不确定随机系统的线性与非线性事件触发扩张状态观测器

Ze-Hao Wu、Feiqi Deng、Hua-Cheng Zhou 和 Zhi-Liang Zhao

arXiv:2302.02395v1 [math.OC] 5 Feb 2023

摘要—本文针对一类由有界有色噪声驱动的不确定随机系统，设计了线性与非线性事件触发扩张状态观测器。针对线性与非线性事件触发扩张状态观测器的设计，分别提出了两个事件生成器，确保随机系统每条样本路径解的最小事件间隔时间为正。本文通过严格的理论证明，给出了对未测状态以及随机总扰动（包括内部不确定性和外部随机噪声）的估计误差的均方收敛性和几乎必然收敛性。与线性事件触发扩张状态观测器相比，理论结果表明，基于齐次性的非线性观测器具有更高的估计精度，但代价是触发频率更高。本文通过数值仿真验证了理论结果。

索引词—随机系统、扩张状态观测器、事件触发机制、估计、有色噪声。

一、引言

鉴于 Wing 实际工程系统中不确定性和扰动普遍存在，不确定系统的扰动抑制近几十年来一直是控制领域的主流研究课题之一。主动抗扰控制（ADRC） [1], 是一种基于估计补偿策略的创新型控制技术，能够应对大规模系统中的不确定性和扰动。大量工程应用验证了 ADRC 的重要性。ADRC 的关键组成部分是扩张状态观测器（ESO），它可以设计为线性或非线性形式，旨在实时估计未测状态以及影响系统性能的总扰动（扩张状态）；基于 ESO 获得的估计值，可以设计由反馈控制和补偿器构成的主动抗扰控制器，以实现扰动抑制并达到预期的控制目标。因此，ESO 收敛性的理论基础对于 ADRC 的理论研究与实际应用至关重要。

过去二十年来，人们一直在研究不确定系统中线性和常见非线性扩张状态观测器的收敛性

Ze-Hao Wu现任佛山大学数学与大数据学院，地址：中国佛山，邮编528000。电子邮箱：zehaowu@amss.ac.cnFeiqi Deng现任华南理工大学系统工程研究所，地址：中国广州，邮编510640。电子邮箱：aufqdeng@scut.edu.cnHua-Cheng Zhou现任中南大学数学与统计学院，地址：中国长沙，邮编410075。电子邮箱：hczhou@amss.ac.cnZhi-Liang Zhao现任陕西师范大学数学与信息科学学院，地址：中国西安，邮编710119。电子邮箱：gsdxzzl@mail.ustc.edu.cn

，参见 [2], [3] 及其中的参考文献。文献 [4], [5]也研究了基于指数稳定系统和有限时间稳定系统的不确定随机系统中线性扩张状态观测器和非线性扩张状态观测器的收敛性。值得注意的是，关于扩张状态观测器设计和理论分析的大多数研究都基于连续时间输出测量。然而，在当前普遍采用的网络化控制系统或数字控制系统中，一个关键问题是如何减少通信与计算资源的使用。这极大地推动了当前对系统估计与控制中事件触发机制（ETM）的研究，主要是因为该机制能够节省通信与计算资源（例如，参见 [6], [7], [8], [9] 及其中的参考文献）。

文献 [6], 研究了一类不确定系统中非线性事件触发扩张状态观测器的收敛性，其中非线性增益函数由一个指数稳定系统构造，并将线性事件触发扩张状态观测器作为特例涵盖在内。然而，不可否认的是，在实际应用中，不确定性和扰动往往具有随机性。事件触发机制要实现实用且可行，一个重要问题是避免芝诺现象（即触发条件在有限时间内被满足无限次），而这给不确定随机系统中事件触发扩张状态观测器的设计带来了挑战。这是因为存在随机噪声时，即使初始条件是确定的，系统状态的每条样本路径也可能呈现不同的变化；具体而言，执行时刻/采样时刻及依赖于样本路径的执行间隔时间都是随机的，而非确定的，因此，要为随机执行间隔时间求得一个正的下界（即排除芝诺现象）非常复杂，甚至是不可能的。近期，针对随机系统提出了带驻留时间（时间正则化）的新型事件触发机制和周期事件触发机制，强制事件触发机制保证正的最小事件间隔时间，参见例如文献 [7], [8], [9]。这些设计框架可以直接排除芝诺现象，但理论分析会变得更加困难。

另一方面，与 [6]中近似线性的非线性扩张状态观测器相比，基于齐次性构造的有限时间稳定系统的非线性扩张状态观测器应用更为广泛，且已被证明具有更高的估计精度和更好的抗噪性能 [3], [5], [19]；然而，基于齐次性的不确定系统非线性事件触发扩张状态观测器的收敛性问题仍未解决，而其随机对应形式则更为一般且复杂。

受上述研究现状的启发，本文针对一类

受有界有色噪声驱动的不确定随机系统，设计了线性和非线性事件触发扩张状态观测器。主要贡献和创新可概括如下：a）不确定随机系统受到大规模随机总扰动的影响，该扰动是未建模动态、外部确定性扰动、有界噪声和有色噪声产生的总非线性耦合作用；b）针对不确定随机系统设计了新型线性/非线性事件触发扩张状态观测器，并通过严谨的理论证明给出了暂态过程中的均方收敛性和几乎必然收敛性；c）理论结果表明，与线性事件触发扩张状态观测器相比，基于齐次性设计的非线性事件触发扩张状态观测器具有更高的估计精度，但触发频率也更高。

本文安排如下。第二节介绍问题表述和一些预备知识。第三节给出线性和非线性事件触发扩张状态观测器的设计及其收敛性结果。第四节进行数值仿真，以验证理论结果的合理性；随后在第五节给出结论。为便于阅读，理论证明安排在附录 A 和附录 B 中。

II. 问题表述与预备知识

本文中使用以下记号。$\mathbb{E}$ 表示数学期望；$|Z|$ 表示标量 Z 的绝对值，$\|Z\|$ 表示向量 Z 的欧几里得范数；I_n 表示 n 维单位矩阵；$\lambda_{\min}(Z)$ 和 $\lambda_{\max}(Z)$ 分别表示正定矩阵 Z 的最小特征值和最大特征值；$a\wedge b:=\min\{a,b\}$；$\langle\vartheta\rangle^s:=\text{sign}(\vartheta)|\vartheta|^s$，对所有 $\vartheta\in\mathbb{R}$ 和任意 $s>0$ 均成立；$\mathbb{I}_{\Omega_0}$ 表示示性函数，其在区域 Ω_0 内取值为 1，否则取值为 0；0_s表示所有分量均为零的 $1\times s$ 行向量。

为研究基于齐次性构造的非线性扩张状态观测器的收敛性，现介绍齐次性的定义及一些预备引理。

定义 II.1.（*[10]*）以下系统的零平衡点

$$\dot{\vartheta}(t)=\psi(\vartheta(t)),\ \vartheta(0)=\vartheta_0\in\mathbb{R}^s \tag{1}$$

若 $\psi\in C(\mathbb{R}^s;\mathbb{R}^s)$ 和 $\psi(0_s)=0_s$，则称其为全局有限时间稳定；即系统 (1) 的零平衡点是李雅普诺夫稳定的，且对于任意 $\vartheta_0\in\mathbb{R}^s$，存在 $T(\vartheta_0)>0$，使得系统 (1) 的解满足 $\lim_{t\to T(\vartheta_0)}\vartheta(t)=0_s$，并且对所有 $t\in[T(\vartheta_0)\ \infty)$，$\vartheta(t)=0_s$。

定义 II.2.（*[11]*）若函数 $W:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$ 满足：对于所有 $\lambda>0$ 以及所有 $(\vartheta_1,\cdots,\vartheta_s)\in\mathbb{R}^s$，均有 $W(\lambda^{w_1}\vartheta_1,\lambda^{w_2}\vartheta_2,\cdots,\lambda^{w_s}\vartheta_s)=\lambda^{\theta}W(\vartheta_1,\vartheta_2,\cdots,\vartheta_s)$，则称其关于权重 $\{w_l>0\}_{l=1}^s$是次数为 θ 的齐次函数。若向量场 $W:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$ 满足：对于所有 $l=1,\cdots,s$，其第 l 个分量 W_l 是次数为 $\theta+w_l$的齐次函数，即对于所有 $\lambda>0$ 以及所有 $(\vartheta_1,\cdots,\vartheta_s)\in\mathbb{R}^s$，均有 $W_l(\lambda^{w_1}\vartheta_1,\lambda^{w_2}\vartheta_2,\cdots,\lambda^{w_s}\vartheta_s)=\lambda^{\theta+w_l}W_l(\vartheta_1,\vartheta_2,\cdots,\vartheta_s)$，则称该向量场关于权重 $\{w_l>0\}_{l=1}^s$是次数为 θ 的齐次向量场。若向量场 ψ 是次数为 θ的齐次向量场，则系统 (1) 是次数为 θ 的齐次系统。

引理 II.1.（*[11, 定理 2]* 或 *[12, 定理 6.2]*）若系统 (1) 是次数为 θ、权重为 $\{w_l\}_{l=1}^s$的齐次系统，且其零平衡点全局渐近稳定，则对于任意$\mu>\max_{1\le l\le s}\{-\theta,w_l\}$，存在一个正定、径向无界函数 $W\in C^1(\mathbb{R}^s;\mathbb{R})\cap C^\infty(\mathbb{R}^s\setminus\{0_s\};\mathbb{R})$，使得 W 是关于权重 $\{w_l\}_{l=1}^s$的次数为 μ 的齐次函数，并且 $W(\vartheta)$ 沿向量场 ψ: $L_\psi W(\vartheta):=\nabla W(\vartheta)\psi(\vartheta)$的李导数是负定的。

引理 II.2. *[12, 引理 4.2]* 设 $W_1,W_2:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$ 为连续函数，分别关于相同的权重次数为.....的齐次，且W_1为正定。则对每个 $\vartheta\in\mathbb{R}^s$，有 $(\min_{\{z\in\mathbb{R}^s:\ W_1(z)=1\}}W_2(z))(W_1(\vartheta))^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\le W_2(\vartheta)\le(\max_{\{z\in\mathbb{R}^s:\ W_1(z)=1\}}W_2(z))(W_1(\vartheta))^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}$。

引理 II.3。 *[10, 引理 8]* 若 $\nu\in(1-\frac{1}{n},1)$，则向量场

$$\begin{aligned}&\Phi(\vartheta):=(\Phi_1(\vartheta),\cdots,\Phi_n(\vartheta),\Phi_{n+1}(\vartheta))\\&:=(\vartheta_2-a_1\langle\vartheta_1\rangle^{\nu},\cdots,\vartheta_{n+1}-a_n\langle\vartheta_1\rangle^{n\nu-(n-1)},\\&-a_{n+1}\langle\vartheta_1\rangle^{(n+1)\nu-n}),\forall\vartheta=(\vartheta_1,\cdots,\vartheta_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\end{aligned}\tag{2}$$

关于权重 $\{(l-1)\nu-(l-2)\}_{l=1}^{n+1}$，是次数为 $\nu-1$ 的齐次向量场。

定义

$$G=\begin{pmatrix}-a_1&1&0&\cdots&0\\-a_2&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_n&0&0&\ddots&1\\-a_{n+1}&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.\tag{3}$$

引理 II.4。 *[10, 定理 10]* 对于 $\nu\in(1-\frac{1}{n},1)$，若式 (3) 中的矩阵 G 是赫尔维茨矩阵，则系统 $\dot{\vartheta}(t)=\Phi(\vartheta(t))$ 是全局有限时间稳定的。

引理 II.5。（多维 Itˆo 公式）*[15, 第 36 页，定理 6。4]* 设 $x(t)$ 是定义在 $t\ge0$上的 n维 Itˆo 过程，其随机微分为 $dx(t)=f(t)dt+g(t)dB(t)$，其中 $f\in L^1([0,\infty);\mathbb{R}^n)$，$g\in L^2([0,\infty);\mathbb{R}^{n\times m})$，且 $B(t)$ 是 m维标准布朗运动。设$V\in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$。则 $V(x(t))$ 仍是一个 Itˆo 过程，其随机微分为

$$\begin{aligned}dV(x(t))&=[\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}f(t)+\frac{1}{2}Tr\{g^\top(t)\frac{\partial^2V(x(t))}{\partial x^2}g(t)\}]dt\\&\quad+\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}g(t)dB(t)\\&=:\mathcal{L}V(x(t))dt+\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}g(t)dB(t)\quad a.s.\end{aligned}\tag{4}$$

注 II.1. 式 (4) 中 $\mathcal{L}V(x(t))$ 的定义将在全文中使用。需要指出的是，由于随机微分中出现了有界有色噪声带来的一些随机系数，例如前面提到的 $f(t)$ 和 $g(t)$，我们无法直接定义无穷小生成元 $\mathcal{L}V$ 本身。不过，这不会妨碍后续的理论分析，因为我们只使用 $\mathbb{E}\mathcal{L}V(x(t))=\mathbb{E}dV_{(x(t))\,dt}$，其中当 $\int_0^t\frac{\partial V}{(x(s))\,\partial x}g(s)dB(s)$ 时，对于每个 $t\ge0$，它都是一个鞅。

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},P)$ 是一个完备滤过概率空间，其上配备滤过 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$，并定义了两个相互独立的一维标准布朗运动 $B_i(t)$ $(i=1,2)$。本文考虑一类由有界有色噪声驱动的不确定随机系统，如下所示：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t),\\ \qquad\vdots\\ \dot{x}_n(t)=f(t,x(t),v_1(t),v_2(t))+u(t),\\ y(t)=x_1(t),\end{cases}\tag{5}$$

其中，$x(t)=(x_1(t)\ \cdots,x_n(t))\in\mathbb{R}^n$、$u(t)\in\mathbb{R}$ 和 $y(t)\in\mathbb{R}$ 分别为状态、控制输入和输出测量；$f:\ [0,\infty)\times\mathbb{R}^{n+2}\to\mathbb{R}$ 是满足假设（A1）的未知系统函数；$v_1(t):=\sigma(t,B_1(t))$ 由未知有界函数 $\sigma:\ [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义，满足假设（A2），其为有界噪声；$v_2(t)$ 是有色噪声，它是 Itˆo 型随机微分方程的解（参见，例如 [13, p.426], [15, p.101]）：

$$dv_2(t)=-\alpha_1 v_2(t)dt+\alpha_1\sqrt{2\alpha_2}dB_2(t),\tag{6}$$

其中，$\alpha_1>0$ 和 $\alpha_2>0$ 分别为表示相关时间和噪声强度的常数。值得注意的是，白噪声作为一种均值为零且具有恒定谱密度的平稳随机过程，是布朗运动的广义导数（参见，例如 [16,p.51，定理 3.14]），并且常用于表示许多场景中的随机扰动。然而，由于其 δ 函数相关性是对真实过程相关性的理想化，而真实过程通常具有有限甚至很长的相关时间 [13]，因此白噪声无法始终描述实践中出现的随机扰动。更为现实的随机噪声可以是指数相关过程，即前述的有色噪声或 Ornstein-Uhlenbeck 过程 [13], [14]。

注 II.2。本文首次研究不确定随机系统的事件触发扩张状态观测器，其设计与分析均与 *[6]* 中的确定性对应系统有很大不同。因此，与 *[6]*，中考虑的被控对象类似，本文仅考虑最基础的本质积分链系统，其中存在匹配不确定性和扰动。这类系统在自抗扰控制的理论与应用研究中得到了广泛关注。本文旨在聚焦于不确定性和扰动具有随机性时，线性与非线性事件触发扩张状态观测器的新设计及其理论分析。将其推广到更一般的系统，例如下三角非线性系统 *[3]* 和多输入多输出系统 *[5]*，并不会造成实质性障碍，但这并非本文关注的重点。

III. 线性与非线性事件触发扩张状态观测器的设计及主要结果

定义系统 (5) 的随机总扰动（扩张状态）：$x_{n+1}(t)=f(t,x(t)\ v_1(t)\ v_2(t))$，其中包含未建模动态、外部确定性扰动、有界噪声和有色噪声的总非线性耦合效应。为估计系统 (5) 的未测量状态以及随机总扰动，设计如下线性事件触发扩张状态观测器（ESO）：

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1(t)=\hat{x}_2(t)+a_1 r\left(y(t_k)-\hat{x}_1(t)\right),\\ \dot{\hat{x}}_2(t)=\hat{x}_3(t)+a_2 r^2\left(y(t_k)-\hat{x}_1(t)\right),\\ \qquad\vdots\\ \dot{\hat{x}}_n(t)=\hat{x}_{n+1}(t)+a_n r^n\left(y(t_k)-\hat{x}_1(t)\right)+u(t),\\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t)=a_{n+1}r^{n+1}\left(y(t_k)-\hat{x}_1(t)\right),\end{cases}\tag{7}$$

其中，$t\in[t_k,t_{k+1})$ $k\in\mathbb{Z}^+$，r 为调节增益，参数 a_i的选取应使式（3）中定义的矩阵 G 为赫尔维茨矩阵；$\hat{x}(t):=(\hat{x}_1(t)\ \cdots,\hat{x}_{n+1}(t))$ 包含对状态 $x(t)$ 和随机总扰动 $x_{n+1}(t)$ 的估计；t_k为由以下事件触发机制确定的随机执行时刻（停时）。

$$t_{k+1}=\inf\{t\geq t_k+\tau:\ |y(t)-y(t_k)|\geq\theta r^{-(n+\frac{1}{2})}\},\tag{8}$$

其中，$t_1=0$、τ 为下述定理 III.1 中指定的正常数，θ 为任意自由的正调节参数。基于齐次性的非线性事件触发扩张状态观测器设计如下

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1(t)=\hat{x}_2(t)+\frac{a_1}{r^{n-1}}\left\langle r^n(y(t_k)-\hat{x}_1(t))\right\rangle^{\nu},\\ \dot{\hat{x}}_2(t)=\hat{x}_3(t)+\frac{a_2}{r^{n-2}}\left\langle r^n(y(t_k)-\hat{x}_1(t))\right\rangle^{2\nu-1},\\ \qquad\vdots\\ \dot{\hat{x}}_n(t)=\hat{x}_{n+1}(t)+a_n\left\langle r^n(y(t_k)-\hat{x}_1(t))\right\rangle^{n\nu-(n-1)}\\ \qquad\quad+u(t),\\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t)=a_{n+1}r\left\langle r^n(y(t_k)-\hat{x}_1(t))\right\rangle^{(n+1)\nu-n},\end{cases}\tag{9}$$

其中，$t\in[t_k,t_{k+1})$ $k\in\mathbb{Z}^+$、r 为调节增益，参数 a_i的选取应使式 (3) 中定义的矩阵 G 为赫尔维茨矩阵，ν 为下述定理 III.2 中指定的正常数；t_k为由下述事件触发机制确定的随机执行时刻（停时）

$$t_{k+1}=\inf\{t\geq t_k+\tau^*:\ |y(t)-y(t_k)|\geq\theta^* r^{-(n+\frac{1}{n\nu-(n-1)})}\},\tag{10}$$

其中，$t_1=0$、τ^* 为下述定理 III.2 中指定的正常数，θ^* 为正调节参数。

注释 III.1. 关于触发机制 (8)（或 (10)），每个执行间隔 $t_{k+1}-t_k$ 显然不小于 τ（或 τ^*），因此可以自然地避免芝诺现象。然而，在这些触发机制下对扩张状态观测器进行收敛性分析会更加复杂。还应指出，在触发机制 (8) 和 (10) 的设计中，只需监测输出测量，而无需实时监测，即可评估事件触发条件。此外，上述事件触发机制中的自由调节参数 θ 和 θ^* 会导致估计精度与触发频率之间存在权衡：当 θ 或 θ^* 调得较大时，触发频率会降低，但估计精度也会下降。从这些事件触发机制及下文的主要结果中可以很容易地看出这一点。

为保证线性和非线性事件触发扩张状态观测器的收敛性，需要满足以下假设。

假设（A1）。函数 f 关于其自变量（t，x）和（v_1，v_2）分别具有一阶连续偏导数和二阶连续偏导数，且存在已知常数 $\beta_i > 0$ （$i = 1$，2，3，4）以及非负函数 $\gamma_i \in C$（$\mathbb{R}$；$\mathbb{R}$）（$i = 1$，2），使得对于所有 $t \geq 0$、$x \in \mathbb{R}^n$、$v_1 \in \mathbb{R}$、$v_2 \in \mathbb{R}$，均有

$$|f(t,x,v_1,v_2)| + |\frac{\partial f(t,x,v_1,v_2)}{\partial t}| + |\frac{\partial f(t,x,v_1,v_2)}{\partial v_1}| + |\frac{\partial^2 f(t,x,v_1,v_2)}{\partial v_1^2}| \leq \beta_1 + \beta_2\|x\| + \beta_3\|v_2\| + \gamma_1(v_1);$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f(t,x,v_1,v_2)}{\partial x_i}| + |\frac{\partial f(t,x,v_1,v_2)}{\partial v_2}| + |\frac{\partial^2 f(t,x,v_1,v_2)}{\partial v_2^2}| \leq \beta_4 + \gamma_2(v_1).$$

假设（A2）。函数 σ（t，ς）：$[0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 关于 t 和 ς 分别具有一阶连续偏导数和二阶连续偏导数，且存在已知常数 $\beta_5 > 0$，使得对于所有 $t \geq 0$、$\varsigma \in \mathbb{R}$，

$$|\sigma(t,\varsigma)| + |\frac{\partial \sigma(t,\varsigma)}{\partial t}| + |\frac{\partial \sigma(t,\varsigma)}{\partial \varsigma}| + \frac{1}{2}|\frac{\partial^2 \sigma(t,\varsigma)}{\partial \varsigma^2}| \leq \beta_5.$$

假设（A3）。系统（5）的解 x（t）和输入 u（t）满足 $\mathbb{E}\|x(t)\|^2 + \mathbb{E}|u(t)|^2 \leq M$、$\forall t \geq 0$，其中 M 为某个已知正常数。

注释 III.2. 由于需要通过扩张状态观测器实时估计随机总扰动$x_{n+1}(t) = f(t, x(t)\ v_1(t)\ v_2(t))$，并最终在自抗扰控制框架下通过反馈回路对其进行补偿，因此根据假设（A1）–（A3），自然应保证随机总扰动及其“变化率”有界。此外，假设（A2）中的偏导数条件是针对定义有界噪声的函数$\sigma(\cdot,\cdot)$作出的假设，而不是针对随机噪声本身；可以看出，令 $v_1(t) = \sigma(t)$，即该函数仅与时间变量 t 有关时，传统确定性扰动就是它的一个特例；对于随机对应形式，实践中常见的有界噪声，如 $\sin(t + B_1(t))$ 和 $\cos(t + B_1(t))$（*[17], [18]*），才是满足假设（A2）且需要关注的对象。

注释 III.3。假设 (A3) 的合理性可进一步说明如下。首先需要强调的是，本文仅研究开环系统中扩张状态观测器的收敛性；假设 (A3) 中的状态有界性用于估计状态相关随机总扰动，除通常的结构性条件（即精确可观测性）外，还可视为开环系统 (5) 的一种“缓慢变化”条件。其次，如果随机总扰动与状态无关，或者仅估计状态，则从主要结果的以下证明中可以很容易地看出，我们可以去掉这一假设；也可参见例如 *[3]*。第三，许多实际控制系统的状态都是有界的，例如故障诊断中的系统 *[3]*。最后，扩张状态观测器是为主动抗扰控制目标而设计的关键组成部分，因此，当设计基于扩张状态观测器的反馈控制时，即同时进行估计与控制，由于闭环状态在均方意义下有界，因此不需要假设 (A3)，例如参见 *[4]*。这一课题将在后续论文中进一步研究。

令 $Q \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ 为李雅普诺夫方程 $QG + G^\top Q = -I_{n+1}$ 的唯一正定矩阵解。线性事件触发扩张状态观测器 (7) 在 (8) 条件下的均方收敛和几乎必然收敛总结如下定理 III.1。

定理 III.1. 假设假设 (A1)-(A3) 成立，并令 $\tau = \epsilon r^{-(n+\frac{1}{2})}$，其中任意自由调节参数为 $\epsilon > 0$。那么，对于任意初始值 $x(0) \in \mathbb{R}^n$、$\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^{n+1}$、$v_2(0) \in \mathbb{R}$、$T > 0$ $r \geq r^* = \max\{1, \frac{\lambda_{\max}^2(Q)}{\zeta}\}$，其中为满足 $0 < \zeta < 1$ 的任意常数，且所有 $i = 1$、$\cdots$、$n+1$，线性事件触发扩张状态观测器 (7) 在 (8) 条件下的估计误差满足

$$(i) \quad \mathbb{E}|x_i(t) - \hat{x}_i(t)|^2 \leq \frac{\Theta}{r^{2n+3-2i}}, \tag{11}$$

关于 $t \in [T, \infty$ 一致），其中 $\Theta > 0$ 是一个独立于 r 的常数；

$$(ii) \quad |x_i(t) - \hat{x}_i(t)| \leq \frac{\Theta_\omega}{r^{n+\frac{3}{2}-i}} \ \ a.s. \tag{12}$$

关于 $t \in [T, \infty$ 一致），其中 $\Theta_\omega > 0$ 是一个独立于 r 的随机变量。

证明。参见附录 A 中的“定理 III.1 的证明”。 □

为了保证非线性事件触发扩张状态观测器（9）在（10）条件下的收敛性，所要求的状态有界性需略强于假设（A3）中的条件。

假设（A4）。存在一个已知正常数 N，使得系统（5）的解 $x(t)$ 和输入 $u(t)$ 满足 $\mathbb{E}\|x(t)\|^p + \mathbb{E}|u(t)|^2 \leq N$，$\forall t \geq 0$，其中 p 是满足 $p > 2$ 的任意常数。

非线性事件触发扩张状态观测器（9）在（10）条件下的几乎必然收敛性总结如下定理 III.2。

定理 III.2. 假设假设 (A1)、(A2) 和 (A4) 成立，并且对任意自由调节参数 $\epsilon^* > 0$，令 $\nu \in (\max\{1 - \frac{p-2}{(p-2)n+p+1}, 1 - \frac{1}{2n-1}\}, 1)$ 和 $\tau^* = \epsilon^* r^{-(n+\frac{1}{n\nu-1}(n-1))}$。那么，存在某个 $r^* \geq 1$，使得对于任意初始值 $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v_2(0) \in \mathbb{R}$, $r \geq r^*$ 以及所有 $i = 1, \cdots, n+1$，在条件 (10) 下，非线性事件触发扩张状态观测器 (9) 的估计误差满足

$$|x_i(t) - \hat{x}_i(t)| \leq \frac{\Xi_{i,\omega}}{r^{n+1+\frac{(i-1)\nu-(i-2)}{\mu-1+\nu}-i}} \ \ a.s. \tag{13}$$

关于 $t \in [\varpi, \infty)$ 一致，其中 $\varpi \geq 0$ 是一个随机变量，满足 $\mathbb{E}\varpi \leq T_r$，其中 r 相关的正常数为 T_r，$\Xi_{i,\ \omega}$’ 均为与 r 独立的正随机变量，而 μ 是满足 $\max\{1, 2[n\nu - (n-1)]\} < \mu < (2n-1)\nu - 2n + 3$ 的任意常数。

证明。参见附录 B 中的“定理 III.2 的证明”。 □

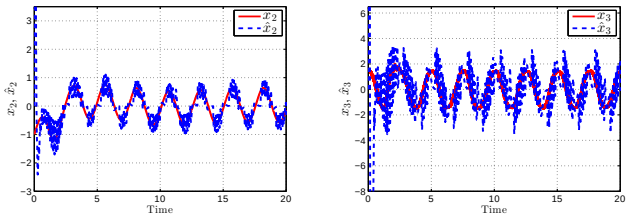
注 III.4. 定理 III.1 和定理 III.2 可直接得出一些结论。首先，估计误差与调节增益 r呈负相关，即调节增益 r 越大，估计误差越小。其次，估计性能在瞬态意义上能够得到保证，也就是说，经过一段时间（可能是随机的）后，估计误差会变小。最后，可得$\frac{\nu-}{(i-1)\mu-1+\nu} > \frac{1}{2}$ $(i-2)$ 对所有 $i = 1, \cdots, n+1$均成立，因此由式 (12) 和 (13) 可知，在条件 (10) 下，非线性事件触发扩张状态观测器 (9) 的估计精度高于在条件 (8) 下的线性事件触发扩张状态观测器 (7)。然而，由$n\nu-^{1}_{(n-1)} > \frac{1}{2}$ 可知，在条件 (10) 下，非线性事件触发扩张状态观测器 (9) 所需的触发频率高于在条件 (8) 下，线性事件触发扩张状态观测器 (7) 所需的触发频率；后续数值仿真也将对此加以说明。

IV. 数值仿真

本节以如下二阶不确定随机系统为数值算例，说明线性和非线性事件触发扩张状态观测器的有效性：

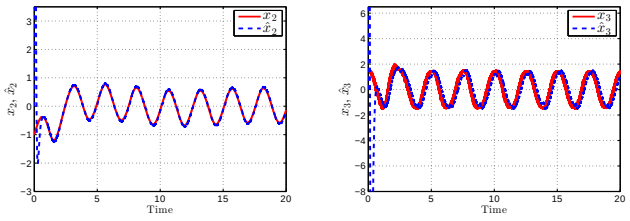
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -b_1x_1(t) - b_2x_2(t) + b_3\sin(b_4x_1(t) + b_5x_2(t)) \\ \qquad +b_6\cos(b_7t + b_8B_1(t)) + b_9v_2(t) + u(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \tag{14}$$

其中，$u(t) = \cos(b_{10}t)$，以及 $b_i (i = 1, \cdots, 10)$ 均为未知参数，且满足 $b_1, b_2 > 0$。随机总扰动为 $x_3(t) := -b_1x_1(t) - b_2x_2(t) + b_3\sin(b_4x_1(t) + b_5x_2(t)) + b_6\cos(b_7t + b_8B_1(t)) + b_9v_2(t)$。容易验证，假设 (A1-A4) 均成立。对于系统 (14)，按要求选取 $n = 2$, $a_1 = a_2 = 3$, $a_3 = 1$, $r = 15$, $\epsilon = \theta = 1$ 和 $\tau = 15^{-2.5}$，设计满足 (8) 的线性事件触发扩张状态观测器 (7)；按要求选取 $n = 2, a_1 = a_2 = 3$, $a_3 = 1$, $r = 15$, $\epsilon^* = \theta^* = 1$, $p = 3, \nu = \frac{6}{7}$和 $\tau^* = 15^{-\frac{17}{5}}$，设计满足 (10) 的非线性事件触发扩张状态观测器 (9)。为观察并比较估计效果，初始值和未知参数设定为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1, v_2(0) = 0$, $\hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = \hat{x}_3(0) = 0$, $b_1 = b_2 = 2$, $b_i = 1.5\,(i = 3, \cdots, 6)$, $b_i = 2.5\,(i = 7, \cdots, 10)$，以及 (6) 中的 $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$。从图 1 和图 2 可以看出，对于 $(x_2(t)\ x_3(t))$，线性和非线性事件触发扩张状态观测器均具有良好的估计效果，而非线性事件触发扩张状态观测器的估计精度优于线性观测器。从图 3 可以看出，线性事件触发扩张状态观测器对应于事件触发机制 (8) 的相邻执行时刻间隔整体上大于非线性事件触发扩张状态观测器的相应间隔；在 $[0, 20]$ 期间，二者的执行时刻数分别为 121 和 1354。这与注 III.4 中所述的主要结果一致。



(a) (b)

图1. 线性事件触发扩张状态观测器对（x_2（t） x_3（t））的估计。



(a) (b)

图2. 非线性事件触发扩张状态观测器对（x_2（t） x_3（t））的估计。

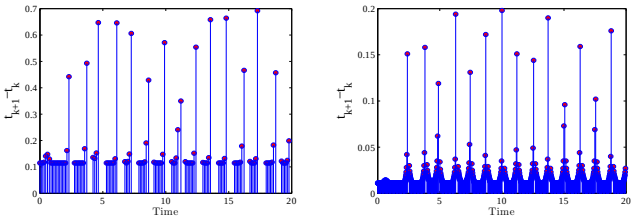
V. 结论

本文研究了一类由有界有色噪声驱动的不确定随机系统的线性和非线性事件触发扩张状态观测器（扩张状态观测器）。噪声驱动的不确定随机系统的线性和非线性事件触发扩张状态观测器（ESO）。针对事件触发扩张状态观测器的设计，提出了两种带驻留时间的事件触发机制，可确保随机系统每条样本路径解均具有正的最小事件间隔时间，从而直接避免芝诺现象。本文通过严格的理论证明，给出了未测量状态和随机总扰动估计误差的均方收敛性和几乎必然收敛性。理论结果还表明，与线性事件触发扩张状态观测器相比，非线性事件触发扩张状态观测器的估计精度更高，但触发频率也更高。一个值得进一步研究的问题是，如何基于事件触发扩张状态观测器，为不确定随机系统设计事件触发自抗扰控制（ADRC）。

附录 A：定理 III.1 的证明

定义误差变量如下：$\eta_i(t) = r^{n+1-i}(x_i(t) - \hat{x}_i(t))\ (i = 1, \cdots, n+1)$，$\eta(t) = (\eta_1(t) \cdots, \eta_{n+1}(t))$. 对任意固定的 $t \in [0, \infty)$，在 t 之前的最后一个执行时刻可表示为 $\varrho_t = \max\{t_k : t_k \le t, k \in \mathbb{Z}^+\}$. 因此，$y(t_k) - y(t)\ \ t \in [t_k, t_{k+1})$ 可表示为 $y(\varrho_t) - y(t)$. 令 $\kappa(t) = r^n(y(\varrho_t) - y(t))$. 由于 $t_{k+1} - t_k \ge \tau$，对于几乎所有样本路径，在 t之前至多有 $[\frac{t}{\tau}] + 1$ 个执行时刻。定义 $\Omega_k = \{\varrho_t = t_k\}$, $\Omega_{k,\tau} = \{\varrho_t = t_k$ 和 $t \le t_k + \tau\}, k = 1, \cdots, [\frac{t}{\tau}] + 1$. 可得 Ω 可表示为一组两两不相交子集的并集，即对于每个 $t \in [0, \infty)$，$\Omega = \bigcup_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1} \Omega_k$。沿着系统 (5) 和 (6)，对 $f(t, x(t)\ v_1(t)\ v_2(t))$ 关于 t 应用 Itô 公式，可得

$$\begin{aligned} dx_{n+1}(t) &= \frac{\partial f(t, x(t), v_1(t), v_2(t))}{\partial t}dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f(t, x(t), v_1(t), v_2(t))}{\partial x_i} x_{i+1}(t)dt \\ &+ \frac{\partial f(t, x(t), v_1(t), v_2(t))}{\partial x_n}[f(t, x(t), v_1(t), v_2(t)) + u(t)]dt \end{aligned}$$



(a) 对应于事件触发机制 (8)　　(b) 对应于事件触发机制 (10)

图 3. 分别对应线性和非线性事件触发扩张状态观测器的事件触发机制 (8) 和 (10) 的执行间隔时间。

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial f(t,x(t),v_1(t),v_2(t))}{\partial v_1}[\frac{\partial \sigma(t,B_1(t))}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma(t,B_1(t))}{\partial \varsigma^2}]dt\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,x(t),v_1(t),v_2(t))}{\partial v_1^2}(\frac{\partial \sigma(t,B_1(t))}{\partial \varsigma})^2dt\\
&-\frac{\partial f(t,x(t),v_1(t),v_2(t))}{\partial v_2}\alpha_1 v_2(t)dt\\
&+\frac{\partial^2 f(t,x(t),v_1(t),v_2(t))}{\partial v_2^2}\alpha_1^2\alpha_2 dt\\
&+\frac{\partial f(t,x(t),v_1(t),v_2(t))}{\partial v_1}\frac{\partial \sigma(t,B_1(t))}{\partial \varsigma}dB_1(t)\\
&+\frac{\partial f(t,x(t),v_1(t),v_2(t))}{\partial v_2}\alpha_1\sqrt{2\alpha_2}dB_2(t)\\
&=:\Delta_1(t)dt+\Delta_2(t)dB_1(t)+\Delta_3(t)dB_2(t),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中，ς 表示函数 $\sigma(\cdot,\cdot)$ 的第二个自变量。根据假设 (A1)–(A3) 以及有色噪声 $v_2(t)$ 的均方有界性，存在已知的正常数 C_1 和 C_2，使得

$$
\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[|\Delta_1(t)|^2+|\Delta_2(t)|^2]\leq C_1,\ \sup_{t\geq 0}|\Delta_3(t)|^2\leq C_2. \tag{16}
$$

直接计算可知，误差变量 $\eta(t)$ 满足以下 Itô 型随机微分方程

$$
\begin{cases}
d\eta_1(t)=r[\eta_2(t)-a_1\eta_1(t)]dt-a_1r\kappa(t)dt,\\
d\eta_2(t)=r[\eta_3(t)-a_2\eta_1(t)]dt-a_2r\kappa(t)dt,\\
\quad\vdots\\
d\eta_n(t)=r[\eta_{n+1}(t)-a_n\eta_1(t)]dt-a_nr\kappa(t)dt,\\
d\eta_{n+1}(t)=-ra_{n+1}\eta_1(t)dt-a_{n+1}r\kappa(t)dt+\Delta_1(t)dt\\
\qquad\qquad+\Delta_2(t)dB_1(t)+\Delta_3(t)dB_2(t).
\end{cases}
\tag{17}
$$

定义李雅普诺夫函数 $V:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$，令 $V(\eta)=\eta Q\eta^\top$，其中 $\eta\in\mathbb{R}^{n+1}$。

沿系统 (17) 对 $V(\eta(t))$ 应用 Itô 公式，并根据 (16) 和杨氏不等式，对于任意 $r\geq r^*$，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\mathbb{E}V(\eta(t))}{dt}\\
&\leq -r\mathbb{E}\|\eta(t)\|^2+2r\lambda_{\max}(Q)\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\mathbb{E}(\|\eta(t)\||\kappa(t)|\mathbb{I}_{\Omega_k})\\
&\quad+\lambda_{\max}^2(Q)\mathbb{E}\|\eta(t)\|^2+C_1+\lambda_{\max}(Q)(C_1+C_2)\\
&\leq -\xi_0 r\mathbb{E}V(\eta(t))+\mu_0 r\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\mathbb{E}[\kappa^2(t)\mathbb{I}_{\Omega_k}]+C_1\\
&\quad+\lambda_{\max}(Q)(C_1+C_2),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

其中，$\mu_0>0$ 的选取满足 $\xi_0:=\frac{1-\varsigma}{\lambda_{\max}Q()}$ ——— $-$ $\frac{}{\lambda_{\max}\ Q\ \sum_{i=1}^{n+1}|a_i|}$ $()()\mu_0$ $^2>0.$

根据触发机制 (8)，我们有 $\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\mathbb{E}[\kappa^2(t)\mathbb{I}_{\Omega_k\setminus\Omega_{k,\tau}}]\leq\frac{\theta^2}{r},\ \forall t\geq 0.$ 由假设 (A3) 和 $\tau=\epsilon r^{-(n+\frac{1}{2})}$ 可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\mathbb{E}[\kappa^2(t)\mathbb{I}_{\Omega_{k,\tau}}]=r^{2n}\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_k}^t x_2(s)ds\right)^2\mathbb{I}_{\Omega_{k,\tau}}\right]\\
&\leq r^{2n}\tau\int_{t-\tau}^t\mathbb{E}x_2^2(s)ds\leq\frac{M\epsilon^2}{r},\ \forall t\geq\tau,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

并且可以很容易地得到 $\mathbb{E}[\kappa^2(t)\mathbb{I}_{\Omega_{1,\ \tau}}]\leq\frac{M\epsilon^2}{r}$ 对 $t\in[0,\tau)$ 也成立，其中 $\varrho_t=0$ 几乎必然。对于任意 $t\in[T,\infty$ $e^{-\xi_0 rt}\mathbb{E}V\ \eta\ 0\leq)$，有 $(\ (\ ))\ (\ )$ $\lambda_{\max}\ Q\ e^{-\xi_0 rT}\sum_{i=1}^{n+1}r^{2(n+1-i)}\mathbb{E}|x_i\ 0\ -\ x_i\ 0\ |^2\leq$ $(\ )\hat{}\ (\ )\frac{\Theta_1}{r}$ r $\Theta_1=$，其中某个与 -独立的常数 : $\sup_{r\geq r^*}\lambda_{\max}(Q)e^{-\xi_0 rT}\sum_{i=1}^{n+1}r^{2n+3-2i}\mathbb{E}|x_i(0)\ -\hat{}\ x_i(0)|^2$，该值有限，因为 $\lim_{r\to\infty}e^{-\xi_0 rT}\sum_{i=1}^{n+1}r^{2n+3-2i}=0$。因此，对于任意 $r\geq r^*$ 和 $t\in[T,\infty)$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}V(\eta(t))\\
&\leq e^{-\xi_0 rt}\mathbb{E}V(\eta(0))+\mu_0 r\int_0^t e^{-\xi_0 r(t-s)}\sum_{k=1}^{[\frac{s}{\tau}]+1}\Big\{\mathbb{E}[\kappa^2(s)\mathbb{I}_{\Omega_{k,\tau}}]\\
&+\mathbb{E}[\kappa^2(s)\mathbb{I}_{\Omega_k\setminus\Omega_{k,\tau}}]\Big\}ds+\frac{C_1+\lambda_{\max}(Q)(C_1+C_2)}{\xi_0 r}\leq\frac{\Theta_2}{r},
\end{aligned}
$$

其中 $\Theta_2:=\Theta_1+\frac{\mu_0(\theta^2+M\epsilon^2)}{\xi_0}+\frac{C_1+\lambda_{\max}(Q)(C_1+C_2)}{\xi_0}$。由此进一步可得，对所有 $i=1,\cdots,n+1$，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|x_i(t)-\hat{x}_i(t)|^2\leq\frac{1}{r^{2n+2-2i}}\mathbb{E}|\eta_i(t)|^2\\
&\leq\frac{1}{\lambda_{\min}(Q)r^{2n+2-2i}}\mathbb{E}V(\eta(t))\leq\frac{\Theta}{r^{2n+3-2i}},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

关于 $t\in[T,\infty$ 一致成立），其中 $\Theta:=\frac{\Theta_2}{\lambda_{\min}(Q)\circ}$ 此外，由 (20) 和切比雪夫不等式（[15, p.5]），可得 $P\{|x_i(t)\ -\hat{}\ x_i(t)|\geq m\sqrt{\Theta}(\frac{1}{r})^{\frac{2n+3-2i}{2}}\}\leq\frac{1}{m^2}$ 关于 $t\in[T,\infty$ 一致成立），且对 $m\in\mathbb{Z}^+$ 也成立。根据博雷尔-坎特利引理（[15, p.7]），对于几乎处处的 $\omega\in\Omega$，存在一个随机变量 $m^*(\omega)$，使得只要 $m\geq m^*(\omega)$，就有

$$
|x_i(t)-\hat{x}_i(t)|\leq\frac{m\sqrt{\Theta}}{r^{n+\frac{3}{2}-i}},\ t\in[T,\infty). \tag{21}
$$

设 $\Theta_\omega=m^*(\omega)\sqrt{\Theta}>0$，它是一个 r-独立随机变量。证明至此完成。

附录 B：定理 III.2 的证明

以下 $\eta(t)$、ϱ_t 和 $\kappa(t)$ 的定义与附录 A 中的定义相同。同样，对于几乎每条样本路径，在 之前至多有 $[\frac{t}{\tau^*}]+1$ t $^*_k=\{\varrho_t=$ 个执行时 $t_k\}$ $^*_{k\ \tau^*}=\{\varrho_t=t_k\quad t\leq t_k+\tau^*\}\ k=1\ \cdots\ [\frac{t}{\tau^*}]+1$ 刻。定义 Ω、Ω, 和、、、，则对每个 $t\in[0,\infty)$，$\Omega=\bigcup_{k=1}^{[\frac{t}{\tau^*}]+1}\Omega_k^*$。通过简单分析，很容易得到，对于所有 θ_1、$\theta_2\in\mathbb{R}$ 和 $\vartheta\in(0,1)$，$|\langle\theta_1\rangle^\vartheta-\langle\theta_2\rangle^\vartheta|\leq 2^{1-\vartheta}|\theta_1-\theta_2|^\vartheta$。对于 $i=1$、$\cdots$、$n+1$，令 $\delta_i(t)=\langle\eta_1(t)\rangle^{i\nu-(i-1)}-\langle\eta_1(t)+\kappa(t)\rangle^{i\nu-(i-1)}$。由此可得 $|\delta_i(t)|\leq 2^{i(1-\nu)}|\kappa(t)|^{i\nu-(i-1)}$、$\forall t\geq 0$。

直接计算可知，误差变量 $\eta(t)$满足以下 Itô 型随机微分方程

$$\begin{cases} d\eta_1(t) = [r(\eta_2(t) - a_1\langle\eta_1(t)\rangle^{\nu}) + a_1 r\delta_1(t)]dt, \\ d\eta_2(t) = [r(\eta_3(t) - a_2\langle\eta_1(t)\rangle^{2\nu-1}) + a_2 r\delta_2(t)]dt, \\ \quad\vdots \\ d\eta_n(t) = [r(\eta_{n+1}(t) - a_n\langle\eta_1(t)\rangle^{n\nu-(n-1)}) + a_n r\delta_n(t)]dt, \\ d\eta_{n+1}(t) = -ra_{n+1}\langle\eta_1(t)\rangle^{(n+1)\nu-n}dt + a_{n+1}r\delta_{n+1}(t)dt \\ \qquad\qquad +\Delta_1(t)dt + \Delta_2(t)dB_1(t) + \Delta_3(t)dB_2(t), \end{cases} \tag{22}$$

其中，$\Delta_i(t)$（$i = 1, 2, 3$）定义同式（15），并满足式（16）。根据引理 II.3–II.4，系统 $\dot{\eta}(t) = \Phi(\eta(t))$ 全局有限时间稳定，其中 $\Phi(\cdot)$ 定义见式（2）。利用引理 II.1，对于任意满足 $\max\{1, 2w_{n+1}\} < \mu < d_0 + 2w_{n+1}$ 且具有 $d_0 := 1 - \nu > 0$ 的 μ，可以得出存在一个正定、径向无界函数 $V \in C^1(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R}) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0_{n+1}\};\mathbb{R})$，使得 V 关于权重 $\{w_l = (l-1)\nu - (l-2)\}_{l=1}^{n+1}$ 次数为 μ 的齐次，且 $V(\eta)$ 沿向量场 Φ 的李导数：

$$L_{\Phi}V(\eta) := \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial V(\eta)}{\partial\eta_i}\Phi_i(\eta) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(\eta)}{\partial\eta_i}(\eta_{i+1} - a_i\langle\eta_1\rangle^{i\nu-(i-1)}) - \frac{\partial V(\eta)}{\partial\eta_{n+1}}a_{n+1}\langle\eta_1\rangle^{(n+1)\nu-n} \tag{23}$$

为负定。根据定义 2 中齐次性的定义，以及 $V(\eta)$ 关于权重 $\{w_l\}_{l=1}^{n+1}$ 是次数为 μ 的齐次函数这一事实，可以容易地得到

$L_{\Phi}V(\eta)$、$\frac{\partial V(\eta_1,\cdots,\eta_{n+1})}{\partial\eta_i}$、$\frac{\partial^2 V(\eta_1,\cdots,\eta_{n+1})}{\partial\eta_{n+1}^2}$ 以及 $|\eta_i|$ 分别关于权重 $\{w_l\}_{l=1}^{n+1}$ 为次数 $\mu-d_0$、$\mu-w_i$、$\mu-2w_{n+1}$ 和 w_i 的齐次函数。结合上述分析与引理 II.2，可得以下不等式：

$$\begin{aligned} &L_{\Phi}V(\eta) \le -c_1(V(\eta))^{\frac{\mu-d_0}{\mu}}, |\frac{\partial V(\eta)}{\partial\eta_i}| \le c_{2i}(V(\eta))^{\frac{\mu-w_i}{\mu}}, \\ &|\eta_i| \le c_{3i}(V(\eta))^{\frac{w_i}{\mu}},\ \forall\eta\in\mathbb{R}^{n+1}, \\ &|\frac{\partial^2 V(\eta)}{\partial\eta_{n+1}^2}| \le c_4(V(\eta))^{\frac{\mu-2w_{n+1}}{\mu}}, \forall\eta\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0_{n+1}\}, \end{aligned} \tag{24}$$

其中 c_1, c_{2i}, c_{3i}, c_4 为正常数。对于任意固定的 $t\in[0,\infty)$，暂态收敛结果 (13) 对 $\omega\in\Omega_t := \{\|\eta(t)\| = 0\}$ 直接成立，因此我们只需分析 $\mathcal{L}V(\eta(t))$，其中 $\omega\in\Omega\setminus\Omega_t$。由 (24) 可得，对于 $\omega\in\Omega\setminus\Omega_t$，有 $|\frac{\partial^2 V(\eta(t))}{\partial\eta_{n+1}^2}| \le c_4(V(\eta(t)))^{\frac{\mu-2w_{n+1}}{\mu}}$。为方便符号表示，在不失一般性的前提下，我们在证明中假设该不等式对几乎处处的 $\omega\in\Omega$ 成立。由于 $\nu > 1 - \frac{1}{n+1}$，$\frac{\mu-w_{n+1}}{\mu} < \frac{\mu-d_0}{\mu}$。结合下文反复使用的不等式：$ab \le \frac{1}{p_0}a^{p_0} + \frac{1}{q_0}b^{q_0}$ 以及 $(\sum_{i=1}^m a_i)^{\vartheta} \le m^{\vartheta-1}\sum_{i=1}^m a_i^{\vartheta}$，其中 ϑ，$p_0, q_0 > 1$，$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$，$m\in\mathbb{Z}^+$，$a, b, a_i \ge 0$，可得

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}V(\eta(t)) \\ &= rL_{\Phi}V(\eta(t)) + r\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial V(\eta(t))}{\partial\eta_i}a_i\delta_i(t) + \frac{\partial V(\eta(t))}{\partial\eta_{n+1}}\Delta_1(t) \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(\eta(t))}{\partial\eta_{n+1}^2}(\Delta_2^2(t) + \Delta_3^2(t)) \\ &\le -c_1 r(V(\eta(t)))^{\frac{\mu-d_0}{\mu}} + \sum_{i=1}^{n+1}(a_i c_{2i}2^{(1-\nu)i})^{\frac{\mu-d_0}{\mu-w_i}}\frac{\mu-w_i}{\mu-d_0}\cdot \\ &(V(\eta(t)))^{\frac{\mu-d_0}{\mu}} + \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau^*}]+1} r^{\frac{\mu-d_0}{w_i-d_0}}\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0}\{|\kappa(t)|^{\frac{w_{i+1}(\mu-d_0)}{w_i-d_0}} \\ &\mathbb{I}_{\Omega_k^*}\} + \frac{c_{2(n+1)}(\mu-w_{n+1})}{\mu-d_0}(V(\eta(t)))^{\frac{\mu-d_0}{\mu}} + c_{2(n+1)}\cdot \\ &\frac{(w_{n+1}-d_0)}{\mu-d_0}|\Delta_1(t)|^{\frac{\mu-d_0}{w_{n+1}-d_0}} + \frac{c_4(\mu-2w_{n+1})}{2(\mu-d_0)}(V(\eta(t)))^{\frac{\mu-d_0}{\mu}} \\ &+\frac{c_4(2w_{n+1}-d_0)}{2(\mu-d_0)}2^{\frac{\mu-2w_{n+1}}{2w_{n+1}-d_0}}[|\Delta_2(t)|^{\frac{2(\mu-d_0)}{2w_{n+1}-d_0}} + C_2^{\frac{\mu-d_0}{2w_{n+1}-d_0}}], \end{aligned}$$

其中 $w_{n+2} := (n+1)\nu - n$。选取 $r_0 > 0$，使得 $\frac{c_1 r_0}{2} - \sum_{i=1}^{n+1}(a_i c_{2i}2^{(1-\nu)i})^{\frac{\mu-d_0}{\mu-w_i}}\frac{\mu-w_i}{\mu-d_0} - \frac{c_{2(n+1)}(\mu-w_{n+1})}{\mu-d_0} - \frac{c_4(\mu-2w_{n+1})}{2(\mu-d_0)} > 0$。那么，对于任意 $r \ge r^* := \max\{1, r_0\}$ 以及任意 $t\ge 0$，均有

$$\mathcal{L}V(\eta(t)) \le -\frac{c_1 r}{2}(V(\eta(t)))^{\frac{\mu-d_0}{\mu}} + \Gamma_1 + \sum_{i=2}^{4}\Gamma_i(t), \tag{25}$$

其中，令

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{c_4(2w_{n+1}-d_0)}{2(\mu-d_0)}2^{\frac{\mu-2w_{n+1}}{2w_{n+1}-d_0}}C_2^{\frac{\mu-d_0}{2w_{n+1}-d_0}}, \\ \Gamma_2(t) &= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau^*}]+1} r^{\frac{\mu-d_0}{w_i-d_0}}\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0}\{|\kappa(t)|^{\frac{w_{i+1}(\mu-d_0)}{w_i-d_0}}\mathbb{I}_{\Omega_k^*}\}, \\ \Gamma_3(t) &= \frac{c_{2(n+1)}(w_{n+1}-d_0)}{\mu-d_0}|\Delta_1(t)|^{\frac{\mu-d_0}{w_{n+1}-d_0}}, \\ \Gamma_4(t) &= \frac{c_4(2w_{n+1}-d_0)}{2(\mu-d_0)}2^{\frac{\mu-2w_{n+1}}{2w_{n+1}-d_0}}|\Delta_2(t)|^{\frac{2(\mu-d_0)}{2w_{n+1}-d_0}}. \end{aligned} \tag{26}$$

定义如下停时：

$$\varpi = \inf\{t\ge 0 : V(\eta(t)) \le [\frac{4}{c_1 r}(\Gamma_1 + \sum_{i=2}^{4}\Gamma_i(t))]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}\}.$$

若对某个 $t > \varpi$，$V(\eta(t)) \le [\frac{4}{c_1 r}(\Gamma_1 + \sum_{i=2}^{4}\Gamma_i(t))]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}$ 则 $\frac{d\mathbb{E}V(\eta(t))}{dt} \le 0$，$t\in[\varpi,\infty)$。

因此，(24) 和 (25) 对所有 $t\ge 0$ 均成立。因此，对于所有 $i = 1, \cdots, n+1$ 和 $t\in[\varpi,\infty)$，由 (24) 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|x_i(t) - \hat{x}_i(t)| = \frac{1}{r^{n+1-i}}\mathbb{E}|\eta_i(t)| \le \frac{c_{3i}}{r^{n+1-i}}\mathbb{E}(V(\eta(t)))^{\frac{w_i}{\mu}} \\ &\le \frac{c_{3i}}{r^{n+1-i}}(\mathbb{E}(V(\eta(t)))^{\frac{w_i}{\mu}} \le (\frac{1}{r})^{n+1+\frac{w_i}{\mu-d_0}-i}c_{3i}(\frac{4}{c_1})^{\frac{w_i}{\mu-d_0}} \\ &\quad\times 4^{\frac{d_0 w_i}{(\mu-d_0)\mu}}\left[\Gamma_1^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} + \sum_{i=2}^{4}\mathbb{E}[\Gamma_i(t)]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}\right]^{\frac{w_i}{\mu}}. \end{aligned} \tag{27}$$

根据 $\tau^* = \epsilon^* r^{-(n+\frac{1}{w_{n+1}})}$ 和假设（A4），我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\{\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau^*}]+1} r^{\frac{\mu-d_0}{w_i-d_0}}\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0}[|\kappa(t)|^{\frac{w_{i+1}(\mu-d_0)}{w_i-d_0}}\mathbb{I}_{\Omega_{k,\tau}^*}]\}^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} \\ &\le (n+1)^{\frac{d_0}{\mu-d_0}}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau^*}]+1} r^{(1+nw_{i+1})\frac{\mu}{w_i-d_0}}(\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0})^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} \\ &\quad\times\mathbb{E}((\int_{t_k}^{t}|x_2(s)|ds)^{\frac{w_{i+1}\mu}{w_i-d_0}}\mathbb{I}_{\Omega_{k,\tau}^*}) \end{aligned}$$

$$\le (n+1)^{\frac{d_0}{\mu-d_0}}\sum_{i=1}^{n+1} r^{(1+nw_{i+1})\frac{\mu}{w_i-d_0}}(\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0})^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} \times(\int_{t-\tau^*}^{t}\mathbb{E}|x_2(s)|^p ds)^{\frac{w_{i+1}\mu}{p(w_i-d_0)}}\tau^{*\frac{w_{i+1}\mu}{q(w_i-d_0)}}$$
$$\le (n+1)^{\frac{d_0}{\mu-d_0}}\sum_{i=1}^{n+1} r^{(1+nw_{i+1})\frac{\mu}{w_i-d_0}}(\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0})^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} \times N^{\frac{w_{i+1}\mu}{p(w_i-d_0)}}\tau^{*\frac{w_{i+1}\mu}{w_i-d_0}} \le M_1,\ \forall t\ge\tau^*, \tag{28}$$

其中 $M_1=(n+1)^{\frac{d_0}{\mu-d_0}}\sum_{i=1}^{n+1}(\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0})^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}N^{\frac{w_{i+1}\mu}{p\ w_i-d_0()}}\epsilon^{*\frac{w_{i+1}\mu}{w_i-d_0}}$，且 q满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，由此很容易得到，不等式（28）对于 $t\in[0,\tau^*)$ 也成立，其中 $\varrho_t=0$几乎处处成立。根据事件触发机制（10），对于所有 $t\ge 0$，有

$$\mathbb{E}\{\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau^*}]+1} r^{\frac{\mu-d_0}{w_i-d_0}}\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0}[|\kappa(t)|^{\frac{w_{i+1}(\mu-d_0)}{w_i-d_0}}\mathbb{I}_{\Omega_k^*\setminus\Omega_{k,\tau}^*}]\}^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} \le M_2, \tag{29}$$

其中 $M_2:=(n+1)^{\frac{d_0}{\mu-d_0}}\sum_{i=1}^{n+1}\theta^{*\frac{w_{i+1}\mu}{w_i-d_0}}(\frac{w_i-d_0}{\mu-d_0})^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}$.因此，由 (28) 和 (29) 可得

$$\mathbb{E}[\Gamma_2(t)]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} \le 2^{\frac{d_0}{\mu-d_0}}(M_1+M_2),\ \forall t\ge 0. \tag{30}$$

由 $\nu>1-\frac{p-2}{(p-2)n+p+1}$ 和 $\mu<d_0+2w_{n+1}$，可得 $\frac{\mu}{w_{n+1}-d_0}<p$。因此，由假设 (A1)、(A2) 和 (A4) 可知，对于所有 $t\ge 0$,

$$\mathbb{E}[\Gamma_3(t)]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} \le [\frac{c_{2(n+1)}(w_{n+1}-d_0)}{\mu-d_0}]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}\mathbb{E}|\Delta_1(t)|^p \le M_3$$

对于某个 $M_3>0$。类似地，我们也有 $\frac{2\mu}{2w_{n+1}-d_0}<p$。因此，由假设 (A1)、(A2) 和 (A4) 可知，对于所有 $t\ge 0$,

$$\mathbb{E}[\Gamma_4(t)]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}} \le [\frac{c_4(2w_{n+1}-d_0)}{2(\mu-d_0)}2^{\frac{\mu-2w_{n+1}}{2w_{n+1}-d_0}}]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}\mathbb{E}|\Delta_2(t)|^p \le M_4$$

对于某个 $M_4>0$。结合 (27)，可得对于所有$i=1$、$\cdots$、$n+1$和 $t\in[\varpi,\infty)$,

$$\mathbb{E}|x_i(t)-\hat{x}_i(t)| \le \Xi_i\cdot(\frac{1}{r})^{n+1+\frac{w_i}{\mu-d_0}-i}, \tag{31}$$

其中我们设 $\Xi_i=c_{3i}\frac{4}{c_1}$ $M_1+()$ $M_2+M_3+M_4]^{\frac{w_i}{\mu}}$ $^{\frac{w_i}{\mu-d_0}}4$ ^{d_0w_i} $()\mu[\Gamma_1^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}+2^{\frac{d_0}{\mu-d_0}}()$。此外，根据切比雪夫不等式（[15, 第 5] 页），对于所有 $m\in\mathbb{Z}^+$、$i=1$、$\cdots$、$n+1$和 $t\in[\varpi,\infty)$，有 $P\{|x_i(t)-\hat{x}_i(t)|\ge m^2\Xi_i\cdot(\frac{1}{r})^{n+1+\frac{w_i}{\mu-d_0}-i}\}\le\frac{1}{m^2}$。根据博雷尔-坎特利引理（[15, 第7页），对于几乎处处的 $\omega\in\Omega$ 和 $t\in[\varpi,\infty)$，存在一个随机变量 $m_0(\omega)$，使得每当 $m\ge m_0(\omega)$ 时，我们有

$$|x_i(t)-\hat{x}_i(t)| \le m^2\Xi_i\cdot(\frac{1}{r})^{n+1+\frac{w_i}{\mu-d_0}-i}. \tag{32}$$

令 $\Xi_{i,\omega}=m_0^2(\omega)\Xi_i>0$，其中该随机变量与 r 独立，即可得到 (13)。接下来，我们证明对于某个依赖于 r 的正常数 T_r，有 $\mathbb{E}\varpi\le T_r$。定义如下的一系列停时:

$$\varpi_m=\inf\{t\ge 0: V(\eta(t))\le[\frac{4}{c_1r}(\Gamma_1+\sum_{i=2}^{4}\Gamma_i(t))]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}+\frac{1}{m}$$
or $V(\eta(t))\ge[\frac{4}{c_1r}(\Gamma_1+\sum_{i=2}^{4}\Gamma_i(t))]^{\frac{\mu}{\mu-d_0}}+m\},\ m\in\mathbb{Z}^+.$

设 $\Upsilon(V)=\frac{4}{c_1r}\int_0^V\vartheta^{-\frac{\mu-d_0}{\mu}}d\vartheta$，$V\in[0,\infty)$。因此，对于所有 $t\in[0,\varpi_m)$，有

$$\mathcal{L}\Upsilon(V(\eta(t))) = \frac{4}{c_1r}(V(\eta(t)))^{-\frac{\mu-d_0}{\mu}}\mathcal{L}V(\eta(t))-\frac{2(\mu-d_0)}{c_1r\mu}(V(\eta(t)))^{-\frac{2\mu-d_0}{\mu}} \times[(\frac{\partial V(\eta(t))}{\partial\eta_{n+1}}\Delta_2(t))^2+(\frac{\partial V(\eta(t))}{\partial\eta_{n+1}}\Delta_3(t))^2]\le -1. \tag{33}$$

令 $t_m=m\wedge\varpi_m$ 用于 $m\in\mathbb{Z}^+$。则

$$\mathbb{E}[\Upsilon(V(\eta(t_m)))]-\mathbb{E}[\Upsilon(V(\eta(0)))] = \mathbb{E}\int_0^{t_m}\mathcal{L}\Upsilon(V(\eta(s)))ds\le -\mathbb{E}[t_m] \tag{34}$$

这意味着 $\mathbb{E}[t_m]\le\mathbb{E}[\Upsilon(V(\eta(0)))]$。令 $m\to\infty$ $\mathbb{E}\varpi\le$趋于极限，并利用 $\frac{4\mu}{c_1d_0r}\mathbb{E}[V\ \eta\ 0\ ]^{\frac{d_0}{\mu}}=T_r<\infty$ Fatou引理，可得 (( )) : 。证明完毕。

参考文献

[1] J. Han，从比例-积分-微分到自抗扰控制，IEEE《工业电子学汇刊》56（2009）900-906。[2] B. Guo、Z. Zhao，具有不确定性的非线性系统扩张状态观测器的收敛性，《系统与控制快报》60（2011）420-430。[3] Z. Zhao、B. Guo，基于分数幂函数的非线性扩张状态观测器，Automatica 81（2017）286-296。[4] B. Guo、Z. Wu、H. Zhou，针对受随机扰动影响的一类不确定非线性系统输出反馈镇定的自抗扰控制方法，IEEE《自动控制汇刊》61（2015）1613-1618。[5] Z. Wu、B. Guo，具有随机不确定性的多输入多输出非线性系统扩张状态观测器，《国际控制杂志》93（2020）424-436。[6] Y. Huang、J. Wang、D. Shi、L. Shi，迈向事件触发扩张状态观测器，IEEE《自动控制汇刊》63（2017）1842-1849。[7] F. Li、Y. Liu，连续时间随机系统的事件触发镇定，IEEE《自动控制汇刊》65（2019）4031-4046。[8] S. Luo、F. Deng，非线性随机系统的事件触发控制，IEEE《自动控制汇刊》65（2019）369-375。[9] F. Li、Y. Liu，随机系统事件触发控制的扩展框架，IEEE《自动控制汇刊》66（2020）4132-4147。[10] W. Perruquetti、T. Floquet、E. Moulay，有限时间观测器：在安全通信中的应用，IEEE《自动控制汇刊》53（2008）356-360。[11] L. Rosier，齐次连续向量场的齐次李雅普诺夫函数，《系统与控制快报》19（1992）467-473。[12] S.P. Bhat、D.S. Bernstein，几何齐次性及其在有限时间稳定性中的应用，《数学、控制与信号系统》17（2005）101-127。[13] M.M. Klosek-Dygas、B.J. Matkowsky、Z. Schuss，动力系统中的有色噪声，《SIAM应用数学杂志》48（1988）425-441。[14] P. H¨anggi、P. Jung，动力系统中的有色噪声，《化学物理进展》89（1994）239-326。[15] X. Mao，《随机微分方程及其应用》，奇切斯特：Horwood Publishing Limited，2007。[16] J. Duan，《随机动力学导论》（第51卷），剑桥大学出版社，2015。[17] Z. Huang、W. Zhu、Y. Ni、J. Ko，有界噪声激励下强非线性振子的随机平均，《声与振动杂志》254（2002）245-267。[18] F. Hu、L. Chen、W. Zhu，有界噪声激励下具有分数阶导数阻尼的强非线性振子的稳态响应，《国际非线性力学杂志》47（2012）1081-1087。[19] B. Guo、Z. Zhao，非线性高增益跟踪微分器的弱收敛，IEEE《自动控制汇刊》58（2012）1074-1080。