $\alpha = \alpha(\mathrm{M},\ \mathrm{g})$。于是，我们可以应用马尔可夫链中心极限定理，推得

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(Y_j) - \mathbb{E}(f(Y_0))\right)$$

在 $n\to\infty$ 极限下收敛于一个中心化的高斯分布，其方差在 $\rho\in\mathscr{B}$ 的任意选择下均一致有界。注意，我们有 $\mathbb{E}(\ f(Y_0)) = {}^{1}\mathrm{Vol}(M)\int_M e^{\rho(x)})\mathrm{Vol}(dx) = \mathrm{Vol}\rho(M)/\mathrm{Vol}(M)$。因此，对每个固定的 ε，$c>0$，

$$\left|\int_0^n e^{\rho(B_t)}\,dt - n\mathrm{Vol}_\rho(M)/\mathrm{Vol}(M)\right| \le c n^{(1+\varepsilon)/2}$$

其概率为 $1-O(e^{-n^\varepsilon})$。

结合命题 4.2，我们推得，若 n是一个满足以下条件的整数：$t-2\sqrt{t}\le n\le t-\sqrt{t}$，则

$$\left|\int_0^n e^{\rho(L(s))}\,ds - n\mathrm{Vol}_\rho(M)/\mathrm{Vol}(M)\right| \le c\sqrt{t}^{(1+\varepsilon)/2}$$

当 $t\to\infty$ 时，其概率为 $1-O(e^{-t^\varepsilon})$。由于 $\int_t n e^{\rho(L(s))}ds$有上界 $\sqrt{t}$乘以一个关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 一致的常数，因此这就证明了该命题。 □

现在我们应用命题 4.1 来分析大环的质量。

命题 4.4。对于每个 $\varepsilon>0$，以下两者之间的对称差

- 长度为 $\ge\delta$ 且长度为 $\le C$ 的环集合，以及
- 长度为 $\ge\delta$ 且 ρ-长度为 $\le C$ 体积$\rho(M)$/体积(M) 的环集合，

其 μ^{loop} 质量至多为 $O(C^{(-1+\varepsilon)/2})$，且收敛速率关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 均匀。

证明。（在下文的证明中，O(·)误差的收敛速率关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 的选择均匀分布。）令 $\mathscr{S}$表示这两个集合的对称差。由命题 2.1， $\mathscr{S}$中的每个环的长度介于 $\Lambda^{-1}C$ 和 ΛC 之间，其中 Λ 与 $\rho\in\mathscr{B}$ 的选择无关。由命题 4.1，不满足 (4.1) 的环所成的子集$\mathscr{S}^*\subset\mathscr{S}$的 μ^{loop} 质量至多为 $\int_{C\Lambda^{-1}C} O(e^{-t^\varepsilon}/t)dt = O(\exp(-\Lambda^{-\varepsilon}C^{\varepsilon})/C)$。此外，取 $a_\pm = C\,\mathrm{Vol}\rho(M)/\mathrm{Vol}(M) \pm c(C^{(1+\varepsilon)}/2$，我们可以将$\mathscr{S}\backslash\mathscr{S}^*$中环的集合的 μ^{loop}质量上界为

$$\int_{a_-}^{a_+}\int_M t^{-1}\mu_\rho(z,z;t)\mathrm{Vol}_\rho(dz)dt \le \mathrm{Vol}_\rho(M)\int_{a_-}^{a_+} t^{-1}dt = O(C^{(-1+\varepsilon)/2}). \qquad \square$$

接下来，我们分析小环的质量。

命题 4.5。 对于每个 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{B}$，以下集合

$$\{L:\mathrm{len}_{\rho_j}L\ge\delta,\mathrm{len}L\le C\}\qquad j=1,2$$

在 (M,g) 上的布朗环测度下的测度之差，等于以下表达式之差

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\rho_j}(M)}{2\pi\delta}+\frac{1}{48\pi}\int_M(\|\nabla\rho_j\|^2+2K\rho_j)\mathrm{Vol}(dz),\quad j=1,2. \tag{4.2}$$

plus 是一个当 $\delta\to 0$ 时趋于零的项，其趋近速率对于 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{B}$ 的选择是均匀的 .

为证明命题 4.5，我们将应用以下两个命题。

命题 4.6。 设(M,g)是一个光滑二维黎曼流形。设 $U\subset M$，并设 $\mathscr{S}$ 是 (M,g) 中一族与 U 不相交的闭集相交的环路。则对于所有充分小的 $\delta>0$，以下结论成立。设 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{B}$ 是一致有界函数，且在 U 之外相等。那么，对于每个 $L\in\mathscr{S}$，$\mathrm{len}_{\rho_1}L\ge\delta$ 当且仅当 $\mathrm{len}_{\rho_2}L\ge\delta$。

证明。 这是显然的 ，因为 $\mathscr{B}$ 均有界，且L 在U 之外的长度有下界 .
□

命题 4.7。 设 f 是区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上具有有限狄利克雷能量的紧支撑函数，h 是 D 上的光滑紧支撑函数，并令 ∇_h、ν_h和 K_h分别表示与$(D,\ e^h|dz|^2)$相关联的梯度、体积形式和高斯曲率。那么

$$\int_D\|\nabla(f+h)\|^2dz-\int_D\|\nabla h\|^2dz=\int_D(\|\nabla_h f\|^2+2K_hf)\nu_h(dz).$$

证明。 由此可得

$$\begin{aligned}&\int_D(\|\nabla(f+h)\|^2-\|\nabla h\|^2)dz=-\int_D(f\Delta f+2f\Delta h)dz\\ =&-\int_D(fe^{-h}\Delta f+2fe^{-h}\Delta h)\nu_h(dz)=-\int_D(f\Delta_h f-2K_hf)\nu_h(dz)\\ =&-\int_D(fe^{-h}\Delta f-2K_hf)\nu_h(dz)=\int_D(\|\nabla_h f\|^2+2K_hf)\nu_h(dz).\end{aligned}\qquad\square$$

命题 4.5的证明。 在下面的证明中，我们考虑 ρ长度和 ρ体积形式（如定义 1.3 中所定义）对于函数 ρ在（M、g）以及欧几里得平面上的某个区域上的情形。为避免混淆$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$这两种情形，我们在（M、g）情形中使用记号 len_ρ和 Vol_ρ，在欧几里得情形中使用 len_ρ和 Vol_ρ。

设U、V、W是M中的开集，其中$U\subset V$且$V\subset\overline{W}$，并且存在同胚 $\varphi:W\to\widetilde{\ }W\subset\mathbb{R}^2$。根据单位分解论证，只需在以下假设下证明该命题

that ρ_1, ρ_2 agree on U。因此，我们假设此条件成立。根据命题 4.6，这些集合的质量之差

$$\{L : \mathrm{len}_{\rho_j} L \geq \delta, \mathrm{len} L \leq C\} \qquad j = 1, 2 \tag{4.3}$$

在布朗　　环测度M、g) 下等于将 (4.3) 替换为

$$\{L : \mathrm{len}_{\rho_j} L \geq \delta, \mathrm{len} L \leq C, L \subset V\} \qquad j = 1, 2. \tag{4.4}$$

由于命题 2.1表明，$\mathrm{len} L > C$会自动推出 $\mathrm{len}^{\rho_j} L \geq \delta$ 对于充分小的 δ （且这一结论不依赖于 ρ_1、$\rho_2 \in \mathscr{B}$的选择），我们可以用以下集合替换 (4.4)

$$\{L : \mathrm{len}_{\rho_j} L \geq \delta, L \subset V\}, \qquad j = 1, 2, \tag{4.5}$$

去掉 (4.4) 中的条件 lenL ≤C。令 $\widetilde{\rho}$j 为 ρj 经 φ 的推前，并令 $\mathrm{e}^{\sigma}|\mathrm{d}\,\mathrm{z}|^2 \mathrm{be}^{\widetilde{}}$ 为度量 g 经 φ 的推前。另外，设 V $= \varphi$(V)。根据布朗环测度的共形不变性 [APPS20，引理 3.3]，，集合 (4.5) 在 (M, g) 上的布朗环测度下的测度等于以下集合的测度

$$\{L : \widetilde{\mathrm{len}}_{\widetilde{\rho}_j + \sigma} L \geq \delta, L \subset \widetilde{V}\} \qquad j = 1, 2 \tag{4.6}$$

在欧几里得平面上的布朗环测度下。现在，令 θ 为定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑函数，且$\widetilde{}$　　$\widetilde{}$　　$\widetilde{}$
在V上等于 1，在~~W~~的某个紧子集之外为零。由于 $\theta \equiv 1$ 在V上，集合 (4.6等于该集合

$$\{L : \widetilde{\mathrm{len}}_{\theta(\widetilde{\rho}_j + \sigma)} L \geq \delta, L \subset \widetilde{V}\} \qquad j = 1, 2 \tag{4.7}$$

由命题4.6可知，若将集合 (4.7) 替换为以下集合，这些环路测度之差保持不变

$$\{L : \widetilde{\mathrm{len}}_{\theta(\widetilde{\rho}_j + \sigma)} L \geq \delta, \mathrm{cen}(L) \in \widetilde{W}\}, \qquad j = 1, 2.$$

由定　理1.4可知，这些环路测度之差由以下量之差给出

$$\frac{\widetilde{\mathrm{Vol}}_{\theta(\widetilde{\rho}_j + \sigma)}(\widetilde{W})}{2\pi\delta} + \frac{1}{48\pi}\frac{1}{48\pi}\int_{\widetilde{W}} \|\nabla(\theta(\rho_j + \sigma))\|^2 dz, \qquad j = 1, 2. \tag{4.8}$$

由命题 4.7结合 $f = \theta\widetilde{\rho}_j$和 $h = \sigma$，以及 $\widetilde{\rho}_1 \equiv \widetilde{\rho}_2$在 U之外且 $\theta \equiv 1$在 V内这一事实，可将量 (4.8之差写成以下量之差

$$\frac{\widetilde{\mathrm{Vol}}_{\widetilde{\rho}_j + \sigma}(\widetilde{W})}{2\pi\delta} + \frac{1}{48\pi}\int_{\widetilde{W}} (\|\nabla_\sigma \widetilde{\rho}_j\|^2 + 2K_\sigma \widetilde{\rho}_j)\widetilde{\mathrm{Vol}}_\sigma(dz), \quad j = 1, 2, \tag{4.9}$$

其中 ∇_σ，K_σ分别是与 $(\widetilde{\ } W, e^{\sigma}|dz|^2)$ 相关的梯度和高斯曲率。通过 φ作拉回后，可将表达式 (4.9) 改写为

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\rho_j}(W)}{2\pi\delta} + \frac{1}{48\pi}\int_W (\|\nabla\rho_j\|^2 + 2K\rho_j)\mathrm{Vol}(dz), \quad j = 1, 2.$$

通过注意到，由于 $\rho_1 \equiv \rho_2$ 在W之外，我们可以在（*4.2*）中用M替换W，从而完成证明。 □

定理 *1.9* 的证明。根据布朗环测度的共形不变性 [APPS20，引理 33], 定理的陈述等价于断言（1.7）在缩放意义下成立。根据 $\rho \equiv 0$，该结果对 [APPS20，定理 13] 成立。[6] 我们通过应用命题 4.4 和 4.5，推得一般情形下 $\rho \in \mathscr{B}$ 的结果。

□

[6]我们要指出，δ 在 [APPS20的定理 1 中，3] 表示布朗环的二次变差，即本文所使用的时间区间长度的两倍。因此，对于我们的应用，需要将其中的 δ 替换为 $\delta/2$。

5 构造正方形细分正则化

那么，如果 ρ 按照 [APPS20 第 6], 节所述，由有限个正方形构成的细分来定义，使得它在网格的每个正方形上都有常值拉普拉斯算子，会出现什么情况？可以证明，这些函数属于 C^1,，但在正方形边缘处，它们不属于 C^2。本节将介绍这些函数的相关内容，以清楚说明它们符合本文的框架；至少，对于那些正方形平均值限制在某个紧集内的函数而言是如此。

可以相当明确地构造出在正方形上具有分段常值拉普拉斯算子的函数。考虑定义在 $f(z) = \mathrm{Re}[z^2 \log(z^2)]/\pi + |z|^2/2$ 上、限制于象限 $Q = \{z : \arg(z) \in (-\pi/4, \pi/4)\}$ 的函数。注意，在该象限的边界上，z^2 为纯虚数：在上边界射线上等于 $|z^2|i$，在下边界射线上等于 $-|z^2|i$；而 $\mathrm{Im}\log(z^2) = \arg(z^2)$ 在上边界上为 $\pi/2$，在下边界上为 $-\pi/2$。因此，$\mathrm{Re}[z^2\log(z^2)]/\pi = -|z^2|/2$ 在两条射线上都成立。于是，f 的拉普拉斯算子为常数，并且在边界 Q 上等于零。我们可以通过施加关系 $f(iz) = -f(z)$，将 f 的定义扩展到另外三个象限（iQ、$-iQ$ 和 $-Q$）。在原点的一个小邻域内，以这种方式定义的 f 在 $\pm Q$ 上为负，在 $\pm iQ$ 上为正。$g(z) = z^2\log(z^2) = 2z^2\log(z)$ 的复导数依次为：一阶导数 $g'(z) = 4z\log(z) + 2z$，二阶导数 $g''(z) = 4\log(z) + 6$，三阶导数 $g'''(z) = 4/z$，等等。由此可以推断，f 作为实值函数是可微的（在 0 处的导数为 0），但其二阶导数在零附近缓慢地（以对数方式）发散，并且沿象限边界还存在不连续性。

因此，函数 $f(\omega z)$（其中 ω 是一个固定的八次单位根）是一个 C^1 函数，其拉普拉斯算子在四个标准象限上分段恒定，同时在这些象限的边界上为零。

通过对 $f(\omega z)$ 和四个函数 $\left[\max(\mathrm{Re}(az), 0)\right]^2$（其中 $a \in \{\pm 1, \pm i\}$）作线性组合，我们可以得到一个可微函数，使其拉普拉斯算子与任意一个在四个标准象限上分别为常数的函数相匹配——特别是，可以得到一个在某个象限上拉普拉斯算子为 1、在其余三个象限上为 0 的函数。通过对该函数的平移版本作差，我们可以得到一个在半条带或矩形上拉普拉斯算子为 1（其他地方为 0）的函数。对这些函数作线性组合，可以描述一个函数 ϕ，使其拉普拉斯算子等于任意给定的、在网格各方格上为常数的函数。于是，任何其他具有相同拉普拉斯算子的函数都必定与 ϕ 相差一个调和函数。例如，从 ϕ 在 ∂D 上的取值的调和延拓中减去它，就能得到一个具有所需拉普拉斯算子、且在 ∂D 边界上取值为零的函数。

6 未解决的问题

本节讨论一些未解决的问题。首先，正如脚注3中提到的，我们预计一些主要结果可以推广到 $\rho \in W^{1,2}($ D。除了狄利克雷能量对这类函数有定义之外，还有另一个理由表明，利普希茨情形下的论证或许也适用于这种情形。假设 $-M \le \rho \le M$。那么函数

$$f(x) := \begin{cases} e^x - 1 & \text{for } x \in [-M, M] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

是定义在 $[-M$ 上的利普希茨函数，$M]$ 满足 $f(0) = 0$。因此，著名的 Stampacchia 定理 [EG18,§4.2.2] 断言 $\rho \in W^{1,2}(D)$ 蕴含 $e^\rho - 1$ 属于 $W^{1,2}(D$，且弱导数链式法则蕴含

$$\nabla(e^{\rho(x)}) = e^{\rho(x)}\nabla\rho(x)$$

对几乎处处的 x成立。这已经意味着，我们证明中的许多部分都可以推广到一般情形。例如，引理 1.17 几乎可立即由其中的预紧性条件推出

$W^{1,2}(D)$，或者等价地，按注 $W^{1,2}(D$中的含义，具有一致等度连续性1.7。不过，还有一些技术问题需要我们改进估计。例如，引理 1.16 的证明基于对 $\nabla\rho$的逐点估计，而这需要替换为一个L^2 估计；而这种估计无法直接从我们目前的论证中推出。

问题 6.1. 证明定理 *1.4* 对更广泛的一类函数成立。例如，可以考虑 $W^{1,2}(D)$ 中的函数，并令 $\mathscr{B}$ 为 $W^{1,2}(D)$的任意预紧子集，或许还需满足一些附加条件。

接下来，我们注意到，引理 1.17 是针对施瓦茨函数 θ证明的；除了能简化证明外，这种选择在任何意义上都算不上最优。事实上，我们认为该结果对范围广得多的一类函数都成立。例如，我们将该引理应用于期望占据测度，但从某种意义上说，对单个占据测度也应成立。

问题 6.2. 证明引理 *1.17* 对更广泛的一类函数成立。例如，证明类似的结论也适用于描述布朗环路占据测度的随机函数。

第三，我们可以考虑流形 M有边界的情形，例如 $M=\mathbb{H}$。原则上，可以按照上文所述的方式提出边界问题，并尝试放宽对边界上正则性的要求。首先，设想边界线是水平实轴。令 $d\ell_b$ 为击中实轴且中心位于正虚轴上一点的单位长度环的测度。

这个测度可以通过以下方式得到：从 $d\ell$ 开始，再根据环路所达到的虚部最小值与最大值之间的差进行加权，然后将环路的垂直高度平移到该范围内均匀随机选取的高度。布朗桥的最大高度期望为$\sqrt{\pi/8}$（可利用反射原理证明）。因此，最小高度的期望为其相反数，两者之差的期望为 $2\sqrt{\pi/8}$，这意味着最大高度与中心高度之间的垂直间距的期望也是$\sqrt{\pi/8}$。

——

因此，严格来说，$d\ell_b$ 并非概率测度，而是权重为 $\sqrt{\pi/8}$ 的测度。对于实数x，记 $\mathrm{bclen}(\overline{x,t},\ell_b)=e^{\rho(x)}\delta$。注意，长度大于 δ 的环路集合为

$$\int_\delta^\infty \sqrt{\pi/8}\sqrt{t}\frac{1}{2\pi t^2}dt=\frac{2\sqrt{\pi/8}}{2\pi\sqrt{\delta}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi\delta}}$$

我们可以设想 ρ 在实线段的一个邻域内有定义，然后尝试测量击中边界线本身的环路（大小大于 δ）的质量。相关的量是平行方向上的梯度和法向方向上的梯度（后者会影响实轴被更多以其上方还是下方为中心的环路击中）。

问题 6.3。 证明定理 *1.9* 对带边界流形也成立。换言之，将 *[APPS20*定理 *13]*的边界情形推广：[7]

猜想 6.4。 设 (M,g)是一个固定的带光滑边界的紧致光滑二维黎曼流形，并记 μ^{loop}为 (M,g)上的布朗环测度。设 K 为 M 上的高斯曲率，Δ为与 (M,g)相关联的拉普拉斯算子，$\det'_\zeta\Delta$表示其 ζ 正则化行列式。设 $\mathscr{B}$ 为一族利普希茨函数，它们满足：*(1)* 利普希茨常数一致有界；*(2)* 在 $W^{1,1}(M)$中预紧。

[7]与无边界情形类似，我们在 $\delta/2$ 替代 δ，并代入 [APPS20定理 13], 的陈述中，其中 δ 表示布朗环的二次变差，它等于本文所用时间区间长度的两倍。

μ^{loop}测度中长度大于 δ 的环路的质量为

$$\frac{\mathrm{Vol}_\rho(M)}{2\pi\delta} - \frac{\mathrm{Len}_\rho(\partial M)}{2\sqrt{2\pi\delta}} - \frac{\chi(M)}{6}(\log\frac{\delta}{2}+\gamma) + \frac{1}{48\pi}\int_M (\|\nabla\rho\|^2 + 2K\rho)\,\mathrm{Vol}(dz)$$
$$+ \log\mathrm{Vol}(M) - \log\mathrm{Vol}_\rho(M) - \log\det{}'_\zeta\Delta + O(\delta^{1/2}),$$

其中，该收敛关于 $\rho\in\mathscr{B}$ 是 $\delta\to 0$ 均匀的，而 $\gamma\approx 0.5772$ 是欧拉-马歇罗尼常数。

最后，将 [APPS20，命题 6。9] 推广到低正则性情形的一种简单做法，是照搬 ζ正则化过程，并希望每个步骤都能以类似的方式适用于推广后的情形。沿着这一思路遇到的第一个障碍，是缺少热核迹的短时展开。对于我们的应用，我们需要的是：若（M，g）是一个无边界的二维非光滑流形，且 Δ 是由布朗环质量定义的相应拉普拉斯算子，那么

$$\mathrm{tr}(e^{-\delta\Delta/2}) = \mathrm{Vol}_g(M)/\delta + \chi(M)/6 + o(1).$$

问题 6.5。 证明对于低正则性度量，（迹）热核的短时展开成立。

参考文献

[AAR13] P. Albin、C. L. Aldana 和 F. Rochon。非紧曲面上的里奇流与拉普拉斯算子的行列式。《偏微分方程通讯》，38(4):711–749，2013年。[AHT18] L. Ambrosio、S. Honda 和 D. Tewodrose。RCD*(k, n)空间上热核的短时行为与 Weyl 定律。《全球分析与几何年刊》，53(1):97–119，2018年。[Alv83] O. Alvarez。带边界的弦理论：涨落、拓扑与量子几何。《核物理B》，216(1):125–184，1983年。[APPS 20] M. Ang、M. Park、J. Pfeffer 和 S. Sheffield。布朗环与刘维尔随机曲面的中心荷。arXiv预印本 arXiv:2005.11845，2020年。[AR18] C. L. Aldana 和 J. Rowlett。扇区上的波利亚科夫公式。《几何分析杂志》，28(2):1773–1839，2018年。[BB11] H. Brezis 和 H. Brézis。泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程，第2卷。Springer，2011年。[BGV03] N. Berline、E. Getzler 和 M. Vergne。热核与狄拉克算子。Springer Science & Business Media，2003年。[Din02] Y. Ding。极限空间上的热核与格林函数。《分析与几何通讯》，10(3):475–514，2002年。[Don01] H. Donnelly。紧黎曼流形上拉普拉斯算子的特征函数界。《泛函分析杂志》，187(1):247–261，2001年。[Dub09] J. Dubédat。SLE与自由场：配分函数与耦合。《美国数学学会杂志》，22(4):995–1054，2009年，0712.3018。MR2525778 (2011d:60242)[EG18] L. C. Evans 和 R. F. Garzepy。测度论与函数的精细性质。Routledge，2018年。

[Gig18] N. Gigli。RCD空间上的微分演算讲义。《数理科学研究所刊》，54(4):855–918，2018年。[Gil 18] P. B. Gilkey。不变性理论：热方程与阿蒂亚-辛格指标定理，第16卷。CRC出版社，2018年。[Gre21] R. L. Greenblatt。带狄利克雷边界条件的多边形区域上拉普拉斯算子的离散行列式与ζ正则化行列式。arXiv预印本 arXiv:2102.04837，2021年。[Gri06] A. Grigor'yan。带权流形上的热核及其应用。《当代数学》，398(2006):93–191，2006年。[Hör68] L. Hörmander。椭圆算子的谱函数。《数学学报》，121(1):193–218，1968年。[Kac66] M. Kac。能否听出鼓的形状？《美国数学月刊》，73(4P2):1–23，1966年。[Kal21] V. Kalvin。带锥形奇点的黎曼曲面上拉普拉斯算子行列式的 Polyakov-Alvarez型比较公式。《泛函分析杂志》，280(7):108866，2021年。[Kok13] A. Kokotov。多面体曲面与拉普拉斯算子行列式。《美国数学学会会刊》，141(2):725–735，2013年。[LV09] J. Lott 和 C. Villani。通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率。《数学年刊》，页码903–991，2009年。[LW04] G. F. Lawler 和 W. Werner。布朗回路汤。《概率论及其相关领域》，128(4):565–588，2004年。[Moo99] E. A. Mooers。带锥形奇点的流形上的热核渐近。《数学分析杂志》，78(1):1–36，1999年。[MS$^+$67] H. P. McKean、I. M. Singer 等。曲率与拉普拉斯算子的特征值。《微分几何杂志》，1(1):43–69，1967年。[OPS88] B. Osgood、R. Phillips 和 P. Sarnak。拉普拉斯算子行列式的极值元。《泛函分析杂志》，80(1):148–211，1988年。[Pet10] A. Petrunin。Alexandrov遇见Lott–Villani–Sturm。arXiv预印本 arXiv:1003.5948，2010年。[Pol81] A. M. Polyakov。玻色弦的量子几何。《物理学快报B》，103(3):207–210，1981年。MR623209 (84h:81093a)[RS73] D. Ray 和 I. Singer。复流形上的解析挠率。《数学年刊》，98:154–177，1973年。[Sar87] P. Sarnak。拉普拉斯算子的行列式。《数学物理通讯》，110(1):113–120，1987年。[Ser61] J. Serrin。论多元函数的可微性。《理性力学与分析档案》，7(1):359–372，1961年。[She07] S. Sheffield。数学家的高斯自由场。《概率论及其相关领域》，139(3-4):521–541，2007年，math/0312099。MR2322706 (2008d:60120)

[她13] D. Sher. 渐近锥形流形上的热核。《分析与偏微分方程》，6(7):1755–1791，2013年。[她15] D. A. Sher. 锥形退化与拉普拉斯算子的行列式。《数学分析杂志》，126(1):175–226，2015年。[Stu06] K.-T. Sturm. 关于度量测度空间的几何。《数学学报》，196(1):65–131，2006年。[Suz19] K. Suzuki. 黎曼曲率–维数条件下度量测度空间上布朗运动的收敛。《电子概率杂志》，24:1–36，2019年。[Wan18] Y. Wang. 洛夫纳能量的等价描述。《数学新进展》，第1–49页，2018年。[Wey11] H. Weyl. 关于特征值的渐近分布。哥廷根科学学会数学物理学部通讯，1911年:110–117，1911年。[ZZ17] H.-C. Zhang 和 X.-P. Zhu. RCD*(*k*,*n*) 度量测度空间上的 Weyl 定律。*arXiv* 预印本 *arXiv:1701.01967*，2017年。