arXiv:2302.02397v1 [math.CA] 5 Feb 2023

弱化的希尔伯特第十六问题：哈密顿未扰部分具有九个平衡点的周期系统的不变环面

Vladimir V. Basov[1*]、Artem S. Zhukov[1]

Abstract. 本文研究了两类带小参数的二维时周期常微分方程系统；小参数 $\varepsilon > 0$ 出现在扰动部分中，该部分是连续的，并且对于$\varepsilon = 0$，在零点解析。根据是否存在公因子 ε，这两类系统分别包含具有“快”时间或“慢”时间的系统。这些系统的未扰动部分由哈密顿量 $H = 2x^2 - x^4 + \gamma(2y^2 - y^4)$ ($\gamma \in (0, 1]$)。

本文提出并应用了一种通用方法，即生成环面分裂方法（GTS 方法），该方法可用于任意哈密顿量，以研究这类系统。对于任意一类中的任意系统，该方法都能找到相应未扰动系统解的初始值集合，并针对每个这样的集合，给出与参数无关的系统扰动显式条件。任何满足上述条件的集合都确定了未扰动系统的一个解，该解将生成周期轨道参数化。所得周期轨道是不变圆柱面的母线。研究证明，在该曲面的小 ε 邻域内，若时间按周期取模，则系统存在一个与环面同胚的二周期不变曲面。文中给出了该曲面的公式和渐近展开，并发现了若干性质。

构造了一个具有十一个不变环面和一个扰动的系统集合实例，其平均值是三次三项多项式，以此展示 GTS 方法的实际应用。

GTS 方法是所谓检测函数法和 Melnikov函数法的一种通用替代方法，这两种方法用于研究弱化的希尔伯特第十六问题，即求值哈密顿未扰部分自治系统的极限环数量。GTS 方法不仅能够求出希尔伯特循环性值类比量的下界，该值决定了具有“慢”时间的周期系统中的不变环面数量，还能针对右端具有公因子 ε 的任意偶次周期系统解决同一问题。这些结果可用于研究描述弱耦合振子振荡的二次常微分方程系统。

1. Introduction

1.1. 问题陈述、结果与方法。本研究的对象是具有哈密顿未扰部分和小参数的二维周期系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \big(\gamma(y^3 - y) + X^\nu(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon\big)\varepsilon^\nu \\ \dot{y} = \big(-(x^3 - x) + Y^\nu(t, x, y, \varepsilon)\varepsilon\big)\varepsilon^\nu \end{cases} \quad (\gamma \in (0, 1],\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\, \nu = 0, 1), \tag{1.1}$$

2010 数学主题分类。34K18, 34K19, 34K33。关键词和短语。哈密顿量系统、不变环面、分岔、极限环、平均法、希尔伯特循环度。

其中函数 X^ν，Y^ν关于 t 连续且具有 T 周期；

$$X^0 = X_0^0(t,x,y) + X_1^0(t,x,y)\varepsilon + X_2^0(t,x,y,\varepsilon)\varepsilon^2, \quad X^1 = X_0^1(t,x,y) + X_1^1(t,x,y,\varepsilon)\varepsilon,$$

Y^ν具有类似的扩展；函数 $X_0^\nu, Y_0^\nu, X_1^0, Y_1^0$ 关于 t 在 x,y 上一致实解析，且定义于 $D^{x,\sigma^{y}_{,\sigma}} = \{(t,x,y)\colon\ t\in\mathbb{R},\ |x|,|y|<\sigma\},\ \sigma>\sqrt{1+\gamma^{-1/2}}$；函数$X_{2-\nu}^\nu, Y_{2-\nu}^\nu \in C^{0,1,1,\overbrace{t\,x\quad y}^{\nu}_{\varepsilon,,y,}}(G^{x,\sigma^{y\,\varepsilon}_{\sigma,,y,}})$，其中 $G^{x,\sigma^{y\,\varepsilon}_{\sigma,,y,}} = \{(t,x,y,\varepsilon)\colon\ t,x,y\in\mathbb{R},\ |x|,|y|\le\sigma,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\}$.

连续且关于 t 为 T 周期的函数 $Z(t,z_1,z_2)$，如果对任意 $t\in\mathbb{R}$ 以及任意 $|z_1|<z_1^0$，$|z_2|<z_2^0$，级数 $Z(t,z_1,z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} Z^{(m,n)}(t) z_1^m z_2^n$（其系数为实数、连续且关于 t 为 T 周期）绝对收敛，则称其在 $D^{z_1,z_1^0}_{,z_2^0} = \{(t,z_1,z_2)$ 上关于 t 在 z_1,z_2 上一致实解析：$t\in\mathbb{R}$，$|z_1|<z_1^0,\ |z_2|<z_2^0\}(z_1^0,z_2^0>0)$。

公式 (1.1) 确定了两个不同的系统：一个系统中有 $\nu=0$，另一个系统中有 $\nu=1$。比较这两个系统，我们可以说，含有 $\nu=1$，的系统通常称为标准系统，它的时间是“快”的，因为将其化为含有 $\nu=0$ 的系统后，我们得到周期 $T\varepsilon$.。对于自治系统，通过变换时间变量，总可以令参数 $\nu=0$.

将自治系统称为

$$\dot{x} = \gamma(y^3-y)\varepsilon^\nu, \quad \dot{y} = -(x^3-x)\varepsilon^\nu \qquad (\gamma\in(0,1],\ \nu=0,1). \tag{1.2}$$

关于公式 (1.1) 的一阶近似系统或未扰动系统是很自然的。系统 (1.2) 是哈密顿系统，其哈密顿量为

$$H(x,y) = (2x^2 - x^4 + \gamma(2y^2-y^4))\varepsilon^\nu/4.$$

它的相平面由九个平衡点、闭轨（周期轨道）和分离曲线组成。

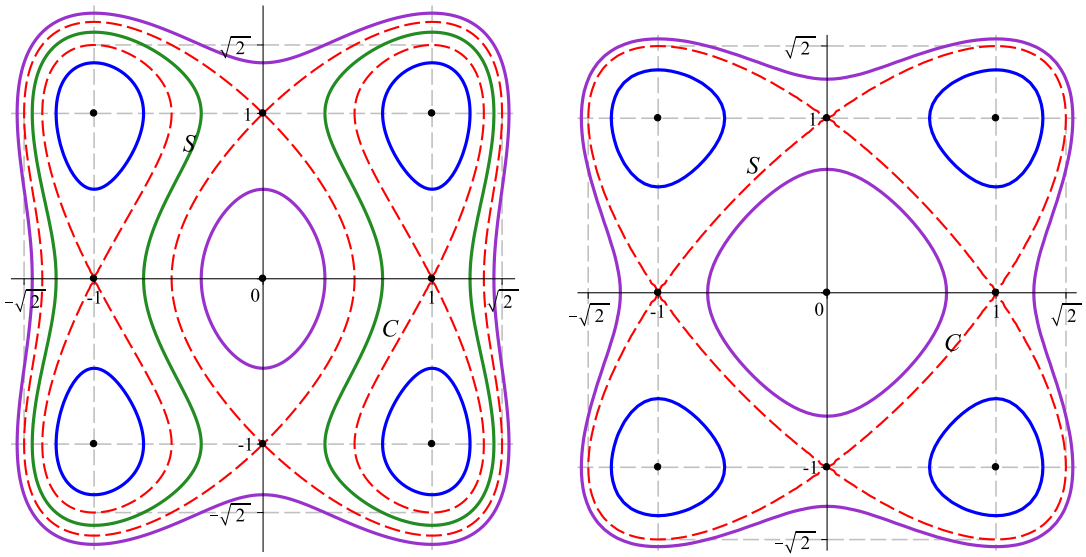

图 1.1. 未扰动系统(1.2) **在** $\gamma=1/2$ **和** $\gamma=1$. **下的相图**

本文旨在为系统 (1.1) 在任意充分小的 $\varepsilon>0$, 下，找出一定数量的二维不变曲面，这些曲面与环面同胚，是通过将时间按周期取商得到的。每个这样的曲面都包含在系统 (1.2) 中相应不变曲面的小 ε 邻域内，其母线为闭轨，称为生成周期轨道（见定义5.2）。

我们明确写出未扰动函数 $X^\nu(t,x,y,0)$ 和 $Y^\nu(t,x,y,0)$, 所需满足的条件（这些条件依赖于参数 γ），在此条件下，受扰系统 (1.1) 具有上述不变曲面；我们还为每个不变曲面求得了关于 ε 的幂次渐近展开（见定理 7.1）。作为示例，我们给出一类具有形式 (1.1) 的系统，对于这类系统，$\varepsilon = 0$ 的扰动平均值不含三阶以上的项，并且该类中任意受扰系统在 $\varepsilon > 0$ 充分小时都有十一个不变环面（见定理 8.1）。

因此，希尔伯特循环性值的定义可以推广到具有周期扰动的系统。如今，也可以按照求解局部希尔伯特–阿诺德问题时对自治系统所采用的求值方法，对其进行求值。V. I. Arnold 在 [1] 中将这一问题称为“弱化的希尔伯特第十六问题”。由于无法进行与参数无关的时间变量变换，所研究的系统便分为两类：具有所谓“快时间”和“慢时间”的系统。特别地，对于系统 (1.1)，这两类分别对应于 $\nu = 1$ 和$\nu = 0.$ 。值得注意的是，将描述一个或多个弱耦合振子的周期方程化为 Lienard 系统，可实现情形 $\nu = 1$（见 [2]）。

本文的结果采用一种称为生成环面分裂（GTS）方法的方法得出。第 2–7 节介绍了该方法应用的不同阶段。下面概述本文的内容，全文共分八节。

第 1 节“引言”简要概述了当前关于未扰动系统中具有相同或“相似”哈密顿量的系统的研究结果。关于这一主题的大多数论文研究的是自治系统，因此需要寻找的是极限环，而非不变环面，这使问题得以简化。这些论文的主要目标是求出希尔伯特循环性值的下界。文中还比较了这些结果，并讨论了用于自治系统的现有方法相较于 GTS 方法的应用可能性。

第 2 节“未扰动系统轨道的参数化”介绍了自治哈密顿系统 (1.2) 的轨道。该系统的周期轨道分为三类：0] 类包含所有与图 1.1 中紫色周期轨道相似的周期轨道，1] 类为绿色，2] 类为蓝色。周期轨道和分离曲线的参数化通过系统 (2.1) 的初值问题的解来完成；这些解是广义李雅普诺夫坐标的非归一化类比（见 [3], 第 290 页）。初始值区间由条件 (2.4) 确定。此外，第 2 节还包含辅助引理，用以描述实解析二周期函数的性质。

在第 3 节“进入闭轨邻域”中，给出了特殊极坐标变换 (3.6) 的构造，以及将其应用于系统 (1.1) 的方法。该变换可实现从其所环绕的平衡点出发，进入系统 (1.2) 中任意周期轨道的邻域。只有在角变量单调变化时，这种变量变换才有可能实现。经计算发现，对于类 1] 中的所有周期轨道，角变量并非都单调变化（见引理 3.1）。通过对 (2.4) 中的初始值施加附加限制 (3.5)，找出这些周期轨道并将其排除在考察范围之外。

在第 4 节“主要径向平均”中，对特殊极坐标系统 (3.8) 的径向变量方程右端进行平均法，且该方程与 r, 无关；其中，未扰动系统的任意选定周期轨道是其平衡点。

因此，通过进行变量变换 (4.1) 得到的系统 (4.3) 的径向方程含有一项，该项与 ε, 无关，且关于 r. 的阶为二阶或更高。然后，收集关于 r 和 ε, 的较低阶项后，将系统 (4.3) 写成形式 (4.7)。

这使我们能够利用第 5 节中级数 $X_0(t,\ x,\ y)$ $Y_0(t,\ x,\ y)$ 的系数写出生成积分方程 (5.11)。同一节中定义了可容许解（见定义 5.1 ）。这些解记为 $b^\star_{kl}$ ，并确定解的初始值 0，$b^\star_{kl},\ l$；这些解对系统 (1.2) 的所谓生成周期轨道进行参数化（见定义5.2）。

需要指出的是，GTS 方法中可容许解的定义不仅要求标准非退化条件 (5.10) 成立（该条件以构造性方式给出），而且由于初始系统具有 T-周期性，当 $\nu = 0$ 时，还要求满足关于 T 的 Siegel 条件，以及解的周期 $\omega^\star_{kl}$ （这些解对相应周期轨道进行参数化）满足在 (2.7) 中计算出的结果。

我们固定任意一个可容许解 $b^\star_{kl}$，同时固定生成周期轨道、描述该周期轨道小邻域内运动的特殊极坐标系统（3.8），以及部分平均系统（4.7）。接下来的讨论将使我们能够证明不变环面的存在性；对于任意小的 ε，系统（1.1）在生成周期轨道的小邻域内都保持该不变环面。

在第 6 节“ 不变曲面的构造”中，对由系统（1.1）的扰动部分得到的项，在系统（4.7）中对径向和角变量进行平均。随后进行缩放。缩放后得到的系统（6.14），对于任意充分小的 ε（见定理 6.1），都具有一个二维不变曲面，该曲面由关于角变量连续、关于 t 以 T 为周期且关于 $\omega^\star_{kl}$ 为周期的函数 $A^\nu_\varepsilon(t,\ \psi)$ 参数化。 引理 6.4–6.6 证明了该不变曲面的渐近稳定性、函数关于 ψ 的光滑性，以及函数 $A^\nu_\varepsilon(t,\ \psi)$ 关于 ε 的连续性。

[4] 中 Hale 引理的证明所采用的思想，为所给出的证明奠定了基础。

在第 7 节“理论结果”中，给出了将 GTS 方法应用于系统 (1.1) 所得到的结果。特别地，写出了特殊极坐标系统 (3.8) 的二维不变曲面，以及这些曲面关于小参数的幂的渐近展开中的低阶项（见引理 7.1 和推论）。随后，将曲面的双周期参数化代入特殊极坐标变换 (3.6)，得到不变环面的公式；对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$ ，这些不变环面均由系统 (1.1) 保持不变（见定理 7.1）。此外，在第 7.2 小节中，将所有得到的结果表述为自治系统的形式，以便在自治情形下应用；此时情形 $\nu = 1$ 不会实现，且不需要满足 Siegel 条件。

在第 8 节“实际结果”中，我们分析了生成方程 (5.11)，从而可以在两种情况下求出特定周期系统 (1.1) 的解：$\nu = 0$ 和 $\nu = 1.$

对于 $\nu = 0$ 和 $\nu = 1$，条件 (8.3) 确定了系统 (1.1) 的集合及其周期扰动，这些扰动与参数无关，且至多包含三阶的三项。对于这类系统，找到了十一个区间，每个区间都包含生成方程 (5.11) 的一个可容许解（见引理8.1、定理 8.1）。使用计算

环境 Maple 绘出了未扰动系统 (1.2) 的生成周期轨道，如图 8.2 所示。因此，对于 $\nu = 1$，本文 [5] 的结果是重复的，但该文仅考虑自治系统，且其扰动包含更多项。关于 $\nu = 0$ 情形下存在十一个不变环面的结果是新的。

此外，还对区间 (0，ε_*]，（其中可以找到极限环）的上界求值进行了研究。通过使用 Maple 绘制积分曲线的相图 $\varepsilon_* = 0.05$，，并借助表格展示 $\varepsilon_* = 0.001$. 的生成周期轨道小邻域内螺旋线与横轴的交点，直观地验证了理论结果。为说明该方法，将条件 (8.3) 应用于自治系统 (1.1)。

请注意，在 [2] 中，已使用 GTS 方法研究了以下更简单的系统:

$$\dot{x} = \big(-y + \varepsilon X(t,x,y,\varepsilon)\big)\varepsilon^{\nu}, \quad \dot{y} = \big(x^3 - 2\varpi x^2 + \eta x + \varepsilon X_2(t,x,y,\varepsilon)\big)\varepsilon^{\nu}, \tag{1.3}$$

其中 $\varpi = 0$，1； $\eta = -1$，0，1，且 $\varpi = 0$， $\eta \in \mathbb{R}^1$，其中 $\varpi = 1$，；未扰动部分为哈密顿系统，且 $H = (x^4 - 8\varpi x^3/3 + 2\eta x^2 + 2y^2)\varepsilon^{\nu}/4$.

系统 (1.3) 是对这样一个系统的推广：其第二个方程的未扰动部分是关于 x, y 和 ε, 的齐次三次多项式。该系统曾在[6] 中采用一种类似于 GTS 方法的途径进行研究。在 [6] 中给出了具有三个不变环面的系统示例，并首次完整展示了 GTS 方法。

GTS 方法是对 Y. N. Bibikov 在 [7] 中用于研究杜芬方程 $\ddot{x} + x^3 + \varepsilon bx = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$. 的方法的改进。该方程描述了振子的一种振荡，其振荡频率相对于振幅为无穷小，并且它是系统 (1.3) 的一个特例。

注 1. *In the majority of papers, devoted to the search of invariant surfaces in the systems with hamiltonian as an unperturbed part, these systems are considered autonomous. In this case, the preserved for any sufficiently small ε invariant surfaces are cylindrical with the limit cycle as generatrix. It is located in the phase plane, in the small with the respect to ε neighbourhood of a specific cycle of the unperturbed system, called generating cycle in this paper.*

1.2. 与弱化的希尔伯特第十六问题的联系。 系统 (1.1) 的特例是采用类似设定开展研究的对象。本小节将聚焦于这项研究。

考虑具有如下哈密顿未扰部分的自治系统

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial \widetilde{H}(u,v)}{\partial v} + \varepsilon P(u,v), \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{\partial \widetilde{H}(u,v)}{\partial u} + \varepsilon Q(u,v), \tag{1.4}$$

其中 H， P， Q 是相应次数的实系数多项式 n， m_1， m_2，$\varepsilon \geq 0$ 是一个小参数。~

读者可以了解弱化的希尔伯特第十六问题第一问的答案；该问题由 V.I. Arnold 在 [1], 于 [8], [9] 命名。这些答案给出了数量 $N(n,\ m) = N(n,\ m,\ H,\ P,\ Q)$， 的上界；对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$，该上界就是所研究系统的极限环数量的精确上界。

后来这一问题被称为局部希尔伯特–阿诺德问题，其进一步的问题与求取下界 $N(n,\ m)$ 或希尔伯特循环性

值 $H(n) = N(n-1, n-1)$ 有关，针对系统 (1.4)，还涉及所有可能的极限环相对位置的分类。

通常使用Melnikov函数法估计 $N(n, m)$（见 [10, 11]）。该方法基于Poincar´e-Pontryagin定理（见定理6.1,[12]），归结为研究和计算阿贝尔积分。根据该方法，考虑函数 $d_\varepsilon(h) = \varepsilon M_1(h)+\varepsilon^2 M_2(h) + \ldots + \varepsilon^k M_k(h) + \ldots$，其中参数 h 表示平衡点邻域内函数 $H(x, y)$的值，而 $M_k(h)$是 k. 阶自治Melnikov函数。计入重数后，第一个非零Melnikov函数 $M_k(h)$（$k = 1, 2, 3, \ldots$）的零点数决定了从周期环域分岔出的极限环的最大数量。

利用Melnikov函数法，$n = 4$和 $m = 3$ 的某些Lienard系统的结果在 [13], [14], [15], 中得出，其中 $n = 7$，$m = 4$ ——在 [17], 中，其中 $n = 4$ 和$m = 3$，100——在 [16]中。

The J. Li在 [12]中给出了截至2003年的现有结果综述 .

J. Li和Q. Huang在 [5]中采用了另一种方法。利用检测函数法，他们证明了对于 $H(3) \geq 11$ 的(1.4)型系统

$$(1.5)\quad \frac{du}{d\tau} = v(1-\mu_1 v^2) + \varepsilon u(k_1 v^2 + k_2 u^2 - \lambda),\ \frac{dv}{d\tau} = -u(1-\mu_2 u^2) + \varepsilon v(k_1 v^2 + k_2 u^2 - \lambda)$$

~其中 $H(u, v) = (\mu_1 v^4 - 2v^2 + \mu_2 u^4 - 2u^2)/4$ 以及 $0 < \mu_1 < \mu_2$.

利用 [5] 的结果，J. Li在 [12] 中为 $H(n)$指定了 $n = 2^k - 1$ ($k \geq 3$)的下界。他考虑了 $\mathbb{Z}_q$-等变系统序列($q \geq 2$)

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial \widetilde{H}_k(u,v)}{\partial v} + \varepsilon P_k(u,v),\quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{\partial \widetilde{H}_k(u,v)}{\partial u} + \varepsilon Q_k(u,v)$$

~ ~其中 $H_k(u, v) = H_{k-1}(u^2 - \eta^{k-2}, v^2 - \eta^{k-2})$ $P_k(u, v) = P_{k-1}(u^2 - \eta^{k-2}, v^2 - \eta^{k-2})$ $Q_k(u, v) = Q_{k-1}(u^2 - \eta^{k-2}, v^2 - \eta^{k-2})$，其中 $\widetilde{H}_2$，P_2，Q_2，已在 (1.5) 中引入。

这是通过采用 C. J. Christopher 和 N. G. Lloyd 在 [18] 中提出的“系统四倍化”方法实现的。

后来，[19] 的作者构造了系统 (1.4)，其哈密顿量 $H(u, v) = (u^4 + 4(1-\lambda)u^3/3 - 2\lambda u^2 + (v^2 - k^2)^2 - k^4)/4$，$P \equiv 0$，$Q = v(a_1 + a_2 u + a_3 u^2 + a_4 v^2)$，更为复杂；对于某些参数取值，该系统具有十三个极限环，即 $H(3) \geq 13$.

1.3. 不同方法所得结果的比较。让我们将本文所得结果与现有结果进行比较。

对于 [5], 中满足 $\mu_1 = 1$，$\mu_2 = 2$，$k_1 = -3$，$k_2 = 1$ 的系统 (1.5)，已给出了关于极限环数量及其位置随参数 λ 取值变化的分类。特别地，研究表明，满足 $-4.80305 + O(\varepsilon) < \lambda < -4.79418 + O(\varepsilon)$ 的系统 (1.5) 有十一个极限环。

系统 (1.5) 是系统 (1.1) 的一个特例。取这些参数值 μ 和 k，并利用变量变换 $\tau = (1/2)^{1/2} t$，$u = 2^{-1/2} y$，$v = x$，可将其变换为满足以下条件的系统 (1.1)：

$\nu = 0$, $\gamma = 1/2$, $X(t, x, y, \varepsilon) = 2^{-1/2} x(x^2 - 3y^2/2 - \lambda)$, $Y(t, x, y, \varepsilon) = 2^{-1/2} y(x^2 - 3y^2/2 - \lambda)$, 也就是说，在系统 (1.1) 中 $X = X_0(x, y)$ $Y = Y_0(x, y)$。

利用 GTS 方法，得知系统 (1.5) 的生成方程 (5.11) 有十一个可容许解（见定义 5.1）。这些解确定横轴上的点；根据下文陈述的定理1，每个点的小邻域内都有一条极限环，它生成一个经过该邻域的不变环面。因此，这为 [5] 的结果及其推广提供了另一种证明，具体如下：

a) 它允许将 ε 的任意函数加入扰动中；
b) 使系统 (1.1) 成为时间周期系统，同时保留上述函数 X 和 Y 作为平均值；

c) 它使得 GTS 方法能够应用于标准系统，即具有 $\nu = 1,$ 的系统，而这类系统在 [5] 中未曾讨论。

另一方面，在第6.2节中，我们描述了一组具有 $\gamma = 1/2$ 和时间周期扰动 (8.3) 的系统 (1.1)，这些系统的生成方程也有十一个可容许解，可用于确定不变环面。

在特例中，当所构造的自治系统

$$\nu = 0; \quad X(t,x,y,\varepsilon) = 0, \quad Y(t,x,y,\varepsilon) = -3.314y - 0.361y^3 + 4.493x^2y,$$

th变量变换 $t = \sqrt{2}\tau, \quad x = v, \quad y = \sqrt{2}u$ 将其变为系统 (1.5)，其中

$$\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2; \quad P(u,v) = (4.493\sqrt{2}v^2 - 0.722\sqrt{2}u^2 - 3.314)u, \quad Q(u,v) = 0,$$

该系统还具有十一个极限环，这些极限环在 [5] 中未被考虑。

1.4. GTS 方法的特点。GTS 方法允许为任何具有哈密顿未扰部分的时间周期系统写出生成（或分岔）方程。生成方程中位于预先调整的边界内的任意解，在满足以下条件的前提下，对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$，都决定自治情形下的一个极限环，或周期情形下的一个不变环面：首先，$\nu = 0$ 关于扰动周期以及生成周期轨道的绕行时间的 Siegel 条件 (5.1) 成立；其次，非退化条件 (5.10) 成立，该条件要求某个常数不为零，或在多维情形下某个常数矩阵非退化。

GTS 方法的主要优势在于其通用性。与上述其他方法相比，它可以：

1. 不仅研究自治系统，还可以研究确定不同维数不变环面的时间周期系统。显然，应用 Melnikov函数法研究周期系统因计算困难而陷入停滞。作者所知的、尝试使用 Melnikov函数法研究此类系统的工作之一由 M. Han [20],完成，但其研究的系统（1.12）仅将时间周期扰动作为 $\varepsilon^2,$ 的系数，而由 ε 的系数生成的所有 Melnikov函数都是自治的。

2. 研究所谓的标准系统，即系统（1.1），该系统的右端含有 ε 这一因子，或者说具有“快”时间。对于此类系统，可以引入 $H(n)$ 的 аналог，并求出其下界。本文已经完成了这项工作。对于此类系统，不需要 Siegel 条件。

3. 在点 $x = 0, y = 0,$ 的特定邻域内，对系统 (1.1) 使用任意光滑的 x, y扰动 $X^{\nu}_{2-\nu}(t,x,y,\varepsilon)$ $Y^{\nu}_{2-\nu}(t,x,y,\varepsilon)$，并且关于 t 解析的 x, y 扰动 $X^0_1(t,x,y)$ $Y^0_1(t,x,y)$ 一致，因为正如研究所揭示的，这些扰动不会影响不变环面的存在。

4. 写出极限环和不变环面的渐近展开，关于 ε.

5. 研究高维周期系统，并确定对于任意充分小的参数值，从平衡点分岔出的各种维数环面的分岔情况。

例如， [21] 维系统 $2n$ （$n \geq 2$）

$$\dot{x}_i = -\gamma_i y_i \varepsilon^\nu + X_i(t,x,y,\varepsilon)\varepsilon^{1+\nu},\ \dot{y}_i = \gamma_i(x_i^3 - \eta_i x_i)\varepsilon^\nu + Y_i(t,x,y,\varepsilon)\varepsilon^{1+\nu},$$

其中，$i = \overline{1,\ n}$，$\nu = 0,\ 1$，$\gamma_i \in (0,\ +\infty)$ $\eta_i = -1,\ 0,\ 1$，$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ 已得到研究。该系统的未扰动部分有一至 3^n 个零点。利用 GTS 方法，得到了系统周期扰动的平均值所满足的条件。若这些条件成立，则系统保留维数为 $n+1$. 的不变环面

作为示例，给出了四维系统。对于该系统，找到了六个点，使得有唯一的、与环面同胚的三维曲面经过每个点的小邻域。

2. Parametrization of the orbits of the unperturbed system

2.1. 相图。考虑一个具有九个平衡点、类似于系统 (1.2) 的自治哈密顿系统，其定义方程为

$$C'(\varphi) = \gamma(S^3(\varphi) - S(\varphi)),\ \ S'(\varphi) = -(C^3(\varphi) - C(\varphi)) \quad (0 < \gamma \leq 1). \tag{2.1}$$

对于每个 $a > 0$，我们考虑由系统 (2.1) 的积分所确定的平面 $(C,\ S)$ 上的闭轨集合 Γ_a，该积分由方程给出

$$(C^2-1)^2 + \gamma(S^2-1)^2 = a. \tag{2.2}$$

显然，系统 (2.1) 和 (1.2) 具有相同的轨道，但当 $\nu = 0$ 和 $\nu = 1$ 时，它们的参数化不同。

对于系统 (2.1)，九个奇点中有五个是中心。当 $a = 0$，时，点 $(\pm 1,\ 1)$，$(\pm 1,\ -1)$ 是方程 (2.2) 的解；当 $a = 1+\gamma$. 时，$(0,\ 0)$ 是方程 (2.2) 的解。其他奇点是鞍点；当 $a = \gamma$，时，点 $(\pm 1,\ 0)$ 是方程 (2.2) 的解；当 $a = 1$. 时，$(0,\ \pm 1)$ 是方程 (2.2) 的解

只需描述位于第一象限的轨道或轨道的一部分，因为方程 (2.2) 在变量变换 $C \to -C$, $S \to -S$ 下保持不变。我们将这类轨道的集合记为 Γ_a^*.

属于Γ_a^* 的曲线的极值为:

$$\begin{array}{l} r^s = \sqrt{1+\gamma^{1/2}},\ \ l^s = \sqrt{1-\gamma^{1/2}},\ \ r^i = \sqrt{1-(1-\gamma)^{1/2}},\ \ r^e = \sqrt{1+(1-\gamma)^{1/2}}, \\ u^e = \sqrt{1+\gamma^{-1/2}};\ \ l_1^1, l_2^1 = \sqrt{1-a^{1/2}},\ \ lo_2^1 = \sqrt{1-(a/\gamma)^{1/2}}, \\ r_0^{0i}, l_1^0 = \sqrt{1-(a-\gamma)^{1/2}},\ \ r_0^{0e}, r_1^0 = \sqrt{1+(a-\gamma)^{1/2}},\ \ r_0^{1e}, r_1^1, r_2^1 = \sqrt{1+a^{1/2}}, \\ u_0^{0i} = \sqrt{1-((a-1)/\gamma)^{1/2}},\ u_0^{0e} = \sqrt{1+((a-1)/\gamma)^{1/2}},\ u_0^{1e}, u_1^1, u_2^1 = \sqrt{1+(a/\gamma)^{1/2}}, \end{array} \tag{2.3}$$

其中 $r,\ l,\ u,\ lo,\ s,\ i,\ e$ 分别表示右、左、上、下、分界线、内部和外部；前五个常数刻画 Γ_γ^* 和 Γ_1^*，对于其他常数，上标表示另一个坐标的取值，下标表示我们将在下文引入的类的编号。

我们首先考察由方程 (2.2) 确定的分界曲线，即经过系统 (2.1) 奇点的曲线。

对于 $\gamma < 1$，集合 Γ_γ $(a = \gamma)$ 由四条闭曲线（或两个 ∞形环）组成。其中两条同宿轨道在奇点 (1，0) 处相交，并围住点 (1，± 1)，；另外两条在奇点 $(-1$，0) 处相交，并围住奇点 $(-1$，$\pm 1)$。因此，Γ^*_γ 是右侧 ∞形环的上半部分，其极值点如下：$(r^s$，1)，(1，$\sqrt{2})$，$(l^s$,– 1)，(1，0)。

对于 $\gamma < 1$，集合 Γ_1 $(a = 1)$ 由两条闭曲线组成：内曲线 Γ^i_1 和外曲线 Γ^e_1.。这两条曲线在奇点 (0，1) 和 (0，-1) 处相接。集合 Γ^i_1 包围着奇点 (0，0)，上述∞形环各有一个位于 Γ^i_1 与 Γ^e_1. 之间的两个区域中。集合 Γ^{i*}_1的极值点为 $(r_i$，0)，(0，1)，而 Γ^{e*}_1的极值点为 $(r^e$，0)，$(\sqrt{2}$，1)，(1，$u^e)$，(0，1)。

对于 $a = \gamma = 1$，参数 $r^i = r^e = 1$ 和 Γ_γ 与 Γ_1重合，即 Γ^{i*}_1和 Γ^{e*}_1在点 (1，0) 处相接，形成右侧∞形环的上半部分。

现在，对于 $a \neq \gamma$，1，集合 Γ_a 由系统 (2.1) 的闭轨（周期轨道）组成。分离曲线将集合 Γ_a 分成三类，我们分别记为 $0], 1], 2]$，定义如下：

$0]$ $a > 1$. 对于 $1 < a < 1 + \gamma$，集合 Γ_a 由两个周期轨道组成：内轨道 Γ^i_a 包围 (0，0) 且位于 Γ^i_1内部；外轨道 Γ^e_a 包围 Γ^e_1.。于是，点 $(r^{0i}_0, 0)$、$(0, u^0{}_0{}^i)$ 是 Γ^{i*}_a的极值点；点 $(r^{0e}_0, 0)$、$(r^{1e}_0, 1)$、$(1, u^{1e}_0)$、$(0, u^{0e}_0)$ 是 Γ^{e*}_a的极值点。此外，$r^{0i}_0 \in (0, r^i)$ $r^{0e}_0 \in (r^e, \infty)$。由于当$a = 1 + \gamma$时，$\Gamma^i_a$ 退化为点 (0，0)，因此对于 $a \geq 1 + \gamma$，仅存在周期轨道 Γ^e_a。

因此，类 $0]$ 自然分为两个子类：$0^i]$ 具有$1 < a < 1 + \gamma$的周期轨道 Γ^i_a 和具有 $a > 1$.的周期轨道 Γ^e_a 的 $0^e]$

$1]$ $\gamma < a < 1$. 集合 Γ_a 由两个周期轨道组成。右侧轨道的上半部 Γ^*_a，位于 Γ^*_γ和 $\Gamma^{i*}_1 \cup \Gamma^{e*}_1$之间，并具有以下极值点：$(r^0_1$，0)，$(r^1_1$，1)，(1，$u^1_1)$ $(l^1_1$，1)，$(l^0_1$，0)，其中 $r^0_1 \in (1$，$r^e)$。

$2]$ $0 < a < \gamma$. 集合 Γ_a 由四个周期轨道组成。轨道 Γ^*_a 包围(1，1)，并位于 Γ^*_γ，其极值点为$(r^1_2$，1)，(1，$u^1_2)$，$(l^1_2$，1)，(1，$lo^1_2)$，其中 $r^1_2 \in (1$，$r^s)$。

2.2. 周期轨道的参数化。参数 a 不能确定 Γ_a 中的某个特定周期轨道，，因此不能用它来对周期轨道进行参数化。为定义参数化，我们使用极值点：$(r^{0i}_0$，0)，$(r^{0e}_0$，0) 属于类 $0]$,，$(\pm r^0_1$，0) 属于类 $1]$,，$(\pm r^1_2$，1) 和 $(\pm r^1_2$，$-1)$ 属于类 $2]$。每个这样的点都定义了相应的周期轨道，而式 (2.2) 中的参数 a 可通过上述参数 r 显式表示。

因此，系统 (2.1) 的任意周期轨道可由初值问题的实解析 ω_{kl}-周期解 $CS_{kl}(\varphi) = (C(\varphi)\ S(\varphi))$ 参数化，其初始条件为 0，b_{kl}，l，即

$$C(0) = b_{kl}, \quad S(0) = l \quad (k, l = 0, \pm 1,\ (k, l) \neq (0, \pm 1)); \tag{2.4}$$

where $b_{00} = \begin{bmatrix} b^i_{00} = r^{0i}_0 \in (0, r^i) \\ b^e_{00} = r^{0e}_0 \in (r^e, r^\sigma) \end{bmatrix}$; $b_{10} = r^0_1 \in (1, r^e)$, $b_{-10} = -r^0_1$; $b_{1,\pm 1} = r^1_2 \in (1, r^s)$, $b_{-1,\pm 1} = -r^1_2$; $r^\sigma = (1 + (\gamma\sigma^2(\sigma^2 - 2))^{1/2})^{1/2}$.

在上述公式中，k 确定沿横轴的平移，l 确定沿纵轴的“平移”，而数字 $|k| + |l|$ 确定与参数化周期轨道相关的类编号；常数 r 在 (2.3) 中引入。

系统 (2.1) 的右端是实多项式，因此，根据柯西定理，解 $CS_{kl}(\varphi) = CS_{kl}(\varphi$，0，$b_{kl}$，$l))$ 具有上述性质。

记 a_{kl} 为与初始值 b_{kl} 对应的参数 a 的值，并根据 (2.3) 重新计算所需的极值。简单计算可得

$$\begin{array}{c} a_{kl} = (1-|l|)\gamma + (b_{kl}^2-1)^2;\ u_0^{1e} = (1+((\gamma+((b_{00}^e)^2-1)^2)\gamma^{-1})^{1/2})^{1/2}, \\ r_0^{1e} = (1+(((b_{00}^e)^2-1)^2+\gamma)^{1/2})^{1/2},\ r_1^1 = (1+((b_{10}^2-1)^2+\gamma)^{1/2})^{1/2}, \\ l_1^0 = (2-b_{01}^2)^{1/2},\ l_2^1 = (2-b_{11}^2)^{1/2},\ \ l_1^1 = (1-((b_{10}^2-1)^2+\gamma)^{1/2})^{1/2}. \end{array} \tag{2.5}$$

注 2.1. *The limitation on the constant* $\sigma : \sigma > \sqrt{1+\gamma^{-1/2}}$, *which determines the domain of system* (1.1) *is chosen in a such way so all class* $0^e]$ *cycles and, by extension, other cycles of unperturbed system* (1.2) *are contained in the domain. According to* (2.4), *the parameter* $b_{00}^e \in (r^e, r^\sigma)$ *therefore, according to* (2.5) $a_{00}^e = \gamma + ((b_{00}^e)^2-1)^2 < \gamma + ((r^\sigma)^2-1)^2 = \gamma(1+\sigma^2(\sigma^2-2))$. *Moreover, for any class* $0^e]$ *cycle the following statement is correct:*

$$\max|C(\varphi)| = r_0^{1e} \le u_0^{1e} = \max|S(\varphi)| = (1+(a_{00}^e/\gamma)^{1/2})^{1/2} < \sigma.$$

2.3. 周期的计算。引入辅助函数

$$S_\pm(C^2(\varphi)) = \sqrt{1 \pm \gamma^{-1/2}(a_{kl} - (C^2(\varphi)-1)^2)^{1/2}}. \tag{2.6}$$

命题 2.1. 初值问题的实解析周期解 $(C(\varphi)\ S(\varphi))$ 的周期 ω_{kl}，其初值取自 (2.4)，可使用以下公式计算

$$\omega_{00}^i = 4\varphi_-^i,\ \omega_{00}^e = 4(\varphi_+^e+\varphi_-^e),\ \omega_{\pm10} = 2(\varphi_-^l+\varphi_+^u+\varphi_-^r),\ \omega_{1,\pm1} = \omega_{-1,\pm1} = \varphi_-^2+\varphi_+^2, \tag{2.7}$$

where $\varphi_-^i = \int_{b_0^{0i}}^0 \zeta_- dC$; $\varphi_+^e = \int_0^{r_0^{1e}} \zeta_+ dC$, $\varphi_-^e = \int_{r_0^{1e}}^{b_0^{0e}} \zeta_- dC$; $\varphi_-^l = \int_{l_1^0}^{l_1^1} \zeta_- dC$, $\varphi_+^u = \int_{l_1^1}^{r_1^1} \zeta_+ dC$, $\varphi_-^r = \int_{r_1^1}^{b_{10}} \zeta_- dC$; $\varphi_-^2 = \int_{b_{11}}^{l_2^1} \zeta_- dC$, $\varphi_+^2 = \int_{l_2^1}^{b_{11}} \zeta_+ dC$, the limits of integration are defined in (2.3), with $a = a_{kl}$ from (2.5), and $\zeta_\pm(C^2) = (\gamma(S_\pm^3(C^2) - S_\pm(C^2)))^{-1}$.

Proof. 沿着周期轨道运动，令 φ 从 0 变化到 ω_{kl}。对于每一类，函数 $S(\varphi)$ 都可以表示为函数 $S(C(\varphi))$。利用公式 (2.2)、(2.4) 和 (2.5) 中的常数，以及系统 (2.1) 中，对于类 $0^i]$ 的所有周期轨道，$S'(0) > 0$；对于其他类的所有周期轨道，$S'(0) < 0$ 这一事实，我们得到：

$$\begin{array}{l} 0^i]\ S(C(\varphi)) = \{S_- \text{ when } C\downarrow_{-b_{00}^i}^{b_{00}^i},\ -S_- \text{ when } C\uparrow_{-b_{00}^i}^{b_{00}^i}\}; \\ 0^e]\ S(C(\varphi)) = \{-S_- \text{ when } C\uparrow_{b_{00}^e}^{r_0^{1e}},\ -S_+ \text{ when } C\downarrow_{-r_0^{1e}}^{r_0^{1e}},\ -S_- \text{ when } C\uparrow_{-r_0^{1e}}^{-b_{00}^e}, \\ \qquad\qquad S_- \text{ when } C\downarrow_{-r_0^{1e}}^{-b_{00}^e},\ S_+ \text{ when } C\uparrow_{-r_0^{1e}}^{r_0^{1e}},\ S_- \text{ when } C\downarrow_{b_{00}^e}^{r_0^{1e}}\}; \\ 1]\ S(C(\varphi)) = \{-kS_- \text{ when } kC\uparrow_{kb_{k0}}^{kr_1^1},\ -kS_+ \text{ when } kC\downarrow_{kl_1^1}^{kr_1^1},\ -kS_- \text{ when } kC\uparrow_{kl_1^1}^{kl_1^0}, \\ \qquad\qquad kS_- \text{ when } kC\downarrow_{kl_1^1}^{kl_1^0},\ kS_+ \text{ when } kC\uparrow_{kl_1^1}^{kr_1^1},\ kS_- \text{ when } kC\downarrow_{kb_{k0}}^{kr_1^1}\}; \\ 2]\ S(C(\varphi)) = \{lS_- \text{ when } kC\downarrow_{kl_2^1}^{kb_{kl}},\ lS_+ \text{ when } kC\uparrow_{kl_2^1}^{kb_{kl}} \quad (kl=1); \\ \qquad\qquad lS_- \text{ when } kC\uparrow_{kl_2^1}^{kb_{kl}},\ lS_+ \text{ when } kC\downarrow_{kl_2^1}^{kb_{kl}} \quad (kl=-1)\}. \end{array}$$

我们可以将系统 (2.1) 的第一个方程写为

$$d\varphi = (\gamma(S^3(\varphi) - S(\varphi)))^{-1} dC(\varphi).$$

然后，我们对该方程关于 φ 从 0 积分到 ω_{kl} ，并将 $S(C(\varphi))$ 的公式代入该方程右端的每一类表达式中。考虑到函数 $\zeta_{\pm}$ 关于 C 为偶函数，并通过减少项数，我们得到公式 (2.7)。 □

此外，我们发现 $C(\omega_{00}^{i}/4) = C(\omega_{00}^{e}/4) = 0$, $S(\omega_{00}^{i}/4) = u_0^{0i}$, $S(\omega_{00}^{e}/4) = -u_0^{0e}$,$C(\omega_{10}/2) = l_1^0$, $S(\omega_{10}/2) = 0$.

2.4. **实解析二周期函数**。本文将考察实解析ω_{kl}-周期函数（系统 (2.1) 的解 $CS_{kl}(\varphi)$ 除外），以及关于 t和 φ 的二周期函数。下面描述它们的性质。

若连续的函数 $\zeta(t,\varphi)$ 关于 t 一致实解析，关于 φ 实解析，且关于 t 为 T-周期、关于 φ 为 ω-周期，则称其为函数；如果对于所有 $\varphi_* \in \mathbb{R}$ ，都存在这样的参数 $r_{\varphi_*} > 0$，使级数 $\zeta(t,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta^{(m)}(t($ $\varphi-\varphi_*)^m$ 的系数为实数、连续且关于 t 为 T-周期，并且对任意 $t \in \mathbb{R}$绝对收敛，其中 $\varphi \in \mathbb{C}$满足 $|\varphi-\varphi_*| < r_{\varphi_*}$.

为所有 $\varrho > 0$. 引入两个集合

$$B_\varrho = \{(\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi)\colon \operatorname{Re}\varphi \in \mathbb{R},\ |\operatorname{Im}\varphi| \le \varrho\},\quad \mathcal{B}_\varrho = \{(t,\varphi)\colon t \in \mathbb{R},\ \varphi \in B_\varrho\}. \tag{2.8}$$

引理 2.1. 假设函数 $\zeta(t,\varphi)$ 连续，关于 t 为 T 周期，关于 φ 为 ω 周期，且关于 t 一致，并关于 φ. 实解析。假设数值 $M^r = \max_{t,\varphi\in\mathbb{R}} |\zeta(t,\varphi)|$. 。那么

1) 对于任意此类参数 $\delta > 0$ ，存在 $\varrho > 0$ ，使得函数 $\zeta(t,\varphi)$ 为二周期函数，关于 t 一致，并且是定义在 $\mathcal{B}_\varrho$ 上的解析函数，且

$$\exists M \quad (0 < M \le M^r + \delta)\colon\ M = \max_{(t,\varphi)\in\mathcal{B}_\varrho} |\zeta(t,\varphi)|;$$

2) 对于 $\zeta(t,\varphi)$ ，傅里叶级数展开的指数形式为 $\varphi \in [0,\omega$]

$$\zeta(t,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) e^{2\pi i n\varphi/\omega},\quad \zeta_n(t) = \omega^{-1}\int_0^{\omega} \zeta(t,\varphi) e^{-2\pi i n\varphi/\omega} d\varphi, \tag{2.9}$$

其中 $\zeta_{-n}(t) = \overline{\zeta_n(t)}$，由于 $\zeta(t,\varphi)$ 为实函数，以下结论成立:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\colon\ |\zeta_n(t)| \le M e^{-2\pi|n|\varrho/\omega}. \tag{2.10}$$

证明. 1) 对每个满足 $\operatorname{Re}\varphi \in [0,\omega]$ 的 $\varphi \in \mathbb{C}$，记 $K_{r_\varphi}(\varphi)$ 为幂级数 $\zeta(t,\varphi)$ 的收敛圆盘，其收敛半径为 $r_\varphi > 0$，中心为 $(\operatorname{Re}\varphi, 0)$。将 $K_{r_0}(\varphi_0)\ldots,K_{r_m}(\varphi_m)$ 记为这些圆盘对闭区间 $\{\operatorname{Re}\ \varphi \in [0,\omega],\operatorname{Im}\varphi = 0\}$. 的有限覆盖

假设 $\varrho_0 = \min\{\operatorname{Im}\ z_1,\ \ldots\ldots,\ \operatorname{Im}\ z_m\}$，其中 z_μ 满足 $\operatorname{Im}\ z_\mu > 0\,(\overline{\mu = 1},\ m)$ 是圆 $|z-\varphi_{\mu-1}| = r_{\mu-1}$ 和 $|z-\varphi_\mu| = r_\mu$. 的交点。然后，选取任意小于 ϱ_0.的数作为 ϱ

对于所有 t，函数 $\zeta(t,\ \varphi)$ 在 B_ϱ，上是 ω-周期的，因为解析函数 $\zeta(t,\ \varphi+\omega)$ $-\zeta(t,\ \varphi) \equiv 0$，其中 $\varphi \in \{\operatorname{Re}\ \varphi \in [0,\omega],\ \operatorname{Im}\varphi = 0\}$. 。因此，由唯一性可知，它对所有 $\varphi \in B_\varrho$. 都等于零。于是，连续双周期函数 $|\zeta(t,\ \varphi)|$ 达到其最大值，记为 M，，且该最大值在 $\mathcal{B}_\varrho$. 处取得。此外，常数 ϱ 可以取得足够小，使得 M与 M^r.的距离小于 δ

2) 对于任意固定的 t ，沿一条从 t 出发的围道，对函数

$$0 \to \omega \to \omega + i\varrho\operatorname{sgn} n \to i\varrho\operatorname{sgn} n \to 0$$

$\zeta(t,\ \varphi)e^{-2\pi in\varphi/\omega}$ 的围道积分等于零，这是由于 $\zeta(t,\ \varphi)$ 是 ω-周期函数。同理，该函数沿相同竖直直线的积分之和也等于零。因此，沿水平直线的积分之和也等于零。于是，由于 (2.9),

$$\omega\zeta_n = -\int_{\omega+i\varrho\operatorname{sgn} n}^{i\varrho\operatorname{sgn} n} \zeta(t,\varphi)e^{-2\pi in\varphi/\omega}d\varphi = e^{2\pi|n|\varrho/\omega}\int_0^{\omega}\zeta(t,\psi+i\varrho\operatorname{sgn} n)e^{-2\pi in\psi/\omega}d\psi.$$

由此等式可得公式 (2.10) 中函数 $|\zeta_n(t)|$ 的求值。 □

显然，减小常数 ϱ 不会影响求值，并且会使 M “更接近” M^r. 。此外，引理 2.1 可应用于任意实解析的 ω-周期函数，而与 t 无关，例如函数 $C(\varphi)$ 和 $S(\varphi)$。

引理 2.2 假设 $CS_{kl}(\varphi) = (C(\varphi)\ S(\varphi))$ 是系统 (2.1) 的解，其初始值为 $0, b_{kl}, l$，如 (2.4) 中所述，则对于来自 (1.1) 的 σ

$$\exists\,\varrho>0\colon\quad M=\max_{\varphi\in B_\varrho}\{|C(\varphi)|,|S(\varphi)|\}<\sigma. \tag{2.11}$$

证明。 考虑注 2.1，我们得到解 $CS_{00}(\varphi)$ 的求值 $M_s^r = \max\limits_{\varphi\in\mathbb{R}} |S(\varphi)| = u_0^{1e} < \sigma$ 和 $M_c^r = \max\limits_{\varphi\in\mathbb{R}} |C(\varphi)| \le M_s^r$，其中 $b_{00} = b_{00}^e \in (r^e, r^\sigma)$, 将类 $0^e]$. 的任意周期轨道参数化

我们从引理 2.1 中选取常数 δ，使得不等式 $M_s^r + \delta < \sigma$ 成立。于是，存在常数 $\varrho_s > 0$，使函数 $S(\varphi)$在 (2.8) 中记作 B_{ϱ_s} 的区域上解析，$M_s = \max\limits_{\varphi\in B_{\varrho s}} |S(\varphi)| < \sigma$，并且存在常数 $\varrho_c > 0$，使得 $\max\limits_{\varphi\in B_{\varrho_c}} |C(\varphi)| \le M_c < \sigma$.

其他类中周期轨道的极值小于或等于 u_0^{1e}，因此存在常数 ϱ，使得这些类中任意周期轨道的参数化满足$|CS_{kl}(\varphi)| \le M_s$. □

3. The passing into a neighbourhood of a closed orbit

3.1. 角变量的单调性指标。对于 (2.4) 中的每个 b_{kl}，我们引入实解析的 ω_{kl}-周期函数

$$\alpha_{kl}(\varphi) = C'(\varphi)(S(\varphi)-l) - (C(\varphi)-k)S'(\varphi). \tag{3.1}$$

利用公式 (2.2)，函数可写成更简单的形式:

$$\alpha_{kl}(\varphi) = a_{kl} - 1 - \gamma + C^2(\varphi) + \gamma S^2(\varphi) - k(C^3(\varphi) - C(\varphi)) - \gamma l(S^3(\varphi) - S(\varphi)).$$

对等式关于系统 (2.1) 求导，得到:

$$\alpha'_{kl}(\varphi) = \gamma((S^3-S)(2C-3kC^2+k) - (C^3-C)(2S-3lS^2+l)). \tag{3.2}$$

我们来研究函数 $\alpha_{kl}(\varphi)$沿轨道的符号如何变化：对于类 $0^i]$，当 φ 增加时，轨道逆时针运行；对于其他类，当 φ 增加时，轨道顺时针运行。

只有当 α_{kl} 是定号函数时，才能在任意周期轨道的邻域内通过，因为从几何角度看，若我们从点（$k,\ l$）沿周期轨道观察运动，α_{kl} 的符号反映了角变量变化的单调性。

这就是不能用同一个函数 α_{00} 从类 $1]$ 和类 $2]$过渡到周期轨道的原因。假设我们从原点观察运动，极角并非单调变化。公式 (3.1) 中减去常数 k 和 l ，意味着原点在系统 (2.1) 中平移至点（k， l）。

3.2. 类 $0]$中角变量的单调性。 证明 $\alpha_{00} = a_{00} -1 - \gamma + C^2(\varphi) + \gamma S^2(\varphi)$ 是一个定号函数。

将 $k = l = 0$ 代入 (3.2)，得到： $\alpha'_{00} = 2\gamma C(\varphi)S(\varphi)(S^2(\varphi) - C^2(\varphi))$。

对于类 $0^i]$ $(a = a^i_{00} \in (1, 1 + \gamma))$，当$\varphi \in [0, \omega/4]$ 时，周期轨道位于第一象限，并在 $\varphi = 0$ 时经过点 $(r^{0i}_0, 0)$，在 $\varphi = \omega/4$.时经过点 $(0, u^{0i}_0)$。常数 $r^{0i}_0 = b^i_{00}$ 和 u^{0i}_0 由 (2.3) 给出。

注意，当 $C_0(\varphi) > S_0(\varphi)$ 时， $\alpha'_{00}(\varphi) < 0$；当 $C_0(\varphi) < S_0(\varphi)$ 时， $\alpha'_{00}(\varphi) > 0$。因此，函数 $\alpha_{00}(\varphi)$ 在端点 $[0, \omega/4]$. 处取得最大值。然而， $\alpha_{00}(0) =a - 1 - \gamma + (r^{0i}_0)^2 = (a - \gamma)^{1/2}$ $((a - \gamma)^{1/2} - 1) < 0$， $\alpha_{00}(\omega/4) = a - 1 - \gamma + \gamma(u^{0i}_0)^2 =(a - 1)^{1/2}((a - 1)^{1/2} - \sqrt{\gamma}) < 0.$

因此，由于对称性，我们得出结论：对于任意 $\varphi.$， $\alpha_{00}(\varphi) < 0$

对于类 $0^e]$ $(a = a^e_{00} > 1)$，当 $\varphi \in [3\omega/4, \omega]$ 时，周期轨道位于第一象限；当 $\varphi = 3\omega/4$ 时，它们经过点 $(0, u^{0e}_0)$；当$\varphi = \omega.$ 时，它们经过点 $(r^{0e}_0, 0)$。常数 $r^{0e}_0 = b^e_{00}$ 和 u^{0e}_0 由 (2.3) 给出。

我们还注意到，当 $C_0(\varphi) < S_0(\varphi)$ 时， $\alpha'_{00}(\varphi) > 0$ ；而当 $C_0(\varphi) > S_0(\varphi)$ 时， $\alpha'_{00}(\varphi) < 0$ 。因此，函数 $\alpha_{00}(\varphi)$ 在端点 $[3\omega/4, \omega].$ 处取最小值

然而， $\alpha_{00}(3\omega/4) = a - 1 - \gamma + \gamma(u^{0e}_0)^2 > 0$ ，且 $\alpha_{00}(0) = a - 1 - \gamma +(r^{0e}_0)^2 > 0.$ 。因此，对于每个 φ，我们得出结论：由于对称性， $\alpha_{00}(\varphi) > 0$ 。

3.3. 类 $1]$ 中角变量的单调性。假设 (3.1) 中 $k = 1$， $l = 0$ ，则 $\alpha_{10}(\varphi) = a_{10} - \gamma + \gamma S^2 - C^3 + C^2 + C - 1$, 其中 $C \in (0, \sqrt{2})$。根据 (2.2)$S^2 = 1\pm\gamma^{-1/2}(a_{10}-(C^2-1)^2)^{1/2}$, 因此 $\alpha^{\pm}_{10} = a_{10}-(C-1)^2(C-1)\pm\gamma^{-1/2}(a_{10}-(C^2-1)^2)^{1/2}$, 且 $a_{10} - (C^2 - 1)(C - 1)) > a_{10} -(C^2 - 1)^2 \geq 0.$ 。这意味着 $\alpha^+_{10} > 0$ $(S \geq 1)$。

假设 $S \in [0, 1].$ 根据 (2.5)， $a_{10} = \gamma + (b^2_{10} - 1)^2$, 因此

$$\alpha^-_{10} = \alpha^-_{10}(b_{10}, C, \gamma) = \theta + \gamma - (C - 1)^2(C - 1) - \gamma^{-1/2}(\theta + \gamma - (C^2 - 1)^2)^{1/2},$$

其中 $\theta = (b^2_{10} - 1)^2$, $b_{10} \in (1, r^e)$ 由 (2.4) 得出， $r^e = \sqrt{1 + \overline{(1 - \gamma)^{1/2}}}$. 于是 $\theta \in (0, 1 - \gamma)$.方程 $\alpha^-_{10} = 0$ 等价于以下二次方程

$$\theta^2 - 2((C - 1)^2(C + 1) - \gamma/2)\theta + (C - 1)^3(C + 1)(C^2 - 1 + \gamma)) = 0. \tag{3.3}$$

将其根代入等式 $b_{10} = (\sqrt{\theta} + 1)^{1/2}$, 可得两个函数,

$$b^{\mp}_{10}(C, \gamma) = \left(1 + \left((C^2 - 1)(C - 1) - \gamma/2 \mp (\gamma/4)^{1/2}(\gamma - \tilde{\gamma}(C))^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2},$$

其中函数 $\tilde{\gamma}(C) = 4C(C^2 - 1)(C - 1)$ 满足条件 $\alpha_{10}(b^{\mp}_{10}(C, \gamma)\ C, \gamma) \equiv 0.$令集合

$$C_* =(\sqrt{17} - 1)/8, \quad \gamma_* = (51\sqrt{17} - 107)/128, \quad b_* = (1 + (297 - 65\sqrt{17})^{1/2}/16)^{1/2}.$$

利用等式 $\tilde{\gamma}'(C) = 4(C - 1)(4C^2 + C - 1)$，我们得到：

$$\gamma_* = \tilde{\gamma}(C_*) = \max_{C\in[0,\sqrt{2}]} \tilde{\gamma}(C) \approx 0.807 \quad (C_* \approx 0.39),$$
$$b_* = b^{\mp}_{10}(C_*, \gamma_*) = (1 + ((C^2_* - 1)(C_* - 1) - \gamma_*/2)^{1/2})^{1/2} \approx 1.156.$$

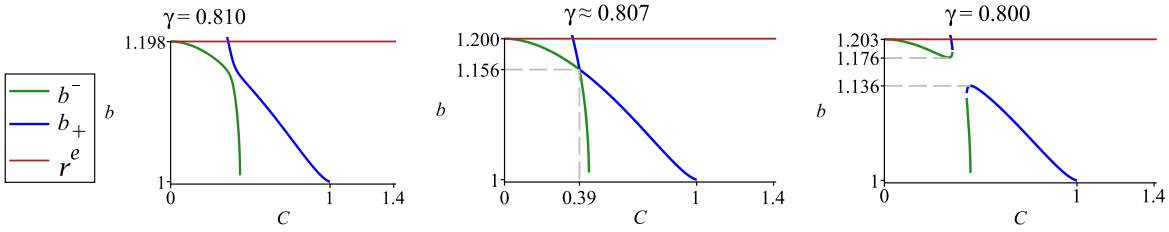

图 3.1. 自变量曲线 b_{10}，C，**使得** $\alpha_{10}^{-}(b_{10},\ C,\ \gamma)\ =0$

因此，对于任意参数 $\gamma\in[\gamma_*,1)$，方程 (3.3) 至少有一个解，因为其判别式为 $\gamma(\gamma-\tilde{\gamma}(C))\geq 0$，所以，对于任意 $b_{10}\in(1,\ r^e)$，其中 $r^e=r^e(\gamma)\ =\sqrt{1+(1-\gamma)^{1/2}}$，函数 $\alpha_{10}^{-}(b_{10},\ C,\ \gamma)$ 取零值（见图 3.1$_1$，3.1$_2$）。

考虑 $\gamma\in(0,\ \gamma_*)$。那么，方程 $\tilde{\gamma}(C)\ =\gamma$ 有两个这样的解 $C_1^\gamma<C_2^\gamma$，使得 $(C_1^\gamma,\ b_{10}^{-}(C_1^\gamma,\ \gamma))$ 和 $(C_2^\gamma,\ b_{10}^{+}(C_2^\gamma,\ \gamma))$ 是函数 $b_{10}^{-}(C,\ \gamma)$ 和 $b_{10}^{+}(C,\ \gamma)$ 的图像的接触点（见图 3。1$_3$，3。2）。

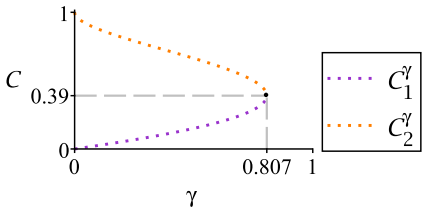

图 3.2. 接触曲线
函数 $b_{10}^{\mp}(C,\ \gamma)$ **的接触点**

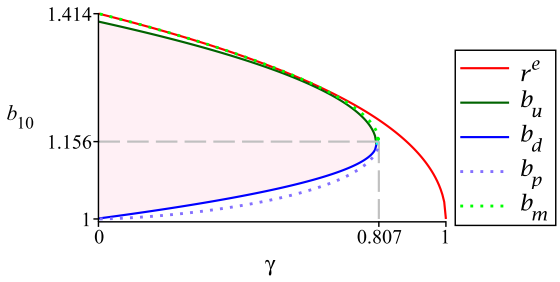

图 3.3. 正值区域
函数 $\alpha(b_{10},C,\gamma)$

引入函数 $b_{10}=b_m(\gamma)$ 和 $b_{10}=b_p(\gamma)$: $b_m(\gamma_*)\ =b_p(\gamma_*)\ =b_{\mp}(C_*,\gamma_*)$,

$$b_m=\min_{C\in(0,C_1^\gamma]}b_-(C,\gamma),\quad b_p=\max_{C\in[C_2^\gamma,1)}b_+(C,\gamma)\ \text{ with }\ \gamma\in(0,\gamma_*).\tag{3.4}$$

使用 MAPLE 计算环境，对参数 γ 按照离散步长进行变量变换，使其等于 10^{-3}.，从而得到它们的近似值

特别地，$1<b_p(\gamma)\ <b_m(\gamma)\ <r^e(\gamma)$，其中 $\gamma\in(0,\gamma_*)$。图 3.1_1 的常数为 $b_p\approx 1.136$, $b_m\approx 1.176$，其中 $\gamma=0.8<\gamma_*$.

综上，设 $0<\gamma<\gamma_*$, $b_{10}\in(b_p(\gamma)\ b_m(\gamma))$, $(C(\varphi)\ S(\varphi))$ 是系统 (2.1) 初值问题的 ω_{10}-周期解，初始值为 $C(0)\ =b_{10}$, $S(0)\ =0$. 。此解将特定周期轨道 Γ. 参数化。注意，Γ, 位于第一象限的部分在 $\varphi\in[\omega_{10}/2,\omega_{10}]$ 时被参数化（见引理 1 的证明）。已证明，对于这样的 φ, ，函数 $\alpha_{10}(\varphi)$, 在解 $(C(\varphi)\ S(\varphi))$, 上取值为正。如果 (2.4) 中的 b_{10} 不属于特定区间，或者 $\gamma\in[\gamma_*,1)$, ，那么存在一些 φ, 取值，使得 $\alpha_{10}(\varphi)$ 改变符号。

引理 3.1. 以下结论成立：
1) 对每个 $\gamma\in(0,\gamma_*)$，当$kb_{k0}\in(b_p(\gamma)\ b_m(\gamma))$ $(k\ =\ \pm1)$ b_p,b_m 取自 *(3.4)* 且 $\gamma_*\ =(51\sqrt{17}-107)/128$ 时，函数 $\alpha_{k0}(\varphi)$ 为正；当$kb_{k0}=b_p(\gamma)$ 或 $kb_{k0}=b_m(\gamma)$ 时，等于零；当 $kb_{k0}\in(1,b_p(\gamma))\cup(b_m(\gamma)\ r^e(\gamma))$ 时，改变符号；*2)* 对任意 $\gamma\in[\gamma_*,1)$，函数 $\alpha_{k0}(\varphi)$ 对所有 $kb_{k0}\in(1,r^e(\gamma))$ 改变符号。

证明。对于 $k=1$ 和 $S\geq 0$，结果已经得到，即对于位于第一象限中的类 1], 周期轨道的部分。它自动推广到情形 $S\leq 0$

以及左半平面，当 $k=-1$，因为将 C代入 $-C$ 并将 S 代入 $-S$. □后，积分（2.2）不发生变化

由于未显式给出 $b_p(\gamma)$ 和 $b_m(\gamma)$ 的值，我们将采用以下限制条件：

(3.5) $\qquad 0<\gamma\le 0.8,\quad kb_{k0}\in(b_d(\gamma),b_u(\gamma))\ \ (k=\pm1)\ \ (d-down,\ u-up),$

其中 $b_u=1.15+0.28(0.8-\gamma)^{1/2},\quad b_d=1.15-(0.8-\gamma)^{1/2}$. 对任意$\gamma\in(0,\ 0.8]$，也可得到 $b_{10}=b_d(\gamma)\ \ b_{10}=b_u(\gamma)$。

如有必要，可通过用函数 $\gamma_*,\ b_p,\ b_m$. 逼近函数 $\gamma,\ b_d,\ b_u$，来具体化条件（3.5）

3.4. 类 2] 中角变量的单调性。我们来说明，式（3。1）中的 $\alpha_{kl}(\varphi)$（$k,\ l=\pm1$）为正。由于 $k^2=l^2=1$，公式（3.2）可改写为

$$\alpha'_{kl}(\varphi)=\gamma(C(\varphi)-k)(S(\varphi)-l)(kC(\varphi)-lS(\varphi))(3klC(\varphi)S(\varphi)+kC(\varphi)+lS(\varphi)+1$$

令 $lk=1$.。由于 $lS>0>-(C+k)/(3C+k)$，将上述不等式两边乘以$k(3C+k)(>0)$，可得 $3klCS+kC+lS+1>0$。

考虑到沿轨道的运动方向为顺时针，分析 α_{kl}' 的符号可知，函数 $\alpha_{kl}(\varphi)$ 在点 $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ 处取得局部极小值，这些点由方程 $C(\varphi_1)=k,\ \ S(\varphi_1)=l\cdot lo_2^1;\ \ S(\varphi_2)=l,\ \ C(\varphi_2)=kl_2^1;\ \ kC(\varphi_3)=lS(\varphi_3)>1.$确定

根据公式 (2.3) $l_2^1=\sqrt{1-a^{1/2}},\ \ lo_2^1=\sqrt{1-(a/\gamma)^{1/2}}$，因此，$a=\gamma(1-(lo_2^1)^2)^2=(1-(l_2^1)^2)^2$, 于是，$\alpha_{kl}(\varphi_1)=a+\gamma((lo_2^1)^2-1)(1-lo_2^1)=\gamma lo_2^1(lo_2^1-1)^2(lo_2^1+1)>0$.同理，$\alpha_{kl}(\varphi_2)=a+((l_2^1)^2-1)(1-l_2^1)=l_2^1(l_2^1-1)^2(l_2^1+1)>0$. 最后，$\alpha_{kl}(\varphi_3)=(1+\gamma)(S^2-1)S(S-l)>0.$

当 $kl=-1$ 时，$\alpha_{kl}(\varphi)>0$ 这一性质可以用类似的方法证明。

因此，将第 3.2–3.4 节的结果加以推广，我们表述如下：

引理 3.2. 实解析的 ω_{kl}-周期函数 $\alpha_{kl}(\varphi)$，在(3.1) 中记作该函数，并定义在系统(2.1)的解 $CS_{kl}(\varphi)$ 上，这些解将系统(1.2)的周期轨道参数化。对于周期轨道的所有类，该函数均为正；但来自类 $0^i]$ 的周期轨道除外，在该类中函数为负。此外，还有一个附加限制条件(3.5)，它会影响类 1]. 中函数 $\alpha_{10}(\varphi)$和 $\alpha_{-1,0}(\varphi)$ 的正性

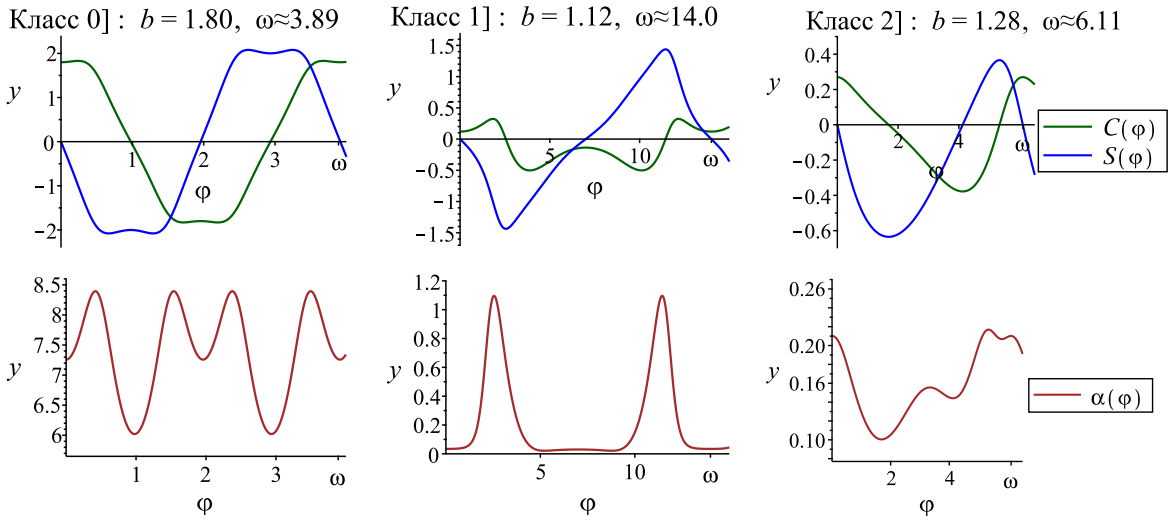

图 3.4. 函数 $C,\ S,\ \alpha$ 在 $\gamma=1/2.$ 条件下的图像

3.5. 转到特殊极坐标系统。 考虑系统 (1.1) 中的特殊极坐标变换：

$$x = C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\rho, \quad y = S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\rho \quad (|\rho| \le \rho_* < 1), \tag{3.6}$$

其中，k，$l = 0$，± 1，$(k,\ l) \neq (0,\ \pm 1)$；向量函数 $CS_{kl}(\varphi) = (C(\varphi)\ S(\varphi))$ 是系统 (2.1) 的实解析ω_{kl}-周期解，其初始值为 $C(0) = b_{kl}$，$S(0) = l$，b_{kl} 的界在 (2.4) 中给出，并针对 b_{10}，$b_{-1,\ 0}$ 在 (3.5) 中作了规定。

变量变换 (3.6) 是以下三个变量变换的复合。

1) 变量变换 $x = x_k + k$，$y = y_l + l$ 将原点平移至未扰动系统 (1.2) 的平衡点 $(k,\ l)$，从而可以沿着类 $1]$ 和 $2]$，的周期轨道跟踪运动，同时保持在这些周期轨道内部，正如类 $0]$，在 $k = l = 0$.时的情形。需要指出的是，在系统 (2.1) 中进行类似的平移 $C = C_k + k$，$S = S_l + l$ 后，可将其变换为系统 $C'_k(\varphi) = \gamma(S^3_l(\varphi) - S_l(\varphi))$ $S'_l(\varphi) = -(C^3_k(\varphi) - C_k(\varphi))$。

2）在点（$k,\ l$）的邻域内进行非归一化极坐标变换 $x_k = C_k(\varphi)\tilde{\rho}$，$y_l = S_l(\varphi)\tilde{\rho}$ $(\tilde{\rho} > 0)$，并且借助 $\varrho = 1$ 确定一条周期轨道，该周期轨道由所选的未扰动系统的解（$C(\varphi)$ $S(\varphi)$）参数化。

请注意，实际上，这种变量变换中使用的是广义正弦和余弦的非归一化类比函数。这些函数由 A. M. 李雅普诺夫引入，作为系统 $\mathrm{Cs}'\theta = -d\,\mathrm{Sn}\,\theta$，$\mathrm{Sn}'\theta = \mathrm{Cs}^{2n-1}\theta$ 的解，其初始值为 $\mathrm{Cs}\ 0 = 1$，$\mathrm{Sn}\ 0 = 0.$。例如，[7]中也使用了类似的归一化处理。不进行这种归一化，可以得到具有另一种积分性质的分岔（生成）方程。

3) 仿射变换 $\tilde{\rho} = \rho + 1$ 将坐标平移至周期轨道的邻域，该周期轨道经过点（b_{kl}，l），并通过假设 $\rho = 0.$ 得到

命题 3.1。 假设在代换 (3.6) 中

$$\rho_* \in (0,\ \min\{\rho_{kl}, \rho_0\}), \tag{3.7}$$

其中 $\rho^i_{00} = \min\{1, r^i/b^i_{00} - 1\}$；$\rho^e_{00} = \min\{1 - r^e/b^e_{00}, r^\sigma/b^e_{00} - 1\}$；$\rho_{k0} = \min\{(b_{k0} - kb_d)/(b_{k0} - k),\ (kb_u - b_{k0})/(b_{k0} - k)\} < 1\,(k \neq 0)$；$\rho_{kl} = \min\{1, (kr^s - b_{kl})/(b_{kl} - k)\}\,(k,\ l \neq 0)$；$\rho_0 = (\sigma - M)/(M + 1)$ 其中常数 M 来自 (2.11)。于是

1) 对于 $|\rho| \le \rho_* < \rho_{kl}$，未扰动系统 (1.2)中经过点(ρ, l)的周期轨道，与由解 $CS_{kl}(\varphi)$ 参数化的所选周期轨道属于同一类 $|k| + |l|$；该解可通过在 (3.6)中设定 $\rho = 0$ 得到；

2) 对于 (2.11)中的 $|\rho| \le \rho_* < \rho_0$ 和 $\varphi \in B_\varrho$，以下关系成立：$|C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\rho| < \sigma$ 且 $|S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\rho| < \sigma$，因此，可以在系统 (1.1)的右端代入(3.6)。

证明。1) 对于类 $0^e]$，我们将验证 $x(0, \rho) = b^e_{00}(1 + \rho) \in (r^e, r^\sigma)$，其中 $|\rho| < \rho^e_{00}$.根据 (3.7)，$r^e/b^e_{00} \le 1 - \rho^e_{00}$ 且 $\rho^e_{00} + 1 \le r^\sigma/b^e_{00}$，因此 $r^e \le b^e_{00}(1 - \rho^e_{00}) < b^e_{00}(1 + \rho) < b^e_{00}(1 + \rho^e_{00}) \le r^\sigma$.

对于类 $1]$，我们将验证 $kx(0, \rho) = kb_{k0} + k(b_{k0} - k)\rho \in (b_d, b_u)$，其中 $|\rho| < \rho_{k0}$，其中b_d，b_u 在（3.5）中给出，$k = \pm 1$.

根据（3.7），$(kb_d - b_{k0})/(b_{k0} - k) \le -\rho_{k0}$ 和 $(kb_u - b_{k0})/(b_{k0} - k) \ge \rho_{k0}$. 于是$b_d = kb_{k0} + k(kb_d - b_{k0}) \le kb_{k0} - k(b_{k0} - k)\rho_{k0} < kb_{k0} + k(b_{k0} - k)\rho$，$b_u = kb_{k0} + k(kb_u - b_{k0}) \ge kb_{k0} + k(b_{k0} - k)\rho_{k0} > kb_{k0} + k(b_{k0} - k)\rho$.

类 $0^i]$ 和类 $2]$对应的不等式可以用类似的方法证明。

2）根据引理 2.2，$M = \max_{\varphi \in B_\varrho}\{|C(\varphi)|,\ |S(\varphi)|\} < \sigma$，因此，例如，$|S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\rho| < M + (M + 1)\rho_0 = \sigma$. □

引理 3.3。 假设满足限制条件(3.7)，变量变换(3.6)将系统(1.1)变换为系统

$$\begin{cases}\dot\rho = (-\alpha'_{kl}(\varphi)\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)\rho - p_{kl}(\varphi)\rho^2 + \breve p_{kl}(\varphi)\rho^3 + \varepsilon P_{kl}^{\nu\rho}(t,\varphi,\rho,\varepsilon))\varepsilon^\nu,\\ \dot\varphi = (1+\alpha_{kl}(\varphi)q_{kl}(\varphi)\rho + \breve q_{kl}(\varphi)\rho^2 + \varepsilon\Phi_{kl}^{\nu\rho}(t,\varphi,\rho,\varepsilon))\varepsilon^\nu,\end{cases} \tag{3.8}$$

其中 $q_{kl}(\varphi) = \alpha_{kl}^{-2}((C-k)^3(2C+k)+\gamma(S-l)^3(2S+l))$ $p_{kl}(\varphi) = 3\gamma\alpha_{kl}^{-1}CS((S^2-1)(C-k)^2-(C^2-1)(S-l)^2)$ $\breve p_{kl} = \gamma\alpha_{kl}^{-1}((C^3-C)(S-l)^3-(S^3-S)(C-k)^3)$ $\breve q_{kl} = \alpha_{kl}^{-1}((C-k)^4+\gamma(S-l)^4)$，并且所有这些函数都是 ω_{kl}-周期且实解析的； $P_{kl}^{\nu\rho} = \alpha_{kl}^{-1}(C'Y(\text{æ}^\rho) - S'X(\text{æ}^\rho))$， $\Phi_{kl}^{\nu\rho} = \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(1+\rho)^{-1}((S-l)X(\text{æ}^\rho) - (C-k)Y(\text{æ}^\rho))$； $\text{æ}^\rho = (t, C+(C-k)\rho, S+(S-l)\rho, \varepsilon)$。

证明。 对变量变换 (3.6) 关于 t 求导，并利用 (3.1) 分别求解关于 $\dot\rho$ 和 $\dot\varphi$ 的两个方程，可得:

$$\alpha_{kl}(\varphi)\dot\rho = C'(\varphi)\dot y - S'(\varphi)\dot x, \quad (\rho+1)\alpha_{kl}(\varphi)\dot\varphi = (S(\varphi)-l)\dot x - (C(\varphi)-k)\dot y.$$

将系统 (1.1) 的右端代入， 可得

$$\begin{aligned}\alpha_{kl}\dot\rho = (&C'(-(C+(C-k)\rho)^3 + C + (C-k)\rho + \varepsilon Y) -\\ &-S'(\gamma((S+(S-l)\rho)^3 - (S+(S-l)\rho)) + \varepsilon X))\varepsilon^\nu,\\ (\rho+1)\alpha_{kl}\dot\varphi = ((&S-l)(\gamma((S+(S-l)\rho)^3 - (S+(S-l)\rho)) + \varepsilon X) -\\ &-(C-k)(-(C+(C-k)\rho)^3 + C + (C-k)\rho + \varepsilon Y))\varepsilon^\nu.\end{aligned}$$

简单计算可知，由于$|\rho| \le \rho_* < 1$. □，该系统可写成 (3.8)

4. Primary radial averaging

4.1. 径向方程未扰动部分各项的平均法。 现在需要对特殊极坐标系统 (3.8) 的径向方程右端的前两项取平均。

考虑关于 r 为多项式、关于 φ 为实解析的$\varphi \in B_\varrho$ 平均变换

$$\rho = \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(r + \beta_{kl}(\varphi)r^2) \quad (|r| \le r_* < 1), \tag{4.1}$$

其中，函数 $\beta_{kl}(\varphi) = \int_0^\varphi (\xi_{kl}(s) - \underline{\xi}_{kl})\,ds$ 以及 $\xi_{kl}(\varphi) = \alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(\alpha'_{kl}(\varphi)q_{kl}(\varphi) - p_{kl}(\varphi))$，

$\underline{\xi}_{kl} = \dfrac{1}{\omega_{kl}}\displaystyle\int_0^{\omega_{kl}} \xi_{kl}(s)\,ds$ ——函数 $\xi_{kl}(\varphi)$ 的平均值。

Pro第 4.1 节。假设常数 r_* 受到限制条件，来自（4.1 ）

$$0 < r_* < \min\{(4\beta^*)^{-1}, r_0\}, \tag{4.2}$$

其中 $\beta^* = \max_{\varphi\in B_\varrho}|\beta_{kl}(\varphi)|$, $r_0 = \alpha_*(1+\beta^*)^{-1}\rho_*$, $\alpha_* = \min_{\varphi\in B_\varrho}|\alpha_{kl}(\varphi)| > 0$, ρ_*由（3.7）给出。以下结论成立：*1)* $1/2 < |1+2\beta_{kl}r| < 3/2$ *with* $|r| \le r_* < (4\beta^*)^{-1}$; *2)* $|\alpha_{kl}^{-1}(\varphi)(r+\beta_{kl}(\varphi)r^2)| < \rho_*$ *with* $|r| \le r_* < r_0$，因此，系统（3.8）的右端允许作代换（4.1）。

引理 4.1。 关于 φ 作实解析的 ω_{kl}-周期变量变换 （4.1） ， 其中$\xi_{kl}=0$ 将系统 （3.8） 变换为系统

$$\begin{cases}\dot r=(Q_{kl}(\varphi,r)r^3+R^\nu_{kl}(t,\varphi,r,\varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu,\\ \dot\varphi=(1+q_{kl}(\varphi)r+\mathcal{Q}_{kl}(\varphi,r)r^2+\Phi^\nu_{kl}(t,\varphi,r,\varepsilon)\varepsilon)\varepsilon^\nu,\end{cases}\tag{4.3}$$

其中 $\mathcal{Q}_{kl}=\beta_{kl}q_{kl}+\alpha_{kl}^{-2}\breve q_{kl}(1+\beta_{kl}r)^2$, $Q_{kl}=\big(\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}\mathcal{Q}_{kl}-(\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}\beta_{kl}-\beta'_{kl})(q_{kl}+\mathcal{Q}_{kl})-\alpha_{kl}^{-2}(\alpha_{kl}p_{kl}(2\beta_{kl}+\beta_{kl}^2r)-\breve p_{kl}(1+\beta_{kl}r)^3)\big)(1+2\beta_{kl}r)^{-1}$; $\Phi^\nu_{kl}=\Phi^{\nu\rho}_{kl}(\varpi^r)$, 其中 $\varpi^r=(t,\varphi,\alpha_{kl}^{-1}(r+\beta_{kl}r^2)\ \varepsilon)$; $R^\nu_{kl}=\big(P^\nu_{kl}+(\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}r+(\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}\beta_{kl}-\beta'_{kl})r^2)\Phi^\nu_{kl}\big)(1+2\beta_{kl}r)^{-1}$, 其中 $P^\nu_{kl}(t,\varphi,r,\varepsilon)=P^{\nu\rho}_{kl}(\varpi^r)$, 假设 r_* 满足不等式 *(4.2)* 和不等式

$$(2r_*)^{-1}>\max_{|r|\le1,\,\varphi\in B_\varrho}|q_{kl}(\varphi)+\mathcal{Q}_{kl}(\varphi,r)r|.\tag{4.4}$$

保持。

证明。 将变量变换 (4.1) 代入系统 (3.8) 的第二个方程，得到系统 (4.3) 的第二个方程。

对变量变换 (4.1) 关于 t 求导，并利用系统 (3.8)，然后将所得等式乘以 $\alpha_{kl}.$ ，得到

$$(1+2\beta_{kl}r)\dot r-(\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}r+(\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}\beta_{kl}-\beta'_{kl})r^2)(1+q_{kl}r+\mathcal{Q}_{kl}r^2+\Phi^\nu_{kl}\varepsilon)\varepsilon^\nu=$$
$$(-\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}r-(\alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}\beta_{kl}+\alpha_{kl}^{-1}p_{kl})r^2-\alpha_{kl}^{-2}(\alpha_{kl}p_{kl}(2\beta_{kl}+\beta_{kl}^2r)-\breve p_{kl}(1+\beta_{kl}r)^3)r^3+P^\nu_{kl}\varepsilon)\varepsilon^\nu.$$

根据 (4.1)，平均值 $\xi_{kl}=\alpha_{kl}^{-1}(\alpha'_{kl}q_{kl}-\bar p_{kl})-\beta'_{kl}$，因此

$$\dot r=\big(\bar\xi_{kl}(1+2\beta_{kl}(\varphi)r)^{-1}r^2+Q_{kl}(\varphi,r)r^3+R^\nu_{kl}(t,\varphi,r,\varepsilon)\varepsilon\big)\varepsilon^\nu.$$

设 $\bar\xi_{kl}\ne0$，则将变量变换 (3.6) 和 (4.1) 复合后，若将其应用于哈密顿未扰系统 (1.2) 而非系统 (1.1)，便可将其变换为“缩短的”系统

$$\dot r=(\bar\xi_{kl}(1+2\beta_{kl}(\varphi)r)^{-1}+Q_{kl}(\varphi,r)r)r^2\varepsilon^\nu,\quad \dot\varphi=(1+q_{kl}(\varphi)r+\mathcal{Q}_{kl}(\varphi,r)r^2)\varepsilon^\nu,$$

该系统描述了任意选取的周期轨道邻域内的运动。

在变 换（4.1） $|r|\le r_*<1$，因此，根据（4.4）和（4.2），我们得到 ：

$$\varepsilon^{-\nu}\dot\varphi>1-(2r_*)^{-1}|r|\ge1/2,\ \ \varepsilon^{-\nu}|\dot r|>(2|\bar\xi_{kl}|/3-|Q_{kl}(\varphi,r)r|)r^2>|\bar\xi_{kl}|r^2/3$$

在附加限制条件 $|\xi_{kl}|(3r_*)^{-1}>\bar{\max}_{|r|\le1}$ 下 $\max_{,\varphi\in B_\varrho}|Q_{kl}(\varphi,\ r)|$.

因此，缩减系统及其对应的未扰动系统（1.2）在任意周期轨道的小邻域内都没有轨道。这一矛盾意味着 $\xi_{kl}=0$.

因此，变量变换（4.1）将系统（3.8）变换为系统（4.3）。 □

注 4.1. *The function $\xi_{00}(\varphi)$ from* (4.1) *can be explicitly integrated. We have:* $p_{00}=3\gamma\alpha^{-1}C\ \varphi\ S\ \varphi\ \ S^2\ \varphi\ -C^2\ \varphi\ \ =3\alpha_{00}^{-1}\alpha'_{00}\ \varphi\ /2$ *and for q_{00} the chain of equalities* $(\ )\ (\ )(\ (\ )$ *can be written:* $q_{00}\overset{3\,8}{=}2\alpha_{00}^{-2}\ C^4+\gamma S^4\ \overset{2\,2}{=}\ 2\alpha_{00}^{-2}\ a_{00}-1-\gamma+2C^2+2\gamma S^2\ \overset{3\,1}{=}\ 2\alpha_{00}^{-2}\ 2\alpha_{00}-(\ ))\ (\ )_{(.)}(\ )\ _{(.)}(\ )\ _{(.)}((a_{00}-1-\gamma))\ _{(2.5)}=\ 2\alpha_{00}^{-2}(2\alpha_{00}-(b_{00}^4-2b_{00}^2))$. *Then* $\xi_{00}=\alpha_{00}^{-2}(5/2-2(b_{00}^4-2b_{00}^2)\alpha_{00}^{-1})\alpha'_{00},\beta_{00}=(b_{00}^4-2b_{00}^2)\alpha_{00}^{-2}(\varphi)\ -5\alpha_{00}^{-1}(\varphi)/2+(3b_{00}^2-1)(b_{00}^3-b_{00})^{-2}/2$, *i. e.* $\beta_{00}=\beta_{00}(\alpha_{00}(\varphi))$.

4.2. **系统扰动部分的结构 (4.3)**. 下面说明系统（4.3）右端中 r 和 ε 的低次幂的系数。记 $æ^\circ = (t, C, S, 0)$ 和 $Z^\circ(t,\varphi) = Z(t,\varphi,0,0)$. 那么，根据（3.8）和（1.1），

$$
\begin{aligned}
&R_{kl}^{\nu\circ}(t,\varphi) = P_{kl}^{\nu\circ}(t,\varphi) = P_{kl}^{\nu\rho}(t,\varphi,0,0) = C'Y^\nu(æ^\circ) - S'X^\nu(æ^\circ) = \\
&\qquad C'Y_0^\nu(t,C,S) - S'X_0^\nu(t,C,S),\\
&\Phi_{kl}^{\nu\circ}(t,\varphi) = \Phi_{kl}^{\nu\rho}(t,\varphi,0,0) = \alpha_{kl}^{-1}((S-l)X^\nu(æ^\circ) - (C-k)Y^\nu(æ^\circ)) = \\
&\qquad \alpha_{kl}^{-1}((S-l)X_0^\nu(t,C,S) - (C-k)Y_0^\nu(t,C,S));\\
&(P_{klr}^{\nu\prime})^\circ(t,\varphi) = \alpha_{kl}^{-1}\big(C'((C-k)Y^{\nu\prime}{}_x(æ^\circ) + (S-l)Y^{\nu\prime}{}_y(æ^\circ)) - \\
&\qquad S'((C-k)X^{\nu\prime}{}_x(æ^\circ) + (S-l)X^{\nu\prime}{}_y(æ^\circ))\big) = \\
&\qquad \alpha_{kl}^{-1}\big(C'((C-k)Y_{0\,x}^{\nu\prime}(t,C,S) + (S-l)Y_{0\,y}^{\nu\prime}(t,C,S)) - \\
&\qquad S'((C-k)X_{0x}^{\nu\prime}(t,C,S) + (S-l)X_{0y}^{\nu\prime}(t,C,S))\big),\\
&(R_{klr}^{\nu\,\prime})^\circ(t,\varphi) = (P_{klr}^{\nu\prime})^\circ + \alpha_{kl}^{-1}\alpha'_{kl}\Phi_{kl}^{\nu\circ} - 2\beta_{kl}R_{kl}^{\nu\circ},\\
&(R_{kl\varepsilon}^{\nu\,\prime})^\circ(t,\varphi) = (P_{kl\varepsilon}^{\nu\prime})^\circ(t,\varphi) = C'Y^{\nu\prime}{}_\varepsilon(æ^\circ) - S'X^{\nu\prime}{}_\varepsilon(æ^\circ) = \\
&\qquad \begin{cases} C'Y_1^0(t,C,S) - S'X_1^0(t,C,S) & \text{for } \nu = 0,\\ C'Y_1^1(æ^\circ) - S'X_1^1(æ^\circ) & \text{for } \nu = 1. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

引理 4.2. 存在这样的常数 $\varrho > 0$，使得在 (4.5) 中引入的所有函数，关于 t 连续且二周期，并且关于 φ 在 $\mathcal{B}_\varrho$ 上一致实解析，其中 B_ϱ 来自 (2.8)；但函数 $(R_{kl\varepsilon}^{1\,\prime})^\circ \in C^{0,1}{}_{,t}{}_{,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ 除外。

证明. 考虑函数

$$
\mathcal{X}_\iota^\nu(t,\varphi,r) = X_\iota^\nu(t,\breve{x}(\varphi,r),\breve{y}(\varphi,r)),\ \mathcal{Y}_\iota^\nu(t,\varphi,r) = Y_\iota^\nu(t,\breve{x}(\varphi,r),\breve{y}(\varphi,r)),
\tag{4.6}
$$

其中 $\iota = 0, 1, (\iota,\nu) \neq (1,1)$；自变量 $\breve{x} = C + (C-k)\alpha_{kl}^{-1}r(1+\beta_{kl}r)$ $\breve{y} = S + (S-l)\alpha_{kl}^{-1}r(1+\beta_{kl}r)$ 是由变量变换 (3.6) 和 (4.1) 复合而得的结果。

根据命题 4.1 和引理 4.1，$|\breve{x}(\varphi,\ r)|$，$|\breve{y}(\varphi,\ r))| < \sigma$ 关于 $|r| \le r_*$ 和 $\varphi \in B_\varrho$，因此，式 (4.6) 中引入的函数是连续的、二周期的，关于 t 一致实解析，关于 φ，r 在 $D_{\varphi,r} = \{(t,\ \varphi,\ r)$ 上成立：$t \in \mathbb{R}$，$\varphi \in B_\varrho$，$|r| \le r_*\}$ 这是解析函数的复合函数。

我们将它们写成如下形式

$$
\mathcal{X}_\iota^\nu(t,\varphi,r) = \sum_{j=0}^\infty \mathcal{X}_{\iota j}^\nu(t,\varphi)r^j,\ \ \mathcal{Y}_\iota^\nu(t,\varphi,r) = \sum_{j=0}^\infty \mathcal{Y}_{\iota j}^\nu(t,\varphi)r^j,
$$

其中，$\mathcal{X}_{\iota j}^\nu(t,\ \varphi)$ $\mathcal{Y}_{\iota j}^\nu(t,\ \varphi)$ 是连续的、二周期的，关于 t 一致实解析的 φ 函数，定义在 $\mathcal{B}_\varrho$ 上（见引理 2.1）；级数 $\mathcal{X}^\nu$，$\mathcal{Y}^\nu$ 绝对收敛。当 $|r| < r_*$. 时，显然，导数 $\mathcal{X}_{0\,r}^{\nu\,\prime}(t,\ \varphi,\ r)$ 和 $\mathcal{Y}_{0\,r}^{\nu\,\prime}(t,\ \varphi,\ r)$ 具有相同的性质。

根据（4.6），$\mathcal{X}_{\iota 0}^\nu(t,\varphi) = X_\iota^\nu(t, C(\varphi)\ S(\varphi))$ $\mathcal{Y}_{\iota 0}^\nu(t,\varphi) = Y_\iota^\nu(t, C(\varphi)\ S(\varphi))$, 并且$\mathcal{X}_{01}^\nu(t,\varphi) = X_{0\,x}^{\nu\,\prime}(t, C(\varphi)\ S(\varphi))\breve{x}'(\varphi,0) + X_{0\,y}^{\nu\,\prime}(t, C(\varphi)\ S(\varphi))\breve{y}'(\varphi,0)$,$\mathcal{Y}_{01}^\nu(t,\varphi) = Y_{0\,x}^{\nu\,\prime}(t, C(\varphi)\ S(\varphi))\breve{x}'(\varphi,0) + Y_{0\,y}^{\nu\,\prime}(t, C(\varphi)\ S(\varphi))\breve{y}'(\varphi,0)$，因此在公式（4.5）中 $(P_{klr}^{\nu\prime})^\circ(t,\varphi) = C'(\varphi)\mathcal{Y}_{01}^\nu(t,\varphi) - S'(\varphi)\mathcal{X}_{01}^\nu(t,\varphi)$. □

因此，系统 (4.3) 可表示为以下形式

$$
\begin{cases}
\dot r = \big(Q_{kl}(\varphi,r)r^3 + \big(R_{kl}^{\nu\circ}(t,\varphi) + (R_{klr}^{\nu\,\prime})^\circ(t,\varphi)r + (R_{kl\varepsilon}^{\nu\,\prime})^\circ(t,\varphi)\varepsilon + R_{kl}^{\nu*}(t,\varphi,r,\varepsilon)\big)\varepsilon\big)\varepsilon^\nu,\\
\dot\varphi = \big(1 + q_{kl}(\varphi)r + \mathcal{Q}_{kl}(\varphi,r)r^2 + \big(\Phi_{kl}^{\nu\circ}(t,\varphi) + \Phi_{kl}^{\nu*}(t,\varphi,r,\varepsilon)\big)\varepsilon\big)\varepsilon^\nu,
\end{cases}
\tag{4.7}
$$

其中，函数 $R_{kl}^{\nu*}$，$\Phi_{kl}^{\nu*}$是连续的，而 $R_{kl}^{\nu*}(t,\ \varphi,\ r,\ \varepsilon) = O((|r|+\varepsilon)^2)$ $\Phi_{kl}^{\nu*}(t,\ \varphi,\ r,\ \varepsilon) = O(|r|+\varepsilon)$ q_{kl} 来自 (3.8)。

命题 4.2. 在系统 （4.7） $R_{kl}^{\nu*}, \Phi_{kl}^{\nu*} \in C^{0,\ 1\,1\,0}_{t\quad r\,\varepsilon}(G^{\varphi,\ \mathbb{R}^{\ r\,\varepsilon}_{r_*},,,\varepsilon_0})$中，其中集合 $G^{\varphi,\ \mathbb{R}^{\ r\,\varepsilon}_{r_*},,,}_{\varepsilon_0} = \{(t, \varphi, r, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4:\quad |r| \le r_*,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$.

事实上，在（4.3）中引入的函数 R_{kl}^{ν}，Φ_{kl}^{ν} 属于类 $C^{0,\ 1\,1\,0}_{t\quad r\,\varepsilon}(G^{\varphi,\ \mathbb{R}^{\ r\,\varepsilon}_{r_*},,,\varepsilon_0})$，并且关于其全部自变量连续。

5. The generating equation and the generating cycles

5.1. 进一步变换的目标。 公式（4.7）描述了由（1.1）得到的系统集合。每个这样的系统均由初始值 b_{kl} 确定，该初始值满足条件（2.4）和（3.5）。现在，我们需要区分这样的 b_{kl}：对于其中每一个，任意充分小的 $\varepsilon > 0$ 所对应的系统（4.7）都具有二维不变曲面，并且该曲面与任意选取的点（b_{kl}，l）的邻域有非空交集。

为此，需要进行若干次平均变换和缩放变换，包括角变量的变量变换。经过这些变换后得到的系统，可以应用关于不变曲面存在性的定理 7.1。

5.2. 二周期函数的分解，Siegel 条件。 按照上述方案，我们对系统（4.7）中的函数 R_{kl}^{o}，$(R_{kl}{}'_{\tau})^o$ 和 $(R_{kl}{}'_{\varepsilon})^o$ 进行平均，使得通过恰当选择 $b_{kl}.$，函数 $R_{kl}^{o}(t,\ \varphi)$ 的平均值可以等于零。然而，对于该系统，当 $\nu = 0,\ \dot\varphi = \varepsilon + \ldots$ 时，$\dot\varphi = 1 + \ldots$ 对于 $\nu = 1.$。因此，下面的平均变换及其存在条件将因各个 $\nu.$ 而异。

对于连续、关于 $t,$ 为 T 周期、实解析且关于 φ 为 ω 周期的函数 $\eta^\nu(t,\ \varphi)$，我们根据参数 ν 的取值采用以下分解：

$$\eta^\nu(t,\varphi) = \overline{\eta}^\nu + \hat\eta^\nu(\varphi) + \tilde\eta^\nu(t,\varphi) \qquad (\nu = 0, 1),$$

其中 $\underline{\eta}^\nu = \dfrac{1}{\omega T}\displaystyle\int_0^\omega\int_0^T \eta^\nu(t,\ \varphi)\ dt\, d\varphi$ 是函数 η^ν，$\hat\eta^0 = 0$ 的平均值，而 $\hat\eta^1 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \eta^1(t,\ \varphi)\ dt - \underline{\eta}^1.$

于是，函数 $\tilde\eta^\nu(t,\ \varphi)$ 关于 $t,$ 的平均值为零，这意味着函数 $\displaystyle\int_{t_*}^t \tilde\eta^\nu(\tau,\ \varphi)\ d\tau,$ 具有周期性；由于常数 $t_* \in [0, T].$ 的选取，该函数的平均值也为零

从现在起，对于以 t 和 φ 为自变量的任意函数，我们用点表示其关于 t 的导数，用撇号表示其关于 φ 的导数。

引理 5.1. 假设 $\tilde\eta(t, \varphi)$ 是连续的，关于 t一致地实解析且关于 φ 为 T-周期的函数，并且满足以下称为 *Siegel* 条件的关于周期 ω 和 T的条件

$$|m\omega + nT| > \vartheta(|m| + |n|)^{-\tau} \quad (\vartheta > 0,\ \tau \ge 1,\ m, n \in \mathbb{Z},\ m^2 + n^2 \ne 0). \tag{5.1}$$

则方程

$$\dot{\tilde{\chi}}(t,\varphi)+\tilde{\chi}'(t,\varphi)=\tilde{\eta}(t,\varphi) \tag{5.2}$$

存在一个奇异解 $\tilde{\chi}(t,\varphi)$，它具有与函数 $\tilde{\eta}(t,\varphi)$ 相同的性质。它的傅里叶级数展开可逐项关于 t 和 φ. 求导

证明。根据引理 2.1，存在这样的常数 $\varrho>0$，使得 $\tilde{\eta}$ 是 $\mathcal{B}_\varrho$. 上的二周期函数。对于这个函数，存在这样的常数 $M_\eta>0$，使得 $M_\eta=\max_{(t,\varphi)\in\mathcal{B}_\varrho}|\tilde{\eta}(t,\varphi)|$，并且函数$+\infty\tilde{\eta}$ 展开为傅里叶级数 $\tilde{\eta}(t,\varphi)=\sum\eta_n(t)e^{2\pi in\varphi/\omega}$时，其系数 $\eta_n(t)=\omega^{-1}\int_0^\omega\tilde{\eta}(t,\varphi)$ $e^{-2\pi in\varphi/\omega}d\varphi$（见式 (2.9)）满足条件 (2.10)$_{n=-\infty}|\eta_n(t)|\le M_\eta e^{-2\pi|n|\varrho/\omega}$，对任意 $t\in\mathbb{R}$ 均成立；此外，$\eta_0(t)\equiv 0$.

考虑线性方程

$$\dot{\chi}_n(t)=(-2\pi in/\omega)\chi_n(t)+\eta_n(t)\quad(n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0). \tag{5.3}$$

它的奇异 T-周期解是以下函数:

$$\chi_n^p(t)=d_n^{-1}\int_{t-T}^{t}e^{2\pi in(s-t)/\omega}\eta_n(s)ds,\quad d_n=1-e^{-2\pi inT/\omega}. \tag{5.4}$$

利用展开式 $1=e^{2\pi im}$ $(m\in\mathbb{Z})$ 和欧拉公式，我们得到:

$$\forall\, m\in\mathbb{Z}:\quad |d_n|=2|\sin(\pi(m+nT/\omega))|.$$

记

$$m_n=-[nT/\omega+1/2],$$

那么，由于 $0\le m_n+nT/\omega+1/2<1.$，自变量 $|\pi(m_n+nT/\omega)|\le\pi/2,$ 成立。同理，求值 $|m_n|\le(T/\omega+1)|n|$ 也是正确的。

由于当 $|x|\le\pi/2,$ 时，$|\sin x|\ge(2/\pi)|x|$，我们推得

$$|d_n|\ge 4\omega^{-1}|m_n\omega+nT|>4\vartheta\omega^{-1}(|m_n|+|n|)^{-\tau}\ge 4\vartheta\omega^{-1}((T/\omega+2)|n|)^{-\tau},$$

因为 $n\neq 0$ 且 Siegel 条件 (5.1) 对 $m=m_n$.成立,

因此，根据 (2.10) 和公式 (5.4)，我们得到

$$|\chi_n^p(t)|<M_*((T/\omega+2)|n|)^\tau e^{-2\pi|n|\varrho/\omega},\quad M_*=M_\eta T\omega(4K)^{-1}.$$

于是，存在这样的常数 $M_\chi>0$，使得 $M_*((T/\omega+2)|n|)^\tau e^{-2\pi|n|(\varrho/4)/\omega}\le M_\chi.$

此后，类似于 (2.10) 的求值对函数 $\chi_n^p(t)$ 成立:

$$\forall\, t\in\mathbb{R}:\quad |\chi_n^p(t)|<M_\chi e^{-2\pi|n|(3\varrho/4)/\omega}\quad(n\neq 0). \tag{5.5}$$

因此　对于函数 $\chi_n^p(t)e^{2\pi in\varphi/\omega}$，在 $\mathcal{B}_{\varrho/2}$ 上，以下求值成立

$$|\chi_n^p(t)e^{2\pi in\varphi/\omega}|<M_\chi e^{-2\pi|n|(\varrho/4)/\omega},$$

该求值保证，对于任意 $t_*\in\mathbb{R}$，函数 $\chi_n^p(t_*)e^{2\pi in\varphi/\omega}$ 关于 φ 在 $B_{\varrho/2}$.上一致解析

根据关于函数级数一致收敛的魏尔斯特拉斯定理，对于任意 φ，该函数连续，在 t 中以 T为周期，并在 φ中以 ω为周期，且取实值

$$\tilde{\chi}(t,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi_n^p(t)e^{2\pi in\varphi/\omega}\qquad(\chi_0^p(t)\equiv 0) \tag{5.6}$$

关于 φ ，在 $\mathcal{B}_{\varrho/2}$. 上是解析的

级数（5.6）关于 φ, 逐项求导后得到的级数系数满足与 t 和 φ, 无关的指数求值, 因此其和等于偏导数 $\tilde{\chi}'(t,\varphi)$，关于 $\mathcal{B}_{\varrho/2}$.

根据（5.5）、（2.10）和（5.3），求值 $|\dot{\chi}_n^p(t)|<(2\pi nM_\chi/\omega+M_\eta)e^{-2\pi|n|(3\varrho/4)/\omega}$ 是正确的。因此，对于任意的（t,φ） $\in\mathcal{B}_{\varrho/2}$, $|\dot{\chi}_n^p(t)e^{2\pi in\varphi/\omega}|<(2M_\chi\pi n/\omega+M_\eta)e^{-2\pi|n|(\varrho/4)/\omega}$, , 也就是说，级数（5.6）关于 t, 逐项求导后得到的级数系数满足与 t 和 φ, 无关的指数求值，因此其和等于偏导数 $\tilde{\chi}(t,\varphi)$，关于 $\mathcal{B}_{\varrho/2}$.

直接代入表明，函数 $\tilde{\chi}(t,\ \varphi)$ 是方程 (5.2) 的一个解，定义于 $\mathcal{B}_{\varrho/2}$. □

5.3. **生成周期轨道的选取**。函数

$$R_{kl}^{\nu\circ}(t,\varphi)=C'(\varphi)Y_0(t,C(\varphi),S(\varphi))-S'(\varphi)X_0(t,C(\varphi),S(\varphi)), \tag{5.7}$$

在 (4.5) 中引入的函数将在我们的分析中发挥关键作用。在 (5.7) 中，$(C(\varphi)\ S(\varphi))$ 是系统 (2.1) 的初值问题的一个实解析 ω_{kl}-周期解，其初始值为 $C(0)=b_{kl},\ \ S(0)=l,$ 参数 b_{kl} 是 (2.4) 和 (3.5) 中的任意数，周期 ω_{kl} 则由 (2.7) 计算得到。

利用上述分解，我们将 $R_{kl}^o(t,\ \varphi)$ 写成如下的和：

$$R_{kl}^{\nu\circ}=\overline{R_{kl}^{\nu\circ}}+\widehat{R_{kl}^{\nu\circ}}(\varphi)+\widetilde{R_{kl}^{\nu\circ}}(t,\varphi),$$

其中

$$\overline{R_{kl}^{\nu\circ}}=\overline{R_{kl}^{\nu\circ}}(b_{kl})=\frac{1}{T\omega_{kl}}\int_0^{\omega_{kl}}\int_0^T R_{kl}^{\nu\circ}(t,\varphi)dt\,d\varphi. \tag{5.8}$$

是 R_{kl}^o. 的平均值

在 $\nu=0$ 的情况下，考虑以下方程

$$\dot{\tilde{g}}_{kl}^0(t,\varphi)+\tilde{g}_{kl}^{0\prime}(t,\varphi)=\widetilde{R}_{kl}^o(t,\varphi) \tag{5.9}$$

根据引理 5.1，该方程具有奇异解 $\tilde{g}_{kl}^0(t,\ \varphi)$，其性质与函数 $R_{kl}^o(t,\ \varphi)\widetilde{\ }$相同。

现在我们可以将非退化条件表述为

$$K_{kl}^\nu\neq 0;\qquad K_{kl}^0=\overline{(R_{klr}^{0\,\prime})^\circ-\tilde{g}_{kl}^{0\prime}q_{kl}},\quad K_{kl}^1=\overline{(R_{klr}^{1\,\prime})^\circ-\widehat{R_{kl}^{1\circ}}q_{kl}}. \tag{5.10}$$

根据 (4.5)，函数 $\tilde{g}_{kl}^0(t,\ \varphi)$ 和常数 K_{kl}^ν 仅取决于系统 (1.1) 的扰动 $X_0,\ Y_0$ 。

定义 5.1. 生成（分岔）方程的解

$$\overline{R_{kl}^{\nu\circ}}(b_{kl})=0 \tag{5.11}$$

若满足条件(2.4) 和(3.5)，则来自(5.8) 的 $R^{\nu\circ}_{kl}$ 是系统(1.1) 的一个可容许解，记为 $b^\star_{kl}$。经过选择 $b_{kl}=b^\star_{kl}$ 后，非退化条件(5.10) 成立；并且对于 $\nu=0$，来自(2.7)的周期 T 和 ω_{kl} 满足 ***Siegel*** 条件(5.1) 。

从现在起，我们固定系统 **(1.1)** 的生成方程 **(5.11)** 的某个可容许 $b^\star_{kl}$ 解。固定此解，就确定了初值问题 $CS_{kl}(\varphi,0,b_{kl},l)$ 的 ω_{kl} 周期解。该初值问题属于系统 **(2.1)**，其解将与类 $|k|+|l|\cdot$ 相关的周期轨道参数化

此后所有的变量变换和系统也都由对 $b^\star_{kl}\cdot$ 的选择确定。特别地，条件 **(5.1)** 和 **(5.10)** 成立，并且在系统（4.7）中，式 **(4.5)** 引入的函数 $R^\circ_{kl}(t,\varphi),$ 的平均值为零。

记号。 *From now on, the subindex $_{kl}$ of the functions and the constants, which represents the fixation of the generating parameter $b^\star_{kl}$, will be changed to subindex $_\star$ for brevity. For example, $R^\circ_{kl}=R^{\nu\circ}_\star$, $K^\nu_{kl}=K^\nu_\star$.*

定义*5.2.* 对于未扰动系统 *(1.2)* 的任意可容许参数 b^*_{kl}，周期轨道 $GC_\star=\{(x,y):\ x=C(\varphi)\ \ y=S(\varphi)\ (\varphi\in\mathbb{R})\}$，若其由系统 *(2.1)* 的初值问题在初始值 b^*_{kl},l 下的解参数化，则称为生成周期轨道。该周期轨道是系统 *(1.2)* 的圆柱不变曲面 $CIS_\star=\{(x,y,t):\ x=C(\varphi)\ \ y=S(\varphi)\ \ t\in\mathbb{R}\ (\varphi\in\mathbb{R})\}$ 的母线。

备注5.1. *We will be interested in systems* (1.1) *with a nonempty set of admissiblesolutions. For each $b^\star_{kl}$, it will be proved that the perturbed system* (1.1) *retains a two-periodic invariant surface homeomorphic to a torus, which is obtained by factoring the time t with respect to the period T in a small neighborhood of the cylindric surface $CIS_\star$, for eachsufficiently small ε.*

6. The construction of invariant surfaces

6.1. 二次径向平均。 我们对 $r\varepsilon$ 的系数进行平均，并令系统（4.7）第一个方程中 ε^2 的系数为零。

命题 6.1 存在这样的常数 $\varrho>0$，使得方程

$$
\begin{aligned}
&\dot{\tilde h}^0_\star+\tilde h^{0\,\prime}_\star=(R^{0\prime}_{\star r})^\circ-\tilde g^{0\,\prime}_\star q_\star-K^0_\star,\ \ \tilde g^0_\star\ from\ (5.9),\\
&\tilde f^{0\,\prime}_\star+\dot{\tilde f}^0_\star=(R^{0\prime}_{\star r})^\circ(\overline{g}^0_\star+\tilde g^0_\star)+(R^{0\prime}_{\star\varepsilon})^\circ-\tilde g^{0\,\prime}_\star(\Phi^{0\circ}_\star+(\overline{g}^0_\star+\tilde g^0_\star)q_\star);\\
&\hat g^{1\,\prime}_\star=\widehat{R^{1\circ}_\star},\ \dot{\tilde g}^1_\star=\widetilde{R^{1\circ}_\star},\ \ \hat h^{1\,\prime}_\star=\widehat{(R^{1\prime}_{\star r})^\circ}-\widehat{R^{1\circ}_\star q_\star},\ \dot{\tilde h}^1_\star=\widetilde{(R^{1\prime}_{\star r})^\circ},
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

其中 $\overline{g^0_\star=\big(\tilde g^{0\,\prime}_\star\Phi^{0\circ}_\star-(R^{0\prime}_{\star\varepsilon})^\circ-\tilde g^0_\star((R^{0\prime}_{\star r})^\circ-\tilde g^{0\,\prime}_\star q_\star)\big)/K^0_\star}$、$\overline{g^1_\star=\big(\widehat{R^{1\circ}_\star}\Phi^{1\circ}_\star-(R^{1\prime}_{\star\varepsilon})^\circ-\hat{}\,g^1_\star((R^{1\prime}_{\star r})^\circ-\widehat{R^{1\circ}_\star}q_\star)\big)/K^1_\star}$ 存在，且是奇异的、连续的、T-周期的，并且关于 t 连续可微；相对于 t 一致地实解析，且在 φ 上关于 $\mathcal{B}_\varrho$ 是 $\omega_\star$-周期的（来自 (2.8)），并且是方程的解

$$
\hat f^{1\,\prime}_\star=\widehat{\mathfrak{F}}^1_\star,\quad \dot{\tilde f}^1_\star=\widetilde{\mathfrak{F}}^1_\star,
\tag{6.2}
$$

其中 $\mathfrak{F}^1_\star=g^1_\star((R^{1\prime}_{\star r})^\circ-\widehat{R}^{1\circ}_\star q_\star)-\big(\widehat{R}^{1\circ}_\star\Phi^{1\circ}_\star-(R^{1\prime}_{\star\varepsilon})^\circ-\hat{}\,g^1_\star((R^{1\prime}_{\star r})^\circ-\widehat{R}^{1\circ}_\star q_\star)+\tilde g^{1\prime}_\star\big)$也都是奇异的，且属于 $C^1(\mathbb{R}^2)$ 类。

证明。引理 5.1 可应用于方程 (6.1^0)，这些方程与方程 (5.9) 类似，因为常数 $K_\star^0$ 和 $g_\star^0$ 使方程右端的平均值为零。方程 (6.1^1) 的解的性质显而易见。

方程(6.2)的解是连续可微的，因为函数 $(R_{\star\varepsilon}^{1\prime})^\circ$，仅在 φ 中连续可微（见引理 4.2），是函数 $\mathfrak{F}_\star^1$. 的一部分

由每个方程(6.1)、(6.2)的解的平均值均为零，可知各解的唯一性。 □

注 6.1。*The real-analytic functions* $X_1^0(t,\ x,\ y)$ *and* $Y_1^0(t,\ x,\ y)$ *are separated in the system* (1.1) *specifically to have the possibility to find the two-periodic function* $f_\star^0$ *from*(6.1) *. These functions are part only of the function* $(R_{\star\varepsilon}^{0\prime})^\circ$, *introduced in* (4.5)。

考虑角变量的二周期变量变换，其中 t 和 φ

$$r = u + G_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)\varepsilon + H_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)u\varepsilon + F_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)\varepsilon^2 \quad (\nu = 0,1), \tag{6.3}$$

其中 $G_\star^0 = g_\star^{0-} + \tilde{g}_\star^0(t,\ \varphi)\ \ H_\star^0 = \tilde{h}_\star^0(t,\ \varphi)\ \ F_\star^0 = \tilde{f}_\star^0(t,\ \varphi);\ G_\star^1 = {}^-g_\star^1 + \hat{}\,g_\star^1(\varphi) + \tilde{g}_\star^1(t,\ \varphi)\varepsilon,\ \ H_\star^1 = \hat{}\,h_\star^1(\varphi) + \tilde{h}_\star^1(t,\ \varphi)\varepsilon,\ \ F_\star^1 = \hat{}\,f_\star^1(\varphi) + \tilde{f}_\star^1(t,\ \varphi)\varepsilon.$

命题 6.2。存在这样的常数 $u_* > 0$ 和 $\varepsilon_*\ (0 < \varepsilon_* \le$ 最小值$\{\varepsilon_0, 1\})$，使得在 $(6.3)|u + G_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)\varepsilon + H_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)u\varepsilon + F_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)\varepsilon^2| \le r_*$ 中，对于任意 $t \in \mathbb{R},\ \varphi \in B_\varrho,\ |u| \le u_*,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$.

事实上，根据引理 2.1 和命题 6.1，函数$G_\star^\nu, H_\star^\nu, F_\star^0$的绝对值在集合 $\mathcal{B}_\varrho$上达到最大值

通过选取特定的 $\varrho, u_*, \varepsilon_*$，可以在不改变系统（4.7）中函数性质的情况下进行代换（6.3）。

引理 6.1。变量变换(6.3) 将系统(4.7)变换为以下系统

$$\begin{cases} \dot{u} = (K_\star^\nu u\varepsilon + U_\star^\nu(t,\varphi,u,\varepsilon))\varepsilon^\nu, \\ \dot{\varphi} = (1 + \Theta_\star^\nu(t,\varphi)\varepsilon + q_\star(\varphi)u + \breve{\Phi}_\star^\nu(t,\varphi,u,\varepsilon))\varepsilon^\nu, \end{cases} \tag{6.4}$$

其中 $\Theta_\star^0 = \Phi_\star^{0\circ} + (g_\star^0 + \tilde{g}_\star^0)q_\star,\ \Theta_\star^1 = \Phi_\star^{1\circ} + (g_\star^1 + \hat{}\,g_\star^1)q_\star,\ q_\star$ 来自（*3.8*），是关于 t 和 φ 连续、二周期的函数 $U_\star^\nu, \breve{\Phi}_\star^\nu \in C^0,\ {}^{1\,1\,0}_{u\,\varepsilon},,,_{\varphi},, (G^\varphi, \mathbb{R}^{u\,\varepsilon}_{u_*},,,_{\varepsilon_*})$，其中 $G^\varphi, \mathbb{R}^{u\,\varepsilon}_{u_*},,,_{\varepsilon_*} = \{(t,\varphi,u,\varepsilon) \in \mathbb{R}^4 : |u| \le u_*,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_*]\}$，且 $U_\star^\nu \overset{t}{=} \overset{u\,\varepsilon}{O}((|u| + \varepsilon)^3)\ \ \breve{\Phi}_\star^\nu = O((|u| + \varepsilon)^2)$。

证明。将变量变换（6.3）代入系统（4.7）的第二个方程，得到：$\dot{\varphi} = (1 + q_\star(u + G_\star^\nu\varepsilon) + \Phi_\star^{\nu\circ}\varepsilon + O((|u| + \varepsilon)^2))\varepsilon^\nu$. 由此可求得 $\Theta_\star^\nu$. 其余各项构成函数 $\breve{\Phi}_\star^\nu(t,\varphi,u,\varepsilon)$。

现在，对变量变换（6.3）关于 t求导，结合系统（4.7）和（6.4），并将等式两边除以 ε^ν，得到以下等式

$$\varepsilon(R_\star^{\nu\circ} + (R_{\star r}^{\nu\prime})^\circ(u + G_\star^\nu\varepsilon) + (R_{\star\varepsilon}^{\nu\prime})^\circ\varepsilon) + O((|u| + \varepsilon)^3) =$$

$$= K_\star^\nu u\varepsilon + G_\star^{\nu\prime}\varepsilon(1 + \Theta_\star^\nu\varepsilon + q_\star u) + H_\star^{\nu\prime}u\varepsilon + F_\star^{\nu\prime}\varepsilon^2 + (\dot{G}_\star^\nu + \dot{H}_\star^\nu u + \dot{F}_\star^\nu\varepsilon)\varepsilon^{1-\nu},$$

其中，所有关于 u 和 ε 的次数之和为三次或更高的项，均归入关于 $t, \varphi, u, \varepsilon$ 连续的、关于 $G^\varphi, \mathbb{R}^{u\,\varepsilon}_{u_*},,,_{\varepsilon_*}$的函数 $O((|u| + \varepsilon)^3)$。

对于 $\nu = 0$，令 ε、$u\varepsilon$、ε^2 的系数相等，我们得到式 (6.1) 中的第一组方程。对于 $\nu = 1$，令与 $\nu = 0$ 情形相同幂次项的系数相等，我们得到

方程 $R^{1\circ}_\star = \hat{}g^{1'}_\star + \dot{\tilde{g}}^1_\star$，$\hat{}h^{1'}_\star = \widehat{R^{1'}_{\star r}}(\,)^\circ - \widehat{R}^{1\circ}_\star q_\star$ 和 $\dot{\tilde{h}}^1_\star = \widetilde{R^{1'}_{\star r}}^\circ(\,)$；$(g^1_\star + \hat{}g^1_\star)(R^{1'}_{\star r})^\circ + (R^{1'}_{\star\varepsilon})^\circ = \tilde{g}^{1'}_\star + \hat{}g^{1'}_\star(\Phi^{1\circ}_\star + (g^1_\star + \hat{}g^1_\star)q_\star) + \hat{}f^{1'}_\star + \tilde{f}^1_\star$，它们可以化简为方程 (6.1^1) 和 (6.2)。□

6.2. **角向平均**。再进行一次平均：对系统（6.4）的第二个方程中的函数 $\Theta^\nu_\star(t,\varphi)$，关于 t 作平均。该函数关于 t 连续且为 T- 周期，在 t 上一致，并且关于 φ 实解析且为 $\omega_\star$- 周期。

命题 6.3。存在这样的常数 $\varrho > 0$，使得方程的解

$$\tilde{\delta}^{0\prime}_\star + \dot{\tilde{\delta}}^0_\star = \Theta^0_\star(t,\psi) - \overline{\Theta^0_\star}; \quad \hat{\delta}^{1\prime}_\star = \widehat{\Theta}^1_\star(\psi), \quad \dot{\tilde{\delta}}^1_\star = \widetilde{\Theta}^1_\star(t,\psi) \tag{6.5}$$

关于 t 连续可微且为 T-周期，并且关于 t 一致；在 ψ 上关于 $\omega_\star$ 实解析且为 $\omega_\star$-周期，其中 $\mathcal{B}^\psi_\varrho = \{(t,\psi)\colon\ t \in \mathbb{R},\ \psi \in B^\psi_\varrho\}$，且 $B^\psi_\varrho = \{(\mathrm{Re}\,\psi, \mathrm{Im}\,\psi)\colon \mathrm{Re}\,\psi \in \mathbb{R},\ |\mathrm{Im}\psi| \le \varrho\}$.

事实上，引入于（6.4）中的函数 $\Theta^0_\star(t,\psi)$，满足引理 5.1 的要求。其余显而易见。

考虑关于 t 和 ψ 二周期的角变量变换

$$\varphi = \psi + \Delta^\nu_\star(t,\psi,\varepsilon)\varepsilon, \tag{6.6}$$

其中 $\Delta^0_\star = \tilde{\delta}^0_\star(t,\ \psi)$ $\Delta^1_\star = \hat{}\delta^1_\star(\psi) + \tilde{\delta}^1_\star(t,\ \psi)\varepsilon$.

命题 6.4。存在这样的常数 $\varepsilon_* > 0$，使得 $|\psi + \Delta^\nu_\star(t,\ \psi,\ \varepsilon)\varepsilon| \le \varrho$ 对任意 $(t,\ \psi) \in \mathcal{B}^\psi_\varrho$ 和 $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$.

通过选择特定的 ϱ，ε_*，无需改变系统（6.4）中函数的性质即可进行变量代换（6.6）。

引理 6.2。连续的、关于 t 二周期的、关于 t 一致实解析且关于 ψ T 周期的角变量变换将系统（6.4）变换为以下系统

$$\dot{u} = (K^\nu_\star u\varepsilon + \breve{U}^\nu_\star(t,\psi,u,\varepsilon))\varepsilon^\nu, \quad \dot{\psi} = (1 + \overline{\Theta^\nu_\star}\varepsilon + q_\star(\psi)u + \breve{\Psi}^\nu_\star(t,\psi,u,\varepsilon))\varepsilon^\nu, \tag{6.7}$$

其中，函数 $\breve{U}^\nu_\star, \breve{\Psi}^\nu_\star \in C^0$，$G^\psi_{\mathbb{R}^{1\,1\,0}_{u_*^{u\,\varepsilon}_{t,\psi,\varepsilon_*}}} = \{(t,\psi,u,\varepsilon) \in \mathbb{R}^4$ 关于 t 和 ψ 连续且为二周期：$|u| \le u_*, \varepsilon \in [0,\varepsilon_*]\}$；此外，$\breve{U}^\nu_\star = O((|u|+\varepsilon)^3)$ $\breve{\Psi}^\nu_\star = O((|u|+\varepsilon)^2)$.

证明。在系统 (6.7) 的第一个方程中，$\breve{U}^\nu_\star(t,\psi,u,\varepsilon) = U^\nu_\star(t,\psi+\Delta^\nu_\star\varepsilon,u,\varepsilon)$.

对变量变换 (6.6) 关于 t, 求导，并利用系统 (6.4) 和 (6.7)，再将等式两边除以 ε^ν, ，得到等式

$$\begin{aligned} &1 + \Theta^\nu_\star(t,\psi+\Delta^\nu_\star\varepsilon)\varepsilon + q_\star(\psi+\Delta^\nu_\star\varepsilon)u + \breve{\Phi}^\nu_\star(t,\psi+\Delta^\nu_\star\varepsilon,u,\varepsilon) = \\ &= \dot{\Delta}^\nu_\star\varepsilon^{1-\nu} + (1+\Delta^{\nu\prime}_\star\varepsilon)(1 + \overline{\Theta^\nu_\star}\varepsilon + q_\star(\psi)u + \breve{\Psi}^\nu_\star(t,\psi,u,\varepsilon)), \end{aligned}$$

其中 $\Theta^\nu_\star(t,\psi+\Delta^\nu_\star\varepsilon) = \Theta^\nu_\star(t,\psi) + O(\varepsilon)$ $q_\star(\psi+\Delta^\nu_\star\varepsilon) = q_\star(\psi) + O(\varepsilon)$。因此，令作为 ε, 系数的函数相等，当 $\nu = 0$, 时，得到方程 (6.5) 中的第一个方程；当 $\nu = 1$, 时，得到方程 $\Theta^1_\star(t,\psi) = \hat{}\delta^{1\prime}_\star(\psi) + \dot{\tilde{\delta}}^1_\star(t,\psi) + \Theta^1_\star$, 它可分解为 (6.5) 中最后两个方程。

等式中的其余项构成函数 $\breve{\Psi}^\nu_\star(t,\ \psi,\ u,\ \varepsilon)$，该函数具有定理中描述的性质。 □

注意，变量变换 (6.6) 的逆变换可写为

$$\psi = \varphi + \Omega^{\nu}_{\star}(t, \varphi, \varepsilon)\varepsilon, \tag{6.8}$$

其中 $\Omega^0_\star = -\tilde{\delta}^0_\star(t,\varphi) + O(\varepsilon), \Omega^1_\star = -\hat{}\delta^1_\star(\varphi) + O(\varepsilon)$ 关于 t 是 T-周期的， $\omega_\star$-周期的，并且关于 t 一致实解析，关于 φ 函数。

6.3.**缩放**。

引理 6.3。变量变换

$$u = v\varepsilon^{3/2} \qquad (0 < \varepsilon \le \varepsilon_*) \tag{6.9}$$

将系统 (6.7)变换为以下系统

$$\dot{v} = (K^{\nu}_{\star} v\varepsilon + V^{\nu}_{\star}(t, \psi, v, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^{\nu}, \quad \dot{\psi} = (\mathcal{K}^{\nu}_{\star\varepsilon} + \Psi^{\nu}_{\star}(t, \psi, v, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^{\nu}, \tag{6.10}$$

其中 $\mathcal{K}^{\nu}_{\star\varepsilon} = 1 + \Theta^{\nu}_{\star}\overline{\varepsilon > 0}$, $V^{\nu}_{\star} = O((|v|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^3)\varepsilon^{-3}$, $\Psi^{\nu}_{\star} = q_\star(\psi)v + O((|v|\varepsilon^{3/2} + \varepsilon)^2)\varepsilon^{-3/2}$ 是连续的、关于 t 二周期的，并且是 C^0, $_{1\,1\,0}$ 类函数， $_{,\,,\psi,\,,}(G^{\psi,}{}^{v\,\varepsilon}_{\mathbb{R}\,v_*}{}_{,\,,\,,\varepsilon_*})$，其中 $G^{\psi,}{}^{v\,\varepsilon}_{\mathbb{R}\,v_*}{}_{,\,,\,,\varepsilon_*} = \{(t, \psi, v, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4 : \ |v| \le v_*, \varepsilon \in [0, \varepsilon_*]\}$ 和 (6.7)^t 中的 $v_* = u_*$。

引入常数 $M = M_{\varepsilon_*} > 0$、和 $L = L_{\varepsilon_*} > 0$，使得

$$\begin{gathered}
\max_{G^{\psi,v,\varepsilon}_{\mathbb{R},v_*,\varepsilon_*}} \{|V^{\nu}_{\star}|, |\Psi^{\nu}_{\star}|\} \le M; \\
\forall\, (t, \psi_1, v_1, \varepsilon), (t, \psi_2, v_2, \varepsilon) \in G^{\psi,v,\varepsilon}_{\mathbb{R},v_*,\varepsilon_*}: \\
|V^{\nu}_{\star}(t, \psi_2, v_2, \varepsilon) - V^{\nu}_{\star}(t, \psi_1, v_1, \varepsilon)| \le L(|\psi_2 - \psi_1| + |v_2 - v_1|), \\
|\Psi^{\nu}_{\star}(t, \psi_2, v_2, \varepsilon) - \Psi^{\nu}_{\star}(t, \psi_1, v_1, \varepsilon)| \le L(|\psi_2 - \psi_1| + |v_2 - v_1|),
\end{gathered} \tag{6.11}$$

也就是说，关于 ψ 和 v 的利普希茨条件以全局常数 L 成立。

必要时减小常数 ε_*，的值（这显然不会影响常数 M 和 L 的值），即可使下列不等式成立

$$\mathcal{M} = M/|K^{\nu}_{\star}| \le v_*\varepsilon_*^{-1/2}, \quad \mathcal{L} = 4L/|K^{\nu}_{\star}| \le \varepsilon_*^{-1/2}, \tag{6.12}$$

此外，求值

$$L(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2})\varepsilon^{1/2} \le |K^{\nu}_{\star}|/2, \quad 2L|K^{\nu}_{\star}|^{-1}\varepsilon^{1/2} \le 1/2, \quad 2L(1 + \mathcal{L}\varepsilon^{1/2})|K^{\nu}_{\star}|^{-1} \le \mathcal{L}$$

由不等式 (6.12_2)。可知，对任意 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ 均成立。

再进行一次缩放，令

$$v = z\varepsilon^{1/2} \quad (|z| \le z_\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_*), \tag{6.13}$$

其中 $z_\varepsilon = v_*\varepsilon^{-1/2}$. 于是系统 (6.10) 可写为

$$\dot{z} = (K^{\nu}_{\star} z + V^{\nu}_{\star}(t, \psi, z\varepsilon^{1/2}, \varepsilon))\varepsilon^{\nu+1}, \quad \dot{\psi} = (\mathcal{K}^{\nu}_{\star\varepsilon} + \Psi^{\nu}_{\star}(t, \psi, z\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^{\nu}. \tag{6.14}$$

6.4.**不变曲面的存在性及其性质**。

定理 6.1. 对于任意 $\varepsilon \in (0, \ \varepsilon_*]$，系统 (6.14) 具有如下二维不变曲面

$$z = A^{\nu}_{\varepsilon}(t, \psi) \quad (t, \psi \in \mathbb{R}), \tag{6.15}$$

该曲面由连续的、关于 t 具有 T-周期且关于 $\omega_\star$ 具有周期 A^{ν}_{ε}. 的函数参数化。该函数关于 ψ 满足 *Lipschitz* 条件，其全局常数为 $\mathcal{L}$ 。此外，$\max_{t,\psi\in\mathbb{R}} |A^{\nu}_{\varepsilon}(t, \psi)| \le \mathcal{M}$，其中 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{L}$ 在 (6.12) 中引入。

证明。 1) 假设在系统 (6.14) 中，常数 $K^{\nu}_{\star} > 0$. 否则，可通过代入 t 来实现 $-t$.

2) 记 $\mathcal{F}$ 为实值连续函数 $F(t,\ \psi)$ 所构成的度量空间，这些函数关于 t 是 T-周期的，关于 ψ 是 $\omega_\star$-周期的，其度量为 $\rho(F_1,\ F_2)=\max_{t,\ \psi\in\mathbb{R}}|F_2(t,\ \psi)-F_1(t,\ \psi)|$. 还假设这些函数满足求值 $|F(t,\ \psi)|\le\mathcal{M}$，并且关于 ψ 满足利普希茨条件，其全局常数为 $\mathcal{L}$ 。

度量空间 $(\mathcal{F},\ \rho)$ 是完备的，因为紧集 $[0,T]\times[0,\omega_*]$ 上连续函数的度量空间以及在 $\mathbb{R}^2$ 上二周期连续函数的度量空间都是完备的。而 $\mathcal{F}$ 是后一个空间的闭子集。

事实上，对于任意序列 $F_n\in\mathcal{F},\quad F_n\to F$ 以及任意一对点 $(t,\ \psi_1)$，$(t,\ \psi_2)$，考虑数列 $a_n=|F_n(t,\ \psi_1)-F_n(t,\ \psi_2)|,\quad b_n=\mathcal{L}|\psi_1-\psi_2|.$。根据利普希茨条件，$a_n\le b_n$ 对任意 $n.$，于是根据求值中极限传递定理，我们得到 $|F(t,\ \psi_1)-F(t,\ \psi_2)|\le\mathcal{L}|\psi_1-\psi_2|.$。显然，极限函数的绝对值也被同一个常数 $\mathcal{M}$ 所界定。

3) 假设 $\psi^t=\psi(t,\ t_0,\ \psi^{t_0},\ \varepsilon)$ 是方程初值问题的一个解

$$\dot{\psi}=(\mathcal{K}^\nu_{\star\varepsilon}+\Psi^\nu_\star(t,\psi,F(t,\psi)\varepsilon^{1/2},\varepsilon)\varepsilon^{3/2})\varepsilon^\nu\qquad(F\in\mathcal{F}),\tag{6.16}$$

i. e. $\psi^t=\psi^{t_0}+\int_{t_0}^t\big(\mathcal{K}^\nu_{\star\varepsilon}+\Psi^\nu_\star(s,\psi^s,F(s,\psi^s)\varepsilon^{1/2},\varepsilon)\varepsilon^{3/2}\big)\varepsilon^\nu ds\quad(t_0,\psi^{t_0}\in\mathbb{R}).$

Denote

$$h^t=|\psi_2^t-\psi_1^t|,$$

其中 ψ_j^t 是方程 (6.16) c $F=F_j\,(j=1,\ 2)$。那么

$$\begin{aligned}h^t\le h^{t_0}+\left|\int_{t_0}^t\big|\Psi^\nu_\star(s,\psi_2^s,F_2(s,\psi_2^s)\varepsilon^{1/2},\varepsilon)-\Psi^\nu_\star(s,\psi_1^s,F_1(s,\psi_1^s)\varepsilon^{1/2},\varepsilon)\big|\varepsilon^{\nu+3/2}ds\right|&\overset{(6.11_2)}{\le}\\ \le h^{t_0}+L\left|\int_{t_0}^t(h^s+|F_2(s,\psi_2^s)-F_1(s,\psi_1^s)|\varepsilon^{1/2})ds\right|\varepsilon^{\nu+3/2}&\le\\ \le h^{t_0}+L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})\left|\int_{t_0}^t h^s\,ds\right|\varepsilon^{\nu+3/2}+L\rho(F_1,F_2)|t-t_0|\varepsilon^{\nu+2},&\end{aligned}$$

因为

$$|F_2(s,\psi_2^s)-F_1(s,\psi_1^s)|\le\rho(F_1,F_2)+\mathcal{L}h^s,\tag{6.17}$$

因为 $|F_2(s,\ \psi_2^s)-F_1(s,\ \psi_1^s)|\le|F_2(s,\ \psi_2^s)-F_1(s,\ \psi_2^s)|+|F_1(s,\ \psi_2^s)-F_1(s,\ \psi_1^s)|.$

应用加强的 Gronwall 引理，我们得到不等式

$$h^t\le h^{t_0}e^{L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})\ |t-t_0|\varepsilon^{\nu+3/2}}+\rho\ (F_1,F_2)(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})^{-1}(e^{L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})|t-t_0|\varepsilon^{\nu+3/2}}-1)\varepsilon^{1/2}.\tag{6.18}$$

4) 考虑映射 $S^\nu_\varepsilon(F)$，该映射依赖于参数 ε，并定义在空间 $(\mathcal{F},\ \rho)$，其由以下公式描述

$$S^\nu_\varepsilon(F)(t_0,\psi^{t_0})=-\int_{t_0}^\infty e^{-K^\nu_\star(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}\varepsilon^{\nu+1}V^\nu_\star(s,\psi^s,F(s,\psi^s)\varepsilon^{1/2},\varepsilon)ds.\tag{6.19}$$

下面证明，对于任意 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_*]$，映射 $S^\nu_\varepsilon(F)\in\mathcal{F}$，即该映射是从$\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{F}$，且为一致压缩映射。

a) 映射 $S^\nu_\varepsilon(F)$ 在 $t_0.$ 中是 T-周期的。事实上,

$$S^\nu_\varepsilon(F)(t_0+T,\psi^{t_0}) = -\int_{t_0+T}^{\infty} e^{-K^\nu_\star(s-t_0-T)\varepsilon^{\nu+1}}\varepsilon^{\nu+1}V^\nu_\star(s,\tilde\psi^s,F(s,\tilde\psi^s)\varepsilon^{1/2},\varepsilon)ds =$$
$$= -\int_{t_0}^{\infty} e^{-K^\nu_\star(\tau-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}\varepsilon^{\nu+1}V^\nu_\star(\tau+T,\tilde\psi^{\tau+T},F(\tau+T,\tilde\psi^{\tau+T})\varepsilon^{1/2},\varepsilon)d\tau,$$

其中，根据定义， $\tilde\psi^s = \psi(s,\ t_0+T,\ \tilde\psi^{t_0+T},\ \varepsilon)$，且 $\tilde\psi^{t_0+T} = \psi^{t_0}.$

由于函数 $\Psi^\nu_\star$ 关于 $t,$ 是 T-周期的，函数 $\psi^{t+T} = \psi(t+T,\ t_0+T,\ \psi^{t_0},\ \varepsilon)$ 是方程 (6.16) 的一个解，其初始值 $t_0,\ \psi^{t_0},$ 与解 $\psi^t = \psi(t,\ t_0,\ \psi^{t_0},\ \varepsilon)$ 相同，因此，这些解相同。现在，所需等式可由函数 $V^\nu_\star$ 和 F 对任意 $t_0\in\mathbb{R}^1.$ 都是 T-周期的这一事实推出

b) 下面证明，映射 $S^\nu_\varepsilon(F)$ 关于 $\psi^{t_0}.$ 是 $\omega_\star$-周期的。由于函数 $\Psi^\nu_\star$ 和F_ε 是周期函数，函数 $\breve\psi^t = \psi(t,\ t_0,\ \psi^{t_0},\ \varepsilon) + \omega_\star$ 是方程 (6.16) 的一个解，而且其初始值 $t_0,\ \psi^{t_0}+\omega_\star,$ 与解 $\breve{}\ \psi^t = \psi(t,\ t_0,\ \psi^{t_0}+\omega_\star,\ \varepsilon)$ 相同，因此二者相同。其余证明显然。

c) $|S^\nu_\varepsilon(F)(t_0,\psi^{t_0})| \le M\varepsilon^{\nu+1}\int_{t_0}^{\infty} e^{-K^\nu_\star(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}ds \le M(K^\nu_\star)^{-1} \overset{(6.12)}{=} \mathcal{M}.$

d) 下面证明，函数 $S^\nu_\varepsilon(F)$ 满足利普希茨条件，其常数为$\mathcal{L}$，由此完成 $S^\nu_\varepsilon(F)$ 属于 $\mathcal{F}.$ 的证明。同时，我们还将证明映射 $S^\nu_\varepsilon(F)$ 在 $\mathcal{F}$ 上是压缩映射，压缩率等于 $1/2.$

对于任意 $t_0,\ \psi^{t_0}_1,\ \psi^{t_0}_2$和 $F_1(t,\ \psi)\ F_2(t,\ \psi)\ \in\mathcal{F},$ 以下不等式成立 t:

$$|S^\nu_\varepsilon(F_2)(t_0,\psi^{t_0}_2) - S^\nu_\varepsilon(F_1)(t_0,\psi^{t_0}_1)| \overset{(6.11_1)}{\le}$$
$$\le \int_{t_0}^{\infty} e^{-K^\nu_\star(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}\varepsilon^{\nu+1}L\big(h^s + |F_2(s,\psi^s_2) - F_1(s,\psi^s_1)|\varepsilon^{1/2}\big)ds \overset{(6.17)}{\le}$$
$$\le \rho(F_1,F_2)L\int_{t_0}^{\infty} e^{-K^\nu_\star(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}\varepsilon^{\nu+3/2}ds + L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})\int_{t_0}^{\infty} e^{-K^\nu_\star(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}\varepsilon^{\nu+1}h^s\,ds \overset{(6.18)}{\le}$$
$$\le \big(\rho(F_1,F_2)L\varepsilon^{\nu+3/2} + L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})h^{t_0}\varepsilon^{\nu+1}\big)\int_{t_0}^{\infty} e^{(L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})\varepsilon^{\nu+1/2}-K^\nu_\star)(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}ds \overset{(6.12_2)}{\le}$$
$$\le 2\big(\rho(F_1,F_2)L\varepsilon^{\nu+3/2} + L(1+\mathcal{L}\varepsilon^{1/2})h^{t_0}\varepsilon^{\nu+1}\big)/|K^\nu_\star\varepsilon^{\nu+1}| \overset{(6.12_2)}{\le} \rho(F_1,F_2)/2 + \mathcal{L}h^{t_0}.$$

取 $F_2 = F_1 = F,$ 可得利普希茨不等式

$$|S^\nu_\varepsilon(F)(t_0,\psi^{t_0}_2) - S^\nu_\varepsilon(F)(t_0,\psi^{t_0}_1)| \le \mathcal{L}h^{t_0}.$$

取 $\psi^{t_0}_2 = \psi^{t_0}_1 = \psi^{t_0}$ $(h^{t_0}=0)$，可得 *contracting* 不等式

$$|S^\nu_\varepsilon(F_2)(t_0,\psi^{t_0}) - S^\nu_\varepsilon(F_1)(t_0,\psi^{t_0})| \le \max_{t,\psi\in\mathbb{R}}|F_2(t,\psi) - F_1(t,\psi)|/2.$$

根据不动点原理（可参见 [29, 第 9 章第 7] 节（压缩映射原理）），函数 $S^\nu_\varepsilon(F)$ 有一个奇异不动点 $A^\nu_\varepsilon,$ 即 $A^\nu_\varepsilon\in\mathcal{F}$ 和$S^\nu_\varepsilon(A^\nu_\varepsilon)(t_0,\ \psi^{t_0}) = A^\nu_\varepsilon(t_0,\ \psi^{t_0})$。

因此，对于任意 $t_0,\psi^{t_0}\in\mathbb{R}$，我们有:

$$A^\nu_\varepsilon(t_0,\psi^{t_0}) = -\int_{t_0}^{\infty} e^{-K^\nu_\star(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}\varepsilon^{\nu+1}V^\nu_\star(s,\psi^s,A^\nu_\varepsilon(s,\psi^s)\varepsilon^{1/2},\varepsilon)ds, \tag{6.20}$$

其中，根据 (6.16)，$\psi^s = \psi^{t_0} + \int_{t_0}^{s} \big(\mathcal{K}^\nu_{\star\varepsilon} + \Psi^\nu_\star(\tau, \psi^\tau, A^\nu_\varepsilon(\tau, \psi^\tau)\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)\varepsilon^{3/2}\big)\varepsilon^\nu d\tau.$

5）选取任意点（$t_{\rm A}, \psi^{t_{\rm A}}{\rm A}\ z^{t_{\rm A}}{\rm A}$），位于曲面 $z = A^\nu_\varepsilon$（t, ψ），作为系统（6.14）的初始值，即 $t_{\rm A}, \psi^{t_{\rm A}}{\rm A} \in \mathbb{R},\ z^{t_{\rm A}}{\rm A} = A^\nu_\varepsilon$（$t_{\rm A}, \psi^{t_{\rm A}}{\rm A}$）。

设 $\psi^t{\rm A} \overline{=} \psi(t, t_{\rm A}, \psi^{t_{\rm A}}{\rm A}\ \varepsilon)$ 是方程（6.16）的一个解，其中 $F(t, \psi) = A^\nu_\varepsilon(t, \psi)$，即 $\psi^t{\rm A} = \psi^{t_{\rm A}}{\rm A} + \int_t^{\rm A} \big(\mathcal{K}^\nu_{\star\varepsilon} + \Psi^\nu_\star(s, \psi^s{\rm A}\ A^\nu_\varepsilon(s, \psi^s{\rm A})\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)\varepsilon^{3/2}\big)\varepsilon^\nu ds.$ 那么函数 $\psi^t{\rm A}$ 满足系统（6.14）的第二个方程，其中 $z = A^\nu_\varepsilon(s, \psi^s{\rm A})\varepsilon^{1/2}.$

考虑函数

$$z^t_{\rm A} = A^\nu_\varepsilon(t, \psi^t_{\rm A}) \overset{(6.20)}{=} -\int_t^\infty e^{-K^\nu_\star(s-t)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V^\nu_\star(s, \psi^s_{\rm A}, A^\nu_\varepsilon(s, \psi^s_{\rm A})\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds.$$

显然，其图像位于曲面 $z = A^\nu_\varepsilon(t,\ \psi)$。此外，

$$\dot z^t_{\rm A} = -K^\nu_\star \varepsilon^{\nu+1} \int_t^\infty e^{-K^\nu_\star(s-t)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V^\nu_\star(s, \psi^s_{\rm A}, A^\nu_\varepsilon(s, \psi^s_{\rm A})\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds +$$
$$+ V^\nu_\star(t, \psi^t_{\rm A}, A^\nu_\varepsilon(t, \psi^t_{\rm A})\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)\varepsilon^{\nu+1} = (K^\nu_\star z^t_{\rm A} + V^\nu_\star(t, \psi^t_{\rm A}, z^t_{\rm A}\varepsilon^{1/2}, \varepsilon))\varepsilon^{\nu+1}.$$

因此，向量函数 $(z^t{\rm A}\ \psi^t{\rm A})$ 是系统 (6.14) 的一个初值问题的解，其初始值为 $t_{\rm A},\ \psi^{t_{\rm A}}{\rm A}\ A^\nu_\varepsilon(t_{\rm A},\ \psi^{t_{\rm A}}{\rm A})$，因此，曲面 (6.15) 对系统 (6.14) 是不变的。 □

注意，对于 $\nu = 0,$ 这个由 Yu. N Bibikov 在 [22,ch. 1], 中证明的定理（即定理1），是 Hale 引理的类似结果（见 [4]）。

T以下三个引理描述了所得曲面的性质 .

引理 6.4。对于任意 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_*],\ \tilde t,\ \tilde\psi^{\tilde t} \in \mathbb{R}$ 以及 $\tilde z^{\tilde t}:\ |\tilde z^{\tilde t}| \le v_*\varepsilon^{-1/2}$，考虑函数 $z^t = z(t, \tilde t,\ \tilde\psi^{\tilde t},\ \tilde z^{\tilde t},\ \varepsilon)\ \tilde\psi^t = \psi(t,\ \tilde t,\ \tilde\psi^{\tilde t},\ \tilde z^{\tilde t},\ \varepsilon)$，它们是系统 (6.14) 的初值问题的解。则

$$\tilde z^t - A^\nu_\varepsilon(t, \tilde\psi^t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0\ when\ K^\nu_\star > 0, \quad \tilde z^t - A^\nu_\varepsilon(t, \tilde\psi^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\ when\ K^\nu_\star < 0,$$

其中 $A^\nu_\varepsilon(t, \psi)$ 是定理 *6.1* 中系统 (6.14) 的不变曲面。

证明。假设 $K^\nu_\star > 0.$ 考虑函数

$$\tilde z^t_{\rm A} = A^\nu_\varepsilon(t, \tilde\psi^t) \overset{(6.20)}{=} -\int_t^\infty e^{-K^\nu_\star(s-t)\varepsilon^{\nu+1}} \varepsilon^{\nu+1} V^\nu_\star(s, \tilde\psi^s, A^\nu_\varepsilon(s, \tilde\psi^s)\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) ds.$$

则 $\dot{\tilde z}^t{\rm A} = (K^\nu_\star \tilde z^t{\rm A} + V^\nu_\star(t, \tilde\psi^t, \tilde z^t{\rm A}\varepsilon^{1/2}, \varepsilon))\varepsilon^{\nu+1}$, 且 $\tilde z^t$ 满足方程 (6.14) 的第一式。假设 $w^t = \tilde z^t - \tilde z^t{\rm A}$ $(w^t \ne 0,$ 若 $\tilde z^{\tilde t} \ne A^\nu_\varepsilon(\tilde t, \tilde\psi^{\tilde t}))$, 我们得到

$$\dot w^t = (K^\nu_\star w^t + V^\nu_\star(t, \tilde\psi^t, \tilde z^t\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) - V^\nu_\star(t, \tilde\psi^t, \tilde z^t_{\rm A}\varepsilon^{1/2}, \varepsilon))\varepsilon^{\nu+1} = W(t)w^t\varepsilon^{\nu+1},$$

此外，$|V^\nu_\star(t,\ \tilde\psi^t, \tilde z^t\varepsilon^{1/2}, \varepsilon) - V^\nu_\star(t, \tilde\psi^t, \tilde z^t{\rm A}\varepsilon^{1/2}, \varepsilon)| \overset{(6.11_2)}{\le} L|w^t|\varepsilon^{1/2} \overset{(6.12)}{\le} K^\nu_\star|w^t|/4.$

因此 $W(t) \ge 3K^\nu_\star/4$ 且 $\ln w^t = \ln w^{\tilde t} + \varepsilon^{\nu+1}\int_{\tilde t}^t W(s)ds \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty.$

˜今后，$w^t = \tilde z^t - A^\nu_\varepsilon(t,\ \psi^t) \to 0$ 当 $t \to -\infty.$

如果常数 $K^\nu_\star < 0,$ 那么，将 t 代入 $\tau = -t$ 并执行相同的操作，我们得到 $w^\tau.$ 的等式。将 $\tau = -t$ 代入该等式，可得当 $t \to +\infty.$ □时， $w^t \to 0$

当 $t \to -\infty$，时，我们将不变曲面 (6.15) 称为满足前述引理意义下的 *asymptotically stable*；如果非退化条件 (5.10) 中的常数 $K_\star^\nu > 0$，或者当$t \to +\infty$，时，如果 $K_\star^\nu < 0$.

引理 6.5。 式 (6.20) 中的函数 $A_\varepsilon^\nu(t,\psi)$ 关于 ψ 的光滑度与系统 (6.10) 的右端相同。

该引理的证明见于 [23]。
因此，在我们的情形下， $A_\varepsilon^\nu(t,\psi) \in C^{0,1}_{t,\psi}(\mathbb{R}^2)$.

引理 6.6。 式 (6.20) 中的函数 $A_\varepsilon^\nu(t,\psi)$ 在 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*)$ 时关于 ε 连续。

证明。 1）我们来证明，在式（6.19）中引入的映射 $S_\varepsilon(F)$, 在完备度量空间 $(\mathcal{F},\rho)$.中关于 ε 连续

具体而言，对于任意 $\tilde\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$，通过固定这样的常数 $c > 0$，将证明闭区间$P_c = [\tilde\varepsilon - c, \tilde\varepsilon + c] \subset (0, \varepsilon_*]$，上 $S_\varepsilon(F)$ 连续

对于任意 $F \in \mathcal{F}$以及任意 $t_0, \psi^{t_0} \in \mathbb{R}$，映射 $S_\varepsilon(F)(t_0,\psi^{t_0})$ (6.19) $= \int_{t_0}^{\infty} h(s,\varepsilon)ds$，其中$h = -e^{-K_\star^\nu(s-t_0)\varepsilon^{\nu+1}}\varepsilon^{\nu+1}V_\star^\nu(s,\psi^s,F(s,\psi^s)\varepsilon^{1/2},\varepsilon)$ 是定义在 $R = \{(s,\varepsilon) : s \in [t_0,+\infty)$ $\varepsilon \in P_c\}$. 上的连续函数。事实上， $V_\star^\nu$ 关于其全部自变量连续；根据积分连续性定理，解 $\psi_\varepsilon^s = \psi(s,t_0,\psi^{t_0},\varepsilon)$ 在解的图像 $\psi_{\breve\varepsilon}^s$, $s \in [t_0,s_0)$ 的柱形邻域内连续，其中任取 $s_0 > \breve s$，因此函数 $\psi_\varepsilon^s = \psi(s,t_0,\psi^{t_0},\varepsilon)$ 在任意点 $(\breve s,\breve\varepsilon) \in R$. 的某个邻域内连续

假设 $H(s) = M(\tilde\varepsilon + c)^{\nu+1}e^{-K_\star^\nu(s-t_0)(\tilde\varepsilon-c)^{\nu+1}}$ $(s \in [t_0,+\infty)$ M来自 (6.11$_1$))，那么，对于任意 (s, ε)，$h(s, \varepsilon) \le H(s)$，并且 $\int_{t_0}^{\infty} H(s)ds = \frac{M(\tilde\varepsilon + c)^{\nu+1}}{K_\star^\nu(\tilde\varepsilon - c)^{\nu+1}}$.

根据魏尔斯特拉斯控制收敛定理（见 [29, 第 17 章，第 2 节，命题 2]），描述 (6.19) 中 $S_\varepsilon(F)$ 的广义积分在闭区间 P_c. 上绝对且一致收敛。根据广义积分连续性定理（见 [29,第 17 章，第 2 节，命题 5]），它是 P_c 上连续函数 S_ε. 的函数

因此，根据 [29, 第 9 章第 7] 节的不动点稳定性命题，当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$. □时，函数 A_ε^ν 在 ε 上连续

7. Theoretical results

7.1. 二维不变环面的存在性。

引理 7.1. 对于任意 ε 和任意 $\omega_\star$ 具有一个二维不变曲面

$$\rho = \Upsilon_\varepsilon^\nu(t,\varphi) \quad (t,\varphi \in \mathbb{R}), \tag{7.1}$$

该函数由一个连续、关于 t 的 T-周期、连续可微且关于 φ 的 $\omega_\star$-周期函数参数化

$$\Upsilon_\varepsilon^\nu = \alpha_\star^{-1}(\varphi)(Z_\varepsilon^\nu(t,\varphi) + \beta_\star(\varphi)Z_\varepsilon^{\nu 2}(t,\varphi)),$$

其中 $Z_\varepsilon^\nu = G_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)\varepsilon + \big(A_\varepsilon^\nu(t,\varphi + \Omega_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)\varepsilon)(1 + H_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)\varepsilon) + F_\star^\nu(t,\varphi,\varepsilon)\big)\varepsilon^2$. 函数$\Upsilon_\varepsilon^\nu$ 在 ε 上有界且连续，当 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*)$ 时，作为自变量 ε. 的函数。它还关于 t,φ 一致收敛于零，当 $\varepsilon \to 0$.

证明。 曲面 $r = Z_\varepsilon^\nu(t,\varphi)$ 是将曲面 (6.15) 代入变量变换 (6.3),(6.8),(6.9), (6.13). 得到的。将刚得到的曲面代入变量变换 (4.1), 便得到曲面 (7.1)。根据引理 6.6、变量变换 (6.3) 中所含函数 $G_\star^\nu, H_\star^\nu, F_\star^\nu,$ 的有界性，以及函数 $A_\varepsilon^\nu,$ 的一致有界性，可知该曲面有界、连续，并一致收敛于零，因为 $|A_\varepsilon^\nu(t,\varphi)| \le \mathcal{M}$,其中常数 $\mathcal{M}$ 在 (6.12) 中引入。 □

推论。 *Th*方程 *(7.1)* 中的函数 Υ_ε^0 和 Υ_ε^1 具有以下渐近展开:

$$\Upsilon_\varepsilon^0 = \alpha_\star^{-1}(\varphi)\big((\overline{g}_\star^0 + \tilde{g}_\star^0(t,\varphi))\varepsilon + (A_\varepsilon^0(t,\varphi) + \beta_\star(\varphi)(\overline{g}_\star^0 + \tilde{g}_\star^0(t,\varphi))^2 + \tilde{f}_\star^0(t,\varphi))\varepsilon^2\big) + O(\varepsilon^3),$$
$$\Upsilon_\varepsilon^1 = \alpha_\star^{-1}(\varphi)\big((\overline{g}_\star^1 + \hat{g}_\star^1(\varphi))\varepsilon + (A_\varepsilon^1(t,\varphi) + \beta_\star(\varphi)(\overline{g}_\star^1 + \hat{g}_\star^1(\varphi))^2 + \hat{f}_\star^1(\varphi))\varepsilon^2\big) + O(\varepsilon^3),$$

其中 $A_\varepsilon^\nu(t,\varphi) = O(1)$ 属于 ε.

定理 7.1. 设 $b_{kl}^\star$ 是定义 *5.1* 中任意一个可容许解，则: 1) 对于任意 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$)，系统 *(1.1)* 存在二维不变曲面

$$TIS_\varepsilon^\nu = \{(x,y,t)\colon\ x = x_\varepsilon(t,\varphi),\ y = y_\varepsilon(t,\varphi),\ t \in \mathbb{R}\ \ (\varphi \in \mathbb{R})\}, \tag{7.2}$$

其中 $x_\varepsilon = C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\Upsilon_\varepsilon^\nu(t,\varphi)$ $y_\varepsilon = S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\Upsilon_\varepsilon^\nu(t,\varphi)$ 是连续的、关于 t 为 T-周期的、连续可微且关于 φ 为 $\omega_\star$-周期的函数，其中 $(C(\varphi)\ S(\varphi))$ 是系统 *(2.1)* 的一个解，其初始值为 $C(0) = b_{kl}^\star$, $S(0) = l$，函数 Υ_ε^ν来自 *(7.1)*;

2) TIS_ε^ν，若将时间 t 按周期 T取模，则其与二维环面同胚；当 $t \to -\infty$时，若 $K_\star^\nu > 0$ 属于(5.10)，且当 $t \to +\infty$时，若 $K_\star^\nu < 0$;，它在引理 *6.4* 的意义下是 $asymptotically\ robust$ 。

3) 当 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*)$ 时，关于 t，关于 ε 连续的函数 $x_\varepsilon(t,\varphi)$ 和 $y_\varepsilon(t,\varphi)$ 分别一致收敛于 $C(\varphi)$ 和 $S(\varphi)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时亦然；也就是说，当 ε 足够小时，曲面 TIS_ε^ν 位于定义5中圆柱面 CIS_* 的任意小邻域内。2。

证明。 将函数 (7.1) 代入变量变换 (3.6)，即可得到环面状不变曲面 (7.2)。根据引理 7.1 确定的函数 $\Upsilon_\varepsilon^\nu(t,\varphi),$一致收敛于零，可知它一致收敛于自治系统 (1.2) 的 $CIS_\star$ 。 □

7.2. 自治情形下的结果。 我们将已获得的结果推广到一个重要的特殊情形，即系统 (1.1) 为自治系统。通过可能的时间变量变换，可以假设 $\nu = 0.$ 。此外，由于扰动与 t 无关，因此只需考虑在情形 $\nu = 1.$ 下所需的那些限制条件

因此，系统 (1.1) 可以写成如下形式

$$\dot{x} = \gamma(y^3 - y) + \varepsilon X^a(x,y,\varepsilon),\quad \dot{y} = -(x^3 - x) + \varepsilon Y^a(x,y,\varepsilon), \tag{1.1^a}$$

其中 $X^a = X_0^a(x,y) + X_1^a(x,y,\varepsilon)\varepsilon$, $Y^a = Y_0^a(x,y) + Y_1^a(x,y,\varepsilon)\varepsilon$, X_0^a, Y_0^a 关于 x 为实解析函数， y 是定义在 $D^{x,y}_{\sigma,\sigma} = \{(x,y)\colon\ |x|, |y| < \sigma\}$ 上的函数，当 $\sigma > \sqrt{1+\gamma^{-1/2}} \ge \sqrt{2}$时；连续函数 X_1^a, $Y_1^a \in C^1(G^{x,y}_{\sigma\sigma\varepsilon_0})$ $G^{x,y}_{\sigma\sigma\varepsilon_0} = \{(x,y,\varepsilon)\colon\ x,y \in \mathbb{R},\ |x|, |y| \le \sigma,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]\}$.

因此，我们来描述由于初始系统是自治系统这一事实而对记号、定义、公式和结果所作的变量变换。

现在不再需要上标 ν，引理 5.1 也不再需要。与已得到的公式类似，公式编号现在使用符号 a ($autonomous$)，并且对于

任意 ω 周期函数 $\eta(\varphi)$，采用扩展 $\eta(\varphi)=\eta+\hat{}\eta(\varphi)$，其中 $\underline{\eta}=\int_0^{\omega}\eta(\varphi)\,d\varphi$ 是函数 η. 的平均值。接下来，

$$R_{kl}^{a\circ}=\overline{R_{kl}^{a\circ}}+\widehat{R_{kl}^{a\circ}}(\varphi)=C'(\varphi)Y_0^a(C(\varphi),S(\varphi))-S'(\varphi)X_0^a(C(\varphi),S(\varphi)),\qquad(5.7^a)$$

其中，$(C(\varphi)\ S(\varphi))$ 是系统 (2.1) 在初始值 $C(0)=b_{kl}$，$S(0)=l$，下的初值问题的实解析 ω_{kl}-周期解；函数 $R_{kl}^{a\circ}=R_{kl}(\varphi,\ 0,\ 0)$，以及 $R_{kl}=R_{kl}(\varphi,\ r,\ \varepsilon)$ 在 (4.3) 中引入；

$$K_{kl}^a=\overline{(R_{kl}{}'_r)^{\circ}}-\overline{R_{kl}^{\circ}q_{kl}}\neq 0,\qquad(5.10^a)$$

而 $(R_{kl}{}'_r)^{\circ}=R_{kl}{}'_r|_{(\varphi,0,0)}$ 在 (4.5) 中引入，$q_{kl}(\varphi)$ 在 (3.8) 中引入。

定义 5.1[a]. 生成（分岔）方程的解

$$\overline{R_{kl}^{a\circ}}(b_{kl})=\frac{1}{\omega_{kl}}\int_0^{\omega_{kl}}R_{kl}^{a\circ}(\varphi)\,d\varphi=0\qquad(5.11^a)$$

若生成（分岔）方程的解满足条件和 (3.5)，且在其固定时非退化条件 (5.10^a) 成立，则 (2.4) 该解对系统 (1.1^a) 是可容许的，并记为 $b_{kl}^{\star}$。

固定任意一个可容许解 $b_{kl}^{\star}$. 。为简洁起见，除, 外，所有记号中的下标 kl 均改为 $\star$，例如 $K_{kl}^a=K_{\star}$. 。那么在引理6.1中，变量变换（6.3）可写为

$$r=u+g_{\star}(\varphi)\varepsilon+\hat{h}_{\star}(\varphi)u\varepsilon+\hat{f}_{\star}(\varphi)\varepsilon^2,\qquad(6.3^a)$$

where $\hat{g}_{\star}(\varphi)=\int_{\varphi_g}^{\varphi}R_{\star}^{\circ}(s)ds$, $\overline{g}_{\star}=\big(\overline{R_{\star}^{\circ}(\Phi_{\star}^{\circ}+\hat{g}_{\star}q_{\star})}-\overline{(R_{\star\varepsilon}{}')^{\circ}}-\overline{\hat{g}_{\star}(R_{\star r}{}')^{\circ}}\big)/K_{\star}$, $\hat{h}_{\star}(\varphi)=\int_{\varphi_h}^{\varphi}\big((R_{\star r}{}')^{\circ}-R_{\star}^{\circ}q_{\star}-K_{\star}\big)ds$, $\hat{f}_{\star}(\varphi)=\int_{\varphi_f}^{\varphi}\big(\overline{g}_{\star}K_{\star}-R_{\star}^{\circ}(\Phi_{\star}^{\circ}+\hat{g}_{\star}q_{\star})+(R_{\star\varepsilon}{}')^{\circ}+\hat{g}_{\star}(R_{\star r}{}')^{\circ}\big)ds$, and $(R_{\star\varepsilon}{}')^{\circ}=C'Y_1^a(C,S)-S'X_1^a(C,S)$, according to (4.5).

之后，在系统（6.4）中，函数 $\Theta_{\star}(\varphi)=\Phi_{\star}^{\circ}(\varphi)+g_{\star}q_{\star}(\varphi)$。下面给出一个包含定理 6.1 以及引理 6.5、6.6 的命题。

定理 6.1[a]. 对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$，自治系统 （6.14）在 $\nu=0$ 条件下具有二维柱状不变曲面

$$z=\mathcal{A}_{\varepsilon}(t,\psi)\quad(t,\psi\in\mathbb{R})\qquad(6.15^a)$$

其中 $\mathcal{A}_{\varepsilon}(t,\psi)\equiv A_{\varepsilon}(\psi)$，函数 $A_{\varepsilon}(\psi)$ 连续、$\omega_{\star}$-周期，满足 *Lipschitz* 条件，其全局常数为 $\mathcal{L}$，且 最大值 $|A_{\varepsilon}^{\nu}(\psi)|\leq\mathcal{M}$，常数 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{L}$ 在（6.12）中引入。

证明与定理 6.1 的证明类似，其中度量函数空间$F(\psi)$被视为 $\mathcal{F}$.

因此，周期函数 $z=A_{\varepsilon}^{\nu}(\psi)$的图像是圆柱面（$6.15^a$）的一条母线。

定理 7.1[a]. 假设 $b_{kl}^{\star}$ 是定义5.1^a中的任意一个可容许解，则：

1) 对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$，系统 (1.1^a) 都有一个不变环，通常称为极限环，

(7.3) $$LC_{\varepsilon}=\{(x,y)\colon\ x=x_{\varepsilon}(\varphi),\ y=y_{\varepsilon}(\varphi)\}\quad(\varphi\in\mathbb{R}),$$

其中函数 $x_\varepsilon = C(\varphi) + (C(\varphi) - k)\Upsilon_\varepsilon^\nu(\varphi)$ $y_\varepsilon = S(\varphi) + (S(\varphi) - l)\Upsilon_\varepsilon^\nu(\varphi)$ 连续可微，且关于 φ 是 $\omega_\star$-周期的；

2) 当 $t \to -\infty$ 时，周期轨道 LC_ε 是 *asymptotically stable*，若(5.10^a)中的常数为 $K_\star > 0$；当 $t \to +\infty$ 时，若常数 $K_\star < 0$;

3) 对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，ε 中连续的函数 $x_\varepsilon(\varphi)$ $y_\varepsilon(\varphi)$ 关于 t, φ 一致地分别收敛到 $C(\varphi)$ $S(\varphi)$；也就是说，当 ε 较小时，极限环 LC_ε 位于定义5.2 中周期轨道 $GC_\star$ 的无穷小邻域内。

8. 实际结果

8.1. 生成方程的分析。假设在系统 (1.1) 中，函数 X_0^ν, Y_0^ν 可以写成

$$X_0^\nu(t,x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} X_0^{(m,n)}(t)x^m y^n, \quad Y_0^\nu(t,x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} Y_0^{(m,n)}(t)x^m y^n \tag{8.1}$$

其中，具有实数、连续且关于 t 以 T 为周期的系数的幂级数绝对收敛。当 $|x|, |y| < \sigma.$ 时，因此，对于满足条件 (2.4) 和 (3.5) 的任意可容许解 $b_{kl},$，在 (5.7) 中

$$R_{kl}^{\nu\circ}(t,\varphi) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(Y_0^{(m,n)}(t)C'(\varphi) - X_0^{(m,n)}(t)S'(\varphi) \right) C^m(\varphi)S^n(\varphi).$$

生成方程 (5.11) 的左端可写为

$$\overline{R_{kl}^{\nu\circ}}(b_{kl}) = \frac{1}{\omega_{kl}} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\overline{Y_0^{(m,n)}} \int_0^{\omega_{kl}} C^m S^n C'\, d\varphi - \overline{X_0^{(m,n)}} \int_0^{\omega_{kl}} C^m S^n S'\, d\varphi \right),$$

且当 n 时 $= 0$，第一个积分等于零；当 $m = 0$，——第二个积分 .

在一个周期内对等式 $(C^m S^{n+1})' = mC^{m-1}S^{n+1}C' + (n+1)C^m S^n S'$ 进行积分并合并各项，可得：

$$\overline{R_{kl}^{\nu\circ}}(b_{kl}) = \frac{1}{T\omega_{kl}} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m+1}{n}\overline{X_0^{(m+1,n-1)}} + \overline{Y_0^{(m,n)}} \right) I_{kl}^{mn},$$

其中 $I_{kl}^{mn} = \int_0^{\omega_{kl}} C^m(\varphi)S^n(\varphi)C'(\varphi)\, d\varphi$，此外，对于每一类，该公式都可以简化为：

$$\begin{aligned} &\overline{R_{00}^{\nu\circ}}(b_{00}) = \frac{4}{\omega_{00}} \sum_{m,n=0}^{\infty} P^{(2m,2n+1)} J_{00}^{mn}, \quad \overline{R_{k0}^{\nu\circ}}(b_{k0}) = \frac{2}{\omega_{k0}} \sum_{m,n=0}^{\infty} P^{(m,2n+1)} J_{k0}^{mn}, \\ &\overline{R_{kl}^{\nu\circ}}(b_{kl}) = \frac{1}{\omega_{kl}} \sum_{m,n=0}^{\infty} P^{(m,n+1)} J_{kl}^{mn}, \quad P^{(m,n)} = \frac{m+1}{n}\overline{X^{(m+1,n-1)}} + \overline{Y^{(m,n)}}, \end{aligned} \tag{8.2}$$

其中

$$J_{00}^{mn}=\Big\{\int_0^{r_0^{1e}}\varsigma^{2m}(S_+(\varsigma^2))^{2n+1}\,d\varsigma+\int_{r_0^{1e}}^{b_{00}^e}\varsigma^{2m}(S_-(\varsigma^2))^{2n+1}\,d\varsigma,\ \text{if}\ \ b_{00}^e\in(r^e,r^\sigma),$$
$$\int_{b_{00}^i}^{0}\varsigma^{2m}(S_-(\varsigma^2))^{2n+1}d\varsigma,\ \text{if}\ \ b_{00}^i\in(0,r^i)\Big\},$$
$$kJ_{k0}^{mn}=\int_{kl_1^0}^{kl_1^1}\varsigma^m(S_-(\varsigma^2))^{2n+1}d\varsigma+\int_{kl_1^1}^{kr_1^1}\varsigma^m(S_+(\varsigma^2))^{2n+1}\,d\varsigma+\int_{kr_1^1}^{b_{k0}}\varsigma^m(S_-(\varsigma^2))^{2n+1}\,d\varsigma,$$
$$kJ_{kl}^{mn}=l^n\int_{kl_2^1}^{b_{kl}}\varsigma^m((S_+(\varsigma^2))^{n+1}-(S_-(\varsigma^2))^{n+1})\,d\varsigma\ \ (k,l=\pm1);\quad S_\pm(\varsigma^2)\ \text{from (2.6)}.$$

例如，考虑到（8.2）中使用的常数是在（2.5）中引入的，我们来推导（8.2）中的第一个公式。

在类 $0^e]$，当 $b_{00}^e\in(r^e,\ r^\sigma)$，沿周期轨道的运动为顺时针方向；而当 $|C(\varphi)|=r_{0e}^1$，函数 $S^2(\varphi)-1$ 在每个象限内都会改变符号。因此

$$I_{00}^{mn}=\int_{b_{00}^e}^{r_0^{1e}}\varsigma^m(-S_-(\varsigma^2))^n\,d\varsigma+\int_{r_0^{1e}}^{0}\varsigma^m(-S_+(\varsigma^2))^n\,d\varsigma+\int_{0}^{-r_0^{1e}}\varsigma^m(-S_+(\varsigma^2))^n\,d\varsigma+$$
$$+\int_{-r_0^{1e}}^{-b_{00}^e}\varsigma^m(-S_-(\varsigma^2))^n\,d\varsigma+\int_{-b_{00}^e}^{-r_0^{1e}}\varsigma^m(S_-(\varsigma^2))^n\,d\varsigma+\int_{-r_0^{1e}}^{0}\varsigma^m(S_+(\varsigma^2))^n\,d\varsigma+I_e,$$

where $I_e=\int_0^{r_0^{1e}}\varsigma^m(S_+(\varsigma^2))^n\,d\varsigma+\int_{r_0^{1e}}^{b_{00}^e}\varsigma^m(S_-(\varsigma^2))^n\,d\varsigma.$

显然，若 m 为偶数且 n 为奇数，则 $I_{00}^{mn}=4I_e$。对于其他所有情况， $I_{00}^{mn}=0$. 重新编号后，公式即具有所需形式。

在类 $0^i]$，当 $b_{00}^i\in(0,\ r^i)$，沿周期轨道的运动为逆时针方向。因此$I_{00}^{mn}=I_i+\int_0^{-b_{00}^i}\varsigma^m($ $S_-(\varsigma^2))^n\,d\varsigma+\int_{-b_{00}^i}^{0}\varsigma^m(-S_-(\varsigma^2))^n\,d\varsigma++\int_0^{b_{00}^i}\varsigma^m(-S_-(\varsigma^2))^n\,d\varsigma$，其中$I_i=\int_{b_{00}^i}^{0}\varsigma^m(S_-(\varsigma^2))^n\,d\varsigma$. 接下来，若常数 m 为偶数且常数 n 为奇数，则 $I_{00}^{mn}=4I_i$。对于其他所有情况， $I_{00}^{mn}=0$.

8.2. 所得结果的应用。下面给出系统 (1.1) 的一个例子，其中函数 $X_0^\nu,\ Y_0^\nu$ 的解析延拓 (8.1) 不含次数高于三次的零平均值项，并且对于任意充分小的 $\varepsilon>0$,，该系统有十一个二维不变环面 (7.2)。

引理 8.1。考虑如下系统(1.1)

$$\begin{gathered}\gamma=1/2,\ T=2\pi,\ \sigma>\sqrt{6};\\ \nu=1\colon\ \overline{X_0^{(m,n)}}=0,\ \overline{Y_0^{(m,n)}}=0\ \ (m,n\in\mathbb{Z}_+),\ \ except\\ \overline{Y_0^{(0,1)}}=\tau_0=-3.314,\ \overline{Y_0^{(0,3)}}=\tau_1=-0.361,\ \overline{Y_0^{(2,1)}}=\tau_2=4.493;\\ \nu=0\colon\ \ X_0^0=\cos t,\ \ Y_0^0=\tau_0(y+\sin t)+\tau_1y^3+\tau_2(x^2y+\sin t).\end{gathered}\tag{8.3}$$

其中 $\overline{X_0^{(m,n)}}$, $\overline{Y_{(m}$<style id='6'>, $_{n)\,0}$ 是扩展式 (8.1)中系数的平均值。然后，生成方程 (5.11)有十一个解，记为 b_{kl}^j ，且位于

以下区间内： $b^0_{00}\in(1.795,\,1.815)$ $kb^1_{k0}\in(1.118,\,1.148)$ $kb^2_{k1},\,kb^2_{k,-1}\in(1.266,\,1.276)$, $kb^3_{k1},\,kb^3_{k,-1}\in(1.299,\,1.303)$ $(k=\pm1)$。这些解满足条件 (2.4) 和 (3.5)。此外，系统 (2.1) 的解的周期 $\omega^j_{kl}(\varphi)=(C(\varphi),\,S(\varphi))$ 以及初始值 $C(0)=b^j_{kl},\,S(0)=l$ 位于以下区间内：$\omega^0_{00}\in(3.81,\,3.94)$,$\omega^1_{k0}\in(13.25,\,14.05)$ $\omega^2_{kl}\in(5.99,\,6.29)$ $\omega^3_{kl}\in(7.72,\,8.49)$（见图 3.4）。条件 (5.10) 中的十一个常数 $K^{\nu j}_{kl}$ 取以下值： $K^{00}_{00}\approx2.78$, $K^{01}_{k0}\approx-0.34$, $K^{02}_{kl}\approx-0.29$, $K^{03}_{kl}\approx2.07$; $K^{10}_{00}\approx2.79$, $K^{11}_{k0}\approx-0.32$, $K^{12}_{kl}\approx-0.05$, $K^{13}_{kl}\approx0.10$ $(k,l=\pm1)$。

证明。在所考虑的系统 (1.1) 中， $r^i=2^{-1/4}(\sqrt{2}-1)\approx0.348$, $r^e=r_\gamma=2^{-1/4}(\sqrt{2}+1)^-\approx1.306$ 根据 (2.3)，而 $r^\sigma=(1+\sqrt{12})^{1/2}>2.11\overline{13}$, 根据 (2.4)， $b_d(0.5)=1.15-0.16\cdot0.3^{1/2}\approx1.062$, $b_u(0.5)=1.15+0.28\cdot0.3^{1/2}\approx1.303$ 根据 (3.5)。因此， b_{kl} 的区间及其近似计算得到的界如下：对于类 $0]$ $b^i_{00}\in(0,0.348)$ $b^e_{00}\in(1.306,2.113)$, 对于类 $1]$ $kb_{k0}\in(1.062,1.303)$, 对于类 $2]$ $kb_{kl}\in(1,1.306)$。每个区间都包含定理假设中的相应区间；对于这类区间的每个界，都可以求得周期的近似值界 ω^j_{kl}。

因此，公式（8.2）可以写成：

$$\overline{R^{\nu\circ}_{00}}(b_{00})=4(Y^{(0,1)}J^{00}_{00}+Y^{(0,3)}J^{01}_{00}+Y^{(2,1)}J^{10}_{00})/\omega_{00},$$
$$\overline{R^{\nu\circ}_{k0}}(b_{k0})=2(Y^{(0,1)}J^{00}_{k0}+Y^{(0,3)}J^{01}_{k0}+Y^{(2,1)}J^{20}_{k0})/\omega_{k0},$$
$$\overline{R^{\nu\circ}_{kl}}(b_{kl})=(Y^{(0,1)}J^{00}_{kl}+Y^{(0,3)}J^{02}_{kl}+Y^{(2,1)}J^{20}_{kl})/\omega_{kl}.$$

请注意，这三个公式涵盖了全部十一个情形，因为在（8.3）中，我们只将满足以下条件的系数视为非零：对于类 $1]$ $J^{mn}_{10}=J^{mn}_{-10}$，偶数 m 和奇数 n，对于类 $2]$ $J^{mn}_{11}=J^{mn}_{-11}=J^{mn}_{-1,\,-1}=J^{mn}_{1,\,-1}$，偶数 m 和 n.

We obtain the following results:

for class $0]$ $\overline{R^{\nu\circ}_{00}}(1.795)<-10^{-4}$, $\overline{R^{\nu\circ}_{00}}(1.815)>10^{-4}$;

for class $1]$ $\overline{R^{\nu\circ}_{k0}}(1.118\cdot k)>10^{-4}$, $\overline{R^{\nu\circ}_{k0}}(1.148\cdot k)<-10^{-4}$;

for class $2]$ $\overline{R^{\nu\circ}_{kl}}(1.266\cdot k)>10^{-4}$, $\overline{R^{\nu\circ}_{kl}}(1.276\cdot k)<-10^{-4}$;

for class $2]$ $\overline{R^{\nu\circ}_{kl}}(1.299\cdot k)<-10^{-4}$, $\overline{R^{\nu\circ}_{kl}}(1.303\cdot k)>10^{-4}$,

否则，函数 $R^{\nu\circ}_{kl}$ 的符号不变。因此，定理假设所给区间内的参数 b，共有十一个取值，这些参数就是生成方程 (5.11) 的解。

对于 $\nu=1$，对于每个得到的 $b_\star=b^j_{kl}$ 及其对应的周期 $\omega_\star=\omega^j_{kl}$，利用公式 (2.7) 计算后，可根据非退化条件 (5.10) 计算常数 $K^1_\star=K^{1j}_{kl}$ 的近似值，公式如下：

$$K^1_\star=\overline{(R^{1\prime}_{\star r})^\circ}-\widehat{\overline{R^{1\circ}_\star}q_\star}=\frac{1}{\omega_\star}\int_0^{\omega_\star}\mathcal{R}^1_\star(\varphi)\,d\varphi,$$

其中 $\mathcal{R}^1_\star=\alpha_\star^{-1}C'(2\tau_2C(C-k)S+(\tau_1+\tau_2C^2+3\tau_3S^2)(S-l))-(\tau_1S+\tau_2C^2S+\tau_3S^3)(\alpha_\star^{-2}\alpha'_\star(C-k)+2\beta_\star C')-q_\star C'(\tau_1S+\tau_2C^2S+\tau_3S^3)$。

对于 $\nu=0$，对于每个得到的 $b_\star=b^j_{kl}$ 及相应的周期 $\omega_\star=\omega^j_{kl}$，由方程 (5.9) 求得函数 $\tilde g^0_\star(t,\,\varphi)=\tilde g^{0j}_{kl}(t,\,\varphi)$。为此，我们将引理 5.1 中公式 (5.2)、(5.3)、(5.6) 的傅里叶级数转换为正弦-余弦形式。考虑

$$\eta^{(n)}_1=\frac{2}{\omega_\star}\int_0^{\omega_\star}\widetilde{R}^{0\circ}_\star(t,\varphi)\cos\frac{2\pi n\varphi}{\omega_\star}\,d\varphi,\quad\eta^{(n)}_2=\frac{2}{\omega_\star}\int_0^{\omega_\star}\widetilde{R}^{0\circ}_\star(t,\varphi)\sin\frac{2\pi n\varphi}{\omega_\star}\,d\varphi,$$

then

$$\widetilde{R}^{0\circ}_{\star} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\eta_1^{(n)}(t) \cos \frac{2\pi n\varphi}{\omega_\star} + \eta_2^{(n)}(t) \sin \frac{2\pi n\varphi}{\omega_\star} \right),$$
$$\tilde{g}^0_{\star} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\breve{\chi}_1^{(n)}(t) \cos \frac{2\pi n\varphi}{\omega_\star} + \breve{\chi}_2^{(n)}(t) \sin \frac{2\pi n\varphi}{\omega_\star} \right), \tag{8.4}$$

其中，对于任意 n，向量 $\breve{\chi}^{(n)}(t)$ 的 T-周期系数 ($T = 2\pi$) 满足线性系统

$$\dot{\chi}^{(n)} = A^{(n)}\chi^{(n)} + \eta^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{8.5}$$

其中 $A^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n & 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_n = \underline{\dfrac{2\pi n}{\omega_\star}}$，即 $\lambda_{1,\,2} = \pm i\alpha_n$ 是矩阵 $A^{(n)}$. 的特征值

系统 (8.5) 是方程 (5.3) 的实数类比，并且具有一个奇异的 T-周期实解 $\breve{\chi}^{(n)}$，条件 $\lambda_\iota T/(2\pi i) \notin \mathbb{Z}$ ($\iota = 1,\ 2$)，或 $nT - m\omega_\star \neq 0\,(m,\ n \in \mathbb{N})$ 成立时即如此。由于满足 Siegel 条件 (5.1)，这些条件成立。该解可写为:

$$\breve{\chi}^{(n)}(t) = (E - e^{A^{(n)}T})^{-1} \int_{t-T}^{t} e^{A^{(n)}(t-s)} \eta^{(n)}(s)\, ds \quad (T = 2\pi),$$

其中 $e^{A^{(n)}t} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n t & -\sin \alpha_n t \\ \sin \alpha_n t & \cos \alpha_n t \end{pmatrix}$ — 系统 $\dot{\chi}^{(n)} = A^{(n)}\chi^{(n)}$，$(E - e^{A^{(n)}T})^{-1} = (2 - 2\cos\ \alpha_n T)^{-1} \begin{pmatrix} \varpi_n & \text{æ}_n \\ -\text{æ}_n & \varpi_n \end{pmatrix}$ æ，$\varpi_n = \cos\ \alpha_n t - \cos\ \alpha_n (T - t)$，$\text{æ}_n = \sin \alpha_n t + \sin\ \alpha_n (T - t)$。此外，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，$\cos\ \alpha_n T = \cos(2\pi\omega_\star^{-1}(nT - m\omega_\star))$。

通过考虑傅里叶展开（8.4）中包含十五项的有限和，可以计算函数 $\tilde{g}^0_\star$ 在点（$l_\varphi h_\varphi$, $l_t h_t$）、处的近似值，其中$0 \le l_\varphi,\ l_t \le 101,\ \ h_\varphi = 0.01\omega_\star,\ \ h_t = 0.02\pi$、。

通过比较函数 $\tilde{g}^0_\star$ 在两个区间各端点处的近似值，证实了其双周期性；这两个区间的长度分别等于两个周期中的一个:

$$|\tilde{g}^0_\star(l_\varphi h_\varphi, 0) - \tilde{g}^0_\star(l_\varphi h_\varphi, 2\pi)|,\ |\tilde{g}^0_\star(0, l_t h_t) - \tilde{g}^0_\star(\omega_\star, l_t h_t)| < 0.011 \quad (l_\varphi, l_t = \overline{0, 100}).$$

根据引理 5.1，函数 $\tilde{g}^0_\star$ 连续可微，因此，可以使用以下公式 $\tilde{g}^{0\prime}_{kl}$（$l_\varphi h_\varphi,\ l_t h_t$）$= 100\big(\tilde{g}^0_\star$（（$l_\varphi + 1$）$h_\varphi,\ l_t h_t$）$- \tilde{g}^0_\star$（$l_\varphi h_\varphi,\ l_t h_t$）$\big)$.，计算函数 $\tilde{g}^{0\prime}_{kl}$ 在与 $\tilde{g}^0_\star$ 相同点处的近似值。

然后，可以利用公式计算非退化条件 (5.10) 中常数 $K^0_\star = K^{0j}_{kl}$ 的近似值:

$$K^0_\star = \overline{(R^{0\prime}_{\star r})^\circ - \tilde{g}^{0\,\prime}_\star q_\star} = \frac{1}{2\pi\omega_\star} \int_0^{\omega_\star} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}^0_\star(\varphi)\, d\varphi,$$

其中 $\mathcal{R}^0_\star = \alpha_\star^{-1} C'(2\tau_2 C(C - k)S + (\tau_0 + 3\tau_1 S^3 + \tau_2 C^2)(S - l)) + \alpha'_\star \alpha_\star^{-2}((S - l)\cos t - (C - k)(\tau_o(S + \sin t) + \tau_1 S^3 + \tau_2(C^2 S + \sin\ t)) - 2\beta_\star(C'(\tau_o(S + \sin\ t) + \tau_1 S^3 + \tau_2(C^2 S + \sin\ t) - S'\cos\ t) - \tilde{g}^{0\,\prime}_\star q_\star$. □

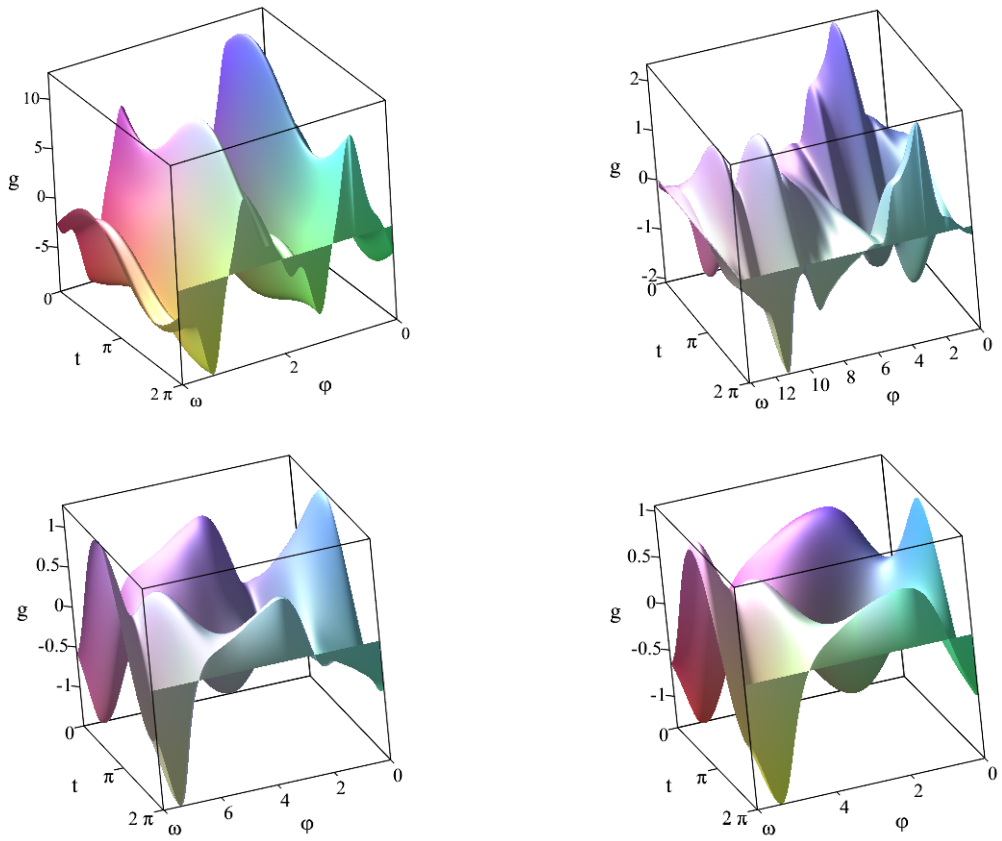

图 8.1。 The 二周期函数 $\tilde{g}_{00}^{00}$（t、φ） $\tilde{g}_{10}^{01}$（t、φ） $\tilde{g}_{02}^{11}$（t、φ） $\tilde{g}_{11}^{03}$（t、φ）**的图像** .

因此，引理中已证明，对于任意 $\nu = 1$，根据定义 5.1 找到的每个 b_{kl}^{j}，均为可容许；对于任意 $\nu = 0$，解 b_{kl}^{j} 均为可容许，前提是周期 2π 和 ω_{kl}^{j}满足关于“小分母”的 Siegel 条件（5.1）。遗憾的是，要证明 Siegel 条件成立并不容易，因为周期 ω_{kl}^{j} 的精确值未知，但有以下事实值得考虑。

命题 8.1。*Siegel condition* （5.1） *holds for almost every value of the period* ω_{kl}^{j} *with the respect to the Lebesgue measure.*

注 8.1。*Considering the proposition 8.1、 we will assume that Siegel's conditionholds、 therefore、 for* $\nu = 0$ *each solution* b_{kl}^{j} *is admissable. It is correct for almost everyvalue of the coefficients* $X_0^{(m,n)}$ *、* Y *（m、n）0、 located in the infinitely small neighbourhoods of thecoefficients chosen in* （8.1）。

定理 8.1。 存在这样的常数 $\varepsilon_* > 0$，使得对于任意 $\varepsilon \in$ （0， ε_*]，引理 *8.1* 中的系统 （1.1）具有十一个不变曲面 $TIS_{\varepsilon kl}^{\nu j}$，这些曲面由可容许解 b_{kl}^{j}确定，并在定理7.1中加以描述。

推论。每个曲面 $TIS_{\varepsilon kl}^{\nu j}$ 均具有形式 *(7.2)*，且同胚于二维环面，因为它由二周期函数 $x = x_\varepsilon(t, \varphi)$ $y = y_\varepsilon(t, \varphi)$参数化，这些函数由解 $CS_{kl}^{j}(\varphi)$构造而成；当 $t \to -\infty$ 时，曲面 $TIS_{\varepsilon 00}^{\nu 0}$, $TIS_{\varepsilon k,\pm 1}^{\nu 3}$ 是 *asymptotically stable*，而当 $t \to +\infty$ 时， $TIS_{\varepsilon k0}^{\nu 1}$, $TIS_{\varepsilon k,\pm 1}^{\nu 2}$ 是 *asymptotically stable* ，这里的意义见引理 *6.4*（$k = \pm 1$）；关于 ε 连续的函数 $x_\varepsilon(t, \varphi)$ 和 $y_\varepsilon(t, \varphi)$ 一致地

关于 t, φ 分别收敛到 $C(\varphi)$ 和 $S(\varphi)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，因此，对于任意小的 ε，这十一个曲面 $TIS^{\nu j}_{\varepsilon kl}$ 均位于圆柱面 $CIS^{\nu j}_{kl}$ 的无穷小邻域内，该圆柱面由定义5.2 给出，其生成周期轨道由解$CS^{j}_{kl}(\varphi)$参数化，并作为母线（见图8.2)。

因此，定理 8.1 的假设所涉及的系统 (1.1) 的生成周期轨道如图 8.2 所示，图中展示了未扰动系统 (1.2) 的 *phase portrait*，其具有 $\gamma = 1/2.$。这些周期轨道分别经过点 $(x_0, 0), (\pm x_1, 0), (\pm x_j, 1), (\pm x_j, -1)$ $(j = 2, 3)$, 其中 $x_0 = b^0_{00}$, $x_1 = b^1_{10}$, $x_j = b^j_{11}$，虚线表示分离曲线。

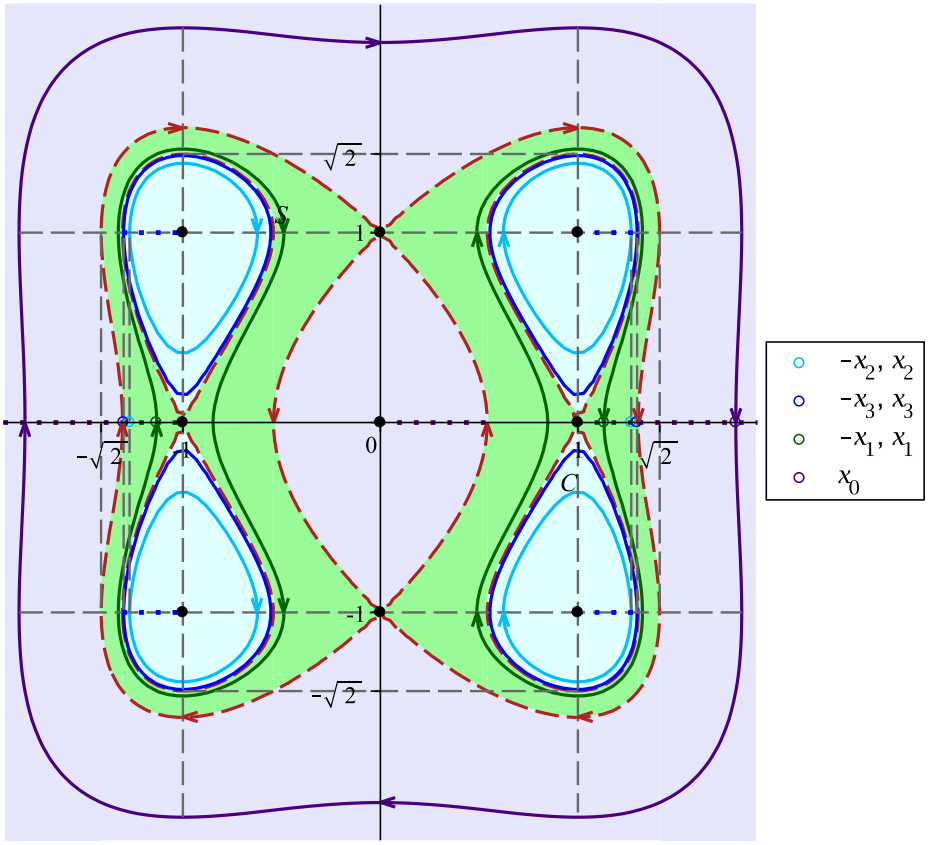

图 8.2. 定理 8.1 中系统 (1.1) 的生成周期轨道。

8.3. **所得结果的数值验证**。定理 8.1 未给出小参数 ε, 区间右端点 ε_* 的求值，但可以通过数值方法求得。

仅考虑自治情形，因为这样可以展示随着 ε_* 减小，随后出现全部十一个极限环。

因此，考虑带有自治扰动（8.3）的系统（1.1）

$$\dot{x} = (y^3 - y)/2, \quad \dot{y} = -(x^3 - x) + Y^a_0(x, y)\varepsilon \quad (\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]), \tag{8.6}$$

其中 $Y^a_0 = -3.314y + 4.493x^2y - 0.361y^3$.

系统 (8.6) 在变量变换 x to $-\tilde{x}$ 和 y to $-\tilde{y}$. 下保持不变。因此，只需在右半平面内确定类 $1], 2]$ 中的生成周期轨道，即选择参数 b_{k0}，$b_{k,\ \pm 1}$，满足 $k = 1$.

首先，请注意，系统 (8.6) 中不位于横轴上的平衡点的横坐标已发生变化。现在，平衡点的坐标如下：$(\pm a_0^\varepsilon,\ \pm 1)$，$(\pm a_1^\varepsilon,\ \pm 1)$，$(\mp a_2^\varepsilon,\ \pm 1)$，其中，例如，对于 $\varepsilon = 0.05$，$a_0^\varepsilon \approx 0.182$，$a_1^\varepsilon \approx 0.983$，$a_2^\varepsilon \approx 1.025$.

接下来，绘制了系统 (8.6) 在 $\varepsilon = 0.05$ 时的轨道相图（见图 8.3）。图中显示了定理 7.1^a 中的极限环 $LC_{\varepsilon 00}^0$，$LC_{\varepsilon k0}^1$，这些极限环由公式 (7.3) 定义，位于与类 $0], 1]$相关的相应生成周期轨道$GC_\star$ 的小邻域内。这些生成周期轨道如图 8.1 所示。

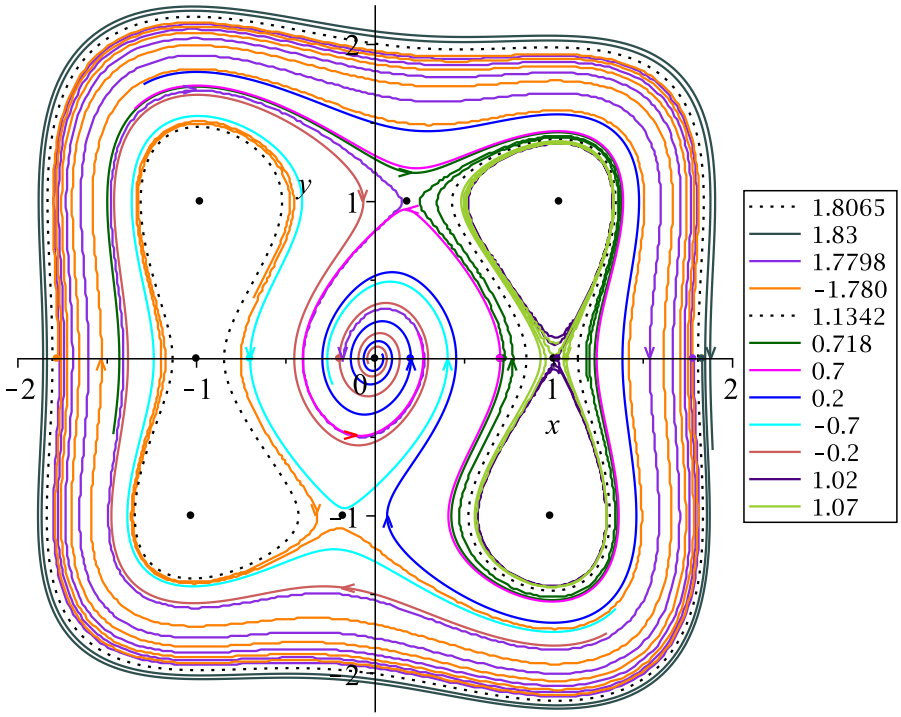

图 8.3. 系统 (8.4) 的三个极限环，其中 $\varepsilon = 0.05$.

邻近平衡点 $(\pm a_0^\varepsilon,\ \pm 1)$ 的分离曲线行为可见于图 8.3。两条从点 $(a_0^\varepsilon,\ 1)$ *spiralsonto* 平衡点 (0，0) 出发的分离曲线中，一条随时间增加而趋近于该点。第二条分离曲线螺旋趋近于右极限环，而两条在时间减少时终止于点 $(a_0^\varepsilon,\ 1)$ *spiralsonto* 外侧极限环 $LC_{\varepsilon 00}^0$ 的分离曲线。

遗憾的是，目前定理 8.1 尚未生效；该定理保证在类 $2]$ 的相应生成周期轨道的小邻域内存在另外八个极限环 $LC_{\varepsilon kl}^2$，$LC_{\varepsilon kl}^3$，（每个象限两个）。例如，右极限环 $LC_{\varepsilon 10}^1$. 内没有其他极限环。除了证明这一点的计算之外，还可以从图 8.4 中看出这一点：图中绘出了极限环 $LC_{\varepsilon 10}^1$，以及类 $2]$ 的生成周期轨道 $\varepsilon = 0.05$。这些生成周期轨道由解 $CS_{1,\ \pm 1}^2(\varphi)CS_{1,\ \pm 1}^3(\varphi)$，参数化；这些解与 ε，无关，因为系统 (8.6) 具有这样的性质：所有可容许解 b_{kl}^j 都与 ε. 无关。

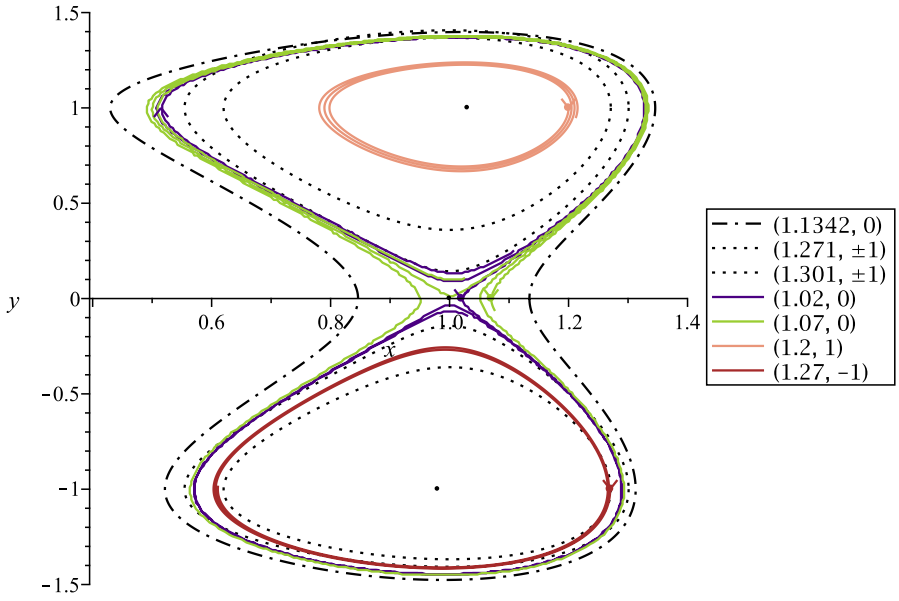

图 8.4。 $\varepsilon = 0.05$.右极限环内的轨道

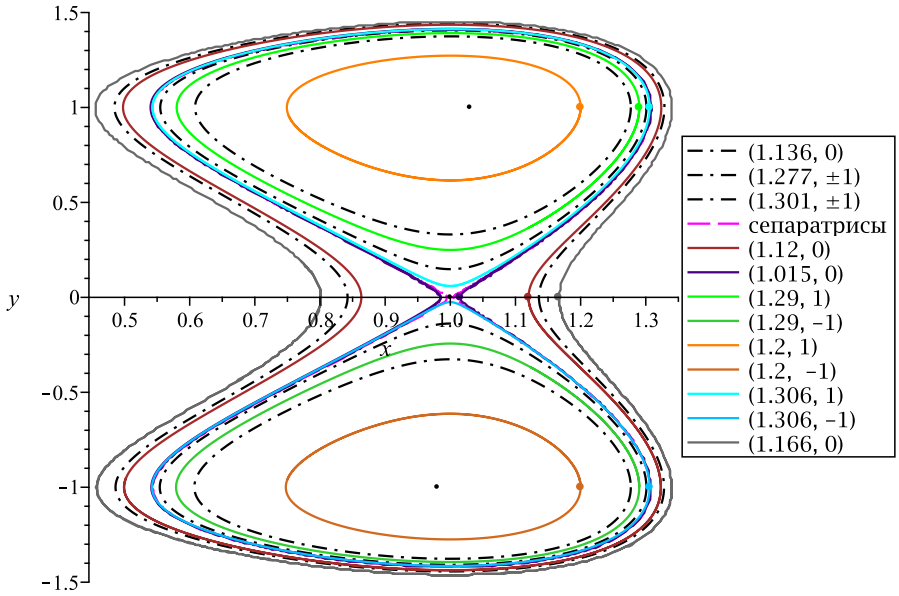

图 8.5。 $\varepsilon = 0.001$.右极限环内的轨道

随着参数 ε 的值减小，极限环 $LC^1_{\varepsilon 10}$ 的形状发生变化，类 2] 的四个生成周期轨道连同在其小邻域内生成的极限环，都被圈在该极限环内部（见图 8.5）。

相图 8.4 展示了轨道的行为：随着时间减小，它们趋近于平衡点（a^{ε}_0,1）（不稳定焦点）；其中一些轨道随着时间增加趋近于平衡点（$a^{\varepsilon}_0, -1$）（稳定焦点），其他轨道——这取决于它们相对于分离曲线的位置——趋近于稳定极限环 $LC^1_{\varepsilon 10}$.

让我们减小 ε. 。结果发现，对于 $\varepsilon = 10^{-3}$ ，与类2], 相关的八个极限环全部产生了，但其邻域内轨道（螺旋线）的行为不容易说明，因为它们在相图上呈现为周期轨道（见图 8.5）。

下表给出了十一个极限环存在的推论。该表显示了螺旋线与直线 $y \equiv 0$ 在 0^e]类中，1] 或 $y \equiv \pm 1$ 在 2]. 类中的交点的横坐标值。随着时间增加（减少），这些横坐标值彼此趋近，这保证了这些螺旋线之间存在稳定（不稳定）极限环。

因此，对于 $\varepsilon = 10^{-3}$ 我们得到：

0]不稳定极限环

i. v. $(0, x_0^\varepsilon, 0)$, $x_0^\varepsilon \approx 1.808$

t	$x(t) < x_0^\varepsilon$	t	$x(t) > x_0^\varepsilon$
00.0	1.804	00.0	1.810
−03.9	1.8040434	−03.8	1.8099799
−07.8	1.8040870	−07.7	1.8099597
−11.7	1.8041290	−11.6	1.8099404
−15.6	1.8041712	−15.4	1.8099205
−19.4	1.8042129	−19.3	1.8099011
−23.3	1.8042540	−23.1	1.8098819
−27.2	1.8042950	−26.0	1.8098631
−31.1	1.8043357	−30.8	1.8098447

1]稳定极限环

i. v. $(0, x_1^\varepsilon, 0)$, $x_1^\varepsilon \approx 1.136$

t	$x(t) < x_1^\varepsilon$	t	$x(t) > x_1^\varepsilon$
00.0	1.132	00.0	1.138
13.6	1.1320219	13.5	1.1379961
27.3	1.1320438	27.0	1.1379918
40.9	1.1326554	40.5	1.1379874
54.6	1.1320873	53.0	1.1379833
68.2	1.1321088	67.5	1.1379793
81.9	1.1321304	81.0	1.1379753
95.5	1.1321518	94.4	1.1379714
109.	1.1321731	108.	1.1379673

2]稳定极限环

i. v. $(0, x_2^\varepsilon, 1)$, $x_2^\varepsilon \approx 1.277$

t	$x(t) < x_2^\varepsilon$	t	$x(t) > x_2^\varepsilon$
00.0	1.272	00.0	1.282
06.2	1.2720017	06.5	1.2819995
12.3	1.2720037	13.0	1.2819988
18.3	1.2720054	19.5	1.2819980
24.6	1.2720075	26.0	1.2819979
30.8	1.2720095	32.6	1.2819974
37.8	1.2720114	39.1	1.2819967
43.8	1.2720133	45.6	1.2819960
49.3	1.2720149	52.1	1.2819955

2]不稳定极限环

i. v. $(0, x_3^\varepsilon, 1)$, $x_3^\varepsilon \approx 1.301$

t	$x(t) < x_3^\varepsilon$	t	$x(t) > x_3^\varepsilon$
00.0	1.298	00.0	1.304
−07.6	1.2980020	−08.7	1.3039972
−15.1	1.2980040	−17.4	1.3039944
−22.7	1.2980059	−26.0	1.3039917
−30.2	1.2980080	−34.7	1.3039887
−37.8	1.2980101	−43.4	1.3039860
−45.4	1.2980118	−52.1	1.3039833
−52.9	1.2980140	−60.7	1.3039807
−60.5	1.2980159	−69.4	1.3039774

2]稳定极限环

i. v. $(0, x_{-2}^\varepsilon, 1)$, $x_{-2}^\varepsilon \approx -1.267$

t	$x(t) > x_{-2}^\varepsilon$	t	$x(t) < x_{-2}^\varepsilon$
00.0	−1.272	00.0	−1.262
06.2	−1.2719992	05.9	−1.2620020
12.3	−1.2719985	11.8	−1.2620042
18.5	−1.2719977	17.7	−1.2620062
24.7	−1.2719970	23.6	−1.2620084
30.8	−1.2719963	29.5	−1.2620106
37.0	−1.2719957	35.4	−1.2620127
43.2	−1.2719950	41.3	−1.2620149
49.3	−1.2719939	47.2	−1.2620170

2]不稳定极限环

i. v. $(0, x_{-3}^\varepsilon, 1)$, $x_{-3}^\varepsilon \approx -1.301$

t	$x(t) > x_{-3}^\varepsilon$	t	$x(t) < x_{-3}^\varepsilon$
00.0	−1.304	00.0	−1.298
−09.0	−1.3039971	−07.6	−1.2980035
−18.0	−1.3039950	−15.3	−1.2980069
−26.9	−1.3039928	−22.9	−1.2980105
−35.9	−1.3039904	−30.5	−1.2980141
−44.8	−1.3039879	−38.2	−1.2980177
−53.8	−1.3039857	−45.8	−1.2980212
−62.8	−1.3039833	−53.4	−1.2980247
−71.7	−1.3039808	−61.1	−1.2980283

此外，对于每个可容许解 b^j_{kl}，l 非退化条件 (5.10^a) 中的常数 K^{aj}_{kl} 计算如下： $K^{a0}_{00} \approx 10.7$, $K^{a1}_{k0} \approx -4.3$, $K^{a2}_{kl} \approx -0.28$, $K^{a3}_{kl} \approx 0.83$ (k, $l = \pm 1$)。

因此，证明了以下命题。

定理 8.1[a]. 对于任意 $\varepsilon \in [0, 0.05]$，系统 (8.6) 有三个极限环： $LC^0_{\varepsilon 00}$，它是稳定的； $LC^1_{\varepsilon k0}$，它们是不稳定的。对于任意 $\varepsilon \in [0, 10^{-3}]$，还存在八个额外的周期轨道：周期轨道 $LC^3_{\varepsilon k,\pm 1}$ 是稳定的，$LC^2_{\varepsilon k,\pm 1}$ 是不稳定的 ($k = \pm 1$)。

结论

下面介绍 GTS 方法可能的应用领域。

1) 研究哈密顿量更复杂的周期系统，例如取自 [12] 的系统。

2）利用 GTS 方法强化现有结果：

2_1）一个最显而易见的潜在应用，是评估 [2] 中系统 (1.3) 的希尔伯特数，因为它是论文 [15] 和[13]中系统的推广。另一个可能的应用，是研究具有哈密顿量且受到周期扰动的 [19] 中的系统。

2_2）考虑已经研究过的带小参数的高维自治系统，并向这些系统添加周期或拟周期扰动（[7], [6]），同时假设基频满足标准丢番图型条件。例如，可以考虑对未扰动部分为（x_2、$-x_1^{2n-1}$、x_4、$-x_3^{2n+1}$）的系统施加周期扰动，这些系统见 [25]；或者考虑具有来自 [26] 的 $d \geq 2$ 的系统（x_{1+d}、$-x_1^{2n-1}$、$\ldots, x_{2d}$、$-x_d^{2n-1}$），见 [26]。

值得特别关注的是，构造与系统维数相同的不变环面的可能性。为此，我们考虑来自 [27] 的 2^d阶系统，其中带有周期或拟周期扰动。在所提到的论文中，构造了一类自治系统（包括多项式系统），使得不变环面的产生这一分岔情景的环面余维等于一。

请注意，Yu.N.Bibikov 在 [22]中提出了一个算法，用于寻找从平衡点分支出的各种维数不变环面的分岔。

3）将 GTS 方法用于求得临界周期的系统。例如，可以研究来自[28]的系统 $\dot{x} = y\prod_{i=1}^{k}((y-\alpha_i)^2+\varepsilon)$ $\dot{y} = -x\prod_{i=1}^{k}((x-\beta_i)^2+\varepsilon)$。

说明。 论文 [2], [6], [21], 中研究的系统的扰动开启了 GTS 方法的发展与应用，该方法用于寻找自治情形下的不变环面和极限环；这些扰动需要满足与系统 (1.1) 类似的限制条件。

致谢。 谨向我的同事和朋友 S. A. Ivanov、Yu.A. Ilyin 和 S. G. Kryzhevich 致以诚挚谢意，感谢他们就复分析和泛函分析相关的各种问题与我进行讨论。V.V. Basov

References

[1] Arnold V. I.，共振附近自激振荡的失稳、四维光滑流形的极大变形以及整数二次型的算术，函数分析及其应用 11 (1977)，85-92。[2] Basov V. V.《具有三阶保守一阶近似的标准二维系统的不变曲面》，微分方程，44(1)，3-18 (2008) [俄文]。英文版：微分方程，2008，44:1，1-18。[3] Lyapunov, A.M.，《运动稳定性问题的一个特例研究》，载于：《文集》，第 2 卷，莫斯科—列宁格勒，苏联科学院 (1956)，第 272–331 页。[4] Hale J. K.《受扰微分系统的积分流形》，数学年刊（第二辑），73(3)，496-531 (1961)。[5] Li J.、Huang Q.，三次系统中形成复眼的极限环分岔，中国数学年刊，B8 (1987)，391-403。[6] Basov V. V.《一阶近似中具有分岔静止点的二维周期系统的不变曲面》，数学科学杂志，147(1)，6398-6415 (2007)。译自《当代数学及其应用》第 38 卷，苏兹达尔会议-2004，第 3 部分，2006。https://doi.org/10.1007/s10958-007-0474-x[7] Bibikov Yu. N.《无穷小频率下不变环面的生成分岔》，代数与分析，10(2)，81-92 (1998) [俄文]。英文版：圣彼得堡数学杂志，1999，10:2，283-292。[8] Varchenko A. N.，依赖于参数的阿贝尔积分零点数的估计及极限环，函数分析及其应用 18(1984)，98-108。[9] Ilyashenko Yu. S.，极限环有限性定理，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991。俄文原版由作者于 1990 年出版，刊于《数学科学进展》，54(2)，第 143-200 页。[10] Mel’nikov, V. K. 时间周期扰动下中心的稳定性。莫斯科数学会文集，第 12 卷 (1963)，3-52。 [俄文]。[11] Guckenheimer J.、Holmes P.《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》，Springer-Verlag (1983)。[12] Li J.，希尔伯特第十六问题与平面多项式向量场分岔，国际分岔与混沌杂志，第 13 卷，第 1 期 (2003)，47-106。[13]Iliev I. D.、Li C.、Yu J.，对称八环哈密顿系统的三次扰动 (2019)，arXiv:1909.09840v1。[14] Iliev I. D.、Perko L.，极限环高阶分岔，微分方程 154 (1999)，339-363。[15] Dumortier F.、Li C.，四次椭圆型哈密顿系统的扰动——IV：八字环，微分方程 188 (2003)，512-554。[16] Wei L.、Tian Y.、Xu Y.，哈密顿微分系统初等中心分岔出的极限环数。数学 10，(2022)，1483-1496。https: doi.org/10.3390/math10091483[17] Wei M.、Cai J.、Zhu H.，穿过幂零鞍点的同宿环附近 Lienard 系统的极限环庞加莱分岔，自然与社会中的离散动力学，Hindawi，第 2019 卷[18] Christopher C. J.、Lloyd N. G.，多项式系统：希尔伯特数的下界，伦敦皇家学会会刊，A450 (1995)，219-224。[19] Li C.、Liu C.、Yang J.，具有十三个极限环的三次系统，微分方程杂志 246(2009)，3609-3619。[20] Han M.-A.，周期受扰系统的不变环面分岔与次谐波解。《中国科学》，37(11)，(1994)。[21] Basov V. V.、Zhukov A. S.《具有保守三次一阶近似的周期系统的不变曲面》，圣彼得堡大学学报：数学、力学、天文学，64(3)，376-393 (2019) [俄文]。英文版：圣彼得堡大学学报，数学，2019，52:3，244-258。[22] Bibikov, Yu.N.，《多频非线性振荡理论的局部问题》，圣彼得堡，2003。[23] Chow S.-N.、Hale J. K.，《分岔理论方法》，纽约，Springer-Verlag，(1982)，515 页。

[24] *Mozer J.* 一种快速收敛迭代法与非线性微分方程，比萨高等师范学校年刊 第三辑，**20**，(1966)，265-315。[25] *Basov V.V.* “两个零特征根对的临界情形下平衡点的分岔”，《微分方程与动力系统》，《论文集》。献给叶夫根尼·弗罗洛维奇·米先科院士80周年诞辰，斯捷克洛夫数学研究所论文集，236，科学出版社，莫斯科，2002，45-60[俄文]。（http://mi.mathnet.ru/eng/tm275）。英文版：斯捷克洛夫数学研究所学报，2002，236，37-52。[26] *Basov V.V.* “特征方程具有零根的系统中平衡点的分岔”，数学札记，**75**(3)，323-341 (2004) [俄文]。英文版：数学札记，2004，75:3，297-314。[27] *Basov, V.V.* 余维一不变环面的分岔。《数学札记》69:1，3–16 (2001)。https://doi.org/10.1023/A:1002888709793[28] *Xiuli C.*平面多项式系统临界周期数的新下界（2019），doi: 10.13140/rg.2.2.34326.98885[29] *Zorich V.A.* 数学分析，第2卷，第9版，莫斯科独立大学出版社，莫斯科，2019

[1]Faculty of Mathematics and Mechanics, St. Petersburg State University, Universitetsky prospekt, 28, 198504, Peterhof, St. Petersburg, Russia电子邮箱地址: vlvlbasov@rambler.ru, artzhukov1111@gmail.ru