arXiv:2302.02400v1 [eess.SP] 5 Feb 2023

# 里德堡量子阵列相位恢复

*Peter Vouras*[†], *Kumar Vijay Mishra*[‡], *Alexandra Artusio-Glimpse*[*]

[†]美国国防部，华盛顿特区 20375，美国
[‡]美国DEVCOM陆军研究实验室，马里兰州阿德尔菲 20783，美国
[*]美国国家标准与技术研究院，科罗拉多州博尔德 80303，美国

**摘要**

本文推导了一种新颖的相位恢复算法，可用于相控阵或合成孔径应用；在这些应用中，每个空间采样点只能测量电场强度。如果使用里德堡原子探头代替天线，就可以实现此类阵列配置。我们展示了数值实验结果，证明了所提算法的有效性。

索引词— 相位恢复、量子合成孔径、里德堡传感

## 1. 引言

相位恢复是根据信号傅里叶变换的幅度恢复信号的过程。这一问题已在许多应用领域得到研究，例如光学 [1], X射线晶体学 [2,3], 语音识别 [4], 盲信道估计 [5], 和天文学 [6]。人们对相位恢复感兴趣，主要是因为传感设备无法测量接收信号的相位。对于一维（1D）信号，该问题是不适定的，也就是说，多个相位不同的信号可能对应相同的幅度；例外情况只有最小相位信号 [7]或具有结构化支撑的稀疏信号 [8]。为克服该问题的不适定性，已有大量研究，相关工作至今仍在持续；文献浩如烟海，无法在此一一概述（例如，参见 [9, 10]中的最新综述及其中的参考文献）。总体而言，已出现两种主要方法：第一种利用信号结构的先验知识，例如稀疏支撑 [11–13], ；另一种则借助技术手段，通过掩模 [14] 和短时傅里叶变换（STFT） [15–17]等方式，对幅度进行额外测量。

美国国家标准与技术研究院（NIST）及许多其他机构近期的研究已证明，使用里德堡原子探针进行可溯源的电场强度测量是可行的 [18]。这些量子探头具有许多独特特性，使其有别于传统天线：其响应函数由量子力学精确定义，可直接将场强溯源至国际单位制（SI） [19–23], ；探头头部对射频场具有高度透明性，且仅由介电材料构成 [24, 25], ；原子可直接对射频场进行下变频，从而减少对后端电子设备的需求 [26], ；此外，只需单个探头和一台可调谐激光器，即可实现从千赫兹频率到太赫兹频率的固有超宽带可调性 [21, 27]。这些独特特性吸引了大量射频领域的科学家、工程师和开发人员关注这些里德堡原子探针；然而，这些探针的一个局限在于相位检测。通常，为了确定入射射频场的相位，需要向里德堡原子探针辐射第二个射频场作为本地振荡器（LO） [28, 29]。辐射本地振荡器会影响探针的透明性，因为它需要额外的天线，也会降低这些探针在隐身应用中的实用性。已有研究提出一种替代性的相位感测方法 [30] ，该方法使用光学本地振荡器，而非辐射的射频本地振荡器；然而，由于本质上仍是强度探测器，该方案只能感测相位空间中的一个象限。因此，对于利用里德堡原子探针进行合成孔径测量的应用（例如 [24, 31]），能够从纯强度测量中恢复相位信息的处理方案值得关注。

本文所述算法旨在从仅强度测量中估计信号相位，从而使里德堡原子探头能够用于构建合成孔径。合成孔径可增大成像系统的有效面积，从而提高其角分辨率，使其超越硬件天线的物理限制。构建合成孔径的方法是使用机械定位器，使测量探针或天线在空间中移动。探针在离散位置测量穿过孔径传播的射频场；如果空间射频采样保持相位相干性，就可以在后处理中将它们组合起来，生成环境散射的高分辨率快照。

## 2. 测量模型

里德堡原子探头测量利用灵敏的里德堡态（高能态，此时碱金属原子的电子远离原子核，且与原子核的耦合较弱）来探测射频电场。通过一组激光可使原子跃迁至这些里德堡态。如图 1 所示，近红外探测激光与原子的基态耦合，并在穿过原子蒸气池后由光电探测器检测。由于探测激光与原子的基态共振，该激光会优先被吸收，到达光电探测器的光很少。随后，一束反向传播的可见光耦合激光将原子激发至里德堡态，此时主量子数很大，相邻里德堡态之间的能级间隔很小（例如，处于射频频率量级）。这两束激光共同产生一种称为电磁感应透明（EIT）的效应：在狭窄的频率范围内，原子对探测激光变得透明，到达探测器的光随之增强，见图 2。当射频场照射原子，且其频率与另一个里德堡态共振时，狭窄的 EIT 谱线

K. V. M. 感谢美国国家科学院、国家工程院和国家医学院通过陆军研究实验室哈里·戴蒙德杰出研究员奖学金提供的支持。

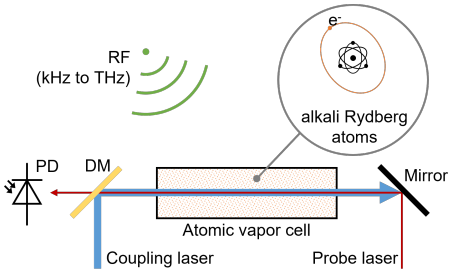


**图 1**：里德堡原子电场测量装置示意图。PD 是光电探测器，DM 是二向色镜。这套硬件也可用于探测从千赫到太赫兹的射频电场。

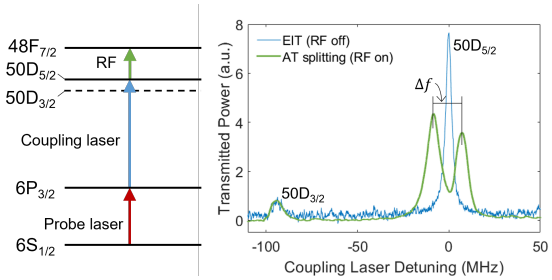


**图 2**：26.105 吉赫射频场照射由探测激光激发至 $50D_{5/2}$ 里德堡态的 $^{85}$Rb 原子时的里德堡测量示例（探测激光与 $6S_{1/2}$ 和 $6P_{3/2}$ 态共振，耦合激光与 $6P_{3/2}$ 和 $50D_{5/2}$ 态共振）。当耦合激光频率失谐时，会出现探测光透射率的电磁诱导透明谱线（蓝线）。当耦合激光频率沿负频率方向大幅失谐时，会出现另一条较弱的电磁诱导透明谱线，该谱线来自 $50D_{3/2}$ 态，可用于校准光谱的频率轴。开启共振射频场后，主电磁诱导透明谱线发生分裂（绿线），频差 $\Delta_f$ 与射频场的场强以及 $50D_{5/2}$ 到 $48F_{7/2}$ 跃迁的偶极矩成正比，见公式 1。

会分裂，这种现象称为奥特勒-汤斯（AT）分裂。该 AT 谱线分裂的频率差 $\Delta_f$ 与射频电场的绝对值 $|E_{RF}|$ 成正比：

$$\Delta_f = \frac{\wp}{h}|E_{RF}|, \tag{1}$$

其中，$\wp$ 是里德堡跃迁的偶极矩，可通过 [32], 精确计算，而 $h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J Hz$^{-1}$ 是普朗克常数，它是新国际单位制中的基本单位。校准共振时（图 2 中失谐为 0 MHz）探测激光透射率随射频场强的变化后，即可锁定两个激光频率，并实现对射频场的快速传感。本文研究了这样一种里德堡原子射频场测量系统：传感器、蒸气池以及配有光纤耦合器的激光器 [24], 在定义合成孔径的空间平面上扫描，并在每个位置采集射频电场强度的测量值。由于公式 1 中存在绝对值，无法获取射频场的相位信息，因此必须使用下文所述的处理方法进行恢复。

一种常见的近似（本文也采用了这一近似）是：场景中的信号源距离孔径的观测平面足够远，因此入射相位前沿近似为平面。另一个假设是信号为窄带信号，例如正弦波。在满足这些条件时，线性信号模型将描述为跨越由 $N$ 个元素组成的阵列传播的信号是平面波之和，或$\mathbf{As} = \mathbf{b}$。

$\mathbf{A}$ 的各列是在由正弦空间坐标定义的 $K$ 角度 $(u_i, v_i)$ 离散搜索网格上采样得到的导向矢量，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(u_0, v_0) & \dots & \mathbf{a}(u_{K-1}, v_{K-1}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

with

$$\mathbf{a}(u_i, v_i) = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{j}k(x_0u_i + y_0v_i)} & \dots & e^{\mathrm{j}k(x_{N-1}u_i + y_{N-1}u_i)} \end{bmatrix}^T. \tag{3}$$

向量$\mathbf{s}$ 包含（未知的）复数信号源幅度，向量$\mathbf{b}$ 表示阵列或合成孔径的复数输出。探针测量孔径中第 $k$ 个空间采样点处的强度或 $|[\mathbf{b}]_k|^2$。$\mathbf{A}$ 的 $N$ 行是电角度矢量，用于指定搜索网格中所有角度下每个阵列元件的所有可能相位，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T & \dots & \mathbf{f}_{N-1}^T \end{bmatrix}^T. \tag{4}$$

例如，

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{j}k(x_iu_0 + y_iv_0)} & \dots & e^{\mathrm{j}k(x_iu_{K-1} + y_iv_{K-1})} \end{bmatrix}^T. \tag{5}$$

由于探针测量每个阵列元件处的电场强度，

$$|[\mathbf{b}]_k|^2 \equiv b_k^2 = \left| < \mathbf{f}_k, \mathbf{s} > \right|^2 = \left|\mathbf{f}_k^H\mathbf{s}\right|^2. \tag{6}$$

需要优化的目标函数是强度测量值与信号模型的模平方之间的最大误差，

$$\text{minimize} \max_k \left| |[\mathbf{b}]_k|^2 - |[\mathbf{As}]_k|^2 \right| \tag{7}$$

或等价地，

$$\text{minimize} \max_k \left| b_k^2 - \left|\mathbf{f}_k^H\mathbf{s}\right|^2 \right| \tag{8}$$

对于 $k = 0,$ ....., $N-1$。该目标可改写为

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \delta \\ &\text{subject to} && \left| |\mathbf{f}_0^H\mathbf{s}|^2 - b_0^2 \right| \le \delta \\ & && \vdots \\ & && \left| |\mathbf{f}_{N-1}^H\mathbf{s}|^2 - b_{N-1}^2 \right| \le \delta \\ & && \delta \ge 0. \end{aligned} \tag{9}$$

重新排列并展开各项后，

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \delta \\ &\text{subject to} && \mathbf{s}^H\mathbf{f}_0\mathbf{f}_0^H\mathbf{s} - \delta \le b_0^2, \quad -\mathbf{s}^H\mathbf{f}_0\mathbf{f}_0^H\mathbf{s} - \delta \le -b_0^2, \\ & && \vdots \\ & && \mathbf{s}^H\mathbf{f}_{N-1}\mathbf{f}_{N-1}^H\mathbf{s} - \delta \le b_{N-1}^2, -\mathbf{s}^H\mathbf{f}_{N-1}\mathbf{f}_{N-1}^H\mathbf{s} - \delta \le -b_{N-1}^2, \\ & && \delta \ge 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Using the matrix trace results in,

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \delta \quad \text{subject to} \\ & && \mathrm{Tr}\left[\mathbf{f}_0\mathbf{f}_0^H\mathbf{s}\mathbf{s}^H\right] - \delta \le b_0^2, \quad -\mathrm{Tr}\left[\mathbf{f}_0\mathbf{f}_0^H\mathbf{s}\mathbf{s}^H\right] - \delta \le -b_0^2, \\ & && \vdots \\ & && \mathrm{Tr}\left[\mathbf{f}_{N-1}\mathbf{f}_{N-1}^H\mathbf{s}\mathbf{s}^H\right] - \delta \le b_{N-1}^2, \\ & && -\mathrm{Tr}\left[\mathbf{f}_{N-1}\mathbf{f}_{N-1}^H\mathbf{s}\mathbf{s}^H\right] - \delta \le -b_{N-1}^2, \\ & && \delta \ge 0. \end{aligned} \tag{11}$$

为放宽约束，将秩一矩阵 $\mathbf{s}\mathbf{s}^H$ 替换为一般秩矩阵 $\mathbf{S}$。应用这一变更并使用子-

stitution $\mathrm{Tr}\left[\mathbf{A}^H\mathbf{B}\right] = \mathrm{vec}\left(\mathbf{A}\right)^H \mathrm{vec}\left(\mathbf{B}\right)$ yields,

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \delta \\ &\text{subject to} \quad \left[\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{s}}\right]_k - \delta \le b_k^2 \quad k = 0, \ldots, N-1 \\ &\qquad\qquad -\left[\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{s}}\right]_k - \delta \le -b_k^2 \quad k = 0, \ldots, N-1 \\ &\qquad\qquad \delta \ge 0 \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\widehat{\mathbf{s}}$ = 向量化 $(\widehat{\mathbf{S}})$ 以及

$$\widehat{\mathbf{A}} = \left[\mathrm{vec}\left(\mathbf{f}_0\mathbf{f}_0^H\right)^T \quad \ldots \quad \mathrm{vec}\left(\mathbf{f}_{N-1}\mathbf{f}_{N-1}^H\right)^T\right]^T. \tag{13}$$

我们可以将此目标写成标准线性程序的形式:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} \\ &\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}} & -1 \\ -\widehat{\mathbf{A}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \mathbf{b}^2 \\ -\mathbf{b}^2 \end{bmatrix} \\ &\qquad\qquad \delta \ge 0. \end{aligned} \tag{14}$$

定义矩阵

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) & -\Im\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) \\ \Im\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) & \Re\left(\widehat{\mathbf{A}}\right) \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \Re\left(\widehat{\mathbf{s}}\right) \\ \Im\left(\widehat{\mathbf{s}}\right) \end{bmatrix}.$$

那么，最终的优化程序可写为

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} \\ &\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} & -1 \\ -\overline{\mathbf{A}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{b}} \\ -\overline{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \\ &\qquad\qquad \delta \ge 0. \end{aligned} \tag{16}$$

可以像这样在目标函数中添加正则化项，以鼓励得到稀疏解

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} + \left\| \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} \right\|_1 \\ &\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} & -1 \\ -\overline{\mathbf{A}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{b}} \\ -\overline{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \\ &\qquad\qquad \delta \ge 0. \end{aligned} \tag{17}$$

该程序可以使用内点法和 CVX 等优化工具箱求解。从解 $\mathbf{s}$重构出复矩阵 $\mathbf{S}$后，仍需确定其最佳秩一近似 $\mathbf{s}^{opt}$。关于这一点的证明，参见 [33]：

$$\mathbf{s}_{opt} = (\mathbf{v}^H\mathbf{S}\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{v}^H \tag{18}$$

其中，$\mathbf{v}$ 是对应于最大特征值的 $\mathbf{S}$ 的特征向量。接下来，利用最终得到的复数信号源系数向量，确定相应的阵列输出向量 $\mathbf{b}_{est} = \mathbf{A}\mathbf{s}^{opt}$。在第 3 节所述算法的第二和第三阶段，通过在可行信号源集合与阵列输出幅度集合之间进行交替投影，来搜索 $e^{-\mathrm{j}\angle\mathbf{b}}$。

### 3. 交替投影

交替投影算法的第二阶段是投影到可行信号源集合中。要实现这一投影，需要估计或预先知道信号源的数量 $\widehat{K}$。定义矩阵，

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re\left(\mathbf{A}\right) & -\Im\left(\mathbf{A}\right) \\ \Im\left(\mathbf{A}\right) & \Re\left(\mathbf{A}\right) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$\widetilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \Re\left(\mathbf{b}_{est}\right) \\ \Im\left(\mathbf{b}_{est}\right) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \Re\left(\mathbf{s}\right) \\ \Im\left(\mathbf{s}\right) \end{bmatrix}.$$

我们可以求解针对$\mathbf{s}$的低维线性规划，

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} \\ &\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{A}} & -1 \\ -\widetilde{\mathbf{A}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{s}} \\ \delta \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{b}} \\ -\widetilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix}, \quad \delta \ge 0. \end{aligned} \tag{20}$$

将 $\widetilde{\mathbf{s}}$ 中 $\widehat{K}$ 最大的 $\{\widetilde{s}_0, \widetilde{s}_1, \ldots, \widetilde{s}_{\widehat{K}-1}\}$ 个系数保留下来，即可实现向可行信号源集合的投影

$$\mathbf{s}_{proj} = \begin{bmatrix} \widetilde{s}_0 & \widetilde{s}_1 & \ldots & \widetilde{s}_{\widehat{K}-1} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{21}$$

阵列输出向量的新估计值为

$$\mathbf{b}_1 = |\mathbf{b}| \odot e^{-\mathrm{j}\angle\mathbf{A}\mathbf{s}_{proj}}. \tag{22}$$

**算法 1**三阶段相位恢复算法

**阶段 1：计算初始条件**

1：构建一个由 $L$ 角度组成的稠密均匀采样网格；$\{(u_l,\ v_l) \mid l = 0,\ \ldots\ldots,\ L-1\}$。使用此网格创建式 (2) 中给出的阵列流形矩阵 $\mathbf{A}$。2：求解式 (17) 中的优化程序，得到 $\mathbf{s}$，并重新排列结果以获得 $\mathbf{S}$。使用式 (18) 从 $\mathbf{S}$ 得到 $\mathbf{s}^{opt}$。3：计算相应的阵列输出向量$\mathbf{b}_{est} = \mathbf{A}\mathbf{s}^{opt}$。4：将初始复数阵列输出估计设为 $\mathbf{b}_0^\dagger = |\mathbf{b}| \odot e^{-\mathrm{j}\angle\mathbf{b}_{est}}$。此步骤实际上是将向量 $\mathbf{b}_{est}$ 投影到可行阵列输出幅度集合上。

**阶段 2：线性规划**

1：使用式 (19) 创建向量$\widetilde{\mathbf{b}}$。2：求解式 (20) 中的线性规划，得到 $\widetilde{\mathbf{s}}$，并按照式 (21) 保留系数中最大的 $K$ 个，以创建向量 $\mathbf{s}_{proj}$。3：将复数阵列输出估计更新为 $\mathbf{b}_1^\dagger = \mathbf{b}_0^\dagger \odot e^{-\mathrm{j}\angle\mathbf{A}\mathbf{s}_{proj}}$.

**阶段 3：共轭梯度迭代** **ONS**

1: Create the matrix $\mathbf{R} = \mathbf{b}_1^\dagger\mathbf{b}_1^{\dagger H} + \nu\mathbf{I}$ for small $\nu > 0$.
2: Initialize the conjugate gradient algorithm with $\mathbf{w}_0 = e^{-\mathrm{j}\angle\mathbf{A}\mathbf{s}_{proj}}$.
3: Set $\mathbf{g}_0 = \mathbf{h}_0 = \nabla P(\mathbf{w}_0)$.
4: For $k = 0, 1, \ldots, J-1$ iterations compute $t_k$ such that $P\left(e^{-\mathrm{j}t_k\mathrm{Diag}[\mathbf{h}_k]}\mathbf{w}_k\right) \ge P\left(e^{-\mathrm{j}t\mathrm{Diag}[\mathbf{h}_k]}\mathbf{w}_k\right) \forall t \ge 0$.
5: Set $\mathbf{w}_{k+1} = e^{-\mathrm{j}t_k\mathrm{Diag}[\mathbf{h}_k]}\mathbf{w}_k$.
6: Set $\mathbf{g}_{k+1} = \nabla P(\mathbf{w}_{k+1})$.
7: Set $\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{g}_{k+1} + \gamma_k\mathbf{h}_k, \quad \gamma_k = \frac{\left(\mathbf{g}_{k+1}-\mathbf{g}_k\right)^T\mathbf{g}_{k+1}}{\|\mathbf{g}_k\|^2}$.
8: After $N_{cg}$ gradient iterations set $\mathbf{b}_{est} = \mathbf{b}_0^\dagger = |\mathbf{b}| \odot e^{-\mathrm{j}\angle\mathbf{w}_{cg}}$ and return to Step 1 in Stage 2 for the next linear program iteration.
9: After executing Stage 2 and Stage 3 for $N_{ap}$ iterations the final solution is $|\mathbf{b}| \odot e^{-\mathrm{j}\angle\mathbf{w}_{ap}}$.

现在我们寻求最大化阵列输出功率，

$$P(\mathbf{w}) = |\mathbf{w}^H\mathbf{b}_1|^2 = \mathbf{w}^H\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1{}^H\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w} \tag{23}$$

其中$\mathbf{w}$ 是相位权重向量，

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} e^{j\phi_0} & e^{j\phi_1} & \ldots & e^{j\phi N-1} \end{bmatrix}^T. \tag{24}$$

梯度向量 $\nabla P(\mathbf{w})$ 可使用 [34]中描述的方法计算，

$$\nabla P(\mathbf{w}) = \frac{1}{\mathbf{w}^H\mathbf{w}}\Im\big(\mathrm{diag}\big[\mathbf{R} - P_s(\mathbf{w})\mathbf{I}, \mathbf{w}\mathbf{w}^H\big]\big), \qquad (25)$$

其中 $[\mathbf{A},\ \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$。现在可以使用共轭梯度迭代来求解 $\mathbf{w}$ 的最优解。

在该算法中，请注意，阶段 3 传递给阶段 2 的输入 $|\mathbf{b}|\odot e^{-\mathrm{j}\angle\mathbf{w}_{cg}}$ 是向可行阵列输出幅度集合的投影。同样，阶段 2 的步骤 2 中用于生成 $\mathbf{s}^{proj}$ 的剪枝操作，是向可行信号源集合的投影。因此，该算法在两个约束集之间交替进行投影。阶段 1 的主要目的是为交替投影提供可靠且一致的初始点。

## 4. 数值实验

本节给出仿真结果，以展示相位恢复算法。两个信号源的功率分别为 10 dB 和 8 dB，它们相对于一个以原点为中心、7×7 的平面合成孔径的位置坐标为 (-1663, 3155, 2870) 和 (1301, 2878, 0)，单位为毫米。合成孔径空间采样点之间的间距为 $\lambda/2$，工作频率为 40 吉赫。合成孔径第 $m$ 个空间采样点接收到的总信号为

$$y_m = \sum_{k=0}^{\widehat{K}-1}\sqrt{P_k}e^{\mathrm{j}(2\pi/\lambda)d_{km}} \qquad (26)$$

其中，$P_k$ 是信号功率，$d_{km}$ 是孔径内第 $m$个空间采样点与第 $k$个信号源之间的距离。在此场景中，信号源的数量为 $\widehat{K}=2$。图3展示了在完全掌握相位信息的情况下生成的真实值波束形成输出。图4展示了测量电场强度并估计相位时的波束形成输出。结果表明，估计的信号源与真实信号源之间的偏差在一个波束宽度以内。图5展示了合成孔径各空间采样点处真实相位与估计相位的解缠结果（模 $2\pi$）。图6展示了标量 $\delta$ 根据式（20）的变化过程。

## 5. 总结

本文推导出一种新颖的交替投影算法，用于估计合成孔径各空间采样点处的信号相位；接收探头采用测量电场强度的里德堡量子传感器。

## 6. 参考文献


[1] A. Walther，“光学中的相位恢复问题”，《现代光学杂志》，第10卷，第1期，第41–49页，1963年。[2] R. W. Harrison，“晶体学中的相位问题”，《美国光学学会杂志》，第10卷，1055，1993年 5，第1046页–，无期。[3] R. P. Millane，“晶体学与光学中的相位恢复”，《美国光学学会杂志》，第7卷，第3期，第394–411页，1990年。[4] L. Rabiner 和 B.-H. Juang，《语音识别基础》。Prentice Hall，1993年。[5] B. Baykal，“通过结合自相关与盲相位估计进行盲信道估计”，《*IEEE*电路与系统汇刊*I*：正规论文》，第51卷，第6期，第1125–1131页，2004年。


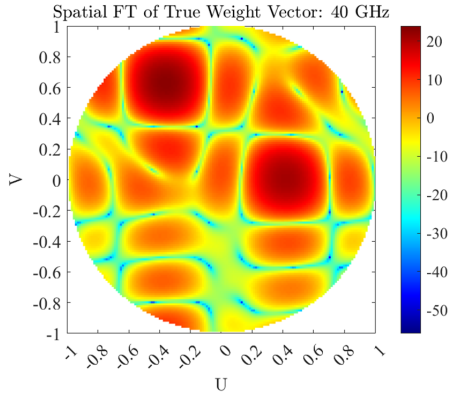


**图3**：已知相位信息时的波束形成阵列输出

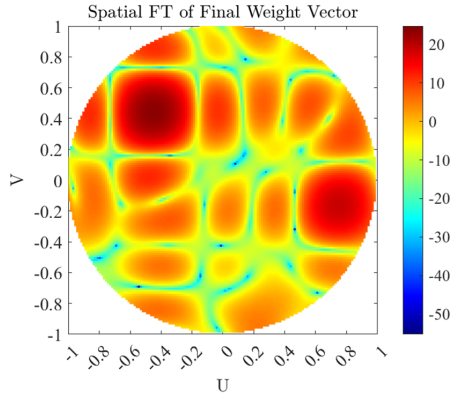


**图 4**：相位估计后的波束形成阵列输出

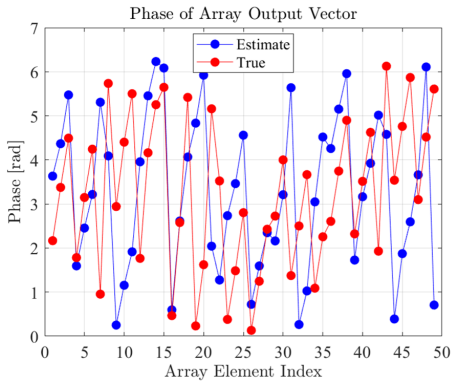


**图 5**：孔径范围内的真实相位与估计相位

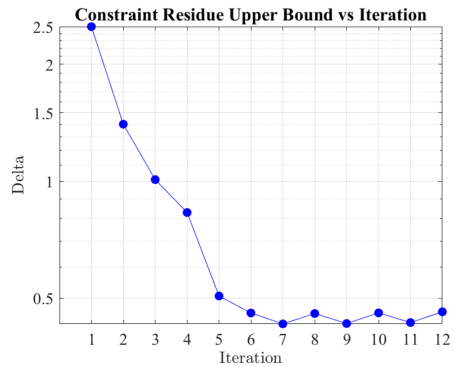


**图 6**：最大幅值误差的上界逐渐减小（文中记为 $\delta$）

[6] J. C. Fienup 和 J. R. Dainty，“天文学中的相位恢复与图像重建”，载于《图像恢复：理论与应用》，H. Stark 编。Academic Press，1987年，第231–275页。[7] K. Huang、Y. C. Eldar 和 N. D. Sidiropoulos，“从一维傅里叶测量中进行相位恢复：凸性、唯一性与算法”，*arXiv*预印本 *arXiv:1603.05215*，2016年。[8] J. Ranieri、A. Chebira、Y. M. Lu 和 M. Vetterli，“稀疏信号的相位恢复：唯一性条件”，*arXiv*预印本 *arXiv:1308.3058*，2013年。[9] Y. Shechtman、Y. C. Eldar、O. Cohen、H. N. Chapman、J. Miao 和 M. Segev，“相位恢复及其在光学成像中的应用：当代综述”，《*IEEE*信号处理杂志》，第32卷，第3期，第87–109页，2015年。[10]K. Jaganathan、Y. C. Eldar 和 B. Hassibi，“相位恢复：最新进展综述”，*arXiv*预印本 *arXiv:1510.07713*，2015年。[11] Y. Shechtman、Y. C. Eldar、A. Szameit 和 M. Segev，“利用二次压缩感知，通过部分非相干光实现基于稀疏性的亚波长成像”，《光学快报》，第19卷，第16期，第14 807–14 822页，2011年。[12] K. Jaganathan、S. Oymak 和 B. Hassibi，“稀疏相位恢复：唯一性保证与恢复算法”，*arXiv*预印本 *arXiv:1311.2745*，2013年。[13] Y. Shechtman、A. Beck 和 Y. C. Eldar，“GESPAR：稀疏信号的高效相位恢复”，《*IEEE*信号处理汇刊》，第62卷，第4期，第928–938页，2014年。[14] E. J. Cand`es、X. Li 和 M. Soltanolkotabi，“从编码衍射图样中进行相位恢复”，《应用与计算调和分析》，第39卷，第2期，第277–299页，2015年。[15] Y. C. Eldar、P. Sidorenko、D. G. Mixon、S. Barel 和 O. Co- hen，“从短时傅里叶测量中进行稀疏相位恢复”，《*IEEE*信号处理快报》，第22卷，第5期，第638–642页，2015年。[16] K. Jaganathan、Y. C. Eldar 和 B. Hassibi，“短时傅里叶变换相位恢复：唯一性保证与恢复算法”，《*IEEE*信号处理专题期刊》，第10卷，第4期，第770–781页，2016年。[17] T. Bendory 和 Y. C. Eldar，“从短时傅里叶变换测量中进行非凸相位恢复”，*arXiv*预印本 *arXiv:1607.08218*，2016年。[18] A. Artusio-Glimpse、M. T. Simons、N. Prajapati 和 C. L. Hol- loway，“利用热原子进行现代射频测量：基于里德堡原子的射频场传感器技术综述”，《*IEEE*微波杂志》，第23卷，56，2022年 5，第44页–，无期。[19] J. A. Gordon、C. L. Holloway、S. Jefferts 和 T. Heavner，“基于量子的可溯源于国际单位制的电场探头”，载于*2010 IEEE*国际电磁兼容性研讨会，2010年，第321–324页。[20] J. A. Sedlacek、A. Schwettmann、H. K¨ubler、R. L¨ow、T. Pfau 和 J. P. Shaffer，“利用明亮原子共振，在蒸气室中的里德堡原子上进行微波电测量”，《自然·物理》，第8卷，第11期，第819–824页，2012年11月。[21] C. L. Holloway、J. A. Gordon、S. Jefferts、A. Schwarzkopf、D. A. Anderson、S. A. Miller、N. Thaicharoen 和 G. Raithel，“用于可溯源于国际单位制、自校准测量的宽带基于里德堡原子的电场探头”，《*IEEE*信号处理汇刊》《天线与传播》，第62卷，2014年，第6182页，编号12，第6169页–。[22]J. A. Gordon、C. L. Holloway、A. Schwarzkopf、D. A. Anderson、S. Miller、N. Thaicharoen和G. Raithel，“通过铷里德堡原子中的Autler-Townes 劈裂进行毫米波探测”，《应用物理快报》，第105卷，第2期，第024104页，2014年。 [在线]。可访问：https: //doi.org/10.1063/1.4890094[23]D. A. Anderson、R. E. Sapiro和G. Raithel，“一种自校准、可溯源至国际单位制的里德堡原子射频电场探头与测量仪器”，《*IEEE*天线与传播汇刊》，第69卷，第9期，第5931–5941页，2021年。[24] M. T. Simons、J. A. Gordon和C. L. Holloway，“用于便携式里德堡原子射频电场传感器的光纤耦合蒸气池”，《应用光学》，第57卷，第22期，第6456–6460页，2018年8月。 [在线]。可访问：http://www.osapublishing.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-57-22-6456[25] D. A. Anderson、G. A. Raithel、E. G. Paradis和R. E. Sapiro，“基于原子的电磁场传感元件与测量系统”，申请号17/838 954，2022年。[26]C. L. Holloway、M. T. Simons、A. H. Haddab、C. J. Williams和M. W. Holloway，“使用里德堡原子和电磁感应透明进行‘实时’吉他录音：量子物理学遇上音乐”，《*AIP*进展》，第9卷，第6期，第065110页，2019年。 [在线]。可访问：https://doi.org/10.1063/1.5099036[27] D. H. Meyer、P. D. Kunz和K. C. Cox，“0至20吉赫的波导耦合里德堡频谱分析仪”，《物理评论：应用》，第15卷，第014053页，2021年1月。 [在线]。可访问：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.15.014053[28] M. T. Simons、A. H. Haddab、J. A. Gordon和C. L. Holloway，“一种基于里德堡原子的混频器：测量射频波的相位”，《应用物理快报》，第114卷，第11期，第114101页，2019年。[29] M. Jing、Y. Hu、J. Ma、H. Zhang、L. Zhang、L. Xiao和S. Jia，“基于微波缀饰里德堡光谱的原子超外差接收机”，《自然·物理》，第16卷，第9期，第911–915页，2020年6月。[30] D. Anderson、R. Sapiro、L. Gonc̸alves、R. Cardman和G. Raithel，“利用内态里德堡原子干涉仪进行光学射频相位测量”，《物理评论：应用》，第17卷，第044020页，2022年4月。 [在线]。可访问：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.17.044020[31] R. Cardman、L. F. Gonc̸alves、R. E. Sapiro、G. Raithel和D. A. Anderson，“利用便携式里德堡原子探头和测量仪器对八木-宇田天线近场进行原子二维电场成像”，《先进光学技术》，第9卷，第5期，2020年。[32] M. T. Simons、J. A. Gordon和C. L. Holloway，“通过电磁感应透明同时使用铯和铷里德堡原子进行偶极矩评估和射频电场测量”，《应用物理学杂志》，第120卷，第12期，第123103页，2016年。[33] C. R. J. Roger A. Horn，《矩阵分析》。剑桥大学出版社，1999年。[34] S. T. Smith，“最优纯相位自适应零陷”，《*IEEE*信号处理汇刊》，第47卷，第7期，第1835–1843页，1999年。