arXiv:2302.02393v1 [math.RA] 5 Feb 2023

广义刚性模及其多项式扩张

MOHAMED LOUZARI 和 ARMANDO REYES

摘要。设R 是一个含幺环， σ 是R 的一个自同态，M_R 是一个右R模。本文继续研究由 Gunner 等人 [13]引入的σ-刚性模。我们给出关于σ-刚性模及相关概念的一些结果。此外，我们研究 σ-刚性如何从模M_R 传递到其扩张，例如三角矩阵模和多项式模。

引言

本文中，R 表示含幺结合环，模均为幺模。我们用 M_R 表示 M 是一个右模。令 N 为所有自然整数构成的集合。下文中， σ 是 R 的一个自同态，且满足 $\sigma(1) = 1$。R 的所有自同态（分别为自同构）组成的集合记为 End(R)（分别记为 Aut(R)）。对于模 M_R的子集 X，$r_R(X) = \{a \in R | Xa = 0\}$ 和 $l_R(X) = \{a \in R | aX = 0\}$ 分别表示 X 在 R 中的右湮灭子和左湮灭子。若对每个 $a \in R$，$r_R(a)$ 都是 R 的一个理想（等价地，对任意 a、b $\in$ R，若 $ab = 0$，则 $aRb = 0$），则称环 R 为半交换环。若对任意 $m \in M$ 和 $a \in R$，$ma = 0$ 蕴含 $mRa = 0$，则称模 M_R 为半交换模。若对任意 $m \in M$ 和 $a \in R$，$ma = 0$ 蕴含 $mR\sigma(a) = 0$，则称模 M_R 为 σ-半交换模 [8] 。

按照 Annin [4], ，若对任意 $m \in M$ 和 $a \in R$，$ma = 0$ 当且仅当 $m\sigma(a) = 0$，则称模 M_R 为 σ-相容的。若对任意 $m \in M$ 和 $a \in R$，$ma = 0$ 蕴含 $mR \cap Ma = 0$，则称 σ-相容模 M 为 σ-约化的。若模 M_R 是 id_R-约化的，则称其为约化模，其中 id_R 是 R 的恒等自同态（等价地，对任意 $m \in M$ 和 $a \in R$，$ma^2 = 0$ 蕴含 $mRa = 0$） [15]。

根据 Krempa [14], ，若对于任意 $a \in R$，$a\sigma(a) = 0$ 可推出 $a = 0$，则称环 R 上的自同态 σ 是刚性的；若自同态σ 是刚性的，则称 R 为 σ-刚性环。受 Guner 等人[10, 11, 12, 14], 研究过的 σ-刚性环性质启发， [13], 引入了 σ-刚性模，将其作为σ-刚性环的推广。若对于任意 $m \in M$ 和 $a \in R$，$ma\sigma(a) = 0$ 可推出 $ma = 0$，则称模 M_R 是 σ-刚性的。显然， σ-约化模是 σ-刚性的，但反之不一定成立 [13, 例 2.18]。回顾一下，模 M_R 是 σ-约化的，当且仅当它是 σ-半交换且 σ-刚性的 [13, 定理 2.16]。因此，σ-约化模的概念与 σ-半交换模和 σ-刚性模相关。若模 M_R 是 id_R-刚性的，则称其为刚性模。

2010年数学主题分类：16U80，16S36 关键词与短语：广义刚性模、刚性模、约化模、半交换模

在 [15], Lee-Zhou 引入了以下记号。

$$M[x;\sigma] := \left\{ \sum_{i=0}^{s} m_i x^i : s \geq 0, m_i \in M \right\},$$

$$M[x, x^{-1}; \sigma] := \left\{ \sum_{i=-s}^{t} m_i x^i : \ t \geq 0, s \geq 0, m_i \in M \right\}.$$

在显然的加法运算下，它们各自都是阿贝尔群，因此 $M[x;\sigma]$ 在下述数乘运算下成为一个 $R[x;\sigma]$ 上的模。对于 $m(x) = \sum_{i=0} m_i x^i \in M[x;\ \sigma]$ 以及 $f(x) = \sum_{j=0} a_j x^j \in R[x;\ \sigma]$,

$$(*) \qquad m(x)f(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{k=i+j} m_i \sigma^i(a_j) \right) x^k$$

模 $M[x;\ \sigma]$ 称为 M 的斜多项式扩张。若 $\sigma \in Aut(R)$，则采用与 $(*)$ 类似的数乘运算，$M[x,x^{-1};\sigma]$ 成为一个 $R[x,x^{-1};\sigma]$上的模，称为 M 的斜 *Laurent* 多项式扩张。特别地，若 $\sigma = id_R$，则得到经典扩张 $M[x]$ 和 $M[x,x^{-1}]$。

根据 Zhang 和 Chen [8], ，若 $m(x)\, f(x) = 0$，其中 $m(x) = \sum_{i=0} m_i x^i \in M[x;\ \sigma]$ 且 $f(x) = \sum_{j=0} a_j x^j \in R[x;\ \sigma]$, 则称模 M_R 为 σ-斜 Armendariz 模；这意味着对所有 i 和 j，$m_i \sigma^i(a_j) = 0$。此外，M_R 是 Armendariz 模，当且仅当它是 id_R-斜 Armendariz 模。环 R 是斜 Armendariz 环，当且仅当 R_R 是斜 Armendariz 模。

本文研究了刚性、 σ-刚性、半交换、 σ-半交换、阿贝尔及 σ-约化模之间的一些联系。此外，我们证明， σ-刚性模的类在同态像及某些模扩张下并不封闭。我们还考察了 σ-约化性、 σ-半交换性和 σ-刚性从模 M_R 向形如 $M[x]/M[x](x^n)$ 的扩张传递的情况，其中 $n \geq 2$ 是一个整数，反之亦然。事实上，如果 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为右 $R[x]/(x^n)$-模是σ-约化的（分别为 σ-刚性的、 σ-半交换的），那么 M_R是 σ-约化的（分别为 σ-刚性的、 σ-半交换的）。然而，反向结论并不成立。此外，对于模 M_R，我们研究了其斜多项式扩张中 σ-刚性的表现。

1. 广义刚性模与相关模

本节中，我们给出刚性、 σ-刚性、半交换、 σ-半交换和阿贝尔模之间的一些联系。我们从下面的定义开始。

定义 1.1. 设M_R 是一个模，$m \in M$ 且$a \in R$。称M_R 满足条件:

(1) (C_1)，若$ma = 0$ 则$m\sigma(a) = 0$。
(2) (C_2)，若$m\sigma(a) = 0$)则$ma = 0$。

引理 1.2. (1) 每个满足(C_2) 的刚性(（分别地， σ-半交换)模都是σ-刚性的(（分别地，半交换)）。(2) 每个满足(C_1) 的 σ-刚性(（分别地，半交换) 模都是刚性的(（分别地 σ-半交换）。（3）对于 σ-相容模，刚性（分别地，半交换性）与 σ-刚性（分别地， σ-半交换）等价。

证明。验证过程很直接。 □

若模 M 满足以下条件，则称其为阿贝尔 [1]，：对于任意$m \in M$ 以及任意$e^2 = e$、$r \in R$，都有$mer = mre$。

引理 1.3. 设 M_R 是一个模，且 σ 是 R 的一个自同态。那么
(1) 若 M_R 是刚性的，则它是阿贝尔的；(2) 若 M_R 是满足条件(C_1)的 σ-刚性模，则它是阿贝尔的；(3) 若 M_R 是 σ-半交换的，则它是阿贝尔的。

证明。（1）设 $e^2 = e$、$r \in R$ 且 $m \in M$，则有 $[er(1-e)]^2 = 0$，于是 $m[er(1-e)]^2 = 0$。由于 M_R 是刚性的，因此 $m[er(1-e)] = 0$，从而 $mer = mere$。另一方面，有 $[(1-e)re]^2 = 0$，按照上述相同的方法可得 $mre = mere$。因此，对所有 $r \in R$，都有 $mer = mre$。

(2) 若 M_R 是满足条件 (C_1) 的 σ-刚性模，则由引理 1.2(2) 可知它是刚性的。
(3) 假设 M_R 是 σ-半交换的，则 M_R 满足条件 (C_1)。令 $m \in M$，且 $e^2 = e \in R$，则有 $me(1-e) = 0$，于是 $meR\sigma((1-e)) = 0$，因此对所有 $r \in R$，由 [15, 引理 2.9] 可得 $mer(1-e) = 0$。此外，我们有 $m(1-e)e = 0$，这说明对所有 $r \in R$，$m(1-e)re = 0$。因此，对所有 $r \in R$，$mer = mre$。□

σ-刚性模的类不一定对同态像封闭。

例1.4。考虑 $R = \mathbb{Z}$，即所有整数构成的环。取 $M = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$，以及$N = 12\mathbb{Z}$，它是$M$的一个子模。显然，$M$ 是刚性的，但M/N 不是刚性的。考虑$m = 3 + N \in M/N$ 以及$a = 2 \in R$。我们有$ma^2 = 0$ 且$ma \neq 0$。

回顾一下，若模M_R 满足：对于任意非零因子$a \in R$ 和 0，以及$m \in M$，都有 $ma \neq 0$，则称其为无挠 模。模M 的子模N 称为M 的素子模，如果对于$m \in M$ 和$a \in R$，只要$ma \in N$，就有$m \in N$ 或$Ma \subseteq N$。

命题 1.5. 设 M_R 是无零因子环 R 上的一个模，且 N 是 M 的素子模，并且 M/N 无挠。那么，M 是 σ-刚性的，当且仅当 N 和 M/N 是 σ-刚性的。

证明。($\Rightarrow$)。显然，N 是 σ-刚性的。现在，设 $m \in \overline{M}/N$，且 $ma\sigma(a) = 0$，因此 $ma\sigma(a) \in N$。由于 N 是素子模，因此 $m \in N$ 或 $Ma\sigma(a) \subseteq N$。若 $m \in N$，则 $ma \in N$，所以 $ma = 0$。现在，若 $Ma\sigma(a) \subseteq N$，则 $(M/N)a\sigma(a) = 0$ 属于 M/N。由于 M/N 无挠且 R 无零因子，可得 $a\sigma(a) = 0$。于是 $ma\sigma(a) = 0$，这意味着 $ma = 0$，因为 M 是 σ-刚性的。因此 $ma = 0$。故 M/N 是 σ-刚性的。

($\Leftarrow$)。设 $m \in M$ 且 $a \in R$，使得 $ma\sigma(a) = 0$。若 $m \in N$，由于 N 是 σ-刚性的，我们有 $ma = 0$。现在，假设 $m \notin N$。由于 N 是素的，由 $ma\sigma(a) \in N$ 可得 $Ma\sigma(a) \subseteq N$。因此，$(M/N)a\sigma(a) = 0$ 于 M/N 中。但 M/N 是 σ-刚性的，所以 $(M/N)a = 0$，这意味着 $a = 0$，因为 M/N 是无挠的，且 R 没有零因子。因此 $ma = 0$。□

下一个例子表明，命题 1.5 中的条件“R 没有零因子”并非多余。

例1.6. 设 F 是一个域，$R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$，且 σ 是R 的一个自同态，使得 $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$。考虑右$R$-模$M = \begin{pmatrix} 0 & F \\ F & F \end{pmatrix}$ 及子模$K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$。

(1) 根据 [13, 例 2.6], K 和 M/K 是 σ-刚性的，但 M 不是 σ-刚性的。(2) K 是 M 的一个素子模。设 $\mathrm{m} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} ! \in \mathrm{M}$ 且 $\mathrm{a} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ 0 & \mathrm{z} \end{pmatrix} ! \in \mathrm{R}$。我们有 $\mathrm{ma} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ $\mathrm{z}\,\mathrm{x}\,\mathrm{y} + \gamma \mathrm{z} !$。于是 $\mathrm{ma} \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \alpha = 0$ 或者 $\mathrm{x} = 0$。如果 $\alpha = 0$，则 $\mathrm{m} \in \mathrm{K}$。现在，假设 α , 0，因此 $\mathrm{x} = 0$。容易看出 $\mathrm{Ma} \subseteq \mathrm{K}$。因此 K 是素子模。

(3) 环 R 有零因子。对于$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ! \in R$，我们可以取$R$ 中任意形如$b = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} !$ 的元素，其中 α , 0。我们有$ab = ba = 0$。因此，a 是一个零因子。

2. 三角矩阵模与多项式模

本节中，我们考察一些模扩张的 σ-刚性，例如三角矩阵模、普通多项式模和斜多项式模。根据例子 2.6 和 2.7， σ-刚性模这一类在模扩张下未必封闭。

对于非负整数 $n \geq 2$。考虑

$$V_n(M) := \left\{ \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{n-1} \\ 0 & m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_{n-2} \\ 0 & 0 & m_0 & m_1 & \dots & m_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_0 \end{pmatrix} \Big| \, m_0, m_1, m_2, \cdots, m_{n-1} \in M \right\}$$

and

$$V_n(R) := \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \Big| \, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in R \right\}$$

我们用 $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 表示 $V_n(R)$ 的元素，用 $(m_0, m_1, \cdots, m_{n-1})$ 表示 $V_n(M)$ 的元素。显然，在通常的矩阵加法运算和以下数乘运算下，$V_n(M)$ 是一个右 $V_n(R)$-模。

对于 $\mathrm{U} = (\mathrm{m}_0,\mathrm{m}_1,\cdots,\mathrm{m}_{n-1}) \in \mathrm{V}_n(\mathrm{M})$ 以及 $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_{n-1}) \in \mathrm{V}_n(\mathrm{R})$，$\mathrm{UA} = (\mathrm{m}_0\mathrm{a}_0,\mathrm{m}_0\mathrm{a}_1+\mathrm{m}_1\mathrm{a}_0,\cdots,\mathrm{m}_0\mathrm{a}_{n-1}+\mathrm{m}_1\mathrm{a}_{n-2}+\cdots+\mathrm{m}_{n-1}\mathrm{a}_0) \in \mathrm{V}_n(\mathrm{M})$。此外，$\mathrm{V}_n(\mathrm{M}) \cong \mathrm{M}[\mathrm{x}]/\mathrm{M}[\mathrm{x}](\mathrm{x}^n)$，其中 $\mathrm{M}[\mathrm{x}](\mathrm{x}^n)$ 是由 x^n 生成的 $\mathrm{M}[\mathrm{x}]$ 的子模；而 $\mathrm{V}_n(\mathrm{R}) \cong \mathrm{R}[\mathrm{x}]/(\mathrm{x}^n)$，其中 (x^n) 是由 x^n 生成的 $\mathrm{R}[\mathrm{x}]$ 的理想。R 的自同态 σ 可以扩展到 $\mathrm{V}_n(\mathrm{R})$ 和 $\mathrm{R}[\mathrm{x}]$, , 在这两种情况下我们都用 σ 表示它。从现在起，我们将自由地使用这些同构}

$$V_n(M) \cong M[x]/M[x](x^n) \text{ and } V_n(R) \cong R[x]/(x^n).$$

命题 2.1。 设 M_R 是一个模，且 $n \geq 2$ 为整数。则
(1) 若 $M[x]/M[x](x^n)$ 是 $\bar{\sigma}$-半交换(作为右 $R[x]/(x^n)$-模)，则 M_R 是

σ-半交换，
(2) 如果 $M[x]/M[x](x^n)$ 是 σ-刚性的(作为右 $R[x]/(x^n)$-模，那么 M_R 是 σ-刚性的。

证明。 设 $U = (m, 0, 0, \cdots, 0) \in V_n(M)$，且 $A = (a, 0, 0, \cdots, 0) \in V_n(R)$，其中 $m \in M_R$且 $a \in R$。
(1) 假设 ma $= 0$。那么 MA $= (\mathrm{ma}, 0, 0, \cdots, 0) = 0$，由于 $\mathrm{V}_n(\mathrm{M})$ 是 σ-半交换的，对于任意 $\mathrm{B} = (\mathrm{r}, 0, \cdots, 0) \in \mathrm{V}_n(\mathrm{R})$，其中 r 是 R 的任意元素，有 $\mathrm{UB}\sigma(\mathrm{A}) = 0$。但是 $\mathrm{UB}\sigma(\mathrm{A}) = (\mathrm{mr}\sigma(\mathrm{a}), 0, \cdots, 0) = 0$，因此对于任意 $\mathrm{r} \in \mathrm{R}$，都有 $\mathrm{mr}\sigma(\mathrm{a}) = 0$。所以 M_R 是 σ-半交换的。

(2) 假设 $ma\sigma(a) = 0$。那么 $UA\sigma(A) = (ma\sigma(a), 0, 0, \cdots, 0) = 0$。由于$V_n(M)V_n(R)$ 是 σ-刚性的，我们得到 $UA = 0 = (ma, 0, 0, \cdots, 0)$，因此 $ma = 0$。所以 M_R 是σ-刚性的。
□

推论 2.2. 设 M_R 是一个模，且 $n \geq 2$ 是一个整数。如果 $M[x]/M[x](x^n)$ 是 σ-约化的(作为右 $R[x]/(x^n)$-模)，那么 M_R 是 σ-约化的。

推论 2.3 ([3, 命题 2.14])。 若对任意整数 $n \geq 2$，环 $R[x]/(x^n)$ 都是半交换的，那么 R 是半交换环。

所有约化环都是 Armendariz 的。也存在非约化 Armendariz 环。对于正整数 n，令 $\mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$ 表示模 n 的整数环。对于每个正整数 n，当 n 不是无平方因子时，环 $\mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$ 是 Armendariz 的，但不是约化的 [9, 命题 2.1]。

推论 2.4. 若 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为右 $R[x]/(x^n)$-模是 σ-约化的，则 M_R 是σ-斜 *Armendariz* 的。

证明。 若 M_R 是 σ-约化的，则它是 σ-斜 Armendariz 的（见 [2, 定理 2.20]）。□

注意，推论 2.4 的逆命题不一定成立，因为 $M = \mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$ 是 Armendariz 的，但不是约化的（n 不是无平方因子的），因此根据推论 2.2，$V_n(M)$ 不是约化的。此外，根据下面的例子，命题 2.1 和推论 2.2 的逆命题也可能不成立。对于第一个例子，若 M_R 是 σ-半交换的，则右 $R[x]/(x^n)$-模$M[x]/M[x](x^n)$ 不一定是 σ-半交换的。

例 2.5 ([5, 例 2.9]). 考虑环 $R = \left(\begin{matrix} a & b \\ 0 & a \end{matrix} \middle| a, b \in \mathrm{Z} \right)$，其自同态 σ 定义为 $\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$。模 R_R 根据 [5, 例2.5(1)]是 σ- 半交换的。取

$$A = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \in V_2(R).$$

我们有 $AB = 0$，但对于 $C = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in V_2(R)$，我们得到$AC\sigma(B) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$，0。因此，$V_2(R)$ 作为右$V_2(R)$-模并非 σ-半交换。

现在，若M_R 是 σ-约化的（分别地， σ-刚性的），则右$R[x]/(x^n)$-模$M[x]/M[x](x^n)$ 不是 σ-约化的（分别地， σ-刚性的）。

例2.6. 设 K 是一个域，则 K 作为右 K-模是约化的。考虑多项式 $p = x \in \mathrm{K}[x]/x^2\mathrm{K}[x]$。我们有 $p \neq 0$，因为 $x \notin x^2\mathrm{K}[x]$ 但 $p^2 = \overline{0}$。因此，$\mathrm{K}[x]/x^2\mathrm{K}[x] \simeq V_2(\mathrm{K})$ 作为右$V_2(\mathrm{K})$-模不是约化的

例 2.7. 设 $R = \mathrm{K}\langle x,y\rangle$ 是域 K 上两个非交换不定元的多项式环。考虑右R-模 $M = R/xR$。模 M 具有刚性，但根据 [13, 例2.18]，它不是半交换的。

现在，对于$U = \begin{pmatrix} 1+xR & xR \\ 0 & 1+xR \end{pmatrix} \in V_2(M)$ 和$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V_2(R)$。我们有$UA^2 = 0$，然而$UA = \begin{pmatrix} 0 & 1+xR \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$。因此$V_2(M)$ 作为右$V_2(R)$-模不具有刚性。

令$n \geq 2$ 为整数，我们有：

$$\begin{array}{c} V_n(M) \text{ is } \overline{\sigma}-\text{rigid} \\ \Uparrow \not\Downarrow \\ M_R \text{ is } \sigma-\text{rigid} \\ \Downarrow \not\Uparrow \\ M[x] \text{ is } \overline{\sigma}-\text{rigid} \end{array}$$

问题 2.8。 在什么条件下，M_R 是 σ-刚性的 $\Rightarrow V_n(M)$ 是 σ-刚性的?

命题 2.9。 设 $n \geq 2$ 为整数，且 M_R 是一个 σ-刚性模。若 M_R 是 σ-半交换的，则 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为右 $R[x]/(x^n)$-模是$\overline{\sigma}$-半交换的。

证明。令 $\mathrm{U} = (\mathrm{m}_0, \mathrm{m}_1, \cdots, \mathrm{m}_{n-1}) \in V_n(\mathrm{M})$，且 $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{n-1})$、$\mathrm{B} = (\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \cdots, \mathrm{b}_{n-1}) \in V_n(\mathrm{R})$，使得 $\mathrm{UA} = 0$。我们将证明 $\mathrm{UB}\sigma(\mathrm{A}) = 0$。我们有 $\mathrm{UA} = (\mathrm{m}_0\mathrm{a}_0, \mathrm{m}_0\mathrm{a}_1 + \mathrm{m}_1\mathrm{a}_0, \cdots, \mathrm{m}_0\mathrm{a}_{n-1} + \cdots + \mathrm{m}_{n-1}\mathrm{a}_0)$，$\mathrm{UB} = (\mathrm{m}_0\mathrm{b}_0, \mathrm{m}_0\mathrm{b}_1 + \mathrm{m}_1\mathrm{b}_0, \cdots, \mathrm{m}_0\mathrm{b}_{n-1} + \cdots + \mathrm{m}_{n-1}\mathrm{b}_0) = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1})$，并且 $\mathrm{UB}\sigma(\mathrm{A}) = (\beta_0\sigma(\mathrm{a}_0), \beta_0\sigma(\mathrm{a}_1) + \beta_1\overline{\sigma}(\mathrm{a}_0), \cdots, \beta_0\sigma(\mathrm{a}_{n-1}) + \beta_1\sigma(\mathrm{a}_{n-2}) + \cdots + \beta_{n-1}\sigma(a0))$。由 $UA = 0$，我们得到以下方程组。

$$(0) \qquad 0 = m_0a_0$$

$$(1) \qquad = m_0a_1 + m_1a_0$$

$$\vdots$$

$$(n-1) \qquad = m_0a_{n-1} + m_1a_{n-2} + \cdots + m_{n-1}a_0$$

方程（0）意味着 $\mathrm{m}_0\mathrm{a}_0 = 0$，于是 $\mathrm{m}_0\mathrm{R}\sigma(\mathrm{a}_0) = 0$。将方程（1）右乘 $\sigma(\mathrm{a}_0)$，得到 $\mathrm{m}_0\mathrm{a}_1\sigma(\mathrm{a}_0) + \mathrm{m}_1\mathrm{a}_0\sigma(\mathrm{a}_0) = 0$ (1′)。由于 $\mathrm{m}_0\mathrm{a}_1\sigma(\mathrm{a}_0) = 0$，且 $\mathrm{m}_0\mathrm{R}\sigma(\mathrm{a}_0) = 0$，我们有 $\mathrm{m}_1\mathrm{a}_0\sigma(\mathrm{a}_0) = 0$。但是 M_R 是 σ-刚性的，因此 $\mathrm{m}_1\mathrm{a}_0 = 0$。由方程（1）还可得 $\mathrm{m}_0\mathrm{a}_1 = 0$。对于这两种情况，我们都有 $\mathrm{m}_1\mathrm{R}\sigma(\mathrm{a}_0) = \mathrm{m}_0\mathrm{R}\sigma(\mathrm{a}_1) = 0$。至此总结如下：$\mathrm{m}_0\mathrm{a}_0 = \mathrm{m}_0\mathrm{a}_1 = \mathrm{m}_1\mathrm{a}_0 = 0$，且 $\mathrm{m}_0\mathrm{R}\sigma(\mathrm{a}_0) = \mathrm{m}_0\mathrm{R}\sigma(\mathrm{a}_1) = \mathrm{m}_1\mathrm{R}\sigma(\mathrm{a}_0) = 0$。假设结论对 i 之前的情形成立，将方程（i+1）右乘 $\sigma(\mathrm{a}_0)$，得到

$$(i+1)' \qquad 0 = m_0a_{i+1}\sigma(a_0) + m_1a_i\sigma(a_0) + \cdots + m_ia_1\sigma(a_0) + m_{i+1}a_0\sigma(a_0)$$

根据归纳假设，我们有

$$m_0a_{i+1}\sigma(a_0) = m_1a_i\sigma(a_0) = \cdots = m_ia_1\sigma(a_0) = 0.$$

那么 $m_{i+1}a_0\sigma(a_0) = 0$，由此可得 $m_{i+1}a_0 = 0$，因此 $m_{i+1}R\sigma(a_0) = 0$。按同样的方法，分别在方程 (i+1)′ 的右侧乘以 $\sigma(a_1)$、$\sigma(a_2)$、$\cdots$、$\sigma(a_i)$，可得对所有 $k = 0$、1、$\cdots$、$i+1$，均有 $m_ka_{i+1-k} = 0$。因此，当 $i+1$ 时结论成立。也就是说，$m_ia_j = 0$，因此对所有满足 $i+j \le n-1$ 的整数 i 和 j，均有 $m_iR\sigma(a_j) = 0$。所以，$UB\sigma(A)$ 的所有分量均为零。因此，$V_n(M)$ 是σ-半交换的。□

推论 2.10. (1) 如果 M_R 是 σ-约化的，那么 $M[x]/M[x](x^n)$ 是右 $R[x]/(x^n)$-模的σ-半交换模。
(2) 若 M_R 是约化的，则 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为右 $R[x]/(x^n)$-模是半交换的。(2) 若 R 是约化的，则 $R[x]/(x^n)$ 是半交换的。

推论 2.11 ([8, 定理 3.9]). (1)若 M_R 是 σ-刚性模，则 M_R 是 σ-半交换的，当且仅当 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为右 $R[x]/(x^n)$-模是 σ-半交换的。

(2) 若 M_R 是刚性模，则 M_R 是半交换的，当且仅当 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为右 $R[x]/(x^n)$-模是半交换的。

证明。 由命题 2.1(1) 和 2.9 可得。 □

推论 2.12。 设 $n \ge 2$ 为一个整数。若 $M[x]/M[x](x^n)$作为右 $R[x]/(x^n)$-模是 *Armendariz* 的，则 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为右 $R[x]/(x^n)$-模是半交换的。

证明。 由 [15, 定理 1.9]和推论 2.10(2)可得。 □

For $U = (m_0, m_1, \cdots, m_{n-1}) \in V_n(M)$, $A = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in V_n(R)$.
考虑 $\alpha_i \in V_n(M)$，使得对于所有 $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$，都有 $\alpha_i = m_0a_i + m_1a_{i-1} + \cdots + m_ia_0$。我们有 $UA = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ 和 $UA\sigma(A) = (\alpha_0\sigma(a_0), \alpha_0\sigma(a_1)+\alpha_1\sigma(a_0), \cdots, \alpha_0\sigma(a_{n-1})+\alpha_1\sigma(a_{n-2}) + \cdots + \alpha_{n-1}\sigma(a_0))$。

命题 2.13。 设 $n \ge 2$ 为一个整数，且 M_R 是一个 σ-约化模。若 $UA\sigma(A) = 0$，则对所有非负整数 i, j，若 $i+j = 0, 1, \cdots, n-1$，则 $\alpha_i\sigma(a_j) = 0$。

证明。 由$UA\sigma(A) = 0$，我们得到以下方程组。

$$(0) \qquad 0 = m_0\sigma(a_0)$$

$$(1) \qquad = m_0\sigma(a_1) + m_1\sigma(a_0)$$

$$\vdots$$

$$(n-1) \qquad = m_0\sigma(a_{n-1}) + m_1\sigma(a_{n-2}) + \cdots + m_{n-1}\sigma(a_0)$$

对于$i+j = 0$，方程（0）推出 $\alpha_0\sigma(a_0) = 0$。假设$k \ge 0$，并设对于满足$i+j \le k$的所有i、j，均有$\alpha_i\sigma(a_j)$。现在，将方程（$k+1$）右乘 $\sigma^2(a_0)$，得到：

$$(k+1)' \qquad \alpha_0\sigma(a_{k+1})\sigma^2(a_0) + \alpha_1\sigma(a_k)\sigma^2(a_0) + \cdots + \alpha_{k+1}\sigma(a_0)\sigma^2(a_0) = 0$$

根据归纳假设，对于所有a，$= 0$ 对所有$i \le k$均成立；又因为M_R 是 σ-半交换的，所以对于所有$i \le k$，$= 0R\sigma^2(a_0)$ 均成立。因此，方程 $(k+1)'$ 给出

$\alpha_{k+1}\sigma(a_0)\sigma^2(a_0) = 0$ 这意味着 $\alpha_{k+1}\sigma(a_0) = 0$，根据$M_R$的 σ-刚性。因此，方程$k+1$ 变为:

$$(k+1)'' \qquad \alpha_0\sigma(a_{k+1}) + \alpha_1\sigma(a_k) + \cdots + \alpha_k\sigma(a_1) = 0$$

将方程 $(k+1)''$ 右乘 $\sigma^2(a_1)$，并利用对所有 $0 \le i \le k-1$ 都有$\alpha_i R\sigma^2(a_1) = 0$这一事实，可得 $\alpha_k\sigma(a_1)\sigma^2(a_1) = 0$，这意味着 $\alpha_k\sigma(a_1) = 0$。继续这一过程可得，对于满足 $i+j = k+1$ 的所有 i、j，均有 $\alpha_i(a_j) = 0$。因此，对于满足 $i+j = 0、1、\cdots、n-1$ 的所有非负整数 i、j，均有$\alpha_i\sigma(a_j) = 0$。□

设R 是一个交换整环。集合 $T(M) = \{m \in M \mid r_R(m), 0\}$ 称为M_R的挠子模 。若$T(M) = M$（分别地，$T(M) = 0$），则M_R 是挠（分别地，是无挠）。

推论 2.14. 设 R 是交换整环，M_R 是无挠模。那么对于任意整数 $n \ge 0$，有：(1) M_R 是 σ-约化的，当且仅当 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为 $R[x]/(x^n)$-模是 σ-约化的。(2)M_R 是约化的，当且仅当 $M[x]/M[x](x^n)$ 作为 $R[x]/(x^n)$-模是约化的。

证明. ($\Leftarrow$) 由推论 2.2 显然。($\Rightarrow$) 由命题 2.9，$V_n(M)$ 是 σ-半交换的。另一方面，若取U 和 A 如命题 2.13 中所示，使得 $UA\sigma(A) = 0$，则对于所有i、j，可得 $\alpha_i\sigma(a_j) = 0$；于是对于所有 i，有 $\alpha_i = 0$，因为 M_R 是无挠的，因此 $UA = 0$。所以 $V_n(M)$ 是 σ-刚性的。因此$V_n(M)$ 是σ-约化的。□

环 R 的正则元是指非零且不是零因子的元素。设 S 是 R 中由中心正则元组成的乘法封闭子集。我们可以对 R 和 M 关于 S 作局部化。设 σ 是 R 的一个自同态，考虑映射 $S^{-1}\sigma: S^{-1}R \to S^{-1}R$，其定义为 $S^{-1}\sigma(a/s) = \sigma(a)/s$，其中对任意 $s \in S$，$\sigma(s) = s$。于是 $S^{-1}\sigma$ 是环 $S^{-1}R$ 的一个自同态。显然，$S^{-1}\sigma$ 扩张了 σ，我们将其记为 σ。接下来，我们将讨论局部化 $S^{-1}M$ 何时作为右 $S^{-1}R$-模是 σ-刚性的。

引理 2.15。 设 S 是环 R 的乘法封闭子集，由所有正则中心元组成。右 R-模 M 是 σ-刚性的，当且仅当 $S^{-1}M$ 是 σ-刚性的（作为右 $S^{-1}R$-模）。

证明。显然，若 $S^{-1}M$ 是 σ-刚性的，则 M 是 σ-刚性的，因为 σ-刚性模的类对子模封闭。反之，设 M_R 是 σ-刚性的，取 $(m/s) \in S^{-1}M$ 和 $(a/t) \in S^{-1}R$，使得 $(m/s)(a/t)\sigma((a/t)) = 0$ 属于 $S^{-1}M$。根据假设，$ma\sigma(a) = 0$，因此 $ma = 0$。于是 $(m/s)(a/t) = 0$，故 $S^{-1}M$ 是 σ-刚性的。□

命题 2.16. 设 M 是一个右 R-模。则 $M[x]_{R[x]}$ 是 σ-刚性的，当且仅当 $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ 是 σ-刚性的。

证明。 考虑$S = \{1, x, x^2, \cdots\} \subseteq R[x]$。显然，$S$ 是环$R[x]$ 中由所有中心正则元构成的乘法封闭子集。此外，我们有$S^{-1}M[x] = M[x,x^{-1}]$，并且$S^{-1}R[x] = R[x,x^{-1}]$。由引理 2.15 可得结论。□

推论 2.17. 设 R 是一个环，M 是一个右 R-模。那么
(1) $M[x]_{R[x]}$ 是刚性的，当且仅当 $M[x,x^{-1}]_{R[x,x^{-1}]}$ 是刚性的 ，
(2) $R[x]$ 是刚性的，当且仅当 $R[x,x^{-1}]$ 是刚性的。

证明。 显然可由命题 2.16 得出。 □

命题 2.18. 若 $M[x;\sigma]_{R[x;\sigma]}$ 是刚性的，则 M_R 是 σ-刚性的。

证明。假设 $M[x;\sigma]$ 是刚性的。考虑 $m(x) = m \in M[x;\sigma]$ 和 $f(x) = ax \in R[x;\sigma]$，使得 $ma\sigma(a) = 0$。我们有 $m(x)[f(x)]^2 = ma\sigma(a)x^2 = 0$，于是 $m(x)f(x) = 0$，因为 $M[x;\sigma]$ 是刚性的。但 $m(x)f(x) = 0$ 蕴含 $ma = 0$。证毕。□

根据 Krempa [14]，，如果环 R 是 σ-刚性的，那么$R[x;\sigma]$ 是约化的，因此$R[x;\sigma]$ 是刚性的。此外，如果模M_R 是 σ-刚性的且 σ-半交换的，那么$M[x;\sigma]_{R[x;\sigma]}$ 是约化的（定理 1.6]）。然而，我们不知道能否从这一推论中去掉 σ-半交换性。

致谢

作者对审稿人致以由衷的谢意，感谢其为改进本文提出的诸多宝贵意见和建议。

参考文献

[1] N. Agayev, G. Gungoroglu, A. Harmanci 等，阿贝尔模，《科门尼乌斯大学数学学报》，78(2)，(2009)，235-244。[2] N. Agayev, A. Harmanci 和 S. Halicio˘glu，关于约化模，《安卡拉大学理学院通讯 A1 辑》，58(1)，(2009)，9-16。[3] N. Agayev 和 A. Harmanci，关于半交换模与环，《庆北数学杂志》47(2007)，21-30。

[4] 30 2002 2511 2528 S.

[5] Annin，斜多项式环上的关联素理想，《代数通讯》，( )，- M. Baser, A. Harmanci 和 T. K. Kwak，广义半交换环及其扩张，《韩国数学会通报》45 (2008)，第 2 期，285-297。[6] A. M. Buhphang, S. Halicioglu, A. Harmanci, K. H. Singh, H. Y. Kose, M. B. Reg，关于刚性模，《东西方数学杂志》15(1)，(2013) 70-84。[7] A. M. Buhphang 和 M. B. Rege，半交换模与 *Armendariz* 模，《阿拉伯数学科学杂志》8 (2002)，53-65。[8] J. L. Chen 和 C. P Zhang，σ-斜 *Armendariz* 模与 σ-半交换模，《台湾数学杂志》12(2) (2008)，473-486。[9] S. Chhawchharia 和 M. B. Rege，*Armendariz* 环，《日本学士院纪要 A 辑：数学科学》73 (1997)，14-17。[10] Y. Hirano，关于斜多项式环中系数环的唯一性，《德布勒森数学出版物》54 (1999)，489-495。[11] C. Y. Hong, N. K. Kim 和 T. K. Kwak，*Baer* 环与投射主理想环的 *Ore* 扩张，《纯粹与应用代数杂志》151(3) (2000)，215-226。[12] C. Y. Hong, N. K. Kim 和 T. K. Kwak，关于斜 *Armendariz* 环，《代数通讯》31(1) (2003)，103-122。[13] E. Guner 和 S. Halicioglu，广义刚性模，《哥伦比亚数学杂志》48(1)，(2014)，111-123。[14] J. Krempa，约化环的一些例子，《代数学刊》3(4) (1996)，289-300。[15] T. K. Lee 和 Y. Zhou，约化模，《环、模、代数与阿贝尔群》，365-377，纯粹与应用数学讲义 236，Dekker，纽约，(2004)。

MOHAMED LOUZARI，阿卜杜勒马利克·埃萨迪大学，理学院，数学系，得土安，摩洛哥电子邮箱地址：mlouzari@yahoo.com

ARMANDO REYES，哥伦比亚国立大学，波哥大校区，数学系，哥伦比亚电子邮箱地址：mareyesv@unal.edu.co