arXiv:2302.02360v1 [math.OC] 5 Feb 2023

椭圆方程控制问题中最优势的正则性

2023年2月7日

G. Buttazzo†、J. Casado-D´ıaz††、F. Maestre††

† 比萨大学数学系，Largo B. Pontecorvo, 5，
56127比萨，意大利

†† 塞维利亚大学数学学院微分方程与数值分析系，C.
Tarfia s/n，41012塞维利亚，西班牙

电子邮箱：giuseppe.buttazzo@unipi.it，jcasadod@us.es，fmaestre@us.es

摘要

本文研究控制变量为势、状态方程为由拉普拉斯算子控制的薛定谔型椭圆偏微分方程的最优控制问题。代价泛函包含状态方程的解以及控制变量的惩罚项。虽然利用变分法的直接方法即可得到最优解的存在性，但最优势函数的正则性是一个困难的问题；在本文考虑的一般假设下，无法期待比 BV 更好的正则性。这种情况尤其出现在存在 bang-bang解时，此时最优势是某个区域的特征函数。我们通过一个偏微分方程正则性结果证明最优解的 BV 正则性。一些数值模拟展示了若干特定情形下最优势的表现。

关键词：最优势，BV正则性，bang-bang性质，形状优化，控制问题。

2020 数学学科分类： 49Q10,49J45,35B65, 35R05,49K20 .

1 引言

我们的研究从如下形式的最优控制问题出发

$$\min \int_\Omega \big[j(x,u)+\psi(m)\big]\,dx, \tag{1.1}$$

该问题由以下状态方程描述

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = f \quad \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.2}$$

这里，Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个有界开子集，假设控制变量 m 非负， $f \in L^2(\Omega)$，且 j，ψ 是适当的被积函数。我们假设 ψ 具有超线性增长，这自动意味着控制变量属于 $L^1(\Omega)$。注意，当 $j(x, u) = f(x)u$时，该问题可以写成变分形式

$$\min\Big\{ -2\mathscr{E}(m) + \Psi(m) \ : \ m \in L^1(\Omega),\ m \geq 0 \Big\},$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi(m) &= \int_\Omega \psi(m)\, dx \\ \mathscr{E}(m) &= \min\left\{ \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2} m u^2 - f(x)u \Big]\, dx \ : \ u \in H_0^1(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

在这种情况下，可以看出控制变量 m 可以消去，从而得到辅助变分问题

$$\min\left\{ \int_\Omega \Big[|\nabla u|^2 + \psi^*(u^2) - 2f(x)u \Big]\, dx \ : \ u \in H_0^1(\Omega) \right\}, \tag{1.3}$$

其中， ψ^* 表示函数 ψ 的 Fenchel-Moreau 共轭。令 $g(s) = s(\psi^*)'(s^2)$，方程 (1.3) 的唯一解 $\hat{u}$ 可由偏微分方程得到

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f \quad \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.4}$$

随后可将最优控制 $\hat{m}$ 恢复为

$$\hat{m} = (\psi^*)'(\hat{u}^2).$$

对于一般的被积函数 $j(x, u)$，上述消去过程无法进行，最优性必要条件涉及一个伴随状态变量及相应的伴随偏微分方程。尽管如此，我们可以证明，最优控制问题 (1.1)、(1.2) 存在一个解 $(\hat{u}, \hat{m})$。本文的主要目标是证明，在对数据作出适当假设的条件下，最优控制 $\hat{m}$ 具有额外的正则性性质。特别地，我们证明 $\hat{m} \in BV(\Omega)$。

我们强调，在我们对函数 ψ 所考虑的一般假设下，$\hat{m}$ 不具备更高阶的正则性性质。事实上，当

$$\psi(s) = \begin{cases} s & \text{if } s \in [\alpha, \beta] \qquad (\text{with } 0 \leq \alpha < \beta) \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

最优控制 $\hat{m}$ 属于*bang-bang* 型，即

$$\hat{m} = \alpha + (\beta - \alpha) 1_E$$

对于某个适当的集合 E，该集合最终被证明具有有限周长。

这类问题例如出现在一些由逻辑斯蒂扩散方程支配的生物模型中，其目标是控制总人口规模或确定资源的最优位置，参见例如 [20] 和 [21]。

上述 BV 正则性的证明是通过仔细分析形如 (1.4) 的非线性椭圆型偏微分方程得到的。一般而言，对于源自最优控制问题的情形，右端项 f 的可和性较低，不属于空间 $H^{-1}(\Omega)$；因此，解的定义更为复杂，必须按照重整化解理论给出（例如参见 [3], [17]）。

第2节列出全文中使用的记号；第3节研究半线性问题 (1.4)，其中非线性项 g 可能不连续，且右端项 f 的可和性较低。我们的目标是证明，当 $f \in BV(\Omega)$ 时，解 u 满足 $g(u) \in BV(\Omega)$。第 4 节将上述结果应用于最优控制问题 (1.1) 、 (1.2)。第5节讨论若干相关示例，其中数据采用了各种特定选取。最后，第6节给出一些数值模拟，展示了某些情形下最优解的 bang-bang行为，以及另一些情形下的连续行为。

2 记号

本节固定本文其余部分所使用的记号。

- 对于 $s \in \mathbb{R}$，我们用 $\operatorname{sgn}(s)$ 表示 s 的符号。
- 对于可测集 $A \subset \mathbb{R}^N$，我们用 $|A|$ 表示其勒贝格测度。
- 对于函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，以及 $s \in \mathbb{R}$，我们分别用 $g_-(s)$ 和 $g_+(s)$ 表示 s 中的左极限和右极限（如果存在）。
- 对于 $k > 0$，我们定义函数 $T_k, S_k \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 如下

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{if } |s| < k \\ k \operatorname{sgn}(s) & \text{if } |s| \geq k, \end{cases} \qquad S_k(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } |s| \leq k \\ 2 - \dfrac{|s|}{k} & \text{if } k < |s| < 2k \\ 0 & \text{if } |s| \geq 2k. \end{cases}$$

- 我们用 $\mathcal{M}(\Omega)$ 表示 Ω 中总质量有限的博雷尔测度空间。
- 若 $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 是下半连续适当凸函数，我们用 $\operatorname{dom}(\psi)$ 表示 ψ 的定义域，定义如下：

$$\operatorname{dom}(\psi) = \big\{ s \in \mathbb{R} \ : \ \psi(s) < \infty \big\}.$$

它是 $\mathbb{R}$ 的一个非空区间，我们假设该区间不退化为一点。对于$s \in \operatorname{dom}(\psi)$，我们用 $\partial\psi(s)$ 表示 ψ 在 s 处的次微分，定义如下：

$$\partial\psi(s) = \big\{ \tau \in \mathbb{R} \ : \ \tau(t-s) \leq \psi(t) - \psi(s) \ \text{ for every } t \in \operatorname{dom}(\psi) \big\}. \tag{2.1}$$

考虑到映射

$$(s,t) \mapsto \frac{\psi(t) - \psi(s)}{t - s} \qquad \text{for } s < t \tag{2.2}$$

关于变量 s 和 t均单调不减，因此对于每个 $s \in$ 定义域(ψ)，两个极限

$$\begin{cases} d_+\psi(s) := \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \dfrac{\psi(s+\varepsilon)-\psi(s)}{\varepsilon} \in (-\infty, \infty] \\ d_-\psi(s) := \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \dfrac{\psi(s)-\psi(s-\varepsilon)}{\varepsilon} \in [-\infty, \infty) \end{cases}$$

存在且

$$\partial\psi(s) = \big[d_-\psi(s), d_+\psi(s)\big]. \tag{2.3}$$

我们还回顾一下，每个凸函数 ψ 在其定义域的内部都是局部 Lipschitz 连续的。

- 我们用 ψ^* 表示 ψ的 Fenchel-Moreau 共轭，其定义为

$$\psi^*(t) := \sup_{s \in \mathrm{dom}(\psi)} \big\{ts - \psi(s)\big\} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

我们回顾一下， ψ^* 也是一个凸下半连续函数，并且

$$(\psi^*)^* = \psi.$$

此外，我们有

$$t \in \partial\psi(s) \iff s \in \partial\psi^*(t) \iff ts = \psi(s) + \psi^*(t). \tag{2.4}$$

下面我们考虑积分泛函

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega j(x,u)\,dx \qquad \text{defined for } u \in H_0^1(\Omega); \\ \Psi(m) &= \int_\Omega \psi(m)\,dx \qquad \text{defined for } m \in L^1(\Omega),\ m \geq 0; \\ F(u,m) &= J(u) + \Psi(m). \end{aligned}$$

函数 $\psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 假设为下半连续、真且凸，并满足

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\psi(s)}{s} = \infty; \tag{2.5}$$

这样，泛函 Ψ 在 $L^1(\Omega)$ 上有定义，而 $\Psi(m) < \infty$ 意味着 $m \in L^1(\Omega)$。容易看出，在上述条件下，函数 ψ 有下界；因此，通过加上一个不影响我们优化问题的常数，我们可以假设 ψ 非负。

关于被积函数 $j(x,s)$，我们假设它关于 x可测、关于 s 下半连续，并满足以下界

$$a(x) - c|s|^2 \leq j(x,s) \tag{2.6}$$

对于适当的 $c \geq 0$ 和 $a \in L^1(\Omega)$。

因此，我们考虑的优化问题为

$$\min\big\{F(u,m)\ :\ -\Delta u + mu = f,\ u \in H_0^1(\Omega),\ m \in L^1(\Omega)\big\},$$

其中 $f \in H^{-1}(\Omega)$ 是给定的。在第4节中，我们证明上述最优控制问题存在一个最优对 $(\hat{u},\ \hat{m})$。在一些附加假设下，我们得到相应的最优性必要条件，并研究 $(\hat{u},\ \hat{m})$ 的正则性性质。

3 含有不连续项的半线性问题

本节我们关注如下形式的半线性问题的解的存在性和正则性性质

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中，函数 g 单调不减，但不一定连续。此外，我们对右端项 f 只假设其具有较低的可积性。特别是，我们不假设 $f \in H^{-1}(\Omega)$，因此需要研究重整化解或熵解（例如参见 [3], [4], [16]）。据此，我们为问题 (3.1) 引入如下解的定义。

定义 3.1。 假设 $f \in L^1(\Omega)$。若一对 (u, w) 满足以下条件，则称其为 (3.1) 的解：

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) & \text{if } N = 1 \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ \forall\, p < \dfrac{N}{N-1}, \quad T_k(u) \in H_0^1(\Omega)\ \forall\, k > 0 & \text{if } N \geq 2, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$w \in L^1(\Omega), \qquad g_-(u) \leq w \leq g_+(u) \text{ 在 } \Omega \text{ 中几乎处处成立}, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega wv\, dx = \int_\Omega fv\, dx \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\ \textit{such that}\ \exists k > 0\ \ \textit{with}\ \nabla v = 0\ \textit{a.e. in}\ \{|u| > k\}. \end{cases} \tag{3.4}$$

问题 (3.1) 的解的存在性和唯一性由以下定理给出。

定理 3.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开集， $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为单调不减函数。则对于每个 $f \in L^1(\Omega)$，都存在一个唯一解 (u, w)，它在定义 *3.1* 的意义下满足 (3.1)。此外，它还满足

$$\|w - g_+(0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f - g_+(0)\|_{L^1(\Omega)}, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)} & \textit{if } N = 1, \\ \|T_k(u)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \displaystyle\int_\Omega |f - g_+(0)||T_k(u)|\, dx \quad \forall\, k > 0, & \\ \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C\|f - g_+(0)\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall\, p < \dfrac{N}{N-1} & \textit{if } N \geq 2. \end{cases} \tag{3.6}$$

在这些估计中，常数 C 仅取决于 $|\Omega|$、 p 和 N。

注 3.3. 假设定理 3.2 中， f 属于 $L^q(\Omega)$，且满足 $q > 1$，那么重整化解的经典估计（例如参见 [3], [4], [17]）结合 Stampacchia 估计（参见 [25]）还可证明，(3.1) 的解 $(u,\ w)$ 满足

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,\frac{Nq}{N-q}}(\Omega) & \text{if } 1 < q \leq \dfrac{2N}{N+2} \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\frac{Nq}{N-2q}}(\Omega) & \text{if } \dfrac{2N}{N+2} < q < \dfrac{N}{2} \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) & \text{if } \dfrac{N}{2} < q. \end{cases} \tag{3.7}$$

特别地，假设 $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$，则定理 3.2 中的解 u 属于$H_0^1(\Omega)$。此时，可以用一种更简单的方式将其定义为严格凸最小化问题的唯一解

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + G(v) - fv \right) dx,$$

其中 $G\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$G(s) = \int_0^s g(r)\, dr \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

注 3.4。 定理 3.2 和（3.7）通过相同的证明可推广到以下情形：算子 $-\Delta u$ 被 $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u)$ 替代，其中 A 是定义在$L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ 上的矩阵函数，满足椭圆性条件

$$\exists\, c > 0 \text{ such that } \ A(x)\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ a.e. } x \in \Omega.$$

此外，方程

$$-\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + w = f \tag{3.8}$$

在 Ω 上的分布意义下成立。事实上，对于拉普拉斯算子，由于 $-\Delta$ 是从 $W^{1,\,p}_{\ 0}(\Omega)$ 到 $W^{-1,\,p}(\Omega)$ 的同构，对于 $1 < p < \infty$，众所周知，（3.4）等价于要求 $(u,\ w)$ 在 Ω 上的分布意义下满足（3.8）。因此，定理 3.2 表明，对于每个 $f \in L^1(\Omega)$，都存在唯一解 $(u,\ w) \in W^{1,\,p}_{\ 0}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$，$1 < p < N/(N-1)$，它在分布意义下满足

$$\begin{cases} -\Delta u + w = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ g_-(u) \leq w \leq g_+(u) & \text{a.e. in } \Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

然而，若像上文那样将 $-\Delta u$ 替换为 $-\operatorname{div}(A\nabla u)$，并令 A ，则上述结论不再成立。关于分布解唯一性的一个经典反例，参见 [24] 。

下面的结果证明了解关于右端项的连续依赖性以及最大值原理。

定理 3.5. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开集，且 $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个单调不减函数。对于 $f_1, f_2 \in L^1(\Omega)$，取 (u_1, w_1)、(u_2, w_2) 分别为满足 $f = f_1$和 $f = f_2$ 的 *(3.1)* 的解。于是，我们有

$$\|w_1 - w_2\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^1(\Omega)}; \tag{3.10}$$

$$\|T_k(u_1 - u_2)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq k\|f_1 - f_2\|_{L^1(\Omega)} \qquad \forall\, k > 0; \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{L^1(\Omega)} & \text{if } N = 1 \\ \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall\, p \in \left(1, \dfrac{N}{N-1}\right) & \text{if } N \geq 2. \end{cases} \tag{3.12}$$

最后这个不等式中的常数 $C > 0$ 仅取决于 $|\Omega|$，若 $N = 1$。对于 $N \geq 2$，它仅取决于 N、 p 和 $|\Omega|$。此外，

$$f_1 \leq f_2 \text{ a.e. in } \Omega \implies u_1 \leq u_2 \text{ a.e. in } \Omega.$$

本节的主要结果证明，当 f 属于 $BV(\Omega)$ 时，定理 3.2 中的函数 w 属于 $BV(\Omega)$。定理 4.7 将利用这一结果，推导由椭圆方程支配的控制问题之解的一些正则性结果，其中控制变量对应于零阶项的系数。

定理 3.6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个 $C^{1,1}$类的有界开集，且 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个单调不减函数。那么，对于 $f \in BV(\Omega)$，(3.9) 的解 (u, w) 属于$W^{2,\frac{N}{N-1}}(\Omega) \times BV(\Omega)$。此外，存在一个仅依赖于$\Omega$ 的 $C > 0$，使得

$$\|u\|_{W^{2,\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le C\big(\|f\|_{BV(\Omega)} + |g_+(0)|\big), \tag{3.13}$$

$$\|\nabla w\|_{\mathcal{M}(\Omega)^N} \le C\big(\|f\|_{BV(\Omega)} + |g_+(0)|\big). \tag{3.14}$$

现在我们来证明定理 3.2、3.5 和 3.6。

定理 *3.2* 的证明。当 g 是连续函数时，根据椭圆型偏微分方程重整化解理论，该结论是众所周知的（例如参见 [3], [4], [17]）。我们回顾一下相应估计的推导过程。

在 (3.4) 中取 $T_k(u)$，并以 $k > 0$ 作为测试函数，可得

$$\int_{\{|u|<k\}} |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega \big(g(u) - g(0)\big)T_k(u)\,dx = \int_\Omega (f - g(0))T_k(u)\,dx. \tag{3.15}$$

由于 g 是单调不减的，我们有 $(g(u) - g(0))T_k(u) \ge 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，由此得到 (3.6) 中的第二个估计。根据这个不等式，运用 [4], 的定理 1 中的论证，我们得出 u 满足 (3.6)。

将 (3.15) 两边除以 k，并令 $k \to 0$，取极限，得到

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \int_{\{|u|<k\}} |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |g(u) - g(0)|dx = \int_\Omega (f - g(0))\,\mathrm{sgn}(u)\,dx.$$

这就证明了 (3.5)，其中 $w = g(u)$。

现在来证明在 g 仅为非减函数的情况下，(3.9) 的解的存在性。为此，我们用 $g_n = g * \rho_n$、$n \in \mathbb{N}$ 替换 g，其中 ρ_n 是一列定义如下的磨光函数

$$\rho_n(s) = n\rho\big(ns\big) \qquad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

with

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \rho \ge 0 \ \text{ in } \mathbb{R}, \quad \mathrm{support}(\rho) \subset (-1, 0), \quad \int_{\mathbb{R}} \rho(s)ds = 1.$$

于是，g_n 满足

$$g_n \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad g_n \text{ is non-decreasing}, \quad g(s) \le g_n(s) \le g\Big(s + \frac{1}{n}\Big) \quad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

取 u_n 作为 $g = g_n$时 (3.1) 的解，并利用估计 (3.5) 和 (3.6)，我们可以推出 n 存在一个子列，仍记为 n，以及一个函数 u，使得

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall\, p < \frac{N}{N-1} \quad (p = 2 \text{ if } N = 1), \tag{3.17}$$

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \ \text{ in } H_0^1(\Omega) \quad \forall\, k > 0, \tag{3.18}$$

$$\int_\Omega |g_n(u_n) - g_n(0)|\,dx \le \int_\Omega |f - g_n(0)|\,dx. \tag{3.19}$$

由 (3.15) 我们还得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\{|u_n|<k\}}|\nabla u_n|^2\,dx+\int_\Omega\big(g_n(u_n)-g_n(0)\big)T_k(u_n)\,dx\right)=\int_\Omega(f-g_+(0))T_k(u)\,dx,$$

对每个 $k>0$。除以 k 并令 $k\to\infty$ 时取极限，得到

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}\int_{\{|u_n|<k\}}|\nabla u_n|^2dx+\int_{\{|u_n|>k\}}\big|g_n(u_n)|dx\right)=0. \tag{3.20}$$

我们来证明 $g_n(u_n)$ 在 $L^1(\Omega)$ 的弱拓扑下是紧的。根据 (3.16) 和邓福德-佩蒂斯定理(3.19)只需证明 $g_n(u_n)$ 等度可积，也就是说，对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$ 使得

$$\int_E|g_n(u_n)|dx\le\varepsilon\qquad\forall\,E\subset\Omega,\ \text{measurable, with }|E|<\delta.$$

对于这样的 ε，由 (3.20) 可知，存在 $k,\ m>0$ 使得

$$\int_{\{|u_n|>k\}}\big|g_n(u_n))|dx<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall\,n\ge m.$$

于是选取

$$\delta_1<\frac{\varepsilon}{2\sup_{[-k,k+1]}|g(s)|},$$

并考虑到 (3.16)，我们推得，对于每个 $E\subset\Omega$，若其关于 $|E|<\delta$ 可测，则有

$$\int_E|g_n(u_n)|dx\le\int_E\sup_{[-k,k+1]}|g(s)|dx+\int_{\{|u_n|>k\}}|g_n(u_n)|dx<\varepsilon\quad\forall\,n\ge m.$$

另一方面，由于 $L^1(\Omega)$ 中任意有限个函数构成的集合都是等度可积的，因此存在 $\delta_2>0$ 使得

$$\int_E|g_n(u_n)|dx<\varepsilon\quad\forall\,n<m.$$

因此，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，我们可推出 $g_n(u_n)$ 的等可积性。如有必要，提取一个子列后，我们便可推出存在 $w\in L^1(\Omega)$，使得

$$g_n(u_n)\rightharpoonup w\ \text{ in }L^1(\Omega). \tag{3.21}$$

由 (3.16)、(3.17) 和 Rellich-Kondrachov紧性定理，我们还可得

$$g_-(u)\le w\le g_+(u)\quad\text{ a.e. in }\Omega.$$

让我们证明 (u,w) 满足 (3.4)。我们取 $v\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，使得存在 $k>0$，且 $\nabla v=0$ 几乎处处成立于 $\{|u|>k\}$.。对于 $m>0$，我们在关于 u_n 的方程中使用 $S_m(u_n)v$ 作为测试函数。得到

$$\begin{aligned}-\frac{1}{m}\int_{\{m<|u_n|<2m\}}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{sgn}(u_n)v\,dx+\int_\Omega\nabla u_n\cdot\nabla v\,S_m(u_n)\,dx\\+\int_\Omega g_n(u_n)S_m(u_n)v\,dx=\int_\Omega fS_m(u_n)v\,dx.\end{aligned}$$

考虑到 (3.18)、(3.21)，以及 $S_m(u_n)v$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界且依测度收敛到 $S_m(u)v$ 这一事实，我们可以在此不等式中令 $n \to \infty$，从而得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, S_m(u)\,dx + \int_\Omega w S_m(u) v\,dx - \int_\Omega f S_m(u) v\,dx\right| \\ &\le \frac{\|v\|_{L^\infty(\Omega)}}{m} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{m<|u_n|<2m\}} |\nabla u_n|^2 dx.\end{aligned}$$

根据 (3.20)，$T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$，且在 $\{|u| > k\}$ 中几乎处处有 $\nabla v = 0$，现在我们可以令 $m \to \infty$，取极限从而推得 (3.4) 成立。

(3.9) 的解的唯一性由定理 3.5 得出。 □

定理 *3.5* 的证明。假设 $N \ge 2$。考虑到 $L^1(\Omega)$ 连续嵌入到 $H^{-1}(\Omega)$，$N = 1$ 的情形较为简单。

对于 m，$k > 0$，我们取 $S_m(u_1)S_m(u_2)T_k(u_1 - u_2)^+$ 作为测试函数，代入由 $(u_1,\ w_1)$ 和 $(u_2,\ w_2)$ 满足的方程之差中。由此得到

$$\begin{aligned}&\int_{\{0<u_1-u_2<k\}} |\nabla(u_1-u_2)|^2 S_m(u_1)S_m(u_2)dx \\ &+ \int_\Omega (w_1 - w_2) T_k(u_1-u_2)^+ S_m(u_1)S_m(u_2)\,dx \\ &- \frac{1}{m}\int_{\{m<|u_2|<2m\}} T_k(u_1-u_2)^+ \operatorname{sgn}(u_2) S_m(u_1) \nabla(u_1-u_2)\cdot\nabla u_2\,dx \\ &- \frac{1}{m}\int_{\{m<|u_1|<2m\}} T_k(u_1-u_2)^+ \operatorname{sgn}(u_1) S_m(u_2) \nabla(u_1-u_2)\cdot\nabla u_1\,dx \\ &= \int_\Omega (f_1 - f_2)\, T_k(u_1-u_2)^+ S_m(u_1)S_m(u_2)\,dx.\end{aligned} \tag{3.22}$$

这里我们对 $u = u_1$、$u = u_2$ 使用 (3.6) 中的第二个估计，其中 $k = m$；将其除以 m 并令 $m \to \infty$，取极限得到

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\int_{\{|u_1|<2m\}} |\nabla u_1|^2 dx = \frac{1}{m}\lim_{m\to\infty}\int_{\{|u_2|<2m\}} |\nabla u_2|^2 dx = 0.$$

这使我们能够在 (3.22) 中取极限，如 $m \to \infty$，从而推得

$$\begin{aligned}&\int_{\{0<u_1-u_2<k\}} |\nabla(u_1-u_2)|^2 dx + \int_\Omega (w_1-w_2)T_k(u_1-u_2)^+ dx \\ &= \int_\Omega (f_1-f_2) T_k(u_1-u_2)^+ dx, \qquad \forall\, k > 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

现在，我们注意到这些条件

$$g_-(u_1) \le w_1 \le g_+(u_1),\quad g_-(u_2) \le w_2 \le g_+(u_2) \qquad \text{a.e in } \Omega,$$

意味着

$$(w_1 - w_2)T_k(u_1-u_2)^+ \ge 0 \qquad \text{a.e. in } \Omega.$$

因此，（3.23）证明了

$$\int_{\{0<u_1-u_2<k\}} |\nabla(u_1-u_2)|^2\,dx \le k\int_{\{0<u_1-u_2<k\}} |f_1-f_2|\,dx.$$

将 u_1,u_2 互换后得到的类似不等式相加，我们便可推出 (3.11)。该不等式还意味着 (3.12)（见 [4]）。

将 (3.23) 除以 k，并令 $k\to 0$ 趋于极限，我们得到

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_{\{0<u_1-u_2<k\}} |\nabla(u_1-u_2)|^2\,dx + \int_{\{u_2<u_1\}} |w_1-w_2|\,dx = \int_{\{u_2<u_1\}} (f_1-f_2)\,dx.$$

利用将 u_1,u_2 互换后得到的类似等式，我们可得出 (3.10)。

若 $f_1\le f_2$ 在 Ω 中几乎处处成立，则由 (3.23) 可得

$$\int_{\{0<u_1-u_2<k\}} |\nabla(u_1-u_2)|^2\,dx = 0 \qquad \forall\, k>0,$$

进而可得 $u_1\le u_2$ 在 Ω 中几乎处处成立。 □

定理 *3.6* 的证明。 我们首先假设 g 属于 $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$，$f\in W^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$。那么 u 属于 $H^2(\Omega)$。考虑到边界条件 $u=0$ 在 Ω 的边界 ∂ 上成立，且 $\Omega\in C^{1,1}$，我们可以使用 [16] 中引理 4.3 的证明里的方程 (4.19)，证明 u 的二阶导数满足

$$\begin{cases} -\Delta\partial_i u + g'(u)\partial_i u = \partial_i f & \text{in } \Omega,\quad 1\le i\le N\\ \nabla u = |\nabla u| s\nu & \text{on } \partial\Omega\\ -D^2u\,\nu\cdot\nu + g(0) = f + h\cdot\nabla u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.24}$$

其中 ν 表示 Ω 的单位外法向量，h，s 满足

$$h\in L^\infty(\partial\Omega)^N,\quad s\in L^\infty(\partial\Omega),\ s\in\{-1,1\},\ \text{a.e. in } \Omega.$$

且它们仅依赖于 Ω。

对于 $\varepsilon>0$，我们将 (3.24) 中的第一个方程乘以

$$\frac{\partial_i u}{|\nabla u|+\varepsilon}\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).$$

分部积分后，加上 i，并利用 (3.24) 中的边界条件，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Big(\frac{|D^2u|^2}{|\nabla u|+\varepsilon} - \frac{|D^2u\nabla u|^2}{|\nabla u|(|\nabla u|+\varepsilon)^2}\Big)\,dx + \int_\Omega g'(u)\frac{|\nabla u|^2}{|\nabla u|+\varepsilon}\,dx\\ &= -\int_{\partial\Omega} s\big(f+h\cdot\nabla u - g(0)\big)\frac{|\nabla u|}{|\nabla u|+\varepsilon}\,ds(x) + \int_\Omega \frac{\nabla f\cdot\nabla u}{|\nabla u|+\varepsilon}\,dx.\end{aligned}$$

利用这里的

$$|D^2u|^2 - \frac{|D^2u\nabla u|^2}{|\nabla u|(|\nabla u|+\varepsilon)} \ge |D^2u|^2 - \frac{|D^2u\nabla u|^2}{|\nabla u|^2} = \Big|D^2u\Big(I-\frac{\nabla u\otimes\nabla u}{|\nabla u|^2}\Big)\Big|^2 \ge 0,$$

在 Ω 中几乎处处成立，我们可以令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，从而推出

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{1}{|\nabla u|}\Big(|D^2u|^2 - \frac{|D^2u\nabla u|^2}{|\nabla u|^2}\Big)\,dx + \int_\Omega g'(u)|\nabla u|\,dx\\ &= -\int_{\partial\Omega} s\big(f + h\cdot\nabla u - g(0)\big)\,d\sigma(x) + \int_\Omega \frac{\nabla f\cdot\nabla u}{|\nabla u|}\,dx.\end{aligned} \tag{3.25}$$

在右端项的第一项中，我们可以对 $W^{1,1}(\Omega)$ 中的函数应用迹定理，从而证明存在一个仅依赖于 Ω 的 C，使得

$$\|f\|_{L^1(\partial\Omega)} \le C\|\nabla f\|_{L^1(\Omega)^N}. \tag{3.26}$$

此外，利用 $W^{1,1}(\Omega)$ 到 $L^p(\Omega)$ 的嵌入在 $1 < p < \frac{N}{N-1}$ 下是紧的，我们可推得：对于任意 $\delta > 0$，存在一个依赖于 Ω 、 p 和 δ 的 $C > 0$，使得

$$\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \le \delta\big(\|\nabla g(u)\|_{L^1(\Omega)^N} + \|\nabla f\|_{L^1(\Omega)^N}\big) + C\big(\|g(u)\|_{L^1\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)}\big).$$

再应用 $(-\Delta)^{-1}$ 从 $L^p(\Omega)$ 到 $W^{1,p}_0(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ 的连续性，以及 Sobole夫空间的迹定理，我们得出，对于另一个常数 $C > 0$，有

$$\|\nabla u\|_{L^1(\partial\Omega)^N} \le \delta\big(\|\nabla g(u)\|_{L^1(\Omega)^N} + \|\nabla f\|_{L^1(\Omega)^N}\big) + C\big(\|g(u)\|_{L^1\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)}\big),$$

结合 (3.5) 和 $w = g(u)$，可得

$$\|\nabla u\|_{L^1(\partial\Omega)^N} \le \delta\|\nabla g(u)\|_{L^1(\Omega)^N} + C\big(\|f\|_{W^{1,1}(\Omega)} + |g(0)|\big), \tag{3.27}$$

其中 C 依赖于 Ω 和 δ。

取 δ 使得 $\delta\|h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} < 1$，我们可以在 (3.25) 中使用 (3.26) 和 (3.27)，从而得出存在一个仅依赖于 Ω 的 $C > 0$，使得 (3.14) 成立。由此估计、 $W^{1,1}(\Omega)$ 到 $L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$ 的连续嵌入，以及满足 $w = g(u)$ 的 (3.9) 的 u 解，还可得出 u 满足 (3.13)。这就证明了对于 $g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$， $f \in W^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$，结论成立。

g 仅为递增函数的情形，可按照定理 3.2 的证明，通过用一列光滑函数 g_n 逼近 g 得出。

f 仅属于 $BV(\Omega)$ 的情形，可将 f 替换为$W^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ 中的一列函数 f_n，使得 f_n 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛到 f，且$\|\nabla f_n\|_{L^1(\Omega)^N}$ 收敛到$\|\nabla f\|_{\mathcal{M}(\Omega)^N}$。

□

4 势优化问题的应用

本节研究一个薛定谔型椭圆方程的最优控制问题，其中控制变量为势。具体而言，我们考虑问题

$$\begin{aligned}&\min \int_\Omega \big(j(x,u) + \psi(m)\big)\,dx\\ &\begin{cases}-\Delta u + m\,u = f \ \text{ in } \Omega\\ u \in H_0^1(\Omega),\quad m \in L^1(\Omega),\quad m \ge 0 \ \text{ a.e. in } \Omega,\end{cases}\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中， ψ 是一个下半连续凸函数。在 Ω 中引入约束 $m \geq 0$ ，并在代价泛函中取

$$\psi(s) = +\infty \qquad \forall\, s < 0.$$

这类问题会出现在若干形状优化问题中，其中 m 是容量型博雷尔测度，通常不是拉东测度（例如参见 [2], [5], [6], [7]{16], [9], [10], [12], [13], [14] 和 [22]）。与这些论文类似，(4.1) 的解 u 必须在变分意义下理解

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_m(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v + muv\big)\, dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_m(\Omega). \end{cases}$$

本文旨在为最优控制 ˆm获得一些正则性结果；在本文中，它们是可积函数。特别地，我们证明，在若干情况下，最优控制 ˆm 属于 bang-bang 型，因此是不连续的。不过，我们还证明，在某些适当假设下，ˆm是一个 BV函数，进而界面具有有限周长。

我们的首个结果证明了 (4.1) 的解的存在性。关于更一般情形下的相关结果，参见 [16] 中的定理 2.19。

定理 4.1。 设 Ω $\subset \mathbb{R}^N$ 为有界开集， $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 对第一个分量可测、对第二个分量下半连续，且满足 (2.6)；并设$\psi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ 为凸下半连续函数，且 $\mathrm{dom}(\psi)$ $\subset [0,\infty)$，使得 (2.5) 成立。那么，对于每个 $f \in H^{-1}$(Ω)，问题 (4.1) 至少有一个解ˆ$m \in L^1$(Ω)。

(4.1) 的最优性条件由下文的定理 4.2 给出（另见 [16] 中的定理 4.1）。由于本文旨在为问题 (4.1) 的解给出一些正则性条件，设状态方程 (4.1) 中的右端项 f 满足

$$f \in W^{-1,r}(\Omega), \quad \text{with } \begin{cases} r \geq 2 & \text{if } N = 1 \\ r > N & \text{if } N \geq 2. \end{cases} \tag{4.2}$$

根据 Stampacchia 估计（例如参见 [25]），可知存在 $M > 0$，使得对于每个 $m \in L^1$(Ω)， $m \geq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立，且状态方程 (4.1) 的解 u 属于 L^∞(Ω)，其中 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$。特别地，这意味着对于 $|s| \geq M$， $j(x, s)$ 的取值并不重要，因此我们可以在定理 4.1 中将条件 (2.6) 替换为

$$\inf_{\{|s|\leq M\}} j(x,s) \in L^1(\Omega) \qquad \forall\, M > 0.$$

进一步，我们将假设 $j(x,.) \in C^1(\mathbb{R})$ 且满足

$$j(.,0) \in L^1(\Omega), \qquad \max_{|s|\leq M} |\partial_s j(\cdot, s)| \in L^{\frac{r}{2}}(\Omega) \quad \forall\, M > 0. \tag{4.3}$$

在这些条件下，以下结果成立。

定理 4.2. 假设在定理 *4.1* 中，右端项 f 和函数 j分别满足 *(4.2)* 和 *(4.3)*，并定义 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$h(\tau)=\max\big\{s\in\mathrm{dom}(\psi)\ :\ \tau\in\partial\psi(s)\big\}. \tag{4.4}$$

那么，若 $\hat{}m$ 是 *(4.1)* 的一个解，$\hat{}u$ 是相应的状态函数，即下列方程的解

$$\begin{cases}-\Delta\hat{u}+\hat{m}\,\hat{u}=f & in\ \Omega\\ \hat{u}=0 & on\ \partial\Omega,\end{cases} \tag{4.5}$$

且 $\hat{}z$ 是伴随状态，即下列方程的解

$$\begin{cases}-\Delta\hat{z}+\hat{m}\,\hat{z}=\partial_s j(x,\hat{u}) & in\ \Omega\\ \hat{z}=0 & on\ \partial\Omega,\end{cases} \tag{4.6}$$

我们有

$$\hat{m}\in L^\infty(\Omega),\quad \hat{u}\hat{z}\in\partial\psi(\hat{m}),\quad h_-(\hat{u}\hat{z})\le\hat{m}\le h(\hat{u}\hat{z}),\qquad a.e.\ in\ \Omega. \tag{4.7}$$

注 4.3. 考虑到 $\mathrm{dom}(\psi)\subset[0,\infty)$、$\psi$ 下半连续以及 (2.5)，我们推得

$$\lim_{s\to\infty} d_-\psi(s)=\infty,$$

并且，取

$$\alpha:=\inf\mathrm{dom}(\psi)\ge 0, \tag{4.8}$$

以下条件之一成立

$$\lim_{s\searrow\alpha}\psi(s)=\infty,\ \lim_{s\searrow\alpha} d_+\psi(s)=-\infty\quad\text{ or }\quad \alpha\in\mathrm{dom}(\psi),\ d_-\psi(\alpha)=-\infty.$$

因此，对于每个 $\tau\in\mathbb{R}$，都存在 $s\in\in$定义域(ψ)，使得 $\tau\in\partial\psi(s)$。

注 4.4。 由 (2.3) 和 (2.4)，我们得到定理 4.2 中的 h 也可表示为

$$h(\tau)=d_+\psi^*(\tau)\qquad\forall\,\tau\in\mathbb{R}.$$

它始终是一个单调不减且右连续的函数。此外，它还满足

$$h(\tau)=\max\big\{s\in\mathrm{dom}(\psi):\ \tau\ge d_-\psi(s)\big\}. \tag{4.9}$$

由 (4.7) 以及椭圆方程的正则性结果，我们推得：如果 h 具有很高的正则性，且函数 j 和 f 也具有很高的正则性，那么最优测度 $\hat{}m$ 就具有很高的正则性。从这个意义上说，下面的命题给出了使 h 分别连续和局部利普希茨连续的一些充要条件。

命题 4.5. 由（*4.4*）定义的函数 h满足

$$h\in C^0(\mathbb{R})\iff\psi\ \ is\ strictly\ convex. \tag{4.10}$$

$$h\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R})\iff 0<\inf_{\substack{s_1,s_2\in\mathrm{dom}(\psi)\\ s_1<s_2}}\frac{d_-\psi(s_2)-d_+\psi(s_1)}{s_2-s_1}. \tag{4.11}$$

对 ψ 作出比命题 4.5 中更强的假设，可使 h具有更高的正则性，但值得注意的是

$$d_+\psi(\alpha) > -\infty \Longrightarrow \partial\psi(\alpha) = \big(-\infty, d_+\psi(\alpha)\big] \Longrightarrow h(s) = \alpha,\ \forall\, s \in (-\infty, d_+\psi(\alpha)\big),$$

其中 α 由 (4.8) 定义。因此，如果 $d_+\psi(\alpha) > -\infty.$，则 h 不可能是解析函数。更进一步，我们有以下结果。

Prop命题 4.6. 假设由 *(4.8)* 定义的 α 满足 $d_+\psi(\alpha) > -\infty$。该 n

$$\exists\, h'(d_+\psi(\alpha)) \iff \lim_{s \searrow \alpha} \frac{d_+\psi(s) - d_+\psi(\alpha)}{s - \alpha} = \infty. \tag{4.12}$$

由命题 4.5 可知，若 ψ 不是严格凸的，则 h （进而 $\hat{}m$）不连续。此外，命题 4.6 表明，即使 h 连续，一般也不可导。下文的定理 4.7 给出了一个充分条件，使得 $\hat{}m\hat{}u\hat{}z$ 属于$BV(\Omega)$，并由此证明 $\hat{}m$ 的不连续曲面具有有限周长。

T定理 4.7. 除定理 *4.1* 中的条件外，我们还假设 $\Omega \in C^1$, ^{1},

$$g(\tau) := h(\tau)\tau \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.13}$$

关于 τ 单调不减，且

$$\max_{|s|\le M} |\nabla_x \partial_s j(.,s)| \in L^q(\Omega), \quad \max_{|s|\le M} |\partial^2_{ss} j(.,s)| \in L^1(\Omega), \quad \forall\, M > 0, \tag{4.14}$$

with

$$q \ge \frac{2N}{N+1} \ \ \textit{if}\ 1 \le N \le 2, \qquad q > \frac{N}{2} \ \ \textit{if}\ N \ge 3. \tag{4.15}$$

那么，对于每个 $f \in BV(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ 以及方程 (4.1) 的每个解 $\hat{}m$，我们有

$$\hat{u}, \hat{z} \in W^{2,q}(\Omega), \qquad \hat{m}\hat{u}\hat{z} \in BV(\Omega),$$

其中，$\hat{}u$、$\hat{}z$ 分别是 (4.5)和 (4.6) 的解。

注 4.8. 在定理 4.7 的假设下，函数 $\hat{}u$、$\hat{}z$ 连续，因此集合 $E := \{\hat{}u\hat{}z = 0\}$ 是 Ω 的闭子集（包含边界）。由于 $\hat{}m\hat{}u\hat{}z$ 属于 $BV(\Omega)$，故可得 $\hat{}m$ 属于 $BV_{loc}(\Omega \setminus E)$。

注 4.9. 由于 h 是单调不减的，要使 g 单调不减，一个充分条件是假设 $d_+\psi(\alpha) \ge 0$，其中 α 由 (4.8) 定义。

定理 *4.1* 的证明。为证明解的存在性，我们采用变分法直接法。取 $m_n \in L^1(\Omega)$，在 Ω 中几乎处处有 $m_n \ge 0$，使得状态方程 (4.1) 的解 u_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \big(j(x,u_n) + \psi(m_n)\big)dx = \mathcal{I},$$

其中，我们用 $\mathcal{I}$ 表示 (4.1) 的下确界。特别地

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \psi(m_n)\, dx < \infty,$$

结合 (2.5)，这意味着 m_n 在 $L^1(\Omega)$ 的弱拓扑下是紧的。此外， $f \in H^{-1}(\Omega)$ 意味着 u_n 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界。因此，如有必要，取一个子列，可得 $\hat{}m \in L^1(\Omega)$ 和 $\hat{}u \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$m_n \rightharpoonup \hat{m} \ \text{ in } L^1(\Omega), \qquad u_n \rightharpoonup \hat{u} \ \text{ in } H_0^1(\Omega). \tag{4.16}$$

由这些收敛性、Rellich-Kondrachov紧性定理、 ψ的下半连续性以及Fatou引理，我们可推出

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \big(j(x,u_n) + \psi(m_n)\big)\,dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \big(j(x,u_n) - a + c|u_n|^2 + \psi(m_n)\big)\,dx - \int_\Omega \big(-a + c|u|^2\big)\,dx \\
&\geq \int_\Omega \big(j(x,\hat{u}) + \psi(\hat{m})\big)\,dx.
\end{aligned}$$

接着证明$\hat{}u$ 是(4.5)的解，我们便可推出$\hat{}m$ 是(4.1)的一个解。为此，给定 $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty$ (Ω)和 $l > 0$，我们取 $S_l(u_n)v$ 作为测试函数，代入 u_n所满足的方程中。由此得到

$$-\frac{1}{l}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 v\,\mathrm{sgn}(u_n)\,dx + \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v\, S_l(u_n)\,dx + \int_\Omega m_n u_n S_l(u_n) v\,dx = \langle f, S_l(u_n)v\rangle.$$

根据(4.16)、Rellich-Kondrachov紧性定理以及 $S_l(u_n)v$ 在 $L^\infty(\Omega)$中有界，我们可以在该等式的后三项中令 n趋于极限。对于第一项，我们可以利用 u_n 在 $H_0^1(\Omega)$中有界且 v 属于 $L^\infty(\Omega)$这一事实。因此，存在一个与 m 无关的 $C > 0$ ，使得

$$\left|\int_\Omega \big(\nabla\hat{u}\cdot\nabla v + \hat{m}\hat{u}v\big) S_l(\hat{u})\,dx - \langle f, S_l(\hat{u})v\rangle\right| \leq \frac{C}{l}.$$

利用 $S_l(\hat{}u)v$ 在 $l \to \infty$趋于 $l \to \infty$ 时于 $H_0^1(\Omega)$中强收敛到 v 这一事实，以及Lebesgue控制收敛定理，我们可以在该等式中令 $l \to \infty$ 趋于极限，得到

$$\int_\Omega \big(\nabla\hat{u}\cdot\nabla v + \hat{m}\hat{u}v\big)\,dx = \langle f, v\rangle, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).$$

若 v仅属于 $H_0^1(\Omega) \cap L^2_m(\Omega)$，我们证明，只需将$v$ 替换为 $T_k(v)$，然后令 $k \to \infty$趋于极限，该等式仍然成立。 □

定理 *4.2* 的证明。 设 $\hat{}m$是 (4.1) 的一个解，并将 $\hat{}u$、$\hat{}z$ 分别定义为 (4.5) 和 (4.6) 的解。由于 f 满足 (4.2)，Stampacchia 估计（见 [25]）表明，$\hat{}u$ 属于 $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty$ (Ω)。由 (4.3) 可知，$\hat{}z$ 作为 (4.6) 的解是良定义的，且属于 $H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\hat{m}}(\Omega)$。

现在，对于另一个非负函数 $m \in L^1(\Omega)$，若 $\psi(m)$可积，$k > 0$，且 $\varepsilon \in (0,1]$, ，我们将 m_ε 定义为

$$m_\varepsilon = \hat{m} + \varepsilon\, T_k(m - \hat{m}),$$

并且 u_ε 作为.....的解

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + m_\varepsilon u_\varepsilon = f & \text{in } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

考虑到

$$m_\varepsilon = \begin{cases} (1-\varepsilon)\hat{m} + \varepsilon m & \text{if } |m-\hat{m}| \le k \\ \Big(1 - \dfrac{\varepsilon k}{|m-\hat{m}|}\Big)\hat{m} + \dfrac{\varepsilon k}{|m-\hat{m}|} m & \text{if } |m-\hat{m}| > k, \end{cases}$$

由于 $\hat{m}$ 是 (4.1) 的一个解，且 ψ 是凸的，我们推出

$$\begin{aligned} &\int_\Omega j(x,u_\varepsilon) + \int_{\{|m-\hat{m}|\le k\}} \big((1-\varepsilon)\psi(\hat{m}) + \varepsilon\,\psi(m)\big)\,dx \\ &\quad + \int_{\{|m-\hat{m}|>k\}} \Big(\Big(1 - \frac{\varepsilon k}{|m-\hat{m}|}\Big)\psi(\hat{m}) + \frac{\varepsilon k}{|m-\hat{m}|}\psi(m)\Big)\,dx \\ &\quad \ge \int_\Omega \big(j(x,u_\varepsilon) + \psi(m_\varepsilon)\big)\,dx \ge \int_\Omega \big(j(x,\hat{u}) + \psi(\hat{m})\big)dx, \end{aligned}$$

对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立。接着利用

$$\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} \to u' \ \text{ in } H_0^1(\Omega),$$

其中 $u' \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 是.....的解

$$\begin{cases} -\Delta u' + \hat{m}u' + T_k(m-\hat{m})\hat{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ u' = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \partial_s j(x,\hat{u})u'dx + \int_{\{|m-\hat{m}|\le k\}} \big(\psi(m) - \psi(\hat{m})\big)\,dx \\ &\qquad + \int_{\{|m-\hat{m}|>k\}} \frac{k\big(\psi(m) - \psi(\hat{m})\big)}{|m-\hat{m}|}\,dx \ge 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

另一方面，在 (4.6) 中取 u' 为测试函数，并在.....中取 $\hat{z}$ 为测试函数，我们推出 (4.5)

$$\int_\Omega \partial_s j(x,u)u'\,dx = \int_\Omega \big(\nabla\hat{z}\cdot\nabla u' + \hat{m}\hat{z}u'\big)\,dx = -\int_\Omega T_k(m-\hat{m})\hat{u}\hat{z}\,dx.$$

因此 (4.17) 给出

$$-\int_\Omega T_k(m-\hat{m})\hat{u}\hat{z}\,dx + \int_{\{|m-\hat{m}|\le k\}} \big(\psi(m)-\psi(\hat{m})\big)\,dx + \int_{\{|m-\hat{m}|>k\}} \frac{k\big(\psi(m)-\psi(\hat{m})\big)}{|m-\hat{m}|}\,dx \ge 0.$$

利用这里的 m、$\hat{m}$、 $\psi(m)$ 和 $\psi(\hat{m})$ 属于 $L^1(\Omega)$，以及 (4.3) 中的第二个断言、(4.6) 的 $\hat{z}$ 解和 Stampacchia 估计可推出 $\hat{z}$ 属于 $L^\infty(\Omega)$，我们可以令 $k\to\infty$ 取极限，从而得到

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \big(\psi(m) - m\hat{u}\hat{z}\big)\,dx \ge \int_\Omega \big(\psi(\hat{m}) - \hat{m}\hat{u}\hat{z}\big)\,dx, \\ &\forall\, m \in L^1(\Omega),\ m \ge 0 \text{ a.e. in } \Omega,\ \int_\Omega \psi(m)\,dx < \infty. \end{aligned}$$

这意味着 $\hat{}m$ 满足

$$\hat{m} \in \mathrm{dom}(\psi), \quad \psi(\hat{m}) - \hat{m}\hat{u}\hat{z} = \min_{s \in \mathrm{dom}(\psi)} \big\{\psi(s) - s\hat{u}\hat{z}\big\}, \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

或者等价地,

$$\hat{m}\hat{u}\hat{z} = \psi(\hat{m}) + \psi^*(\hat{u}\hat{z}).$$

根据 (2.4)，这也等价于 $\hat{}m \in \partial\psi^*(\hat{}u\hat{}z)$，并且也等价于 $\hat{}u\hat{}z \in \partial\psi(\hat{}m)$。将 (2.3) 应用于 ψ^* 并结合注 4.4，我们即可推出 (4.7) 中的第三个断言。结合 $L^\infty(\Omega)$ 中的 $\hat{}u$ 和 $\hat{}z$，这也意味着 $\hat{}m$ 属于 $L^\infty(\Omega)$。 □

命题 *4.5* 的证明。我们来证明 (4.10)。如果 ψ 是严格凸的，则由 (2.2) 定义的商函数限制在该集合上

$$\big\{(s,t) \in \mathrm{dom}(\psi) \times \mathrm{dom}(\psi) \ : \ s < t\big\},$$

关于 s 和 t严格递增。这就证明了

$$d_+\psi(s_1) < d_-\psi(s_2) \qquad \forall\, s_1, s_2 \in \mathrm{dom}(\psi),\ s_1 < s_2.$$

根据注 4.3，这意味着对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$，存在唯一的 $s \in$属于 dom(ψ)，使得 $\tau \in \partial\psi(s)$。根据 h 的定义 (4.4)，我们推得 $h(\tau)$与这样的 s一致。现在，我们注意到 ψ 的下半连续性和 $\partial\psi$ 的定义 (2.1) 蕴含了 $\partial\psi$的如下连续性性质:

$$s_n, s \in \mathrm{dom}(\psi),\ \tau_n \in \partial\psi(s_n),\ \tau \in \mathbb{R}, \quad s_n \to s,\ \tau_n \to \tau \Longrightarrow \tau \in \partial\psi(s).$$

由于上文证明的 s 的唯一性，这也可以读作

$$s_n = h(\tau_n),\ s_n \to s,\ \tau_n \to \tau \Longrightarrow s = h(\tau),$$

进而证明了 h 的连续性。

反过来，我们用反证法。若 ψ 不是严格凸的，则存在区间 $[c,d] \subset \subset$定义域(ψ)，其中 $c < d$ 满足: ψ 在该区间内是斜率为某个值 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的仿射函数。此外，$c \geq 0$ 可以选为

$$c = \min_{s \in \mathrm{dom}(\psi)} d_+\psi(s) = \lambda.$$

若 $c = \alpha$ 由 (4.8) 定义，则 $\partial\psi(c) = (-\infty,\ \lambda]$，因此 h 的定义 (4.4) 蕴含

$$h(\tau) = c \qquad \forall\, \tau < \lambda,\ h(\lambda) \geq d.$$

若 $c > \alpha$，则对每个 $s < c$，$d_+\psi(s) < \lambda$，因此

$$h(\tau) < c \qquad \forall\, \tau < \lambda,\ h(\lambda) \geq d.$$

在这两种情况下，我们都得出 h 在 $\tau = \lambda$ 处不连续。

为了证明 (4.11)，我们首先注意到，右端项蕴含 ψ 严格凸。由于 $h \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 蕴含 h 连续，我们得出 (4.11) 左端也蕴含 ψ 严格凸。因此，只需对 ψ 严格凸的情形证明该结果。正如证明开头所见，这意味着对每个

$\tau \in \mathbb{R}$ 存在唯一的 $s \in$ 定义域(ψ)，使得 $\tau \in \partial\psi(s)$，且该 s 满足$h(\tau) = s$. 然后，考虑到 (2.3)，我们推得存在 $L > 0$ 使得

$$h(\tau_2) - h(\tau_1) \le L(\tau_2 - \tau_1),$$

对每个 $\tau_1 \le \tau_2$，等价于

$$s_2 - s_1 \le L\big(d_-\psi(s_1) - d_+\psi(s_2)\big),$$

对每个 s_1， $s_2 \in$ 定义域(ψ)，于是 (4.11) 成立。 □

命题 *4.6* 的证明。 由于 $d_+\psi(\alpha) > -\infty$，我们有 $\partial\psi(\alpha) = (-\infty,\ d_+\psi(\alpha)]$, 于是，对每个 $s < d_+\psi(\alpha)$， $h(s) = \alpha$。因此，如果 h 可在 $d_+(\psi(\alpha))$ 处导出，则必有

$$h(d_+\psi(\alpha)) = \alpha, \qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{h(d_+\psi(\alpha)+\varepsilon) - \alpha}{\varepsilon} = 0.$$

因此，对每个 $\rho > 0$，存在 $\delta > 0$ ，使得 $0 < \varepsilon < \delta$ 蕴含

$$h(d_+\psi(\alpha) + \varepsilon) < \alpha + \varepsilon\rho,$$

根据 (4.9)，这也可以写作

$$s \in \mathrm{dom}(\psi),\ d_-\psi(s) \le d_+\psi(\alpha) + \varepsilon \Longrightarrow s < \alpha + \varepsilon\rho,$$

于是

$$s \ge \alpha + \varepsilon\rho \Rightarrow d_-\psi(s) > d_+\psi(\alpha) + \varepsilon.$$

取 $s = \alpha + \varepsilon\rho$ 并令 $\varepsilon \to 0$，即可得到

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{d_-\psi(\alpha+\varepsilon\rho) - d_+\psi(\alpha)}{\varepsilon\rho} > \frac{1}{\rho} \qquad \forall\, \rho > 0,$$

进而

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{d_-\psi(\alpha+\varepsilon) - d_+\psi(\alpha)}{\varepsilon} = \infty.$$

反向结论可用类似的论证证明。 □

定理 *4.7* 的证明。 考虑到 $\hat{}m$ 属于 L^∞(Ω)，Ω 是 $C^{1,1}$,$f \in L^q$(Ω)，(4.14) 中的第一个断言，以及 $\hat{}u$、$\hat{}z$ 分别是 (4.5) 和 (4.6) 的解，我们可以应用椭圆方程的正则性结果（例如参见 [23], 第 7 章），从而推出 $\hat{}u$、$\hat{}z$ 属于 $W^{2,q}$(Ω)。

现在，我们利用 $\hat{}u\hat{}z$ 满足

$$-\Delta(\hat{u}\hat{z}) + \hat{m}\hat{u}\hat{z} = -2\nabla\hat{u}\cdot\nabla\hat{z} + f\hat{z} + \partial_s j(x,\hat{u})\hat{u} \qquad \text{in } \Omega.$$

其中，由于 (4.14)，$\hat{}\ f \in BV$(Ω) $\cap\, L^q$(Ω) 且 $\hat{}u, \hat{}z \in W^{2,q}$(Ω)，我们有该方程的右端项属于 BV(Ω)。再利用 (4.7) 和 g 的定义 (4.13) 可得

$$g_-(\hat{u}\hat{z}) \le \hat{m}\hat{u}\hat{z} \le g_-(\hat{u}\hat{z}) \qquad \text{a.e. in } \Omega,$$

并且，由于我们假设 g 关于 $\mathbb{R}$单调不减，因此可以应用定理 3.6 推得 $\hat{}m\hat{}u\hat{}z$ 属于 BV(Ω)。 □

5 一些例子

本节将通过将前一节得到的结果应用于一些经典例子来加以说明。在第6节中，我们还将对这些例子进行一些数值计算。

第一个例子。 我们考虑这样的情形：寻找一个非负函数m ，使得方程 (4.1) 的解 u 最小化

$$J(u) := \int_\Omega j(x,u)\,dx, \tag{5.1}$$

并且 m 在某个空间 $L^p(\Omega)$ 中的范数不太大。这个问题可由 (4.1) 建模，其中 ψ 取为

$$\psi(s) = \infty 1_{(-\infty,0)} + ks^p 1_{[0,\infty)}.$$

其中 k 是一个待选取的正参数。于是，

$$\partial\psi(s) = \begin{cases} (-\infty, 0] & \text{if } s = 0, \\ \{kp\, s^{p-1}\} & \text{if } s > 0, \end{cases} \qquad h(\tau) = \Big(\frac{\tau}{kp}\Big)^{\frac{1}{p-1}} 1_{(0,\infty)}.$$

由定理 4.1 以及 ψ 严格凸这一事实可知， h 连续。当 $p < 2$ 时，也就是说，当条件 (4.12) 成立时，h 属于 $C^1(\mathbb{R})$；若 $p \le 2$，则它局部利普希茨连续（此时条件 (4.11) 在定义域(ψ)的有界子集中成立）。

由 (4.7) 可推得，取足够正则的 j 和 f 时，(4.1) 的每个解 $\hat{}m$ 都满足

$$\hat{m} = \Big(\frac{\hat{u}\hat{z}}{kp}\Big)^{\frac{1}{p-1}} 1_{\{\hat{u}\hat{z}>0\}} \qquad \text{a.e. in } \Omega, \tag{5.2}$$

其中 $\hat{}u$ 和 $\hat{}z$ 分别是方程 (4.5) 和 (4.6) 的解。特别地，这意味着 $\hat{}u$、$\hat{}z$ 满足非线性系统

$$\begin{cases} -\Delta\hat{u} + \Big(\dfrac{\hat{u}\hat{z}}{kp}\Big)^{\frac{1}{p-1}} 1_{\{\hat{u}\hat{z}>0\}}\hat{u} = f & \text{in } \Omega, \\ -\Delta\hat{z} + \Big(\dfrac{\hat{u}\hat{z}}{kp}\Big)^{\frac{1}{p-1}} 1_{\{\hat{u}\hat{z}>0\}}\hat{z} = \partial_s j(x,\hat{u}) & \text{in } \Omega, \\ \hat{u} = \hat{z} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

根据定理 4.7，我们得到

$$\hat{m}\hat{u}\hat{z} = \frac{(\hat{u}\hat{z})^{p'}}{(kp)^{\frac{1}{p-1}}}\, 1_{\{\hat{u}\hat{z}>0\}}$$

属于 $BV(\Omega)$（甚至属于 $W^{1,1}(\Omega)$）。然而，为了使 $\hat{}m$ 属于 $W^{1,1}(\Omega)$，我们需要 $(\hat{}u\hat{}z)^{\frac{2-p}{p-1}}\nabla(\hat{}u\hat{}z)1_{\overline{\{\hat{u}\hat{z}\}}}$ 属于 $L^1(\Omega)^N$，而对于 $p > 2$ 而言，这一点并不明确，即当 h 不是局部 Lipschitz 时。

第二个例子。 现在考虑如下情形：我们希望在约束 $m \in [\alpha, \beta]$ 下最小化泛函 (5.1)，其中 u 是方程 (4.1) 中状态方程的解，且 $0 \le \alpha < \beta$。该问题对应于 (4.1)，其中 ψ 给定为

$$\psi(s) = \infty 1_{(-\infty,\alpha)\cup(\beta,\infty)}. \tag{5.4}$$

因此，dom(ψ) $= [\alpha, \beta]$，并且

$$\partial\psi(s) = \begin{cases} (-\infty, 0] & \text{if } s = \alpha \\ \{0\} & \text{if } \alpha < s < \beta \\ [0, \infty) & \text{if } s = \beta, \end{cases} \qquad h(\tau) = \begin{cases} \alpha & \text{if } \tau < 0 \\ \beta & \text{if } \tau \geq 0, \end{cases}$$

正如预期，由于 ψ 不是严格凸的，根据 (4.10) 可知 h 不连续。条件 (4.7) 在此情形下写为

$$\begin{cases} \hat{m} = \alpha & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} < 0\} \\ \hat{m} = \beta & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} > 0\} \\ \hat{m} \in [\alpha, \beta] & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} = 0\}. \end{cases} \tag{5.5}$$

因此，在 $\hat{u}\hat{z}$ 为零的集合上，$\hat{m}$ 的值并未确定。当该集合具有零测度时，断言 (5.5) 表明 $\hat{m}$是一个 bang-bang 控制，它只取 α 和 β这两个值。考虑到 $g(s) = h(s)$ s 是单调不减的，由定理 4.7 可推出，$\hat{m}\hat{u}\hat{z}$ 属于 $BV(\Omega)$。

作为一个可以保证 $\hat{m}$ 是 bang-bang 控制的简单情形，我们取

$$j(x, s) = \gamma(x)s \qquad \text{a.e. } x \in \Omega, \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

假设 $\gamma, f \in L^q(\Omega)$，其中 q满足 (4.15)，则有 $\hat{u}, \hat{z}$属于 $W^{2,q}(\Omega)$。因此，(4.5) 和 (4.6) 蕴含

$$f = 0 \ \text{ a.e. in } \{\hat{u} = 0\}, \qquad \gamma = 0 \ \text{ a.e. in } \{\hat{z} = 0\}.$$

因此，假设 $|\{f = 0\}| = |\{\gamma = 0\}| = 0$, 我们得出集合 $\{\hat{u}\hat{z} = 0\}$ 是零测度。

构造一个反例也很简单：其中集合 $\{\hat{u}\hat{z} = 0\}$ 具有正测度，且控制 $\hat{m}$ 不是 bang-bang 控制。只需取一个非恒定的 $\tilde{m} \in C^0(\Omega; [\alpha, \beta])$，并令 $\tilde{u}$ 为方程 (4.5) 的解，其中用 $\tilde{m}$替换 $\hat{m}$ 。定义

$$j(x, s) = |s - \tilde{u}(x)|^2 \qquad \text{a.e. } x \in \Omega, \ \forall\, s \in \mathbb{R},$$

由此可推知，问题 (4.1) 有唯一解 $\hat{m} = \tilde{m}$，且泛函为零。注意，在此情形下，$\partial_s j(x, \hat{u})$ 在 Ω 中几乎处处成立，因此 $\hat{z}$ 是零函数。因此，集合 $\{\hat{u}\hat{z} = 0\}$ 就是整个集合 Ω，而条件 (5.5) 对 $\hat{m}$ 不提供任何信息。

第三个例子。 我们考虑第一个和第二个例子的混合情形。现在，目标是最小化 (5.1)，其中 u 是 (4.1) 中状态方程的解，并且$m \in [\alpha, \beta]$，使其在 $L^p(\Omega)$ 中的范数不至于太大，其中 $1 \leq p < \infty$。该问题对应于在 (4.1) 中取

$$\psi(s) = \infty 1_{(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)} + k s^p 1_{[\alpha, \beta]},$$

其中 $k > 0$ 是一个待选的正常数。

在严格凸的情形下 $p > 1$，我们有

$$\partial\psi(s) = \begin{cases} (-\infty, kp\alpha^{p-1}] & \text{if } s = \alpha \\ \{kps^{p-1}\} & \text{if } \alpha < s < \beta \\ [kp\beta^{p-1}, \infty) & \text{if } s = \beta, \end{cases} \qquad h(\tau) = \begin{cases} \alpha & \text{if } \tau < kp\alpha^{p-1} \\ \left(\dfrac{\tau}{kp}\right)^{\frac{1}{p-1}} & \text{if } kp\alpha^{p-1} \leq \tau < kp\beta^{p-1} \\ \beta & \text{if } \tau \geq kp\beta^{p-1}. \end{cases}$$

与第一个例子一样，ψ 的严格凸性保证了函数 h 连续。因此，最优控制是连续的；而且，当 $p \le 2$ 时，它们属于某个 Sobole夫空间（假设 j 和 f 足够光滑）。

在 $p=1$ 的情况下，我们有

$$\partial\psi(s) = \begin{cases} (-\infty, k] & \text{if } s = \alpha \\ \{k\} & \text{if } \alpha < s < \beta \\ [k, \infty) & \text{if } s = \beta, \end{cases} \qquad h(\tau) = \begin{cases} \alpha & \text{if } \tau < k \\ \beta & \text{if } \tau \ge k. \end{cases}$$

与第二个例子一样，(4.7) 给出

$$\begin{cases} \hat{m} = \alpha & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} < k\} \\ \hat{m} = \beta & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} > k\} \\ \hat{m} \in [\alpha, \beta] & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} = k\}, \end{cases}$$

于是，当集合 $\{\hat{u}\hat{z} = k\}$ 的测度为零时，最优控制为 bang-bang 控制。

由于 $h(\tau)\tau$ 仍然是单调不减的，定理 4.7 证明，对于每个最优控制 $\hat{m}$，$\hat{m}\hat{u}\hat{z}$ 都属于 $BV(\Omega)$。此外，利用 $\hat{m} = \alpha$ 在闭集 $\{\hat{u}\hat{z} = 0\}$ 的某个邻域内这一事实，我们推得在这种情况下，$\hat{m}$ 也属于 $BV(\Omega)$。

作为一个特例，我们可以取

$$j(x, s) = f(x)s. \tag{5.7}$$

这是一个对应于能量最小化的经典问题。在这种情况下，控制问题 (4.1) 也可以写成最简单的形式

$$\max_{\alpha \le m \le \beta} \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega \Big(|\nabla u|^2 + mu^2 - 2fu \Big) dx - k \int_\Omega m \, dx \right\}. \tag{5.8}$$

对于 $k = 0$，显然，该解对应于 $\hat{m} = \beta$。因此，有趣的情形（如上文所假设）对应于 $k > 0$。这意味着我们只想使用有限量的最优势函数 β（例如，因为它的成本更高）。

由 (5.7) 得到 $\hat{z} = \hat{u}$，然后由 (4.7) 得到

$$\begin{cases} \hat{m} = \alpha & \text{a.e. in } \{|\hat{u}|^2 < k\} \\ \hat{m} = \beta & \text{a.e. in } \{|\hat{u}|^2 > k\}. \end{cases} \tag{5.9}$$

取 $f \in L^q(\Omega)$，其中 q 满足 (4.15)，则有 $\hat{u}$ 属于 $W^{2,q}(\Omega)$，进而得到 (4.5)

$$\sqrt{k}\hat{m} = f \quad \text{a.e. in } \{\hat{u} = \sqrt{k}\}, \qquad -\sqrt{k}\hat{m} = f \quad \text{a.e. in } \{\hat{u} = -\sqrt{k}\}.$$

因此，要使 $\hat{m}$ 成为 bang-bang 控制，一个充分条件是假设集合 $\{f \in [-\sqrt{k}\beta, -\overline{\sqrt{k}\alpha}] \cup [\overline{\sqrt{k}\alpha}, \sqrt{k}\beta]\}$ 的测度为零。特别地，若 α 为正，f 属于 $L^\infty(\Omega)$，且 k 足够大，则该条件成立。

第四个例子。与第三个例子中的情形 $p = 1$ 相关，令

$$\psi(s) = \infty 1_{(-\infty,\alpha)\cup(\beta,\infty)} - ks1_{[\alpha,\beta]},$$

其中 $0 \le \alpha < \beta$, $k > 0$。在这种情况下，我们关注取值于 $[\alpha, \beta]$ 且积分较大的控制 m。与第三个例子类似，我们有

$$\partial\psi(s) = \begin{cases} (-\infty, -k] & \text{if } s = \alpha \\ \{-k\} & \text{if } \alpha < s < \beta \\ [-k, \infty) & \text{if } s = \beta, \end{cases} \qquad h(\tau) = \begin{cases} \alpha & \text{if } \tau < -k \\ \beta & \text{if } \tau \ge -k, \end{cases}$$

定理 4.1 证明，最优控制满足

$$\begin{cases} \hat{m} = \alpha & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} < -k\} \\ \hat{m} = \beta & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} > -k\} \\ \hat{m} \in [\alpha, \beta] & \text{a.e. in } \{\hat{u}\hat{z} = -k\}, \end{cases}$$

因此一般而言它们不连续。此外，在这种情况下，函数

$$g(\tau) = h(\tau)\tau = \begin{cases} \alpha\tau & \text{if } \tau < -k \\ \beta\tau & \text{if } \tau \ge -k, \end{cases}$$

在 $\tau = -k$ 处递减。因此，这是一个定理 4.7 不适用的例子，所以我们不知道 $\hat{m}\hat{u}\hat{z}$ 是否属于 $BV(\Omega)$。

一个经典例子对应于能量最大化，即（与 (5.7) 比较）

$$F(x, s) = -f(x)s. \tag{5.10}$$

与 (5.8) 类似，已知该问题也可以写成

$$\min_{\alpha \le m \le \beta} \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega \Big(|\nabla u|^2 + mu^2 - 2fu \Big) dx - k \int_\Omega m \, dx \right\}. \tag{5.11}$$

对于 $k = 0$，解由 $\hat{m} = \alpha$ 给出，因此有趣的情形是 $k > 0$，如上所假设。现在，函数 $\hat{z}$ 等于 $-\hat{u}$，因此 $\hat{m}$ 满足（与 (5.9) 比较）

$$\begin{cases} \hat{m} = \alpha & \text{a.e. in } \{k < |\hat{u}|^2\} \\ \hat{m} = \beta & \text{a.e. in } \{|\hat{u}|^2 < k\}. \end{cases}$$

因此，要确保最优控制仅取值为α和 β，也可以假设集合 $\{f \in [-\sqrt{k\beta}, -\sqrt{k\alpha}] \cup [\sqrt{k\alpha}, \sqrt{k\beta}]\}$ 的测度为零。

6 一些数值模拟

本节通过对第 5 节前三个例子的（4.1）问题进行数值求解，展示前述章节的结果，其中考虑二维情形。对于第一个例子，我们考虑 $p = 2$；对于第三个例子，我们考虑 $p = 1$。我们采用带投影的梯度下降法。该方法取决于与势的体积约束相关的函数 ψ。相应算法与定理 4.2 相关，该定理给出了（4.1）的最优性条件。关于最优设计问题中的类似算法，请参见 [1], [15]。算法如下所示。

- 初始化：选取一个可容许函数 $m_0 \in L^1(\Omega)$，使得 $\Psi(m_0) < \infty$。
- 对于 $j \geq 0$，按如下方式迭代，直到满足停止条件。

  – 计算 u_j， z_j 式（4.5）、（4.6）的解，其中$\hat{m} = m_j$。 –
  计算与 u_j 和 z_j相关的 $\tilde{m}_j$ 下降方向，如下所示:

$$\tilde{m}_j = \begin{cases} \dfrac{u_j z_j - 2k m_j}{\|u_j z_j - 2k m_j\|_{L^2(\Omega)}} & \text{in the first example,} \\ \operatorname{sgn}(u_j z_j) & \text{in the second example,} \\ \operatorname{sgn}(k - u_j z_j) & \text{in the third example.} \end{cases}$$

  – 更新函数 m_j:

$$m_{j+1} = P_\psi(m_j + \epsilon_j \tilde{m}_j)$$

  其中， P_ψ 是将 $\mathbb{R}$ 投影到 ψ的定义域上的投影算子，即

$$P_\psi(s) = \begin{cases} s^+ & \text{in the first example,} \\ \min\{\beta, \max\{s, \alpha\}\} & \text{in the second and third examples.} \end{cases}$$

- 若 $\frac{|I_{(m_j)-I\ m_{j-1}\ |\ ()()|}}{|I\ m_0} < tol$，则停止；其中 $tol > 0$ 足够小。

在所有数值模拟中，我们都选择 Ω 为零中心、半径为一的二维球。对于第一个例子，我们选择了解为径向对称的简单情形。因此，我们只需求解相应的一维问题。该例子的实现使用 Matlab R2022a 完成。第二个和第三个例子使用自由软件 FreeFemm++v 4.4-3 实现（参见 [19] 和 http://www.freefem.org/）。相应结果如下。

第一个例子。对于 $s_0 \in \mathbb{R}$，我们取:

$$j(x,s) = \frac{1}{2}|s - s_0|^2, \qquad \psi(s) = \infty 1_{(-\infty,0)} + k|s|^2, \qquad f = 1.$$

令 m 为零函数，则方程 (4.1) 中状态方程的解为

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{4}.$$

因此，有趣的情形对应于 $s_0 \in (0, 1/4)$。当 $k = 0$ 假设 (2.5) 不成立时，最优控制不一定由函数 $\hat{m} \in L^1(\Omega)$ 给出（关于最优势存在性的其他一些结果，请参阅 [6], [8], [9], [10], [11], [12], [13]）。事实上，可以证明最优控制 $\hat{m}$ 由以下 Radon测度给出

$$\hat{m} = \frac{1}{s_0} 1_{\{|x|<a\}} dx + \frac{4s_0 - 1 + a^2(1 - 2\log a)}{4s_0 \log a} 1_{\{|x|=a\}} d\sigma,$$

其中， $d\sigma$ 是一维测度， a 的特征为

$$0 < a < 1, \quad 4s_0 - 1 + a^2 < 2a^2 \log a,$$

$$\log a \int_a^1 r(4s_0 - 1 + r^2) \log r \, dr = (4s_0 - 1 + a^2) \Big) \int_a^1 r \log^2 r \, dr.$$

相应的最优控制 $\hat{u}$ 为

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} s_0 & \text{if } |x| < a \\ \dfrac{1 - |x|^2}{4} + \dfrac{(4s_0 - 1 + a^2) \log |x|}{4 \log a} & \text{if } a \le |x| \le 1. \end{cases}$$

在图1中，我们表示了 $s_0 = 0.1$ （然后是 $a \sim 0.2825$）对应的最优状态函数 $\hat{u}$

在图2的上方，我们通过数值求解上述问题，展示了得到的最优控制和最优状态函数（对应于 $k = 0$）。中部和下方则分别展示了取 $k = 10^{-7}$ 和 $k = 10^{-5}$ 时的最优控制和最优状态函数。由于解是径向函数，我们将算法应用于相应的一维问题。请注意，在这种径向表示中，最优测度 $\hat{m}$ 的奇异部分由位于 $r = -a$ 和 $r = a$ 处的两个狄拉克质量构成。在数值计算中，这对应于图中出现的两个角点。

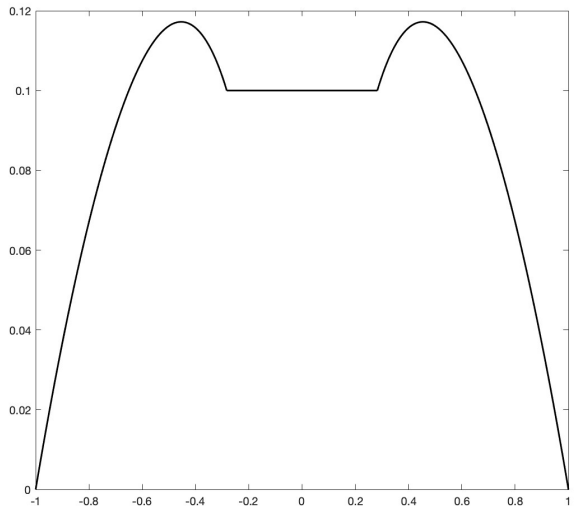

图1：例1： $k = 0$ 对应的最优状态 $\hat{u}$ （解析解）。

第二个例子。 作为上一节第二个例子的一个特例，我们取

$$j(x, s) = g(x)s, \qquad \psi(s) = \infty 1_{(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)},$$

with

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

状态方程 (4.1) 中的右端项为

$$f(x_1, x_2) = 10(x_1^2 + x_2^2) \sin \left(13 \arctan \left| \frac{x_2}{x_1} \right| \right) 1_{\{|x_1| > 10^{-10}\}}.$$

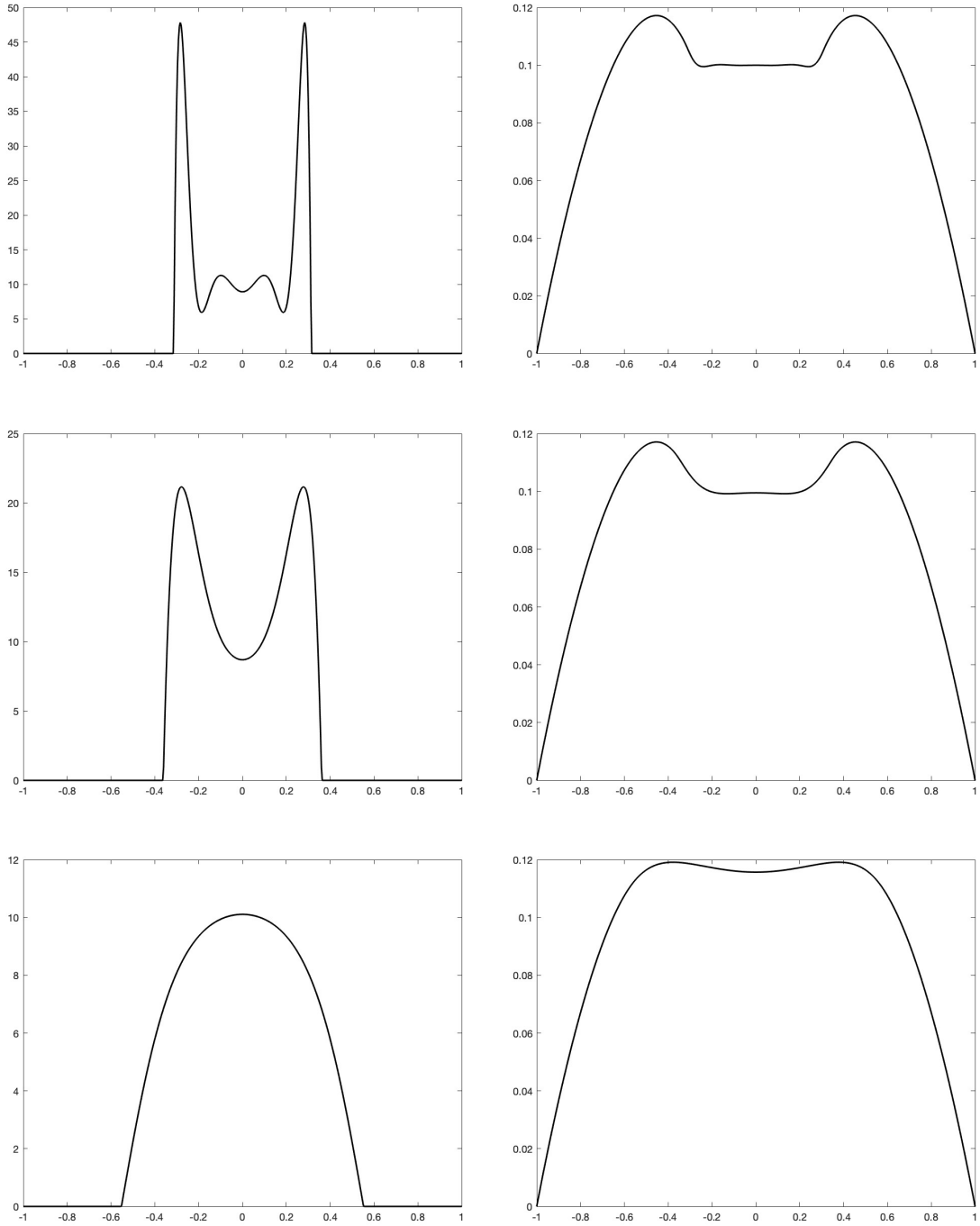

图2：第一个例子：最优控制 $\hat{}m$ （左），以及最优状态 $\hat{}u$ （右）。顶部：$k = 0$。中部： $k = 10^{-5}$。底部： $k = 10^{-7}$。

由于函数 f 多次改变符号，我们预计相应的最优状态函数 $\hat{}u$（方程 (4.5) 的解）也会多次改变符号。函数g是伴随状态函数 $\hat{}z$（方程 (4.6) 的解）的右端项，它也改变了四次符号。考虑到 (5.5)，这会产生一个 bang-bang 控制，其中 α 和 β 在多个区域内互换。对于数值实验，我们考虑 $\alpha = 0$，并取 β的三个不同值： 1, 10^2 和 10^4。相应结果如图3所示。我们观察到，随着 β 增大，最优

控制 $\hat{m}$ 集中在较小的集合上。我们预期，当 β 趋于无穷时，$\hat{m}$会趋于一个奇异测度。

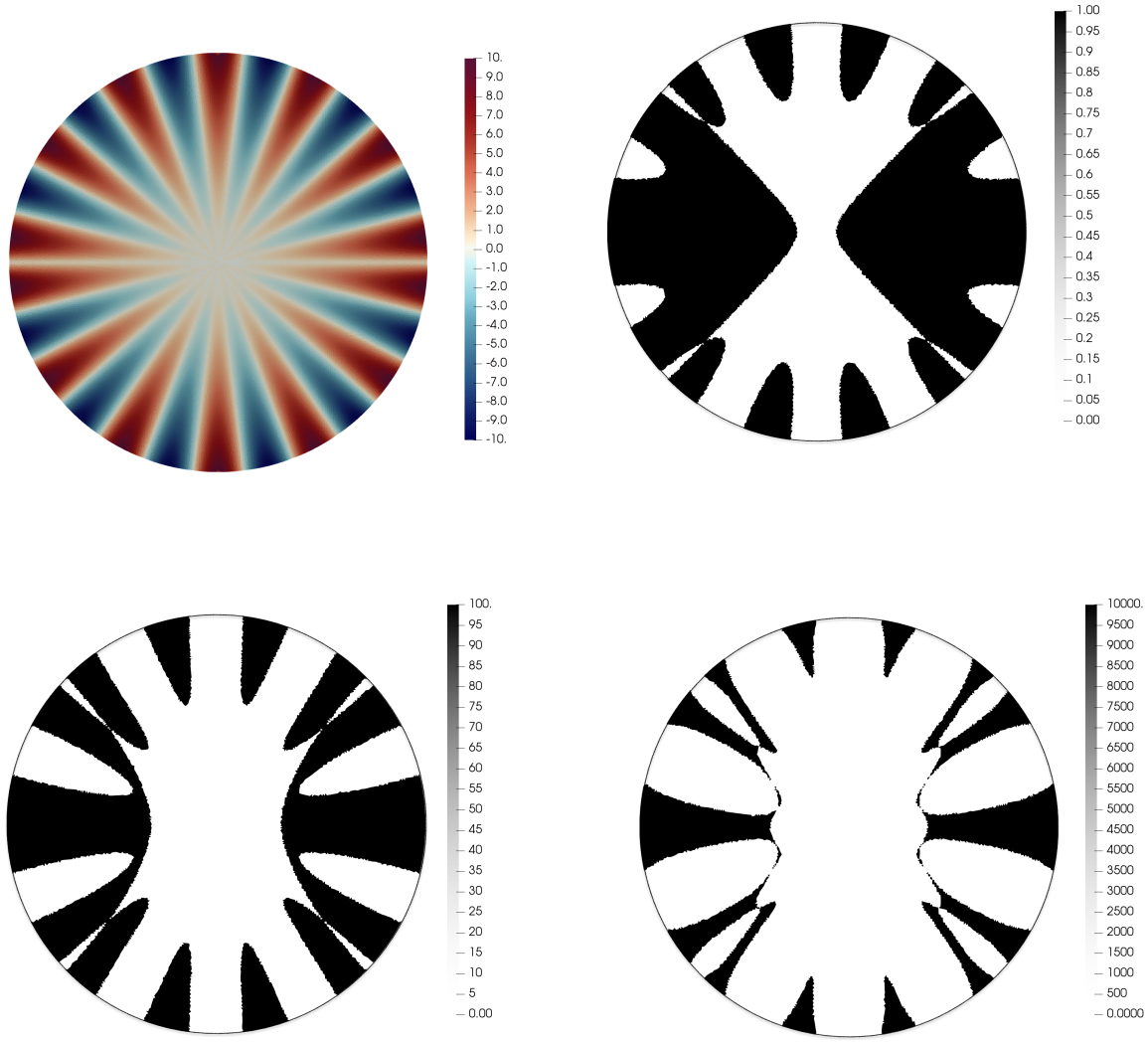

图3：第二个例子：右端项 f：（左上）。 $\beta = 1$（右上）、 $\beta = 10^2$ （左下）和 $\beta = 10^4$ （右下）对应的最优控制 $\hat{m}$ 。

第三个例子。 在这种情况下，我们取

$$j(x, s) = s, \qquad \psi(s) = \infty 1_{(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)} + ks1_{[\alpha,\beta]},$$

and

$$f(x_1, x_2) = 1_{\omega_1}(x_1, x_2) + 1_{\omega_2}(x_1, x_2) + 1_{\omega_3}(x_1, x_2) + 1_{\omega_4}(x_1, x_2).$$

其中， $\omega_i = B(c_i, r)$ （$i = 1, \ldots, 4$）是半径为 $r = \sqrt{3}/10$、中心分别为 $c_1 = (0, 0.5)$、$c_2 = (0, -0.5)$、 $c_3 = (0.5, 0)$ 和 $c_4 = (-0.5, 0)$ 的小球。取 $\alpha = 0$、 $\beta = 1$，我们进行了三次数值实验，分别对应于 $k = 0.00175$、 $k = 0.0014$

以及 $k = 0.001$ 。结果见图4。三次实验均得到 bang-bang 最优势函数。此外，正如预期，当 k 减小时，$\hat{}m$ 在 $L^1(B)$ 中的范数会增大，其值分别为 0.172766、0.531971 和 0.874948，

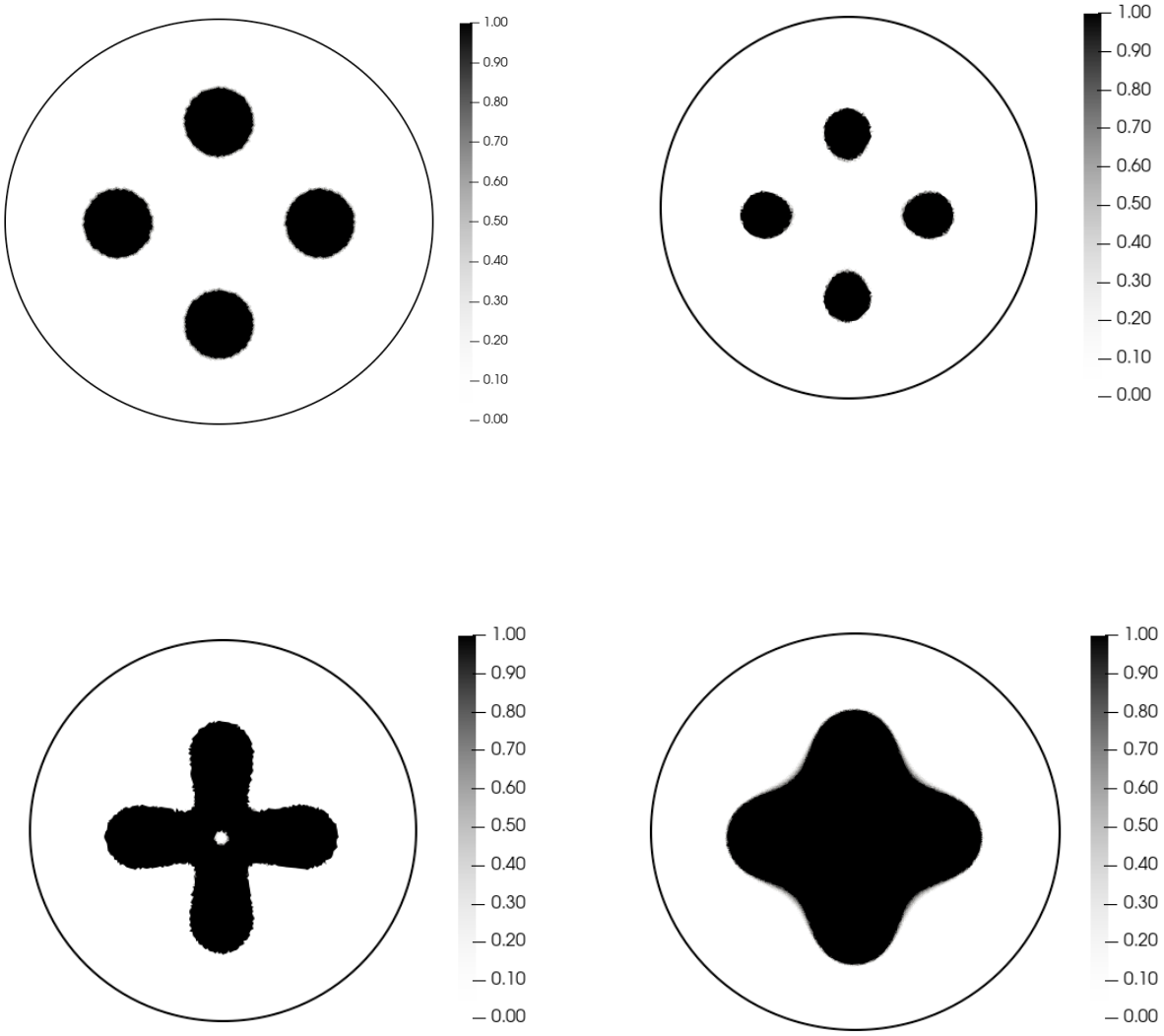

图4：右端项 f（左上）。 $k = 0.00175$ 的最优控制 $\hat{}m$ （右上）、$k = 0.0014$ （左下）和 $k = 0.001$ （右下）。

致谢。 GB 的工作是项目 2017TEXA3H“梯度流、最优传输与度量测度结构”的一部分，该项目由意大利研究与大学部资助。GB 是意大利国家高等数学研究所 (INdAM) 下属数学分析、概率论及其应用国家小组 (GNAMPA) 的成员。

JCD 和 FM 的工作是 FEDER 项目 PID2020-116809GB-I00 的一部分，该项目由西班牙政府科学与创新部资助；同时也是安达卢西亚自治区政府经济转型、工业、知识与大学部的项目 *UAL2020-FQM-B2046* 的一部分。

参考文献

[1] G. Allaire. 通过均匀化方法进行形状优化。*Appl. Math. Sci. 146*，施普林格出版社，纽约，*2002*。[2] J.C. Bellido, G. Buttazzo, B. Velichkov.狄利克雷能量的最坏情形形状优化。*Nonlinear Anal.*，*153*（*2017*），*117–129*。[3] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vázquez.非线性椭圆方程解存在性与唯一性的 L^1 理论。比萨高等师范学院科学年刊，*22*（*2*）（*1995*），*241–273*。[4] L. Boccardo, T. Gallouët.含测度数据的非线性椭圆与抛物型方程。*J. Funct. Anal.*，*87*（*1989*），*149–169*。[5] D. Bucur. 狄利克雷拉普拉斯算子的第 k 个特征值的极小化。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，*206*（*3*）（*2012*），*1073–1083*。[6] D. Bucur, G. Buttazzo.形状优化问题中的变分方法。*Birkh¨auser*，巴塞尔，*2005*。[7] D. Bucur, G. Buttazzo, B. Velichkov.势与测度的谱优化问题。*SIAM* 数学分析杂志，*46*（*4*）（*2014*），*2956–2986*。[8] G. Buttazzo, J. Casado-Díaz, F. Maestre. 无界区域上最优势的存在性。*SIAM* 数学分析杂志，*53*（*2021*），*1088–1121*。[9] G. Buttazzo, G. Dal Maso狄利克雷问题的形状优化：松弛解与最优性条件。*Appl. Math. Optim.*，*23*（*1991*），*17–49*。[10] G. Buttazzo, G. Dal Maso.一类形状优化问题的存在性结果。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，*122*（*1993*），*183–195*。[11] G. Buttazzo, A. Gerolin, B. Ruffini, B. Velichkov. *Sch¨ ordinger* 算子的最优势。*J. ´Ec. Polytech. Math.*，*1*（*2014*），*71–100*。[12] G. Buttazzo, F. Maestre, B. Velichkov.变号数据问题的最优势。*J. Optim. Theory Appl.*，*178*（*3*）（*2018*），*743–762*。[13] G. Buttazzo, B. Velichkov.一个具有变号数据的形状最优控制问题。*SIAM* 数学分析杂志，*50*（*3*）（*2018*），*2608–2627*。[14] E.A. Carlen, R.L. Frank, E.H. Lieb. *Schr¨odinger* 算子最低特征值的稳定性估计。*Geom. Funct. Anal.*，*24*（*1*）（*2014*），*63–84*。

[15] J. Casado-Díaz.代价泛函对梯度呈非线性依赖的多相材料最优设计。*SpringerBriefs in Mathematics*，施普林格，尚，*2022*。[16] G. Buttazzo, J. Casado-Díaz, F. Maestre.无界区域上最优势的存在性。*SIAM* 数学分析杂志，*53*（*2021*），*1088–1121*。[17] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet.一般测度数据椭圆方程的重整化解。比萨高等师范学院科学年刊，*28*（*1999*），*741–808*。[18] E. Giusti. 极小曲面与有界变差函数。*Birkh¨auser*，波士顿，*1984*。[19] F. Hecht *FreeFem++* 的新进展。数值数学杂志，*20*（*2012*），*251–265*。[20] I. Mazari, G. Nadin, Y. Privat.逻辑斯蒂扩散方程总人口规模的优化：*bang-bang*性质与碎裂率。偏微分方程通讯，*47*（*4*）（*2022*），*797–828*。[21] I. Mazari, G. Nadin, Y. Privat.逻辑斯蒂模型中使总人口规模最大的资源最优位置。纯粹与应用数学杂志，*134*（*2020*），*1–35*。[22] *D. Mazzoleni*、*A. Pratelli*。谱问题极小值的存在性。纯粹与应用数学杂志，*100*（*3*）（*2013*），*433–453*。[23] D. Gilbarg, N. Trudinger.二阶椭圆偏微分方程。施普林格，柏林，*1998*。[24] J. Serrin. 椭圆微分方程的病态解。比萨高等师范学院科学年刊，*18*（*1964*），*385–387*。[25] G. Stampacchia.二阶椭圆方程且系数不连续时的狄利克雷问题。傅里叶研究所年刊，*15*（*1965*），*189–258*。