arXiv:2302.02375v1 [math-ph] 5 Feb 2023

多重斜正交多项式与二分量 Pfaff 格层级

SHI-HAO LI、BO-JIAN SHEN、JIE XIANG 和 GUO-FU YU

摘要。本文引入多重斜交正交多项式，并研究它们与经典可积系统之间的联系。利用 Pfaffian 技术，我们证明，经过适当的变形，多重斜交正交多项式可以表示为多分量 Pfaffian τ 函数。此外，通过考察多重斜交正交多项式的递推关系和柯西变换，我们得到了一个二分量 Pfaff 格层级，它与 Takasaki 研究的 Pfaff-Toda 层次等价。

1. 引言

近几十年来，随着随机矩阵理论和可积系统领域的发展，两者之间的相互作用引起了广泛关注。两者联系中的一个关键发现是，经过适当的变形，不同随机矩阵模型的配分函数可以充当相应可积层级的 ττ 函数。这一发现是借助用于不同可积层级的半经典正交多项式得到的，例如 Painlevé 层级 [12, 48] 和 Toda 层级 [3, 10]。

众所周知，正交多项式序列 $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 可由解析非负权函数 $\omega(x)$刻画，使得

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)\omega(x)dx = \delta_{n,m}. \tag{1.1}$$

根据 Favard 定理[20, 25], 正交关系（1.1）可等价地表示为三项递推关系

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x), \quad p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1, \tag{1.2}$$

对于一列系数 $\{a_n, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，可写成雅可比矩阵的形式

$$L = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & & \\ & a_1 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad x\Psi(x) = L\Psi(x), \quad \Psi(x) = (p_0(x), p_1(x), \cdots)^\top.$$

半经典正交多项式最早由 Shobat [51] 提出，随后 Freud[28]也进行了研究。在这种情况下，时间参数 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots)$ 被引入权函数中，使得

$$\partial_{t_n}\omega(x;\mathbf{t}) = x^n\omega(x;\mathbf{t}).$$

2020 数学主题分类。37K10, 15A23。关键词和短语。多重斜正交多项式；Pfaff τ-函数；二分量 Pfaff 层级。

因此，具有半经典权的正交多项式依赖于时间，并得到公式

$$\partial_{t_1} p_n(x;\mathbf{t}) = -\frac{1}{2} b_n p_n(x;\mathbf{t}) - a_n p_{n-1}(x;\mathbf{t}). \tag{1.3}$$

文献中有几种从半经典正交多项式导出可积格的方法。一种是直接利用（1.2）和（1.3）的相容条件，从而得到

$$\partial_{t_1} a_n = \frac{1}{2} a_n (b_n - b_{n-1}), \quad \partial_{t_1} b_n = a_{n-1}^2 - a_n^2,$$

这是 Toda 格的非线性形式。相关细节和讨论可参见专著 [22, 27]。另一种方法是用 τ-函数表示正交多项式，并通过递推关系得到可积层级。众所周知，通过求解正交关系（1.1），可得 $p_n(x;\mathbf{t})$ 的行列式表达式：

$$p_n(x;\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{\tau_n(\mathbf{t})\tau_{n+1}(\mathbf{t})}} \det \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix},$$

其中

$$\tau_n(\mathbf{t}) = \det(m_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}, \quad m_i = \int_{\mathbb{R}} x^i \omega(x;\mathbf{t}) dx.$$

将 $\mathbf{t}$ 向后平移 $[x^{-1}]$，τ-函数便成为关于 x 的多项式，因此有

$$p_n(x;\mathbf{t}) = x^n \frac{\tau_n(\mathbf{t} - [x^{-1}])}{\sqrt{\tau_n(\mathbf{t})\tau_{n+1}(\mathbf{t})}}, \quad [x^{-1}] = \left(\frac{x^{-1}}{1}, \frac{x^{-2}}{2}, \cdots\right). \tag{1.4}$$

此外，若将此类公式代入递推关系（1.2），即可得到具有相邻点的 Toda 层级。该层级也可通过柯西变换导出。考虑正交多项式的柯西变换

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(x;\mathbf{t})}{z-x} \omega(x;\mathbf{t}) dx = z^{-n-1} \frac{\tau_{n+1}(\mathbf{t} + [z^{-1}])}{\sqrt{\tau_n(\mathbf{t})\tau_{n+1}(\mathbf{t})}},$$

于是，根据正交性可得公式

$$0 = \int_{\mathbb{R}} p_n(x;\mathbf{t}) p_{n-1}(x;\mathbf{t}') \omega(x;t) dx = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \tau_n(\mathbf{t} - [z^{-1}]) \tau_n(\mathbf{t}' + [z^{-1}]) e^{\xi(\mathbf{t},z) - \xi(\mathbf{t}',z)} dz, \tag{1.5}$$

其中 $\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i$。此公式对所有 $t, t' \in \mathbb{C}$ 均成立，并给出 KP 层级的一个双线性恒等式 [3, 35]。

正交多项式与可积系统之间的关系，可通过考察正交关系（1.1）的不同推广清楚地展现出来；事实上，该关系由一个对称、正定且取值于实数的双线性型给出

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$$

使得 $\langle x^i, x^j \rangle = \langle x^j, x^i \rangle$。因此，正交性的推广等价于双线性型的扩展。双线性型的一种非对称推广允许

$$\langle x^i, x^j \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^{i+\theta j} \omega(x) dx, \quad \theta \in \mathbb{R}_+.$$

这种双线性型与 Muttalib 和 Borodin 提出的具有额外交互作用的随机矩阵模型有关，相应的多项式称为双正交多项式 [16, 45]。通过考虑作用于$\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[y]$的双线性型，还可以定义另一种双正交性，使得

$$\langle x^i, y^j \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} x^i y^j \mathbb{K}(x,y)\omega_1(x)\omega_2(y)dxdy, \tag{1.6}$$

其中，$\mathbb{K}(x,y)$ 是核函数，而 ω_1、ω_2 分别是关于 x 和 y 的权函数。这类双正交多项式最初是在研究链式耦合矩阵 [24] 和柯西双矩阵模型 [13] 时引入的。特别值得关注的是，随机矩阵模型中由正交系综和辛系综产生的斜对称核。若假设适当的时间变形，上述正交多项式都与可积系统相关。例子包括 Gelfand-Dickey 层次（Muttalib-Borodin 情形） [53], 2、d-Toda 层次（链式耦合情形）[4], 、CKP 层次（柯西双矩阵模型情形） [40], 、Pfaff 格/DKP 层级（正交/辛系综情形）[1, 37] ，以及 BKP 层次（Bures 系综情形）[32]。

多重正交多项式（MOPs）是正交多项式的一种推广，指的是一列关于若干不同权函数正交的多项式，其起源于对所谓 Hermite–Padé 逼近的研究。Hermite–Padé 逼近是对一族函数 $\{f_j\}$ 进行同时有理逼近，这些函数在无穷远处可以作衰减的 Laurent 展开。此类函数可写为

$$f_j(z) = \int_{I_j} \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, \tag{1.7}$$

对于若干测度 $\{\mu_j\}$。正是这些测度与 MOPs 的正交性直接相关；例如，参见简要综述[43]。

多重正交多项式的一个较新的应用领域是随机矩阵。高斯酉系综是由 $N \times N$ 随机复厄米矩阵 $\{H\}$构成的集合，其概率密度函数（PDF）正比于 $e^{-\mathrm{Tr}\, H^2}$。具体而言，对角元素均为相互独立、均值为零且标准差为 $1/\sqrt{2}$ （记作 $\mathrm{N}[0, 1/\sqrt{2}]$）的实正态随机变量，而 H 的上三角元素也相互独立且服从相同分布，其复正态分布为 $\mathrm{N}[0,1/2] + i\mathrm{N}[0,1/2]$。将这一系综加以修改，使元素具有非零均值，相应的 PDF 便正比于 $e^{-\mathrm{Tr}\,(H-A)^2}$，其中 A 是一个固定的复厄米矩阵。这个新系综称为带源高斯酉系综 [18]。设 A 的特征值记为 $\{a_j\}$。Bleher 和 Kuijlaars 的一项结果 [15] 表明，平均特征多项式 $\langle x\mathbb{I} - (H-A)\rangle$ 可以用一类特定的 II 型多重正交多项式[1]表示，这类多项式称为多重 Hermite 多项式，其对应的测度族正比于 $\{e^{-x^2+2a_j x}\}_{j=1}^N$。同一个随机矩阵模型及多重 Hermite 多项式的相关性，也与不相交布朗桥 [9]有关。此外，在 [23] 中，带源高斯酉系综的手征推广与特定的 I 型和 II 型 Laguerre 多重正交多项式相关。由于 I 型和 II 型多重正交多项式与非相交布朗运动密切相关，[21] 提出了一种称为混合型多重正交多项式的多重正交多项式推广，以便对路径作出进一步假设，并在 [6, 7, 11]中探讨了它们在可积系统中的应用。

[1]关于 I 型和 II 型多重正交多项式的形式化定义，请参阅第 2.1节。

本文聚焦于斜正交多项式的一种推广，即多重斜交正交多项式（多重斜正交多项式），并探讨其与可积层级的联系。当假设（1.6）中的积分核为斜对称时，便会出现斜正交多项式。因此，为了给出多重斜正交多项式的恰当定义，我们首先在第 2.2 节考察多重正交多项式的双正交推广。在第 2.3 节中，我们考察对称约化与斜对称约化，以给出多重斜正交多项式的行列式表达式。第 3 节专门讨论二分量多重斜正交多项式，其关于权函数 ω_1 和 ω_2斜正交。命题 3.1 指出，二分量多重斜正交多项式同样可以写成 Pfaffian 表达式，由此可引入二分量 Pfaffian τ-函数。接着，我们分别将两组不同的时间变量 $\mathsf{t} = (t_1, t_2, \cdots)$ 和 $\mathsf{s} = (s_1, s_2, \cdots)$ 引入权函数 ω_1 和 ω_2，并利用 Pfaffian 记号证明变形恒等式。这些恒等式有助于推导可积系统。与标准正交多项式和 Toda 格层级类似，我们采用三种不同的方法，推导出从简单到复杂的可积格。第一种方法见第 3 节，只需比较变形恒等式中的系数，即可得到若干简单方程。此外，第 4 节从两个不同角度系统研究可积格层级的推导。其中一种方法是说明上述 Pfaffian 表达式也可以用带有时间演化的 τ-函数表示。将 τ-函数表达式代入多重斜正交多项式满足的恒等式，可得到关于相邻 τ-函数的一个可积层级。这种方法的不足之处在于，所得可积层级仅涉及相邻的 τ-函数。我们通过考察柯西变换方法对这一方法加以改进。在第 4.2 节中，我们利用多重斜正交多项式的柯西变换，并证明 Takasaki 的 Pfaff-Toda 层级等价于我们的二分量 Pfaff 格层级。

2. 多重斜交正交多项式

本节将介绍多重斜交正交多项式的概念，它们相对于若干不同的权函数满足斜正交性。多重斜正交性源于多重正交性，因此，为使本文自成一体，我们首先简要回顾后者。

2.1. 多重正交多项式简述。多重正交多项式（MOPs）是指关于一个变量、满足相对于若干权函数的正交条件的多项式 [34,Chap. 23]。给定一个长度为 $|\vec{v}| = \sum_{i=1}^{p} v_i$ 的多重指标 $\vec{v} \in \mathbb{N}^p$，以及 p 个支撑在实数轴上的不同权函数 $(\omega_1, \cdots, \omega_p)$，多重正交多项式分为两类。I 型多重正交多项式汇集为由 p 个多项式组成的向量 $(A_{\vec{v},\,1}, \cdots, A_{\vec{v},\,p})$，其中每个 $A_{\vec{v},\,i}$ 的次数至多为 $v_i - 1$，并满足以下正交关系

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \left(\sum_{i=1}^{p} A_{\vec{v},i}(x)\omega_i(x) \right) dx = \delta_{k,|\vec{v}|-1}, \quad 0 \le k \le |\vec{v}| - 1. \tag{2.1}$$

假设

$$A_{\vec{v},i}(x) = \xi_{i,v_i-1} x^{v_i-1} + \cdots + \xi_{i,0},$$

上述关系产生了一个包含 $|\vec{v}|$ 个方程、用于求解 $|\vec{v}|$ 个未知系数 $\{\xi_{i,j}, j=0,\cdots,v_i-1, i=1,\cdots,p\}$ 的线性方程组

$$\begin{pmatrix} m_0^{(1)} & \cdots & m_{v_1-1}^{(1)} & \cdots & m_0^{(p)} & \cdots & m_{v_p-1}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{v_1-1}^{(1)} & \cdots & m_{2v_1-2}^{(1)} & \cdots & m_{v_1-1}^{(p)} & \cdots & m_{v_1+v_p-2}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{|\vec{v}|-v_p}^{(1)} & \cdots & m_{|\vec{v}|+v_1-v_p-1}^{(1)} & \cdots & m_{|\vec{v}|-v_p}^{(p)} & \cdots & m_{|\vec{v}|-1}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{|\vec{v}|-1}^{(1)} & \cdots & m_{|\vec{v}|+v_1-2}^{(1)} & \cdots & m_{|\vec{v}|-1}^{(p)} & \cdots & m_{|\vec{v}|+v_p-2}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1,0} \\ \vdots \\ \xi_{1,v_1-1} \\ \vdots \\ \xi_{p,0} \\ \vdots \\ \xi_{p,v_p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

其中矩定义为 $m_j^{(i)} = \int_{\mathbb{R}} x^j \omega_i(x) dx$。

多项式 $\{A_{\vec{v},i}, i=1,\ldots,p\}$ 当且仅当线性方程组有唯一解时，才能被唯一确定；这要求矩矩阵的行列式非零。该条件对权函数 ω_1、$\cdots$、ω_p施加了限制。一般而言，无法保证给定多重指标对应的多重正交多项式存在。若 I 型多重正交多项式 $\vec{v}$ 存在且唯一，则称多重指标 $\{A_{\vec{v},i}, i=1,\ldots,p\}$ 为正规多重指标。如果所有多重指标都是正规的，那么权函数系$(\omega_1$、$\cdots$、$\omega_p)$ 称为完美系统。两种著名的完美系统是 Angelesco 系统和 Nikishin 系统。前者的完美性由正交多项式零点的性质保证，后者则源于权函数的解析性质。详情请参见 [26, 46]。

通过考虑对偶构造，II 型多重正交多项式 $\{P_{\vec{v}}(x)\}$ 被定义为次数为 $|\vec{v}|$ 的标量多项式，并满足正交关系

$$\int_{\mathbb{R}} P_{\vec{v}}(x) x^j \omega_i(x) dx = 0, \quad j=0,\cdots,v_i-1, \quad i=1,\cdots,p. \tag{2.3}$$

若假设 $P_{\vec{v}}(x)$ 为首一多项式作为归一化条件，则可由正交关系得到一个包含 $|\vec{v}|$ 个方程的线性方程组。假设 $P_{\vec{v}}(x) = x^{|\vec{v}|} + \eta_{|\vec{v}|,|\vec{v}|-1} x^{|\vec{v}|-1} + \cdots + \eta_{|\vec{v}|,0}$，我们有

$$\begin{pmatrix} m_0^{(1)} & \cdots & m_{|\vec{v}|-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{v_1-1}^{(1)} & \cdots & m_{|\vec{v}|+v_1-2}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ m_0^{(p)} & \cdots & m_{|\vec{v}|-1}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{v_p-1}^{(p)} & \cdots & m_{|\vec{v}|+v_p-2}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{|\vec{v}|,0} \\ \vdots \\ \eta_{|\vec{v}|,v_1-1} \\ \vdots \\ \eta_{|\vec{v}|,|\vec{v}|-v_p+1} \\ \vdots \\ \eta_{|\vec{v}|,|\vec{v}|-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_{|\vec{v}|}^{(1)} \\ \vdots \\ m_{|\vec{v}|+v_1-1}^{(1)} \\ \vdots \\ m_{|\vec{v}|}^{(p)} \\ \vdots \\ m_{|\vec{v}|+v_p-1}^{(p)} \end{pmatrix}, \quad m_j^{(i)} = \int_{\mathbb{R}} x^j \omega_i(x) dx. \tag{2.4}$$

与 I 型情形类似，我们称 $\vec{v}$ 是 II 型多重正交多项式的正规指标，如果该线性方程组有唯一解。注意到式（2.4）中的系数矩阵是式（2.2）中 I 型情形对应系数矩阵的转置，因此我们知道，一个多重指标是 II 型的正规指标，当且仅当它是 I 型的正规指标。

此外，若 $u=(u_1,\cdots,u_{p_1})$ 和 $v=(v_1,\cdots,v_{p_2})$ 是两个多重指标，且 $\vec{\omega}=(\omega_1,\cdots,\omega_{p_1})$ 是一组权函数，定义 I 型函数

$$Q_{\vec{u}}(x)=\sum_{i=1}^{p_1}A_{\vec{u},i}(x)\omega_i(x),$$

和 II 型多重正交多项式 $P_{\vec{v}}(x)$ 关于权函数 $\vec{\omega}$。于是存在双正交性 [34,定理 23.1。6]

$$\int_{\mathbb{R}}P_{\vec{v}}(x)Q_{\vec{u}}(x)dx=\begin{cases}0 & \text{if } \vec{u}\leq\vec{v},\\ 0 & \text{if } |\vec{v}|\leq|\vec{u}|-2,\\ 1 & \text{if } |\vec{v}|=|\vec{u}|-1.\end{cases}\tag{2.5}$$

除了 I 型和 II 型多重正交多项式之外，在研究非相交布朗运动时还提出了一类混合型多重正交多项式 [21]。考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的非相交布朗运动，其中 u_α 条路径从 $a_\alpha\in\mathbb{R}(\alpha=1,\cdots,p_1)$ 出发，并且 v_β 条路径终止于点 $b_\beta\in\mathbb{R}(\beta=1,\cdots,p_2)$。由于路径之间不会发生碰撞，我们要求

$$\sum_{\alpha=1}^{p_1}u_\alpha=\sum_{\beta=1}^{p_2}v_\beta.\tag{2.6}$$

这个方程在混合型多重正交多项式的定义中起着重要作用，稍后将对此进行解释。近年来，混合型多重正交多项式在可积系统和随机游走中的应用已被提出 [6, 7, 17, 21]。混合型多重正交多项式的特殊之处在于，它们关于两组不同的权函数正交。假设 $\vec{u}=(u_1,\cdots,u_{p_1})$ 和 $\vec{v}=(v_1,\cdots,v_{p_2})$ 是两个多重指标，且 $\vec{\omega}_1=(\omega_{1,1},\cdots,\omega_{1,p_1})$ 和 $\vec{\omega}_2=(\omega_{2,1},\cdots,\omega_{2,p_2})$ 是两组权函数，那么可通过正交关系定义一族次数为 $A_i\leq u_i-1$ 的多项式 $A_1,\cdots,A_{p_1}$

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{i=1}^{p_1}A_i(x)\omega_{1,i}(x)\right)\omega_{2,j}(x)x^k dx=0,\quad k=0,\cdots,v_j-1,\quad j=1,\cdots,p_2.\tag{2.7}$$

多项式 A_1、$\cdots$、A_{p_1} 称为混合型多重正交多项式，因为函数

$$P_{\vec{u},\vec{v}}(x)=\sum_{i=1}^{p_1}A_i(x)\omega_{1,i}(x)$$

是第一组权函数的线性形式，与 I 型多重正交性中的情形相同（参见（2.1））， 并且相对于第二组权函数具有与 II 型多重正交性相同类型的正交性（参见（2.3））。给定另一对指标 $\vec{u}'=(u'_1,\ldots,u'_{p_1})$ 和 $\vec{v}'=(v'_1,\ldots,v'_{p_2})$，也可以考虑一族多项式 $B_1,\ldots,B_{p_2}$，其次数为 $B_i\leq v'_i-1$，使得线性形式

$$Q_{\vec{u}',\vec{v}'}(x)=\sum_{i=1}^{p_2}B_i(x)\omega_{2,i}(x)$$

满足正交关系

$$\int_{\mathbb{R}}x^k\omega_{1,j}(x)Q_{\vec{u}',\vec{v}'}(x)dx=0,\quad k=0,\cdots,u'_j-1,\quad j=1,\cdots,p_1.\tag{2.8}$$

作为一个简单的观察，正交性（2.7）和（2.8）可以通过以下公式等价地建立

$$\int_{\mathbb{R}}P_{\vec{u},\vec{v}}(x)Q_{\vec{u}',\vec{v}'}(x)dx=0 \text{ for } \vec{u}\leq\vec{u}' \text{ or } \vec{v}\geq\vec{v}'.\tag{2.9}$$

偏序关系 $\vec{u} \le \vec{u}'$ 意味着，对于每个 $i \in [1, p_1]$，$u_i \le u_i'$。如果记矩为

$$m_j^{(l,k)} = \int_{\mathbb{R}} x^j \omega_{1,l}(x)\omega_{2,k}(x)dx$$

并假设 $A_i(x) = \xi_{i,u_i-1}x^{u_i-1} + \cdots + \xi_{i,0}$，则正交条件（2.7）得出以下线性方程组

$$\begin{pmatrix} m_0^{(1,1)} & \cdots & m_{u_1-1}^{(1,1)} & \cdots & m_0^{(p_1,1)} & \cdots & m_{u_{p_1}-1}^{(p_1,1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{v_1-1}^{(1,1)} & \cdots & m_{u_1+v_1-2}^{(1,1)} & \cdots & m_{v_1-1}^{(p_1,1)} & \cdots & m_{u_{p_1}+v_1-2}^{(p_1,1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_0^{(1,p_2)} & \cdots & m_{u_1-1}^{(1,p_2)} & \cdots & m_0^{(p_1,p_2)} & \cdots & m_{u_{p_1}-1}^{(p_1,p_2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{v_{p_2}-1}^{(1,p_2)} & \cdots & m_{u_1+v_{p_2}-2}^{(1,p_2)} & \cdots & m_{v_{p_2}-1}^{(p_1,p_2)} & \cdots & m_{u_{p_1}+v_{p_2}-2}^{(p_1,p_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1,0} \\ \vdots \\ \xi_{1,u_1-1} \\ \vdots \\ \xi_{p_1,0} \\ \vdots \\ \xi_{p_1,u_{p_1}-1} \end{pmatrix} = 0$$

含有 $|\vec{v}|$ 个方程和 $|\vec{u}|$ 个未知数。因此，为确保线性方程组存在非零解，需要假设 $|\vec{u}| = |\vec{v}| + 1$（对于 $Q_{\vec{u}',\ \vec{v}'}$，我们要求 $|\vec{u}'| + 1 = |\vec{v}'|$）。直接利用克拉默法则求解线性方程，可见线性形式 $P_{\vec{u},\ \vec{v}}(x)$ 和 $Q_{\vec{u}',\ \vec{v}'}(x)$ 与行列式成正比

$$P_{\vec{u},\vec{v}}(x) = \sum_{i=1}^{p_1} A_i(x)\omega_{1,i}(x) \sim \det \begin{pmatrix} A_{u_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_1}^{(p_1,1)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{u_1,v_{p_2}}^{(1,p_2)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_{p_2}}^{(p_1,p_2)} \\ \psi_1(x) & \cdots & \psi_{p_1}(x) \end{pmatrix},$$

$$Q_{\vec{u}',\vec{v}'}(x) = \sum_{i=1}^{p_1} B_i(x)\omega_{2,i}(x) \sim \det \begin{pmatrix} A_{u_1',v_1'}^{(1,1)} & \cdots & A_{u_{p_1}',v_1'}^{(p_1,1)} & \varphi_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{u_1',v_{p_2}'}^{(1,p_2)} & \cdots & A_{u_{p_1}',v_{p_2}'}^{(p_1,p_2)} & \varphi_{p_2}(x) \end{pmatrix},$$

其中

$$\psi_i(x) = \omega_{1,i}(x)(1, x, \cdots, x^{u_i-1}), \quad \varphi_i(x) = \omega_{2,i}(x)(1, x, \cdots, x^{v_i'-1})', \quad A_{u_i,v_j}^{(a,b)} = \left(m_{l+k}^{(a,b)}\right)_{\substack{k=0,\cdots,v_j-1 \\ l=0,\cdots,u_i-1}}.$$

该公式表明，可以将块矩矩阵视为非阿贝尔矩矩阵。因此，I 型多重正交多项式、II 型多重正交多项式和混合型多重正交多项式，都是 [8, 39]中所讨论的特殊非阿贝尔正交多项式。此外，如果多项式 $\{A_j\}_{j=1}^{p_1}$ 和 $\{B_j\}_{j=1}^{p_2}$ 在乘法常数意义下唯一，那么我们称 $(\vec{u}, \vec{v})$ 是权函数集 $\vec{\omega}_1$ 和$\vec{\omega}_2$的一个正规指标对。因此，总可以选择适当的归一化，从而唯一确定关于正规指标对的混合型多重正交多项式。与公式（2.6）一致，我们要求 $|\vec{v}| = |\vec{u}|$，并且 $P_{\vec{u}+\vec{e}_a,\ \vec{v}}(x)$ 和 $Q_{\vec{u},\ \vec{v}+\vec{e}_b}(x)$ 是满足正交归一条件的所需公式

$$\int_{\mathbb{R}} P_{\vec{u}+\vec{e}_a,\vec{v}}(x)Q_{\vec{u},\vec{v}+\vec{e}_b}(x)dx = 1.$$

在上述公式中，

$$\vec{e}_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \quad \text{where 1 is in the } k\text{th position}$$

是单位向量，且 $1 \le a \le p_1$ 和 $1 \le b \le p_2$ 是固定整数。

如果我们进一步假设 $P_{\vec{u}+\vec{e}_a,\ \vec{v}}(x)$ 和 $Q_{\vec{u},\ \vec{v}+\vec{e}_b}$ 在项$x^{u_a}\omega_{1,\ a}(x)$ 和 $x^{v_b}\omega_{2,\ b}(x)$的系数相同，那么通过求解线性方程组，我们得到

$$P_{\vec{u},\vec{v}}(x)=\frac{(-1)^{\sum_{i=b+1}^{p_2}v_i}}{c_{\vec{u},\vec{v}}^{(a,b)}}\det\begin{pmatrix} A_{u_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{u_a+1,v_1}^{(a,1)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_1}^{(p_1,1)}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ A_{u_1,v_{p_2}}^{(1,p_2)} & \cdots & A_{u_a+1,v_{p_2}}^{(a,p_2)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_{p_2}}^{(p_1,p_2)}\\ \psi_1(x) & \cdots & \tilde{\psi}_a(x) & \cdots & \psi_{p_1}(x)\end{pmatrix},$$

$$Q_{\vec{u},\vec{v}+\vec{e}_b}(y)=\frac{(-1)^{\sum_{j=a+1}^{p_1}u_j}}{c_{\vec{u},\vec{v}}^{(a,b)}}\det\begin{pmatrix} A_{u_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_1}^{(p_1,1)} & \varphi_1(x)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ A_{u_1,v_b+1}^{(1,b)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_b+1}^{(p_1,b)} & \tilde{\varphi}_b(x)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ A_{u_1,v_{p_2}}^{(1,p_2)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_{p_2}}^{(p_1,p_2)} & \varphi_{p_2}(x)\end{pmatrix},$$

其中，$A_{u_i}^{(a,b)},\ v_j$ 已在前文定义，

$$\psi_i(x)=\omega_{1,i}(x)(1,x,\cdots,x^{u_i-1}),\ (i\neq a)\qquad \tilde{\psi}_a(x)=\omega_{1,a}(x)(1,x,\cdots,x^{u_a}),$$
$$\varphi_j(x)=\omega_{2,j}(x)(1,x,\cdots,x^{v_j-1})',\ (j\neq b)\qquad \tilde{\varphi}_b(x)=\omega_{2,i}(x)(1,x,\cdots,x^{v_b})',$$

and

$$c_{\vec{u},\vec{v}}^{(a,b)}=\left(\det\begin{bmatrix} A_{u_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_1}^{(p_1,1)}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{u_1,v_{p_2}}^{(1,p_2)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_{p_2}}^{(p_1,p_2)}\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} A_{u_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{u_a+1,v_1}^{(a,1)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_1}^{(p_1,1)}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ A_{u_1,v_b+1}^{(1,b)} & \cdots & A_{u_a+1,v_b+1}^{(a,b)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_b+1}^{(p_1,b)}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ A_{u_1,v_{p_2}}^{(1,p_2)} & \cdots & A_{u_a+1,v_{p_2}}^{(a,p_2)} & \cdots & A_{u_{p_1},v_{p_2}}^{(p_1,p_2)}\end{bmatrix}\right)^{1/2}.$$

2.2. **多重正交多项式的双正交推广**。本节致力于研究具有内积（1.6）的多重正交多项式的双正交推广。考虑两对不同的多重指标 $\vec{u}=(u_1,\cdots,u_{p_1})$、$\vec{v}=(v_1,\cdots,v_{p_2})$ 和 $\vec{u}'=(u_1',\cdots,u_{p_1}')$、$\vec{v}'=(v_1',\cdots,v_{p_2}')$，以及权函数 $\vec{\omega}_1=(\omega_{1,\ 1},\cdots,\omega_{1,\ p_1})$ 和 $\vec{\omega}_2=(\omega_{2,\ 1},\cdots,\omega_{2,\ p_2})$，它们分别支撑在围道 γ_1 和 γ_2 上。于是可以引入一个耦合函数

$$\mathbb{S}(x,y):\gamma_1\times\gamma_2\to\mathbb{R}$$

使得对于 $1\leq a\leq p_1$ 和 $1\leq b\leq p_2$，双矩

$$m_{k,l}^{(a,b)}=\int_{\gamma_1\times\gamma_2}x^k y^l\mathbb{S}(x,y)\omega_{1,a}(x)\omega_{2,b}(y)dxdy$$

存在且有限。因此，我们可以定义多项式 $\{A_i\}_{i=1}^{p_1}$ 及其对应项$\{B_j\}_{j=1}^{p_2}$，使它们满足正交关系

$$\int_{\gamma_1\times\gamma_2}\left(\sum_{i=1}^{p_1}A_i(x)\omega_{1,i}(x)\right)\mathbb{S}(x,y)y^k\omega_{2,j}(y)dxdy=0,\quad k=0,\cdots,v_j-1,\quad j=1,\cdots,p_2,$$
$$\int_{\gamma_1\times\gamma_2}x^k\omega_{1,j}(x)\mathbb{S}(x,y)\left(\sum_{i=1}^{p_2}B_i(y)\omega_{2,i}(y)\right)dxdy=0,\quad k=0,\cdots,u_j'-1,\quad j=1,\cdots,p_1.$$

为了唯一确定这些多重双正交多项式（MBOPs），我们沿用关于混合型多重正交多项式的讨论，下面给出其形式化定义。

定义 *2.1.* 设有两对多重指标 $\vec{u}=(u_1,\cdots,u_{p_1})$、$\vec{v}=(v_1,\cdots,v_{p_2})$ 和 $\vec{u}'=(u'_1,\cdots,u'_{p_1})$、$\vec{v}'=(v'_1,\cdots,v'_{p_2})$，其中 $|\vec{u}|=|\vec{v}|$ 和 $|\vec{u}'|=|\vec{v}'|$，以及两个权函数集 $\vec{\omega_1}$ 和 $\vec{\omega_2}$，它们分别支撑在围道 γ_1 和 γ_2 上。固定整数 $1\le a\le p_1$ 和 $1\le b\le p_2$。若 $\mathbb{S}(x,y)$ 是一个从 $\gamma_1\times\gamma_2$ 到 $\mathbb{R}$ 的足够良好的函数，使得所有矩都存在且有限，则存在唯一的多重双正交函数

$$P_{\vec{u}+\vec{e}_a,\vec{v}}(x)=\sum_{i=1}^{p_1}A_i(x)\omega_{1,i}(x),\ \ where\ deg\ A_i(x)\le u_i-1(i\ne a)\ and\ deg\ A_a(x)\le u_a,$$
$$Q_{\vec{u}',\vec{v}'+\vec{e}_b}(y)=\sum_{i=1}^{p_2}B_i(y)\omega_{2,i}(y),\ \ where\ deg\ B_i(y)\le v'_i-1(i\ne b)\ and\ deg\ B_b(y)\le v'_b$$

满足多重正交关系

$$\int_{\gamma_1\times\gamma_2}P_{\vec{u}+\vec{e}_a,\vec{v}}(x)\mathbb{S}(x,y)Q_{\vec{u}',\vec{v}'+\vec{e}_b}(y)dxdy=\begin{cases}0 & if\ \vec{u}+\vec{e}_a\le\vec{u}',\\ 0 & if\ \vec{v}\ge\vec{v}'+\vec{e}_b,\\ 1 & if\ \vec{u}=\vec{u}'\ and\ \vec{v}=\vec{v}'.\end{cases}\tag{2.10}$$

要求 $P_{\vec{u}+\vec{e}_a,\ \vec{v}}(x)$ 和 $Q_{\vec{u},\ \vec{v}+\vec{e}_b}(y)$ 具有相同的归一化因子。

通过引入

$$\psi_i(x)=\omega_{1,i}(x)(1,x,\cdots,x^{u_i-1}),\qquad\tilde{\psi}_i(x)=\omega_{1,i}(x)(1,x,\cdots,x^{u_i}),\qquad i=1,\cdots,p_1,$$
$$\varphi_i(x)=\omega_{2,i}(x)(1,x,\cdots,x^{v_i-1})',\qquad\tilde{\varphi}_i(x)=\omega_{2,i}(x)(1,x,\cdots,x^{v_i})',\qquad i=1,\cdots,p_2,$$

并求解正交关系（2.10），我们知道

$$P_{\vec{u}+\vec{e}_a,\vec{v}}(x)=\frac{(-1)^{\sum_{i=b+1}^{p_2}v_i}}{c^{(a,b)}_{\vec{u},\vec{v}}}\det\begin{pmatrix}A^{(1,1)}_{u_1,v_1}&\cdots&A^{(a,1)}_{u_a+1,v_1}&\cdots&A^{(p_1,1)}_{u_{p_1},v_1}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ A^{(1,p_2)}_{u_1,v_{p_2}}&\cdots&A^{(a,p_2)}_{u_a+1,v_{p_2}}&\cdots&A^{(p_1,p_2)}_{u_{p_1},v_{p_2}}\\ \psi_1(x)&\cdots&\tilde{\psi}_a(x)&\cdots&\psi_{p_1}(x)\end{pmatrix},$$
$$Q_{\vec{u},\vec{v}+\vec{e}_b}(y)=\frac{(-1)^{\sum_{j=a+1}^{p_1}u_j}}{c^{(a,b)}_{\vec{u},\vec{v}}}\det\begin{pmatrix}A^{(1,1)}_{u_1,v_1}&\cdots&A^{(p_1,1)}_{u_{p_1},v_1}&\varphi_1(y)\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ A^{(1,b)}_{u_1,v_b+1}&\cdots&A^{(p_1,b)}_{u_{p_1},v_b+1}&\tilde{\varphi}_b(y)\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ A^{(1,p_2)}_{u_1,v_{p_2}}&\cdots&A^{(p_1,p_2)}_{u_{p_1},v_{p_2}}&\varphi_{p_2}(y)\end{pmatrix},$$

其中 $A^{(i,j)}_{u_i,\ v_j}=(m^{(i,j)}_{l\ k}$，$)$

$k=0\quad v_j-1$，……、、以及

$l=0\ \ldots\ u_i-1$

$$c^{(a,b)}_{\vec{u},\vec{v}}=\left(\det\begin{bmatrix}A^{(1,1)}_{u_1,v_1}&\cdots&A^{(p_1,1)}_{u_{p_1},v_1}\\ \vdots&&\vdots\\ A^{(1,p_2)}_{u_1,v_{p_2}}&\cdots&A^{(p_1,p_2)}_{u_{p_1},v_{p_2}}\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}A^{(1,1)}_{u_1,v_1}&\cdots&A^{(a,1)}_{u_a+1,v_1}&\cdots&A^{(p_1,1)}_{u_{p_1},v_1}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ A^{(1,b)}_{u_1,v_b+1}&\cdots&A^{(a,b)}_{u_a+1,v_b+1}&\cdots&A^{(p_1,b)}_{u_{p_1},v_b+1}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ A^{(1,p_2)}_{u_1,v_{p_2}}&\cdots&A^{(a,p_2)}_{u_a+1,v_{p_2}}&\cdots&A^{(p_1,p_2)}_{u_{p_1},v_{p_2}}\end{bmatrix}\right)^{1/2}.$$

注 2.2。当 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 只有一个指标时，多重双正交多项式退化为通常的双正交多项式，这类多项式已得到充分研究。例如，情形$\mathbb{S}(x,\ y)\ = e^{-cxy}$（其中 c 是耦合常数）与一个二元厄米矩阵模型有关，并已在 *[4, 44]*中进行了研究。此外，情形 $\mathbb{S}(x,\ y)\ =\ (x+y)^{-1}$ 产生了所谓的柯西双正交多项式，这类多项式在随机矩阵、可积系统和逼近论等不同领域引起了广泛关注 *[13, 14, 40, 42]*。

2.3. **多重对称双正交多项式与多重斜正交多项式**。本节将给出多重斜正交多项式的定义。鉴于反对称正交性所带来的困难，我们首先考察多重对称双正交多项式，然后再转向斜对称情形。

2.3.1. 多重对称双正交多项式。在对称情形下，我们需要假设多重指标 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 以及权函数 $\vec{\omega}_1$ 和 $\vec{\omega}_2$ 相同，即只有一个多重指标 $\vec{v}=(v_1、\cdots、v_p)$和一族支撑于 γ 上的权函数（$\omega_1、\cdots、\omega_p$）。此外，耦合函数 $\mathbb{S}(x、\ y)$：$\gamma\times\gamma\to\mathbb{R}$ 是一个对称函数，即 $\mathbb{S}(x、\ y)\ =\mathbb{S}(y、\ x)$。因此，在此设定下，矩可以写成

$$m_{k,l}^{(i,j)}:=\int_{\gamma\times\gamma}x^k y^l\mathbb{S}(x,y)\omega_i(x)\omega_j(y)dxdy,$$

并且显然 $m_{k\ ,\ l}^{(i,j)}\ =m_{l\ k}^{(j,i)}$。令 $b\in\mathbb{Z}$ 和 $1\le b\le p$，可得一列对称多重双正交多项式$\{A_i(x)\}_{i=1}^{p}$，其中 $\deg\ A_i\le v_i-1\,(i=1,\cdots,p,i\ne b)$ 且 $\deg\ A_b\le v_b$，使得相应的线性形式 $P_{\vec{v}}(x)=\sum_{i=1}^{p}A_i(x)\omega_i(x)$ 满足正交关系

$$\int_{\gamma\times\gamma}P_{\vec{v}}(x)\mathbb{S}(x,y)P_{\vec{v}'}(y)dxdy=\begin{cases}0 & \text{if } \vec{v}+\vec{e}_b\le\vec{v}' \text{ or } \vec{v}\ge\vec{v}'+\vec{e}_b,\\ 1 & \text{if } \vec{v}=\vec{v}'.\end{cases}\tag{2.11}$$

为了求解这些关系，写成如下等价形式会很有用

$$\int_{\gamma\times\gamma}\left(\sum_{i=1}^{p}A_i(x)\omega_i(x)\right)\mathbb{S}(x,y)y^k\omega_j(y)dxdy=0,\quad k=0,\cdots,v_j-1,\quad j=1,\cdots,p\tag{2.12a}$$

$$\int_{\gamma\times\gamma}\left(\sum_{i=1}^{p}A_i(x)\omega_i(x)\right)\mathbb{S}(x,y)y^{v_b}\omega_b(y)dxdy=h_{\vec{v}}^{(b)}\ne0.\tag{2.12b}$$

若假设 $A_i(x)=a_{i,\ v_i-1}x^{v_i-1}+\cdots+a_{i,\ 0}\,(i\ne b,1\le i\le p)$ 且 $A_b(x)=a_{b,\ v_b}x^{v_b}+\cdots+a_{b,\ 0}$，则上述线性方程组等价于

$$\begin{pmatrix}A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{v_b+1,v_1}^{(b,1)} & \cdots & A_{v_p,v_1}^{(p,1)}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ A_{v_1,v_b+1}^{(1,b)} & \cdots & A_{v_b+1,v_b+1}^{(b,b)} & \cdots & A_{v_p,v_b+1}^{(p,b)}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ A_{v_1,v_p}^{(1,p)} & \cdots & A_{v_b+1,v_p}^{(b,p)} & \cdots & A_{v_p,v_p}^{(p,p)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \vdots\\ \alpha^{(b)}\\ \vdots\\ \alpha^{(p)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \vec{e}_b^{\top}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\tag{2.13}$$

其中

$$\alpha^{(i)}=(a_{i,0},\cdots,a_{i,v_i-1})',\ (i\ne b,1\le i\le p)\quad \alpha^{(b)}=(a_{b,0},\cdots,a_{b,v_b})'$$

且 $\vec{e}_b^{\top}$ 是 $\vec{e}_b$ 的转置。因此，我们可以得到以下行列式形式

$$P_{\vec{v}}(x)=\sum_{i=1}^{p}A_i(x)\omega_i(x)=\frac{(-1)^{\sum_{i=b+1}^{p}v_i}}{c_{\vec{v}}^{(b)}}\det\begin{pmatrix}A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{v_b+1,v_1}^{(b,1)} & \cdots & A_{v_p,v_1}^{(p,1)}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ A_{v_1,v_p}^{(1,p)} & \cdots & A_{v_b+1,v_p}^{(b,p)} & \cdots & A_{v_p,v_p}^{(p,p)}\\ \psi_1(x) & \cdots & \psi_b(x) & \cdots & \psi_p(x)\end{pmatrix},$$

其中 $\psi_i(x)=\omega_i(x)(1,\cdots,x^{v_i-1})$ $(i\neq b,1\le i\le p)$ 且 $\psi_b(x)=\omega_b(x)(1,\cdots,x^{v_b})$。若记

$$\tau_{(v_1,\cdots,v_p)}=\det\begin{pmatrix}A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{v_p,v_1}^{(p,1)}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{v_1,v_p}^{(1,p)} & \cdots & A_{v_p,v_p}^{(p,p)}\end{pmatrix},\quad A_{\alpha,\beta}^{(i,j)}=A_{\beta,\alpha}^{(j,i)}.$$

则有 $c_{\vec{v}}^{(b)}=(\tau_{(v_1,\cdots,v_p)}\tau_{(v_1,\cdots,v_b+1,\cdots,v_p)})^{1/2}$ 且 $h_{\vec{v}}^{(b)}$ 在 (2.12b) 中可表示为 $(\tau_{(v_1,\cdots,v_b+1,\cdots,v_p)}/\tau_{(v_1,\cdots,v_p)})^{1/2}$。

2.3.2. 多重斜交正交多项式。考虑斜对称核 $\mathbb{S}(x,y)=-\mathbb{S}(y,x)$，使得

$$m_{k,l}^{(a,b)}:=\int_{\gamma\times\gamma}x^k y^l\mathbb{S}(x,y)\omega_a(x)\omega_b(y)dxdy=-\int_{\gamma\times\gamma}x^l y^k\mathbb{S}(x,y)\omega_b(x)\omega_a(y)dxdy=-m_{l,k}^{(b,a)}.$$

那么，对于多重指标 $\vec{v}=(v_1,\cdots,v_p)$ 和权重序列 $(\omega_1,\cdots,\omega_p)$，我们可以定义相应的多项式 $(R_1(x)\cdots,R_p(x))$，其中 $\deg R_i\le v_i-1$ $(i=1,\cdots,p)$。由于我们的首要考虑是寻找线性形式 $\sum_{i=1}^{p}R_i(x)\omega_i(x)$，使其相对于多个权函数同时满足斜正交关系，因此我们首先考虑多重斜正交关系

$$\int_{\gamma\times\gamma}\left(\sum_{i=1}^{p}R_i(x)\omega_i(x)\right)\mathbb{S}(x,y)y^k\omega_j(y)dxdy=0,\quad k=0,\cdots,v_j-1,\quad j=1,\cdots,p.\tag{2.14}$$

如果记 $R_i(x)=a_{i,\,v_i-1}x^{v_i-1}+\cdots+a_{i,\,0}$，则方程（2.14）意味着

$$\begin{pmatrix}A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{v_p,v_1}^{(p,1)}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{v_1,v_p}^{(1,p)} & \cdots & A_{v_p,v_p}^{(p,p)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{(1)}\\ \vdots\\ \alpha^{(p)}\end{pmatrix}=0,$$

其中 $A_{u_i^{(i,j)},\,v_j}=(m_{l\,k}^{(i,j)},)_{\substack{k=0,\cdots,v_j-1\\ l=0,\cdots,u_i-1}}$ 以及 $\alpha^{(i)}=(a_{i,\,0},\cdots,a_{i,\,v_i-1})'$。由于矩阵是反对称的，因此当 $v_1+\cdots+v_p$ 为奇数时（即 $|\vec{v}|$ 为奇数时），$\alpha^{(i)}$ 总存在非平凡解。因此，一个关键观察是，只有当 $|\vec{v}|$ 为奇数时，多重斜正交多项式才成立。归一化条件为

$$\int_{\gamma\times\gamma}\left(\sum_{i=1}^{p}R_i(x)\omega_i(x)\right)\mathbb{S}(x,y)y^{v_b}\omega_b(y)dxdy=h_{\vec{v}}^{(b)}\neq 0,$$

其中，b 是介于 1 和 p 之间的固定整数。总之，我们给出多个斜正交多项式的如下定义。

定义 2.3。给定一个多重指标 $\vec{v}=(v_1,\cdots,v_p)$，使得 $|\vec{v}|=v_1+\cdots+v_p$ 为奇数。若存在 p 个不同的权函数 $(\omega_1,\cdots,\omega_p)$ 支撑在 γ 上，且 $\mathbb{S}(x,y)$ 是一个从

$\gamma\times\gamma$ 到 $\mathbb{R}$ 的斜对称函数，使得所有矩均有限，则对于固定整数 $b\in[1,p]$，存在多个~斜正交多项式 $R_1(x)\cdots$， $R_p(x)$ 和 $R_b(x)$，使得

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma\times\gamma}\left(\sum_{i=1}^{p}R_i(x)\omega_i(x)\right)\mathbb{S}(x,y)y^j\omega_k(y)dxdy=0,\quad j=0,\cdots,v_k-1,\quad k=1,\cdots,p,\\&\int_{\gamma\times\gamma}\left(\sum_{i=1}^{p}R_i(x)\omega_i(x)\right)\mathbb{S}(x,y)\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq b}}^{p}R_i(y)\omega_i(y)+\tilde{R}_b(y)\omega_b(y)\right)dxdy=1,\end{aligned}\tag{2.15}$$

~其中 $deg\ R_i(x)\le v_i-1\,(i=1,\cdots,p)$，且 $deg\ R_b(x)\le v_b$。这里假设~ R_b 和 R_b 的最高次项系数相同。

注 2.4。与对称多重双正交多项式的正交关系 (2.11)不同，多重斜正交多项式与自身的斜内积等于零，即

$$\int_{\gamma\times\gamma}\left(\sum_{i=1}^{p}R_i(x)\omega_i(x)\right)\mathbb{S}(x,y)\left(\sum_{i=1}^{p}R_i(y)\omega_i(y)\right)dxdy=0.$$

~~因此，对所有 $\alpha\in\mathbb{R}$，斜正交性不受缩放 $R_b(y)\to R_b(y)+\alpha R_b(y)$ 的影响。因此，为方便后续讨论，我们将 $(R_1(x)\cdots,\ R_p(x)\ R_b(x))$ 记作一族多重斜交正交多项式，并将 $\sum_{i=1}^{p}R_i(x)\omega_i(x)+\tilde{R}_b(x)\omega_b(x)$ 中 $x^{v_b-1}\omega_b(x)$ 的系数设为 0。

~假设 $R_b(x)$ 和 $R_b(x)$ 中最高阶项的系数相同，则方程（2.15）有唯一解，并且我们有

$$R_{\vec{v}}^{(b)}(x):=\sum_{i=1}^{p}R_i(x)\omega_i(x)=\frac{(-1)^{\sum_{i=b+1}^{p}v_i}}{c_{\vec{v}}^{(b)}}\det\begin{pmatrix}A_{v_1,v_1}^{(1,1)}&\cdots&A_{v_p,v_1}^{(p,1)}\\\vdots&&\vdots\\A_{v_1,v_b-1}^{(1,b)}&\cdots&A_{v_p,v_b-1}^{(p,b)}\\\vdots&&\vdots\\A_{v_1,v_p}^{(1,p)}&\cdots&A_{v_p,v_p}^{(p,p)}\\\psi_1(x)&\cdots&\psi_p(x)\end{pmatrix},\tag{2.16a}$$

$$\tilde{R}_{\vec{v}}^{(b)}(x):=\sum_{i=1}^{p}R_i(y)\omega_i(y)+\tilde{R}_b(y)\omega_b(y)\tag{2.16b}$$

$$=\frac{1}{c_{\vec{v}}^{(b)}}\det\begin{pmatrix}A_{v_1,v_1}^{(1,1)}&\cdots&A_{v_b-1,v_1}^{(b,1)}&\cdots&A_{v_p,v_1}^{(p,1)}&\psi_1(y)'\\\vdots&&\vdots&&\vdots&\vdots\\A_{v_1,v_b-1}^{(1,b)}&\cdots&A_{v_b-1,v_b-1}^{(b,b)}&\cdots&A_{v_p,v_b-1}^{(p,b)}&\tilde{\psi}_b(y)'\\\vdots&&\vdots&&\vdots&\vdots\\A_{v_1,v_p}^{(1,p)}&\cdots&A_{v_b-1,v_p}^{(b,p)}&\cdots&A_{v_p,v_p}^{(p,p)}&\psi_p(y)'\\M_{v_1,v_b}^{(1,b)}&\cdots&M_{v_b-1,v_b}^{(b,b)}&\cdots&M_{v_p,v_b}^{(p,b)}&y^{v_b}\omega_b(y)\end{pmatrix},\tag{2.16c}$$

其中

$$\psi_i(x)=\omega_i(x)(1,\cdots,x^{v_i-1}),\,(i=1,\cdots,p),\quad\tilde{\psi}_b(x)=\omega_b(x)(1,\cdots,x^{v_b-2}),\quad M_{v_i,v_j}^{(k,l)}=(m_{i,v_j}^{(k,l)})_{i=0}^{v_i-1}$$

归一化因子 $c_{\vec{v}}^{(b)}$ 由下式给出

$$(c_{\vec{v}}^{(b)})^2=\det\begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{v_p,v_1}^{(p,1)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{v_1,v_b-1}^{(1,b)} & \cdots & A_{v_p,v_b-1}^{(p,b)} \\ M_{v_1,v_b}^{(1,b)} & \cdots & M_{v_p,v_b}^{(p,b)} \\ A_{v_1,v_{b+1}}^{(1,b+1)} & \cdots & A_{v_p,v_{b+1}}^{(p,b+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{v_1,v_p}^{(1,p)} & \cdots & A_{v_p,v_p}^{(p,p)} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & \cdots & A_{v_b-1,v_1}^{(b,1)} & \cdots & A_{v_p,v_1}^{(p,1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{v_1,v_b-1}^{(1,b)} & \cdots & A_{v_b-1,v_b-1}^{(b,b)} & \cdots & A_{v_p,v_b-1}^{(p,b)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{v_1,v_p}^{(1,p)} & \cdots & A_{v_b-1,v_p}^{(b,p)} & \cdots & A_{v_p,v_p}^{(p,p)} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

3. 多重斜交正交多项式的 Pfaff 行列式形式

众所周知，斜正交多项式具有 Pfaffian 表达式，这类表达式以 Pfaff tau 函数的形式广泛应用于可积系统中[1, 2, 38]。本节旨在用 Pfaffian 表示多重斜正交多项式，并研究引入时间参数后的演化。由于多分量情形可由二分量情形轻易推广，因此应首先考虑二分量情形。故从现在起，我们假设指标集$v=(v_1,v_2)$ 且 v_1+v_2 为奇数。

3.1. **多重斜正交多项式的 Pfaff 表达式**。

首先，我们注意到（2.16a）、（2.16b）和（2.17）中的行列式表达式也可以改写为 Pfaffian，具体如下。

˜**命题 3.1**。对于多重斜正交多项式（R_1（x） R_2（x） R_2（x））， 我们有

$$R_{(v_1,v_2)}^{(2)}(x):=R_1(x)\omega_1(x)+R_2(x)\omega_2(x)=\frac{1}{d_{\vec{v}}^{(2)}}Pf\begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & A_{v_2,v_1}^{(2,1)} & -\psi_1(x) \\ A_{v_1,v_2}^{(1,2)} & A_{v_2,v_2}^{(2,2)} & -\psi_2(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{(v_1,v_2)}^{(2)}(x)&=R_1(x)\omega_1(x)+R_2(x)\omega_2(x)+\tilde{R}_2(x)\omega_2(x)\\&=\frac{1}{d_{\vec{v}}^{(2)}}Pf\begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & A_{v_2-1,v_1}^{(2,1)} & (M_{v_2,v_1}^{(2,1)})^\top & -\psi_1(x) \\ A_{v_1,v_2-1}^{(1,2)} & A_{v_2-1,v_2-1}^{(2,2)} & (M_{v_2,v_2-1}^{(2,2)})^\top & -\tilde{\psi}_2(x) \\ M_{v_1,v_2}^{(1,2)} & M_{v_2-1,v_2}^{(2,2)} & 0 & -x^{v_2}\omega_2(x) \\ \psi_1(x) & \tilde{\psi}_2(x) & x^{v_2}\omega_2(x) & 0 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.1b}$$

带有归一化因子

$$d_{\vec{v}}^{(2)}=\left(Pf\begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & A_{v_2-1,v_1}^{(2,1)} \\ A_{v_1,v_2-1}^{(1,2)} & A_{v_2-1,v_2-1}^{(2,2)} \end{pmatrix}Pf\begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & A_{v_2+1,v_1}^{(2,1)} \\ A_{v_1,v_2+1}^{(1,2)} & A_{v_2+1,v_2+1}^{(2,2)} \end{pmatrix}\right)^{1/2}.$$

证明。 这里我们对公式 (2.16a) 作出清晰的说明，而 (2.16b) 可用类似方法验证。应用雅可比行列式恒等式 [2] 于

$$\begin{pmatrix} m_{0,0}^{(1,1)} & \cdots & m_{v_1-1,0}^{(1,1)} & m_{0,0}^{(2,1)} & \cdots & m_{v_2-1,0}^{(2,1)} & -\omega_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{0,v_1-1}^{(1,1)} & \cdots & m_{v_1-1,v_1-1}^{(1,1)} & m_{0,v_2-1}^{(1,2)} & \cdots & m_{v_2-1,v_1-1}^{(2,1)} & -x^{v_1-1}\omega_1(x) \\ m_{0,0}^{(1,2)} & \cdots & m_{v_1-1,0}^{(1,2)} & m_{0,0}^{(2,2)} & \cdots & m_{v_2-1,0}^{(2,2)} & -\omega_2(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{0,v_2-1}^{(1,2)} & \cdots & m_{v_1-1,v_2-1}^{(1,2)} & m_{0,v_2-1}^{(2,2)} & \cdots & m_{v_2-1,v_2-1}^{(2,2)} & -x^{v_2-1}\omega_2(x) \\ \omega_1(x) & \cdots & x^{v_1-1}\omega_1(x) & \omega_2(x) & \cdots & x^{v_2-1}\omega_2(x) & 0 \end{pmatrix}$$

对于最后两行和两列，并注意到奇数阶反对称矩阵的行列式为零，我们得到

$$R_{(v_1,v_2)}^{(2)}(x) = \frac{1}{c_{(v_1,v_2)}^{(2)}} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & A_{v_2-1,v_1}^{(2,1)} \\ A_{v_1,v_2-1}^{(1,2)} & A_{v_2-1,v_2-1}^{(2,2)} \end{pmatrix} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & A_{v_2,v_1}^{(2,1)} & -\psi_1(x) \\ A_{v_1,v_2}^{(1,2)} & A_{v_2,v_2}^{(2,2)} & -\psi_2(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & 0 \end{pmatrix}$$

此外，b 将行列式恒等式应用于 $c^{(2)}{}_{(v_1,\ v_2)}$ 中的2.17，用于第一个行列式，可得

$$c_{(v_1,v_2)}^{(2)} = \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & A_{v_2-1,v_1}^{(2,1)} \\ A_{v_1,v_2-1}^{(1,2)} & A_{v_2-1,v_2-1}^{(2,2)} \end{pmatrix}^{3/2} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} A_{v_1,v_1}^{(1,1)} & A_{v_2+1,v_1}^{(2,1)} \\ A_{v_1,v_2+1}^{(1,2)} & A_{v_2+1,v_2+1}^{(2,2)} \end{pmatrix}^{1/2},$$

因此，证明完成。 □

因此，可以使用 Hirota 的 Pfaffian记号 [30] 使这些表达式更加简洁。记

$$\mathrm{pf}(i^{(k)}, j^{(l)}) = m_{i,j}^{(k,l)}, \quad \mathrm{pf}(i^{(k)}, x) = \omega_k(x) x^i, \quad (k,l = 1,2),$$

那么，方程（3.1a）和（3.1b）可等价地表示为

$$\begin{aligned} R_{(v_1,v_2)}^{(2)}(x) &= \frac{1}{d_{(v_1,v_2)}^{(2)}} \mathrm{Pf}(0^{(1)}, \cdots, v_1 - 1^{(1)}, 0^{(2)}, \cdots, v_2 - 1^{(2)}, x), \\ \tilde{R}_{(v_1,v_2)}^{(2)}(x) &= \frac{1}{d_{(v_1,v_2)}^{(2)}} \mathrm{Pf}(0^{(1)}, \cdots, v_1 - 1^{(1)}, 0^{(2)}, \cdots, v_2 - 2^{(2)}, v_2^{(2)}, x), \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $d^{(2)}{}_{(v_1,v_2)} = (\tau_{(v_1,v_2-1)}\tau_{(v_1,v_2+1)})^{1/2}$ 以及

$$\tau_{(v_1,v_2-1)} = \mathrm{Pf}(0^{(1)}, \cdots, v_1 - 1^{(1)}, 0^{(2)}, \cdots, v_2 - 2^{(2)}).$$

[2]雅可比恒等式，也称为德斯南诺-雅可比恒等式，适用于任意矩阵 $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^{N}$

$$|M| \times |M_{c,d}^{a,b}| = |M_c^a| \times |M_d^b| - |M_a^d| \times |M_c^b|,$$

其中，$|M^{j_1,\ \cdots,\ j_r}_{i_1\ \cdots\ i_r}|$ 表示由 M 删去第（i_1，$\cdots$，i_r）行和第（j_1，$\cdots$，j_r）列后得到的矩阵的行列式。

根据我们上一节的讨论，还应存在另一族多重斜正交多项式（$R^{(1)}{}_{(v_1,\,v_2)}(x)$ $\tilde{R}^{(1)}{}_{(v_1,\,v_2)}(x)$），使得

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x) &= \frac{1}{d^{(1)}_{(v_1,v_2)}}\mathrm{Pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)},x),\\ \tilde{R}^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x) &= \frac{1}{d^{(1)}_{(v_1,v_2)}}\mathrm{Pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-2^{(1)},v_1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)},x), \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $d^{(1)}{}_{(v_1,v_2)} = \left(\tau_{(v_1-1,v_2)}\tau_{(v_1+1,v_2)}\right)^{1/2}$。此外，由 (3.2) 和 (3.3) 可知，$R^{(1)}{}_{(v_1,v_2)}(x)$ 与 $R^{(2)}{}_{(v_1,v_2)}(x)$ 仅相差一个归一化因子。

利用 Pfaffian 记号，定义 2.3 给出的斜正交关系有以下等价描述。

命题 3.2。 $R^{(1)}{}_{(v_1,v_2)}(x)$ 与 $R^{(2)}{}_{(v_1,v_2)}(x)$ 同时与 $\tilde{R}^{(1)}{}_{(v_1,v_2)}(x)$及 $\tilde{R}^{(2)}{}_{(v_1,v_2)}(x)$斜正交，即：

$$\langle R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x), R^{(1)}_{(u_1,u_2)}(y)\rangle = 0, \tag{3.4a}$$

$$\langle R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x), \tilde{R}^{(1)}_{(u_1,u_2)}(y)\rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } u_1 < v_1 \text{ and } u_2 \le v_2,\\ 1, & \text{if } u_1 = v_1 \text{ and } u_2 = v_2, \end{cases} \tag{3.4b}$$

$$\langle R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x), \tilde{R}^{(2)}_{(u_1,u_2)}(y)\rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } u_1 \le v_1 \text{ and } u_2 < v_2,\\ d^{(2)}_{(v_1,v_2)}/d^{(1)}_{(v_1,v_2)}, & \text{if } u_1 = v_1 \text{ and } u_2 = v_2. \end{cases} \tag{3.4c}$$

证明。 由于方程（3.4a）和（3.4b）已在上一节证明，我们使用 Pfaffian记号来证明第三个方程（3.4c）。将 Pfaffian 表达式（3.2）和（3.3）代入斜内积，得到

$$\begin{aligned} &d^{(1)}_{(v_1,v_2)}d^{(2)}_{(u_1,u_2)}\langle R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x), \tilde{R}^{(2)}_{(u_1,u_2)}(y)\rangle\\ &\qquad = \sum_{i\in I_1}\sum_{j\in I_2}(-1)^{|i|+|j|}\mathrm{Pf}(I_1\backslash\{i\})\mathrm{Pf}(I_2\backslash\{j\})\langle \mathrm{pf}(i,x),\mathrm{pf}(j,y)\rangle, \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中，$I_1 = \{0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)}\}$、$I_2 = \{0^{(1)},\cdots,u_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,u_2-2^{(2)},u_2^{(2)}\}$ 和 $|i|$（$|j|$）表示 i（j）在集合 I_1（I_2）中的位置。注意到

$$\langle \mathrm{pf}(i^{(k)},x),\mathrm{pf}(j^{(l)},y)\rangle = \int_{\gamma\times\gamma} x^i\mathbb{S}(x,y)y^j\omega_k(x)\omega_l(y)dxdy = \mathrm{pf}(i^{(k)},j^{(l)}),$$

则（3.5）中的右端等于

$$\sum_{j\in I_2}(-1)^{|j|}\mathrm{Pf}(I_1,j)\mathrm{Pf}(I_2\backslash\{j\}). \tag{3.6}$$

已知，当 Pfaffian 中有两个指标相同时，Pfaffian 等于零。因此，如果$u_1 \le v_1$ 和 $u_2 < v_2$，我们知道 $j \in I_1$，上述公式恒等于零。如果 $u_1 = v_1$ 和$u_2 = v_2$，则仅当 $j = u_2^{(2)} = v_2^{(2)}$ 时，该项才非零。在这种情况下，方程（3.6）等于 $\tau_{(v_1,v_2+1)}\tau_{(v_1,v_2-1)}$. 因此，我们有

$$\langle R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x), \tilde{R}^{(2)}_{(v_1,v_2)}(y)\rangle = \frac{\tau_{(v_1,v_2+1)}\tau_{(v_1,v_2-1)}}{d^{(1)}_{(v_1,v_2)}d^{(2)}_{(v_1,v_2)}} = \frac{d^{(2)}_{(v_1,v_2)}}{d^{(1)}_{(v_1,v_2)}}.$$

□

3.2. 半经典权重与变形MSOP。 考虑半经典权函数。通过分别在权函数 ω_1 和 ω_2中引入参数 $\mathbf{t}:=(t_1,t_2,\cdots)$ 和 $\mathbf{s}:=(s_1,s_2,\cdots)$，使得

$$\omega_1(x;\mathbf{t})=\omega_1(x)\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_ix^i\right),\quad \omega_2(x;\mathbf{s})=\omega_2(x)\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}s_ix^i\right),$$

我们有

$$\partial_{t_i}\omega_1(x;\mathbf{t})=x^i\omega_1(x;\mathbf{t}),\quad \partial_{s_i}\omega_2(x;\mathbf{s})=x^i\omega_2(x;\mathbf{s}),\quad \partial_{t_i}\omega_2(x;\mathbf{s})=\partial_{s_i}\omega_1(x;\mathbf{t})=0.$$

此外，矩是随时间变化的，并满足以下变形关系。

命题3.3。 对于矩 $\{m_{a,b}^{(k,l)},\,k,l=1,2\}$，它们具有以下演化关系

$$\begin{aligned}
&\partial_{t_i}m_{a,b}^{(1,1)}=m_{a+i,b}^{(1,1)}+m_{a,b+i}^{(1,1)}, && \partial_{t_i}m_{a,b}^{(1,2)}=m_{a+i,b}^{(1,2)}, && \partial_{t_i}m_{a,b}^{(2,2)}=0,\\
&\partial_{s_i}m_{a,b}^{(2,2)}=m_{a+i,b}^{(2,2)}+m_{a,b+i}^{(2,2)}, && \partial_{s_i}m_{a,b}^{(1,2)}=m_{a,b+i}^{(1,2)}, && \partial_{s_i}m_{a,b}^{(1,1)}=0.
\end{aligned}$$

等价地，用 *Pfaffian*记号表示，我们有

$$\begin{aligned}
&\partial_{t_i}pf(a^{(1)},b^{(1)})=pf(a+i^{(1)},b^{(1)})+pf(a^{(1)},b+i^{(1)}), && \partial_{t_i}pf(a^{(1)},b^{(2)})=pf(a+i^{(1)},b^{(2)}),\\
&\partial_{s_i}pf(a^{(2)},b^{(2)})=pf(a+i^{(2)},b^{(2)})+pf(a^{(2)},b+i^{(2)}), && \partial_{s_i}pf(a^{(1)},b^{(2)})=pf(a^{(1)},b+i^{(2)}),\\
&\partial_{t_i}pf(a^{(2)},b^{(2)})=\partial_{s_i}pf(a^{(1)},b^{(1)})=0.
\end{aligned}$$

证明。 让我们证明 $\partial_{t_i}\mathrm{pf}(a^{(1)},b^{(1)})=\mathrm{pf}(a+i^{(1)},b^{(1)})+\mathrm{pf}(a^{(1)},b+i^{(1)})$，其他情形也可类似验证。首先有

$$\partial_{t_i}\mathrm{pf}(a^{(1)},b^{(1)})=\partial_{t_i}\int_{\gamma\times\gamma}x^a\mathbb{S}(x,y)y^b\omega_1(x;\mathbf{t})\omega_1(y;\mathbf{t})dxdy.$$

注意到矩有限，且权函数 $\omega_1(x;\mathbf{t})$ 关于 $\mathbf{t}$ 光滑，因此可知导数与积分的次序可以交换。于是，上述公式等于

$$\int_{\gamma\times\gamma}x^a\mathbb{S}(x,y)y^b(x^i+y^i)\omega_1(x;\mathbf{t})\omega_1(x;\mathbf{t})dxdy,$$

这恰好是 $\mathrm{pf}(a+i^{(1)},b^{(1)})+\mathrm{pf}(a^{(1)},b+i^{(1)})$。 □

引入这些时间参数后，我们可以利用 Wronskian 型 Pfaffian 的导数公式，推导多重斜正交多项式的线性形式的变形关系。

命题3.4. $R^{(i)}{}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})$ 以及 $\tilde{R}^{(i)}{}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})$ $(i=1,2)$ 满足以下导数关系

$$\begin{aligned}
\partial_{t_1}\left(d_{(v_1,v_2)}^{(1)}R_{(v_1,v_2)}^{(1)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})\right)&=d_{(v_1,v_2)}^{(1)}\tilde{R}_{(v_1,v_2)}^{(1)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s}),\\
\partial_{s_1}\left(d_{(v_1,v_2)}^{(2)}R_{(v_1,v_2)}^{(2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})\right)&=d_{(v_1,v_2)}^{(2)}\tilde{R}_{(v_1,v_2)}^{(2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s}).
\end{aligned}\tag{3.7}$$

证明。 由于 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{s}$ 互为对偶，我们只需证明 t_1-导数公式。利用 Pfaffian记号，这等价于证明

$$\begin{aligned}
&\partial_{t_1}\mathrm{pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)},x)\\
&\quad=\mathrm{pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-2^{(1)},v_1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)},x).
\end{aligned}\tag{3.8}$$

如果我们引入指标集

$$I_1 = \{0^{(1)}, \cdots, v_1 - 1^{(1)}\},\ \tilde{I}_1 = \{0^{(1)}, \cdots, v_1 - 2^{(1)}, v_1^{(1)}\},\ I_2 = \{0^{(2)}, \cdots, v_2 - 1^{(2)}\},$$

然后展开 Pfaffian，式（3.8）的左边等于

$$\partial_{t_1}\left(\sum_{i\in I_1}(-1)^{|i|}\mathrm{pf}(I_1\backslash\{i\}, I_2)\mathrm{pf}(i,x) + \sum_{j\in I_2}(-1)^{|j|}\mathrm{pf}(I_1, I_2\backslash\{j\})\mathrm{pf}(j,x)\right).$$

利用 Wronskian 型 Pfaffian 的导数公式（详见附录），我们知道第一项等于

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in I_1\backslash\{0^{(1)}\}}(-1)^{|i|}\mathrm{pf}(I_1\backslash\{i-1\}, I_2)\mathrm{pf}(i,x) + \sum_{i\in\tilde{I}_1\backslash\{v_1^{(1)}\}}(-1)^{|i|}\mathrm{pf}(\tilde{I}_1\backslash\{i\}, I_2)\mathrm{pf}(i,x)\\ &+\sum_{i\in I_1}(-1)^{|i|}\mathrm{pf}(I_1\backslash\{i\}, I_2)\mathrm{pf}(i+1,x),\end{aligned} \tag{3.9}$$

第二项等于

$$\sum_{j\in I_2}(-1)^{|j|}\mathrm{pf}(\tilde{I}_1, I_2\backslash\{j\})\mathrm{pf}(j,x).$$

式（3.9）的第一项和第三项可以相互抵消。因此，结合这些等式，我们得到

$$\sum_{i\in\tilde{I}_1}(-1)^{|i|}\mathrm{pf}(\tilde{I}_1\backslash\{i\}, I_2)\mathrm{pf}(i,x) + \sum_{j\in I_2}(-1)^{|j|}\mathrm{pf}(\tilde{I}_1, I_2\backslash\{j\})\mathrm{pf}(j,x),$$

这恰好是右端在（3.8）中的展开。 □

尽管多重斜正交多项式的线性形式会随时间演化，但 $R^{(i)}_{(v_1,\,v_2)}(x)$ 与 $\tilde{R}^{(i)}_{(v_1,\,v_2)}(x)$ ($i=1,2$) 之间应存在谱问题，这在可积层级的推导中至关重要。下面我们利用 Pfaffian恒等式来刻画谱问题。

命题 3.5。 $R^{(i)}_{(v_1,\,v_2)}(x;\,\mathbf{t},\,\mathbf{s})$ 和 $\tilde{R}^{(i)}_{(v_1,\,v_2)}(x;\,\mathbf{t},\,\mathbf{s})$ (, 2) 满足以下递推关系

$$\begin{aligned}
\tau_{(v_1,v_2-1)}d^{(2)}_{(v_1+1,v_2+1)}R^{(2)}_{(v_1+1,v_2+1)}(x) &= \tau_{(v_1+1,v_2)}d^{(2)}_{(v_1,v_2)}\tilde{R}^{(2)}_{(v_1,v_2)}(x) && \text{(3.10a)}\\
&\quad - \partial_{s_1}\tau_{(v_1+1,v_2)}d^{(2)}_{(v_1,v_2)}R^{(2)}_{(v_1,v_2)}(x) + \tau_{(v_1,v_2+1)}d^{(2)}_{(v_1+1,v_2-1)}R^{(2)}_{(v_1+1,v_2-1)}(x),\\
\tau_{(v_1-1,v_2)}d^{(1)}_{(v_1+1,v_2+1)}R^{(1)}_{(v_1+1,v_2+1)}(x) &= \tau_{(v_1+1,v_2)}d^{(1)}_{(v_1-1,v_2+1)}R^{(1)}_{(v_1-1,v_2+1)}(x) && \text{(3.10b)}\\
&\quad - \tau_{(v_1,v_2+1)}d^{(1)}_{(v_1,v_2)}\tilde{R}^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x) + \partial_{t_1}\tau_{(v_1,v_2+1)}d^{(1)}_{(v_1,v_2)}R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x),\\
\partial_{t_1}\tau_{(v_1,v_2-1)}d^{(1)}_{(v_1,v_2)}R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x) &= \tau_{(v_1,v_2-1)}d^{(1)}_{(v_1,v_2)}\tilde{R}^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x) && \text{(3.10c)}\\
&\quad + \tau_{(v_1-1,v_2)}d^{(1)}_{(v_1+1,v_2-1)}R^{(1)}_{(v_1+1,v_2-1)}(x) - \tau_{(v_1+1,v_2)}d^{(1)}_{(v_1-1,v_2-1)}R^{(1)}_{(v_1-1,v_2-1)}(x),\\
\partial_{s_1}\tau_{(v_1-1,v_2)}d^{(2)}_{(v_1,v_2)}R^{(2)}_{(v_1,v_2)}(x) &= -\tau_{(v_1,v_2-1)}d^{(2)}_{(v_1-1,v_2+1)}R^{(2)}_{(v_1-1,v_2+1)}(x) && \text{(3.10d)}\\
&\quad + \tau_{(v_1-1,v_2)}d^{(2)}_{(v_1,v_2)}\tilde{R}^{(2)}_{(v_1,v_2)}(x) + \tau_{(v_1,v_2+1)}d^{(2)}_{(v_1-1,v_2-1)}R^{(2)}_{(v_1-1,v_2-1)}(x).
\end{aligned}$$

证明。 利用 Pfaffian 恒等式（A.1b）验证第一个方程，其余方程也可用类似方法验证。令符号

$$a_1 = v_1^{(1)},\quad a_2 = v_2 - 1^{(2)},\quad a_3 = v_2^{(2)},\quad a_4 = x,\quad \star = \{0^{(1)}, \cdots, v_1 - 1^{(1)}, 0^{(2)}, \cdots, v_2 - 2^{(2)}\}$$

中（A.1b ），由 Pfaff 表达式（3.2）-（3.3）可得所需公式，并发现 tha t

$$\partial_{s_1}\tau_{(v_1+1,v_2)} = \mathrm{pf}(0^{(1)},\cdots,v_1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-2^{(2)},v_2^{(2)}).$$

□

利用这些关系，可以直接得到若干简单的可积格。展开线性形式（3.3），可得

$$\begin{aligned} d^{(1)}_{(v_1,v_2)}R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x) = (-1)^{v_1-1}\omega_1(x)\left(x^{v_1-1}\tau_{(v_1-1,v_2)} - x^{v_1-2}\partial_{t_1}\tau_{(v_1-1,v_2)} + \cdots\right) \\ + \omega_2(x)\left(x^{v_2-1}\tau_{(v_1,v_2-1)} - x^{v_2-2}\partial_{s_1}\tau_{(v_1,v_2-1)} + \cdots\right). \end{aligned}$$

此外，若考虑方程（3.7），则有以下方程

$$\begin{aligned} &D_{t_1}\tau_{(v_1,v_2-1)}\cdot\tau_{(v_1,v_2+1)} = D_{s_1}\tau_{(v_1+1,v_2)}\cdot\tau_{(v_1-1,v_2)}, \\ &D_{s_1}D_{t_1}\tau_{(v_1-1,v_2)}\cdot\tau_{(v_1-1,v_2)} = 2\left(\tau_{(v_1,v_2-1)}\tau_{(v_1-2,v_2+1)} - \tau_{(v_1,v_2+1)}\tau_{(v_1-2,v_2-1)}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

分别通过比较 $x^{v_1-2}\omega_1(x)$ 和 $x^{v_2-2}\omega_2(x)$ 的系数得到。这里， D_t 是由 [30] 定义的 Hirota 双线性算子

$$D_t^m D_x^n f(x,t)\cdot g(x,t) = \frac{\partial^m}{\partial s^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(t+s,x+y)g(t-s,x-y)\Big|_{s=0,y=0.} \tag{3.12}$$

方程（3.11）作为二维 Toda 格的一种推广已有相关研究，参见例如 [29, 31, 49,52, 54]。在进一步讨论递推关系之前，我们先说明如何将多重斜正交多项式约化为斜正交多项式（SOPs）。

3.3. **约化：从多重斜正交多项式到斜正交多项式**。 如 [52, 第 2 节4], 所示，方程组层级 (3.11) 从费米子表示的角度可以约化为 DKP 层级。本节通过对多重斜正交多项式进行约化，再次确认这一事实。

考虑一个指标集 $v = \{0,\cdots,2n\}$ 和一个权函数 $\omega(x)$，我们可以通过以下斜正交关系定义斜正交多项式 $\{p_{2n}(x)\ p_{2n+1}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\langle p_{2n}(x), p_{2m}(x)\rangle = \langle p_{2n+1}(x), p_{2m+1}(x)\rangle = 0, \quad \langle p_{2n}(x), p_{2m+1}(x)\rangle = \delta_{n,m},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[y]\to\mathbb{R}$ 上的斜对称双线性型，并且

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{\gamma\times\gamma} f(x)\mathbb{S}(x,y)g(y)\omega(x)\omega(y)dxdy, \quad \mathbb{S}(x,y) = -\mathbb{S}(y,x).$$

这是与命题 3.2 相比的一种约化形式。此外， $\{p_{2n}(x)\ p_{2n+1}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是具有 Pfaffian 表达式的多项式 [1, 定理 3。1]

$$p_{2n}(x) = d_n^{-1}\mathrm{pf}(0,\cdots,2n,x), \quad p_{2n+1}(x) = d_n^{-1}\mathrm{pf}(0,\cdots,2n-1,2n+1,x),$$

w此处， $d_n = (\tau_{2n}\tau_{2n+2})^{1/2}$、 $\tau_{2n} = \mathrm{pf}(0,\cdots,2n-1)$ 以及 Pfaff 元素定义如下

$$\mathrm{pf}(i,j) = \langle x^i, y^j\rangle, \quad \mathrm{pf}(i,x) = x^i.$$

通过引入时间流 $\mathbf{t} = (t_1,t_2,\cdots)$，使得 $\partial_{t_i}\omega(x;\mathbf{t}) = x^i\omega(x;\mathbf{t})$，发现斜正交多项式满足 [1, 定理 3.1]

$$(z+\partial_{t_1})(d_n p_{2n}(z)) = d_n p_{2n+1}(z).$$

这个方程与多分量情形中的方程（3.4）一致，并在可积系统理论中发挥谱问题的作用。

文献中，关于斜正交多项式与 Pfaff 格之间关系的首次研究见于 [1] ，其视角是李代数分裂。后来，这种对应关系从不同角度得到了重新表述，例如从二维 Toda 理论的约化出发 [2, 40], Toda 格与 Pfaff 格的对应关系[5], 辛矩阵 [38], 等。因此，自然会问，斜正交多项式是否存在可用于推导可积系统的局部递推关系。遗憾的是，我们未能找到多分量情形下命题3.5中 $p_{2n}(z)$ 与 $p_{2n+1}(z)$ 之间的紧凑关系。令 $\star=\{0,\cdots,2n-2\}$， $a_1=2n-1$， $a_2=2n$， $a_3=2n+1$ 以及 $a_4=x$，代入恒等式（A.1b），并利用方程

$$(\partial_{t_2}+\partial_{t_1}^2)\tau_{2n}=2\mathrm{pf}(0,1,\cdots,2n-2,2n+1),$$

可得

$$\begin{aligned}\tau_{2n+2}d_{2n-2}p_{2n-2}(x)=&\frac{1}{2}(\partial_{t_2}+\partial_{t_1}^2)\tau_{2n}d_{2n}p_{2n}(x)-\partial_{t_1}\tau_{2n}d_{2n}p_{2n+1}(z)\\&+\tau_{2n}\mathrm{pf}(0,\cdots,2n-2,2n,2n+1,z).\end{aligned}$$

该关系式不够紧凑，因为最后一项无法用斜正交多项式表示。然而，由于函数的独立性，也可以通过比较等式两边单项式的系数来得到可积格。比较 x^{2n-2} 的系数即可得到最简单的方程，从而有

$$(D_1^4-4D_1D_3+3D_2^2)\tau_{2n}\cdot\tau_{2n}=24\tau_{2n-2}\tau_{2n+2}.$$

这是 DKP 层级中的第一个方程。

4. 由多重斜正交多项式的恒等式导出的可积格层级

在本部分中，我们证明 MSOPs 可以表示为二分量 Pfaffian τ-函数 $\{\tau_{(i,j)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\}_{i,\ j\in\mathbb{N}}$ 其中 $i+j\in 2\mathbb{N}$。由于 MSOPs 是 SOPs 的多分量推广，本文将相应的可积层级称为多分量 Pfaff 格层级，特别称为二分量 Pfaff 格层级。

如引言部分所述，推导这些可积层级有两种不同的思路。一种是用 τ-函数表示多项式。将 τ-函数代入递推关系，可得到涉及相邻 τ-函数的可积层级。另一种方法是利用双线性型和柯西变换。通过这些方法，可以推导出一些著名的可积方程，例如所谓的 Pfaff-Toda 格和修正耦合 KP 方程。此外还表明，由 MSOPs 推导出的二分量 Pfaff 格层级等价于 Takasaki 的 Pfaff-Toda 层级。

4.1. 从递推关系 (3.10a)-(3.10d) 到可积层级。

在本部分中， τ给出 MSOPs 的 τ 函数表达式，以刻画相应的可积层级。为此，我们首先展示 MSOPs 的线性形式与二分量 Pfaffian ττ 函数之间的显式联系。

命题4.1。 多重斜正交多项式的线性形式 $R^{(i)}{}_{(v_1,\ v_2)}(x;\ \mathbf{t},\ \mathbf{s})$ $(i=1,\ 2)$ 也可改写为

$$\begin{aligned}d^{(i)}_{(v_1,v_2)}R^{(i)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})=&(-1)^{v_1-1}\omega_1(x;\mathbf{t})x^{v_1-1}\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t}-[x^{-1}],\mathbf{s})\\&+\omega_2(x;\mathbf{s})x^{v_2-1}\tau_{(v_1,v_2-1)}(\mathbf{t},\mathbf{s}-[x^{-1}]),\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中，符号 $[\alpha]$ 表示 *Miwa* 变量

$$[\alpha]=\left(\alpha,\frac{\alpha^2}{2},\cdots,\frac{\alpha^n}{n},\cdots\right).$$

证明。可通过对矩矩阵进行列展开，并利用舒尔函数作用于矩，来证明此类公式；例如参见 [6, 命题 2。2]。在我们的证明中，我们采用直接将舒尔函数作用于 τ-函数的方法。回顾一下，MSOPs 的线性形式可表示为 Pfaffian 表达式

$$d^{(i)}_{(v_1,v_2)}R^{(i)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})=\mathrm{pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)},x).$$

如果我们将此公式从 x展开，那么有

$$\begin{aligned}d^{(i)}_{(v_1,v_2)}R^{(i)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})=&\,\omega_1(x;\mathbf{t})\sum_{i\in I_1}(-1)^i x^i\mathrm{pf}(I_1\backslash\{i\},I_2)\\&+\omega_2(x;\mathbf{s})\sum_{i\in I_2}(-1)^{v_2-1-i}x^i\mathrm{pf}(I_1,I_2\backslash\{i\}),\end{aligned}\tag{4.2}$$

且指标集 $I_1=\{0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)}\}$ 和 $I_2=\{0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)}\}$。因此，为了证明（4.1）与（4.2）等价，需要验证公式

$$x^{v_1-1}\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t}-[x^{-1}],\mathbf{s})=\sum_{i\in I_1}(-1)^{v_1-1-i}x^i\mathrm{pf}(I_1\backslash\{i\},I_2).\tag{4.3}$$

众所周知，上述公式的左边可写为

$$\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t}-[x^{-1}],\mathbf{s})=e^{-\xi(\tilde\partial_t,x^{-1})}\tau_{(v_1-1,v_2)}=\sum_{k\geq0}p_k(-\tilde\partial_t)\tau_{(v_1-1,v_2)}x^{-k},$$

其中 $\tilde\partial_t=(\partial_{t_1},\partial_{t_2}/2,\cdots)$、$\xi(\mathbf{t}\ x)=\sum_{i=1}^{\infty}t_ix^i$ 和 p_k 是由下式定义的初等对称函数

$$e^{\xi(\mathbf{t},x)}=\sum_{k\geq0}p_k(\mathbf{t})x^k.\tag{4.4}$$

此外，根据附录中的命题 B.1 ，我们知道

$$p_k(-\tilde\partial_t)\tau_{(v_1-1,v_2)}=\mathrm{Pf}(0^{(1)},\cdots,\widehat{v_1-k^{(1)}},\cdots,v_1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2^{(2)}),$$

其中$\widehat{\ }i$ 表示索引 i 被省略，此时方程（4.3）成立。 □

注 4.2。根据证明，我们知道

$$\begin{aligned}d^{(i)}_{(v_1,v_2)}R^{(i)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})=&(-1)^{v_1-1}\omega_1(x;\mathbf{t})\sum_{\ell=0}^{v_1-1}\left(p_\ell(-\tilde\partial_t)\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right)x^{v_1-1-\ell}\\&+\omega_2(x;\mathbf{s})\sum_{\ell=0}^{v_2-1}\left(p_\ell(-\tilde\partial_s)\tau_{(v_1,v_2-1)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right)x^{v_2-1-\ell}.\end{aligned}$$

因此可直接得到以下推论：

推论 4.3. $\tilde{R}^{(i)}{}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})\,(i=1,2)$ 可用 τ-函数表示　　s

$$
\begin{aligned}
d^{(1)}_{(v_1,v_2)}\tilde{R}^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s}) &= \partial_{t_1}\left(d^{(1)}_{(v_1,v_2)}\tilde{R}^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})\right)\\
&= (-1)^{v_1-1}\omega_1(x;\mathbf{t})\sum_{\ell=0}^{v_1-1}\left(\partial_{t_1}p_\ell(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right)x^{v_1-1-\ell}\\
&+ (-1)^{v_1-1}\omega_1(x;\mathbf{t})\sum_{\ell=0}^{v_1-1}\left(p_\ell(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right)x^{v_1-\ell}\\
&+ \omega_2(x;\mathbf{s})\sum_{\ell=0}^{v_2-1}\left(\partial_{t_1}p_\ell(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1,v_2-1)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right)x^{v_2-1-\ell},\\
d^{(2)}_{(v_1,v_2)}\tilde{R}^{(2)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s}) &= \partial_{s_1}\left(d^{(2)}_{(v_1,v_2)}\tilde{R}^{(2)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s})\right)\\
&= (-1)^{v_1-1}\omega_1(x;\mathbf{t})\sum_{\ell=0}^{v_1-1}\left(\partial_{s_1}p_\ell(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right)x^{v_1-1-\ell}\\
&+ \omega_2(x;\mathbf{s})\sum_{\ell=0}^{v_2-1}\left(\partial_{s_1}p_\ell(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1,v_2-1)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right)x^{v_2-1-\ell}\\
&+ \omega_2(x;\mathbf{s})\sum_{\ell=0}^{v_2-1}\left(p_\ell(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1,v_2-1)}(\mathbf{t},\mathbf{s})\right)x^{v_2-\ell}.
\end{aligned}
$$

将这些表达式代入（3.10a），并分别比较 $x^{v_1-j}\omega_1(x)$ 和$x^{v_2-j}\omega_2(x)\,(j=1,\ 2,\ \cdots)$的系数，可得

$$
\begin{aligned}
\tau_{(v_1,v_2-1)}p_j(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1+1,v_2)} &= -\tau_{(v_1+1,v_2)}\partial_{s_1}p_{j-1}(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1-1,v_2)} \qquad (4.5a)\\
&+ \partial_{s_1}\tau_{(v_1+1,v_2)}p_{j-1}(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1-1,v_2)} + \tau_{(v_1,v_2+1)}p_j(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1,v_2-1)},\\
\tau_{(v_1,v_2-1)}p_j(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1+1,v_2)} &= \tau_{(v_1+1,v_2)}\left(\partial_{s_1}p_{j-1}(-\tilde{\partial}_s)+p_j(-\tilde{\partial}_s)\right)\tau_{(v_1,v_2-1)} \qquad (4.5b)\\
&- \partial_{s_1}\tau_{(v_1+1,v_2)}p_{j-1}(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1,v_2-1)} + \tau_{(v_1,v_2+1)}p_{j-2}(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1+1,v_2-2)}.
\end{aligned}
$$

此外，由（3.10c）可知

$$
\begin{aligned}
\partial_{t_1}\tau_{(v_1,v_2-1)}p_{j-1}(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1-1,v_2)} &= \tau_{(v_1,v_2-1)}\left(\partial_{t_1}p_{j-1}(-\tilde{\partial}_t)+p_j(-\tilde{\partial}_t)\right)\tau_{(v_1-1,v_2)} \qquad (4.6a)\\
&- \tau_{(v_1-1,v_2)}p_j(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1,v_2-1)} + \tau_{(v_1+1,v_2)}p_{j-2}(-\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1-2,v_2-1)},\\
\partial_{t_1}\tau_{(v_1,v_2-1)}p_{j-1}(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1,v_2-1)} &= \tau_{(v_1,v_2-1)}\partial_{t_1}p_{j-1}(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1,v_2-1)} \qquad (4.6b)\\
&+ \tau_{(v_1-1,v_2)}p_{j-2}(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1+1,v_2-2)} - \tau_{(v_1+1,v_2)}p_{j-2}(-\tilde{\partial}_s)\tau_{(v_1-1,v_2-2)}.
\end{aligned}
$$

需要指出的是，如果将 v_1 与 v_2 互换，并将 ∂_t 与 ∂_s互换，则可积层级（4.5a）-（4.5b）和（4.6a）-（4.6b）相同。此外，由（3.10b）和（3.10d）导出的可积层级与（3.10a）和（3.10c）相同。因此，将（4.5a）-（4.6b）视为具有相邻格的二分量 Pfaff 格层级是合理的。

由这些层级可得到一些可积格。(3.11) 中的 Pfaff-Toda 格第一条方程可由 (4.5a) 取 $j=1$ 得到，第二条方程则可由 (4.6b) 取 $j=2$ 得到。此外，还可以得到另一个非平凡的简单例子

当 $j=2$ 时，(4.5b) 可写为

$$(D_{s_2}+D_{s_1}^2)\tau_{(v_1,v_2-1)}\cdot\tau_{(v_1+1,v_2)}=2\tau_{(v_1,v_2+1)}\tau_{(v_1+1,v_2-2)}. \tag{4.7}$$

这就是所谓的修正耦合 KP 方程的双线性形式，它在研究 Pfaff 化与 Bäcklund 变换的可交换性中发挥着重要作用 [33]。

4.2. **双线性恒等式：从双线性形式到柯西变换**。在上一小节中，我们直接利用多重斜正交多项式的递推关系，推导出了一个二分量 Pfaff 格层级，其中涉及相邻的 τ-函数。在这一部分，我们从柯西变换的角度出发，探寻推导更一般的可积格层级的另一种方法。为此，我们引入相对于非退化双线性型的柯西变换。

命题 4.4。给定非退化双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\ \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[y]\to\mathbb{R}$ 以及解析权函数 $\psi(x)$，则对于可积函数 $g(x)$，函数 $g(x)$ 相对于该双线性型的柯西变换定义为

$$\mathcal{C}_\psi g(z)=\left\langle\frac{\psi(x)}{x-z},g(y)\right\rangle.$$

此外，对于任意解析函数 $f(x)$，有

$$\langle f(x)\psi(x),g(y)\rangle=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty}f(z)\mathcal{C}_\psi g(z)dz,$$

其中 C_∞ 是无穷远点周围的圆。

证明。假设 $f(z)$ 是解析函数，则有展开式 $f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}f_iz^i$，因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty}f(z)\mathcal{C}_\psi g(z)dz&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty}\sum_{i=0}^{\infty}f_iz^i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j+1}}\langle x^j\psi(x),g(y)\rangle dz\\&=\sum_{i=0}^{\infty}f_i\langle x^i\psi(x),g(y)\rangle=\langle f(x)\psi(x),g(y)\rangle.\end{aligned}$$

□

因此，将 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 视为斜对称双线性型，即

$$\langle f(x),g(y)\rangle=\int_{\gamma\times\gamma}f(x)\mathbb{S}(x,y)g(y)dxdy,\quad\mathbb{S}(x,y)=-\mathbb{S}(y,x),$$

可以定义相应的柯西变换

$$\mathcal{C}_\psi g(z)=\int_{\gamma\times\gamma}\frac{\psi(z)}{x-z}\mathbb{S}(x,y)g(y)dxdy. \tag{4.8}$$

此外，关于具有斜内积的多重斜正交多项式的柯西变换，我们有如下结论。

命题4.5。若 $R^{(i)}{}_{(v_1,\ v_2)}(x;\ \mathbf{t},\ \mathbf{s})$ $(i=1,\ 2)$ 是命题*3.2* 中定义的多重斜正交多项式的线性形式，其权函数为 $\omega_1(x;\ \mathbf{t})$ 和 $\omega_2(x;\ \mathbf{s})$，则有

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\omega_1}\left(d^{(i)}_{(v_1,v_2)}R^{(i)}_{(v_1,v_2)}\right)&=(-1)^{v_1}z^{-(v_1+1)}\tau_{(v_1+1,v_2)}(\mathbf{t}+[z^{-1}],\mathbf{s}),\\\mathcal{C}_{\omega_2}\left(d^{(i)}_{(v_1,v_2)}R^{(i)}_{(v_1,v_2)}\right)&=z^{-(v_2+1)}\tau_{(v_1,v_2+1)}(\mathbf{t},\mathbf{s}+[z^{-1}]).\end{aligned}$$

证明。 我们证明第一个等式，第二个等式可用类似方法验证。利用（3.2）和（4.8），可得

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\omega_1}\left(d^{(i)}_{(v_1,v_2)}R^{(i)}_{(v_1,v_2)}\right) &= \int_{\gamma\times\gamma}\frac{\omega_1(x;\mathbf{t})}{x-z}\mathbb{S}(x,y)\mathrm{Pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)},y)dxdy\\ &= -\sum_{i=0}^{\infty}z^{-(i+1)}\int_{\gamma\times\gamma}x^i\omega_1(x;\mathbf{t})\mathbb{S}(x,y)\mathrm{Pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)},y)dxdy\\ &= -\sum_{i=0}^{\infty}z^{-(i+1)}\left\langle \mathrm{pf}(i^{(1)},x),\mathrm{pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)},y)\right\rangle.\end{aligned}$$

于是，根据斜正交性，当 $i\le v_1-1$ 上述斜内积等于零时。因此，上式等于

$$\begin{aligned}&-\sum_{i=v_1}^{\infty}(-1)^{v_2}z^{-(i+1)}\mathrm{Pf}(0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},i^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)})\\ &=(-1)^{v_1}z^{-(v_1+1)}\sum_{i=0}^{\infty}z^{-i}p_i(\tilde{\partial}_t)\tau_{(v_1+1,v_2)},\end{aligned}$$

这就是所需公式的展开式。 □

接下来，我们将说明如何通过柯西变换推导可积层级和双线性恒等式。

命题 4.6。 二分量 τ-函数 $\{\tau_{(i,j)}(\mathbf{t},\ \mathbf{s})\}_{i,\ j\in\mathbb{N}}$ 满足双线性恒等式

$$\begin{aligned}&(-1)^{u_1+v_1}\oint_{C_\infty}e^{\xi(t-t',z)}z^{v_1-u_1-2}\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t}-[z^{-1}],\mathbf{s})\tau_{(u_1+1,u_2)}(\mathbf{t}'+[z^{-1}],\mathbf{s}')dz\\ &\qquad+(-1)^{u_1+v_1}\oint_{C_\infty}e^{\xi(t'-t,z)}z^{u_1-v_1-2}\tau_{(v_1+1,v_2)}(\mathbf{t}+[z^{-1}],\mathbf{s})\tau_{(u_1-1,u_2)}(\mathbf{t}'-[z^{-1}],\mathbf{s}')dz\\ &=\oint_{C_\infty}e^{\xi(s-s',z)}z^{v_2-u_2-2}\tau_{(v_1,v_2-1)}(\mathbf{t},\mathbf{s}-[z^{-1}])\tau_{(u_1,u_2+1)}(\mathbf{t}',\mathbf{s}'+[z^{-1}])dz\\ &\qquad+\oint_{C_\infty}e^{\xi(s'-s,z)}z^{u_2-v_2-2}\tau_{(v_1,v_2+1)}(\mathbf{t},\mathbf{s}+[z^{-1}])\tau_{(u_1,u_2-1)}(\mathbf{t}',\mathbf{s}'-[z^{-1}])dz,\end{aligned}\tag{4.9}$$

这对任意的 $t,t',s,s'\in\mathbb{C}$ 都成立。

证明。 由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是斜内积，我们知道

$$\langle R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(x;\mathbf{t},\mathbf{s}),R^{(1)}_{(u_1,u_2)}(y;\mathbf{t}',\mathbf{s}')\rangle=-\langle R^{(1)}_{(u_1,u_2)}(x;\mathbf{t}',\mathbf{s}'),R^{(1)}_{(v_1,v_2)}(y;\mathbf{t},\mathbf{s})\rangle,$$

对于任意 t、t'、s、$s'\in\mathbb{C}$ 和 $|\vec{u}|$、$|\vec{v}|\in2\mathbb{N}+1$，均成立。将 $d^{(1)}{}_{(u_1,\ u_2)}d^{(1)}{}_{(v_1,\ v_2)}$ 两边相乘，并根据命题4.1将多重斜正交多项式的线性形式按 τ-函数展开，我们

have

$$\begin{aligned}
&(-1)^{v_1-1}\left\langle x^{v_1-1}\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t}-[x^{-1}],\mathbf{s})e^{\xi(t,x)}\omega_1(x),d^{(1)}_{(u_1,u_2)}R_{(u_1,u_2)}(y;\mathbf{t}',\mathbf{s}')\right\rangle\\
&\quad+\left\langle x^{v_2-1}\tau_{(v_1,v_2-1)}(\mathbf{t},\mathbf{s}-[x^{-1}])e^{\xi(s,x)}\omega_2(x),d^{(1)}_{(u_1,u_2)}R_{(u_1,u_2)}(y;\mathbf{t}',\mathbf{s}')\right\rangle\\
&=(-1)^{u_1}\left\langle x^{u_1-1}\tau_{(u_1-1,u_2)}(\mathbf{t}'-[x^{-1}],\mathbf{s}')e^{\xi(t',x)}\omega_1(x),d^{(1)}_{(v_1,v_2)}R_{(v_1,v_2)}(y;\mathbf{t},\mathbf{s})\right\rangle\\
&\quad-\left\langle x^{u_2-1}\tau_{(u_1,u_2-1)}(\mathbf{t}',\mathbf{s}'-[x^{-1}])e^{\xi(s',x)}\omega_2(x),d^{(1)}_{(v_1,v_2)}R_{(v_1,v_2)}(y;\mathbf{t},\mathbf{s})\right\rangle.
\end{aligned}$$

注意到 $\omega_1(x;\ \mathbf{t})\ =e^{\xi(x;\mathbf{t}-\mathbf{t}')}\omega_1(x;\ \mathbf{t}')$，并根据命题4.4，可得

$$\begin{aligned}
&(-1)^{v_1-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty}e^{\xi(t-t',z)}z^{v_1-1}\tau_{(v_1-1,v_2)}(\mathbf{t}-[z^{-1}],\mathbf{s})\mathcal{C}_{\omega_1}\left(d^{(1)}_{(u_1,u_2)}R^{(1)}_{(u_1,u_2)}\right)(z;\mathbf{t}',\mathbf{s}')dz\\
&\quad+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty}e^{\xi(s-s',z)}z^{v_2-1}\tau_{(v_1,v_2-1)}(\mathbf{t},\mathbf{s}-[z^{-1}])\mathcal{C}_{\omega_2}\left(d^{(1)}_{(u_1,u_2)}R^{(1)}_{(u_1,u_2)}\right)(z;\mathbf{t}',\mathbf{s}')dz\\
&=(-1)^{u_1}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty}e^{\xi(t'-t,z)}z^{u_1-1}\tau_{(u_1-1,u_2)}(\mathbf{t}'-[z^{-1}],\mathbf{s}')\mathcal{C}_{\omega_1}\left(d^{(1)}_{(v_1,v_2)}R^{(1)}_{(v_1,v_2)}\right)(z;\mathbf{t},\mathbf{s})dz\\
&\quad-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty}e^{\xi(s'-s,z)}z^{u_2-1}\tau_{(u_1,u_2-1)}(\mathbf{t}',\mathbf{s}'-[z^{-1}])\mathcal{C}_{\omega_2}\left(d^{(1)}_{(v_1,v_2)}R^{(1)}_{(v_1,v_2)}\right)(z;\mathbf{t},\mathbf{s})dz,
\end{aligned}$$

将命题 4.5 中的柯西变换代入上述公式，即完成了证明。 □

注记 4.7。双线性恒等式 (4.9) 应与 *[52, 式 (2.1)]* 一致，只需将 z 变为 z^{-1}，并将无穷远点周围的轮廓变换为零点周围的圆。

如果我们进行如下变量变换

$$\mathbf{t}\mapsto\mathbf{t}-\alpha,\ \mathbf{t}'\mapsto\mathbf{t}+\alpha,\ \mathbf{s}\mapsto\mathbf{s}-\beta,\ \mathbf{s}'\mapsto\mathbf{s}+\beta,$$

并实现

$$\tau_{(m,n)}(\mathbf{t}+\alpha+[z^{-1}],\mathbf{s}+\beta)\tau_{(u,v)}(\mathbf{t}-\alpha-[z^{-1}],\mathbf{s}-\beta)=e^{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_iD_{t_i}+\beta_iD_{s_i}+\xi(\tilde{D}_t,z^{-1})}\tau_{(m,n)}\tau_{(u,v)}$$

对于任意 $m+n,\ u+v\in2\mathbb{N}+1$，则恒等式（4.9）变为

$$\begin{aligned}
&(-1)^{u_1+v_1}\oint_{C_\infty}e^{-2\xi(\alpha,z)}z^{v_1-u_1-2}e^{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_iD_{t_i}+\beta_iD_{s_i})-\xi(\tilde{D}_t,z^{-1})}\tau_{(u_1+1,u_2)}\cdot\tau_{(v_1-1,v_2)}dz\\
&\quad+(-1)^{u_1+v_1}\oint_{C_\infty}e^{2\xi(\alpha,z)}z^{u_1-v_1-2}e^{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_iD_{t_i}+\beta_iD_{s_i})+\xi(\tilde{D}_t,z^{-1})}\tau_{(u_1-1,u_2)}\cdot\tau_{(v_1+1,v_2)}\\
&=\oint_{C_\infty}e^{-2\xi(\beta,z)}z^{v_2-u_2-2}e^{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_iD_{t_i}+\beta_iD_{s_i})+\xi(\tilde{D}_s,z^{-1})}\tau_{(u_1,u_2+1)}\cdot\tau_{(v_1,v_2-1)}dz\\
&\quad+\oint_{C_\infty}e^{2\xi(\beta,z)}z^{u_2-v_2-2}e^{\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_iD_{t_i}+\beta_iD_{s_i})-\xi(\tilde{D}_s,z^{-1})}\tau_{(u_1,u_2-1)}\cdot\tau_{(v_1,v_2+1)}dz.
\end{aligned}$$

因此，根据留数定理，等价于

$$\begin{aligned}
&(-1)^{u_1+v_1}\sum_{n=0}^{\infty} e_n(-2\alpha)e_{n+v_1-u_1-1}(\tilde{D}_t)e^{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i D_{t_i}+\beta_i D_{s_i}}\tau_{(u_1+1,u_2)}\cdot\tau_{(v_1-1,v_2)}\\
&\quad+(-1)^{u_1+v_1}\sum_{n=0}^{\infty} e_n(2\alpha)e_{n+u_1-v_1-1}(-\tilde{D}_t)e^{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i D_{t_i}+\beta_i D_{s_i}}\tau_{(u_1-1,u_2)}\cdot\tau_{(v_1+1,v_2)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty} e_n(-2\beta)e_{n+v_2-u_2-1}(\tilde{D}_s)e^{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i D_{t_i}+\beta_i D_{s_i}}\tau_{(u_1,u_2+1)}\cdot\tau_{(v_1,v_2-1)}\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty} e_n(2\beta)e_{n+u_2-v_2-1}(-\tilde{D}_s)e^{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i D_{t_i}+\beta_i D_{s_i}}\tau_{(u_1,u_2-1)}\cdot\tau_{(v_1,v_2+1)},
\end{aligned}$$

其中 $\{e_k\}_{k\geq 0}$ 是由（4.4）定义的初等对称函数，且 D_t，D_s 是由（3.12）给出的双线性算子。

因此，通过比较 $\alpha_1^m\beta_1^n$ 关于 m、$n\geq 0$ 的系数，我们得到以下可积格层级

$$\begin{aligned}
&(-1)^{u_1+v_1}\frac{1}{n!}D_{s_1}^n\left(\sum_{k+l=m,k,l\geq 0}\frac{(-2)^k}{l!}p_{k+v_1-u_1-1}(\tilde{D}_t)D_{t_1}^l\right)\tau_{(u_1+1,u_2)}\cdot\tau_{(v_1-1,v_2)}\\
&\quad+(-1)^{u_1+v_1}\frac{1}{n!}D_{s_1}^n\left(\sum_{k+l=m,k,l\geq 0}\frac{2^k}{l!}p_{k+u_1-v_1-1}(-\tilde{D}_t)D_{t_1}^l\right)\tau_{(u_1-1,u_2)}\cdot\tau_{(v_1+1,v_2)}\\
&=\frac{1}{m!}D_{t_1}^m\left(\sum_{k+l=n,k,l\geq 0}\frac{(-2)^k}{l!}p_{k+v_2-u_2-1}(\tilde{D}_s)D_{s_1}^l\right)\tau_{(u_1,u_2+1)}\cdot\tau_{(v_1,v_2-1)}\\
&\quad+\frac{1}{m!}D_{t_1}^m\left(\sum_{k+l=n,k,l\geq 0}\frac{2^k}{l!}p_{k+u_2-v_2-1}(-\tilde{D}_s)D_{s_1}^l\right)\tau_{(u_1,u_2-1)}\cdot\tau_{(v_1,v_2+1)}.
\end{aligned}\tag{4.10}$$

当（u_1，u_2）=（v_1，v_2）且（m，n）=（1, 1）时，可重新导出（3.11）中的第一个方程；当（u_1，u_2）=（v_1-2，v_2）且（m，n）=（0, 1）时，可重新导出（3.11）中的第二个方程。

最后，我们可以给出二分量 Pfaff 格层级的分子解。

命题 4.8. 二分量 *Pfaff* 格层级 (4.9)存在以下分子解

$$\tau_{(v_1,v_2)}=pf(0^{(1)},\cdots,v_1-1^{(1)},0^{(2)},\cdots,v_2-1^{(2)}),\quad v_1,v_2\in\mathbb{N},\ v_1+v_2\in 2\mathbb{N}$$

其中 $\tau_{(0,0)}=1$。此外，这些 *Pfaff* 元素满足以下时间演化

$$\begin{aligned}
&\partial_{t_n}pf(i^{(1)},j^{(1)})=pf(i+n^{(1)},j^{(1)})+pf(i^{(1)},j+n^{(1)}),\qquad \partial_{t_n}pf(i^{(1)},j^{(2)})=pf(i+n^{(1)},j^{(2)}),\\
&\partial_{s_n}pf(i^{(2)},j^{(2)})=pf(i+n^{(2)},j^{(2)})+pf(i^{(2)},j+n^{(2)}),\qquad \partial_{s_n}pf(i^{(1)},j^{(2)})=pf(i^{(1)},j+n^{(2)}),\\
&\partial_{t_n}pf(i^{(2)},j^{(2)})=\partial_{s_n}pf(i^{(1)},j^{(1)})=0.
\end{aligned}$$

5. 结语

本文探讨了如何恰当地定义多重斜正交多项式。鉴于多重正交多项式已在随机矩阵和可积系统领域得到广泛研究，这一概念值得关注。作为应用，我们考察了

多重斜正交多项式的适当时间变形，结果表明它们与 Takasaki 先前研究的 Pfaff-Toda 层次密切相关。在本文中，我们将相应的可积层级称为二分量 Pfaff 格层级，因为可以从多重斜正交多项式的角度来研究它。如 Takasaki 的论文 [52], 所述，Pfaff 格层级与多分量Pfaff格层级具有许多共同性质。然而，多重斜正交多项式具有紧凑的递推关系，如式（3.10a）-（3.10d）所示；这些关系在二分量 Pfaff 格层级谱问题的表述中发挥着重要作用。

仍有一些值得继续探讨的问题。其中之一是寻找其在随机矩阵理论中的恰当应用。带有源项的高斯模型和手征酉模型都是行列式点过程的例子。在随机矩阵理论中，Pfaffian点过程也自然出现；我们期望找到一种由这些多重斜正交多项式刻画的随机矩阵模型。此外，还有若干二分量BKP层级[36, 50] ，其解是否与这些多重斜正交多项式相关，值得研究。

致谢

作者感谢 Peter Forrester 教授提出的宝贵意见。

披露声明

不存在任何潜在的利益冲突。

资助

S. Li 受到国家自然科学基金委员会的部分资助（项目编号：12101432、12175155），G. Yu 受到国家自然科学基金委员会的资助（项目编号：11871336）。

Appendix A. Pfaffian identitis

Pfaffian恒等式有两种不同的类型，参见 [30, 式（2.95′）和（2.96′）]

$$\begin{aligned}\mathrm{pf}(*,a_1,a_2,a_3,a_4)\mathrm{pf}(*) &= \mathrm{pf}(*,a_1,a_2)\mathrm{pf}(*,a_3,a_4)\\ &\quad-\mathrm{pf}(*,a_1,a_3)\mathrm{pf}(*,a_2,a_4)+\mathrm{pf}(*,a_1,a_4)\mathrm{pf}(*,a_2,a_3),\end{aligned}\tag{A.1a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{pf}(\star,a_1,a_2,a_3)\mathrm{pf}(\star,a_4) &= \mathrm{pf}(\star,a_2,a_3,a_4)\mathrm{pf}(\star,a_1)\\ &\quad-\mathrm{pf}(\star,a_1,a_3,a_4)\mathrm{pf}(\star,a_2)+\mathrm{pf}(\star,a_1,a_2,a_4)\mathrm{pf}(\star,a_3),\end{aligned}\tag{A.1b}$$

其中，$*$ 和 $\star$ 分别是偶数和奇数符号的集合。

附录B. Wronskian 型 Pfaffian 的导数公式

Wronskian 型 Pfaffian 因其在耦合 KP 理论中的广泛应用，在孤子理论中得到了充分研究。在 [30, 第 3 节，4], 满足关于变量 $\mathbf{t}=(t_1,t_2,\cdots)$ 的微分规则的 Pfaff 元素 $\mathrm{pf}(i,j)$ 被称为

$$\partial_{t_n}\mathrm{pf}(i,j)=\mathrm{pf}(i+n,j)+\mathrm{pf}(i,j+n)\tag{B.1}$$

Wronskian 型 Pfaffian。关于 Wronskian 型 Pfaffian 及其离散对应形式的更多详情，请参阅 [47]。文中证明，若 Pfaff 元素满足 (B.1)，则

$$\partial_{t_n}\mathrm{Pf}(i_0,i_1,\cdots,i_{2N-1})=\sum_{k=0}^{2N-1}\mathrm{Pf}(i_0,\cdots,i_k+n,\cdots,i_{2N-1}).$$

这是通过归纳法证明的。

本文需要引入二分量 Pfaffian τ-函数，其指标为 $\mathcal{I}=\{i_0,\cdots,i_n\}$和 $\mathcal{J}=\{j_0,\cdots,j_m\}$，其中 n， $m\in\mathbb{N}$且 $n+m\in2\mathbb{N}$。此时的 Pfaff 元素应满足二分量 Wronskian 型推广（参见命题 3.3）

$$\begin{aligned}
&\partial_{t_k}\mathrm{pf}(i_\alpha,i_\beta)=\mathrm{pf}(i_\alpha+k,i_\beta)+(i_\alpha,i_\beta+k),\quad \partial_{t_k}\mathrm{pf}(i_\alpha,j_\beta)=\mathrm{pf}(i_\alpha+k,j_\beta),\quad \partial_{t_k}\mathrm{pf}(j_\alpha,j_\beta)=0,\\
&\partial_{s_k}\mathrm{pf}(j_\alpha,j_\beta)=\mathrm{pf}(j_\alpha+k,j_\beta)+(j_\alpha,j_\beta+k),\quad \partial_{s_k}\mathrm{pf}(i_\alpha,j_\beta)=\mathrm{pf}(i_\alpha,j_\beta+k),\quad \partial_{s_k}\mathrm{pf}(i_\alpha,i_\beta)=0,
\end{aligned}$$

于是我们得到以下命题。

Pr命题 B.1。 如果 *Pfaff* 元素满足上述导数关系，那么我们有 *as*

$$\begin{aligned}
\partial_{t_k}pf(i_0,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m)&=\sum_{\alpha=0}^{n}pf(i_0,\cdots,i_\alpha+k,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m),\\
\partial_{s_k}pf(i_0,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m)&=\sum_{\alpha=0}^{m}pf(i_0,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_\alpha+k,\cdots,j_m).
\end{aligned}$$

证明。 这里我们仅用归纳法证明第一个等式，第二个等式可以类似地证明。注意到

$$\begin{aligned}
\partial_{t_k}\mathrm{pf}(i_0,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m)=\partial_{t_k}\Bigg(&\sum_{i_l\in\mathcal{I}}(-1)^{l-1}\mathrm{pf}(i_0,i_l)\mathrm{pf}(i_1,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m)\\
&+\sum_{j_l\in\mathcal{J}}(-1)^{n+l}\mathrm{pf}(i_0,j_l)\mathrm{pf}(i_1,\cdots,i_n,j_0,\cdots,\hat{j}_l,\cdots,j_m)\Bigg)
\end{aligned}$$

其中第一部分等于

$$\sum_{i_l\in\mathcal{I}}(-1)^{l-1}\mathrm{pf}(i_0+k,i_l)\mathrm{pf}(i_1,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m)\tag{B.2a}$$

$$+\sum_{i_l\in\mathcal{I}}(-1)^{l-1}\mathrm{pf}(i_0,i_l+k)\mathrm{pf}(i_1,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m)\tag{B.2b}$$

$$+\sum_{i_l\in\mathcal{I}}(-1)^{l-1}\mathrm{pf}(i_0,i_l)\sum_{\alpha\neq l}\mathrm{pf}(i_1,\cdots,i_\alpha+k,\cdots,\hat{i}_l,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m),\tag{B.2c}$$

而第二部分的导数等于

$$\sum_{j_l\in\mathcal{J}}(-1)^{n+l}\mathrm{pf}(i_0+k,j_l)\mathrm{pf}(i_1,\cdots,i_n,j_0,\cdots,\hat{j}_l,\cdots,j_m)\tag{B.3a}$$

$$+\sum_{j_l\in\mathcal{J}}(-1)^{n+l}\mathrm{pf}(i_0,j_l)\sum_{\alpha=1}^{n}\mathrm{pf}(i_1,\cdots,i_\alpha+k,\cdots,i_n,j_0,\cdots,\hat{j}_l,\cdots,j_m).\tag{B.3b}$$

因此，将（B.2a）与（B.3a）相加可得

$$\mathrm{pf}(i_0+k,i_1,\cdots,i_n,j_0,\cdots,j_m).$$

其余三个方程相加后等于

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \mathrm{pf}(i_0, \cdots, i_\alpha + k, \cdots, i_n, j_0, \cdots, j_m),$$

我们的证明至此完成。 □

参考文献

[1] M. Adler、E. Horozov 和 P. van Moerbeke。《Pfaff 格与斜正交多项式》。《国际数学研究通知》，11（1999），569-588。[2] M. Adler、T. Shiota 和 P. van Moerbeke。《Pfaff τ 函数》。《数学年刊》，322（2002），423-476。[3] M. Adler 和 P. van Moerbeke。《矩阵积分、Toda 对称性、Virasoro 约束与正交多项式》。《杜克数学杂志》，80（1995），863-911。[4] M. Adler 和 P. van Moerbeke。《耦合随机矩阵的谱》。《数学年刊》，149（1999），921-976。[5] M. Adler 和 P. van Moerbeke。《Toda 与 Pfaff 格及相关多项式》。《杜克数学杂志》，112（2002），1-58。[6] M. Adler、P. van Moerbeke 和 P. Vanhaecke。《矩矩阵与多分量 KP：及其在随机矩阵理论中的应用》。《数学物理通讯》，286（2009），1-38。[7] C. Álvarez-Fernández、U. Prieto 和 M. Mañas。《混合型多重正交多项式：Gauss–Borel 分解与多分量二维 Toda 层级》。《数学进展》，227（2011），1451-1525。[8]C. Álvarez-Fernández、G. Ariznabarreta、J. García-Ardila、M. Mañas 和 F. Marcellán。《实数轴上矩阵正交多项式的 Christoffel 变换与非阿贝尔二维 Toda 格层级》。《国际数学研究通知》，2017（2017），1285-1341。[9] A. Aptekarev、P. Bleher 和 A. Kuijlaars。《带外源的高斯随机矩阵的大 n 极限，第二部分》。《数学物理通讯》，259（2005），367-389。[10] A. Aptekarev、A. Branquinho 和 F. Marcellán。《正交多项式递推系数的 Toda 型微分方程与 Freud 变换》。《计算与应用数学杂志》，78（1997），139-160。[11] A. Aptekarev、M. Derevyagin、H. Miki 和 W. van Assche。《多维 Toda 格：连续时间与离散时间》。《SIGMA》，12（2016），054，30 页。[12] M. Bertola、B. Eynard 和 J. Harnad。《半经典正交多项式、矩阵模型与等单值 tau 函数》。《数学物理通讯》，263（2006），401-437。[13] M. Bertola、M. Gekhtman 和 J. Szmigieski。《Cauchy 双矩阵模型》。《数学物理通讯》，287（2009），983-1014。[14] M. Bertola、M. Gekhtman 和 J. Szmigieski。《柯西双正交多项式》。《逼近理论杂志》，162（2010），832-867。[15] P. Bleher 和 A. Kuijlaars。《带外源的随机矩阵与多重正交多项式》。《国际数学研究通知》，3（2004），109-129。[16] A. Borodin。《双正交系综》。《核物理 B》，536（1998），704。[17] A. Branquinho、A. Foulquié-Moreno 和 M. Mañas。《多重正交多项式与随机游走》。arXiv：2103.13715。[18] E. Brézin 和 S. Hikami。《外源随机矩阵的能级间距》。《物理评论 E》，58（1998），7176。

[19] X. Chang、Y. He、X. Hu 和 S. Li。具有 Pfaff tau 函数的部分斜正交多项式及相关可积格。《数学物理通讯》，364（2018），1069-1119。[20] T. Chihara。正交多项式导论。Gordon and Breach，纽约，1978。[21]E. Daems 和 A. Kuijlaars。混合型多重正交多项式与不相交布朗运动。《逼近理论杂志》，146（2007），91-114。[22] P. Deift。正交多项式与随机矩阵：黎曼–希尔伯特方法。Courant 讲义 3，美国数学会，2000。[23] P. Desrosiers 和 P. Forrester。关于双正交系综的一则注记。《逼近理论杂志》，152（2008），167-187。[24] B. Eynard 和 M. Mehta。链式耦合矩阵：I. 特征值关联。《物理学杂志 A》，31（1998），4449。[25] J. Favard。关于切比雪夫多项式。《巴黎科学院院刊》，200（1935），2052-2053。[26] P. Fidalgo 和 L. López。Nikishin 系统是完备的。《构造逼近》，34（2011），297-356。[27] P.J. Forrester。对数气体与随机矩阵。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2010。[28] G. Freud。关于正交多项式递推公式中的系数。《爱尔兰皇家科学院院刊》A 辑76（1976），1-6。[29] C. Gilson 和 J. Nimmo。二维 Lotka–Volterra 方程与二维 Toda 格之间的关系。《非线性数学物理杂志》，12，增刊2，（2005），169-179。[30] R. Hirota。孤子理论的直接方法。（A. Nagai、J. Nimmo 和 C. Gilson 编译），剑桥数学专著丛书155，剑桥大学出版社，2004。[31]X. Hu、C. Li、J. Nimmo 和 G. Yu。一个可积的对称 $2+1$ 维 Lotka–Volterra 方程及其一族解。《物理学杂志 A》，38（2005），195-204。[32] X. Hu 和 S. Li。Bures 系综的配分函数作为 BKP 和 DKP 层次的 τ 函数：连续情形与离散情形。《物理学杂志 A》，50（2017），285201。[33] X. Hu 和 J. Zhao。Pfaff化与 Bäcklund 变换的可交换性：KP 方程。《反问题》，21（2005），1461-1472。[34] M. Ismail。一元经典与量子正交多项式。剑桥大学出版社，2009。[35] M. Jimbo 和 T. Miwa。孤子与无限维李代数。《京都大学数理科学研究所刊物》，19：943-1001，1983。[36] V. Kac 和 J. van de Leur。旋量几何与多分量 BKP 和 DKP 层次，载于《双谱问题》（蒙特利尔，魁北克省，1997），159–202，CRM 讲义14，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998。[37] S. Kakei。正交与辛矩阵积分及耦合 KP 层级。《日本物理学会杂志》，68：2875-2879，1999。[38] Y. Kodama 和 V. Pierce。辛矩阵上的 Pfaff 格。《物理学杂志 A》，43（2010），055206。[39] S. Li。矩阵正交多项式、非阿贝尔 Toda 格与 Bäcklund 变换。arXiv：2109.00671。[40] C. Li 和 S. Li。Cauchy 双矩阵模型、C-Toda 格与 CKP 层次。《非线性科学杂志》，29（2019），3-27。

[41]Shi-Hao Li 和 Guo-Fu Yu。秩移位条件与二维 Toda 理论的约化。arXiv:1908.08725[42] H. Lundmark 和 J. Szmigieski。Degasperis-Procesi 峰子与离散三次弦。《国际数学研究论文集》，2005（2005），53-116。[43] A. Martínez-Finkelshtein 和 W. van Assche。什么是……多重正交多项式? 《美国数学会会刊》，63（2016），1029-1031。[44] M. Mehta。一些双正交多项式的零点。《物理学杂志 A》，35（2002），517。[45] K. Muttalib。具有附加相互作用的随机矩阵模型。《物理学杂志 A》，28（1995），L159。[46] E. Nikishin 和 V. Sorokin。有理逼近与正交性。数学专著译丛，第92卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991。[47] Y. Ohta。离散可积系统的特殊解。载于《离散可积系统》，《物理学讲义》，第644卷，第57-83页，2004。[48] C. Ormerod、N. Witte 和 P. Forrester。保持联络的变形与 q-半经典正交多项式。《非线性》，24（2011），2405。[49] P. Santini、M. Nieszporski 和 A. Doliwa。Toda 定律在正方格上的一个可积推广。《物理评论 E》，70（2004），056615。[50] T. Shiota。Prym 簇与孤子方程 载于《无限维李代数与群》，V. Kac 编，《数学物理高级丛书》第7卷，World Scientific，1989，407-448。[51] J. Shobat。正交多项式的一个微分方程。《杜克数学杂志》，5（1939），401-417。[52] K. Takasaki。Pfaff-Toda 层次的辅助线性问题、差分 Fay 恒等式与无色散极限。SIGMA，5（2009），109，共34页。[53] S. Tsujimoto 和 K. Kondo。离散方程的分子解与正交多项式。《数理解析研究所讲究录》，1170（2000），1–8。[54] R. Willox。关于一个广义 Tzitzeica 方程。《格拉斯哥数学杂志》，47（2005），221-231。四川大学数学系，中国成都，610064电子邮箱：lishihao@lsec.cc.ac.cn 上海交通大学数学科学学院、CMA-上海，中华人民共和国电子邮箱：john-einstein@sjtu.edu.cn 四川大学数学系，中国成都，610064电子邮箱：oreki_phy@163.com 上海交通大学数学科学学院、CMA-上海，中华人民共和国。电子邮箱：gfyu@sjtu.edu.cn