弱解深度伽辽金方法的收敛性分析

Yuling Jiao*、Yanming Lai †、Yang Wang ‡、Haizhao Yang §、和 Yunfei Yang ¶

摘要。本文分析了在 $\mathbb{R}^d$ 上分别满足狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件的二阶椭圆型偏微分方程弱解深度伽辽金方法（DGMW）的收敛速率。在 DGMW 中，使用深度神经网络对偏微分方程解进行参数化，并采用另一个神经网络对传统伽辽金形式中的检验函数进行参数化。通过根据训练样本数量 n 适当选择这两个网络的深度和宽度，可证明 DGMW 的收敛速率为 $\mathcal{O}(n^{-1/d})$，这是首个关于弱解的收敛结果。证明的主要思路是将 DGMW 的误差分为逼近误差和统计误差。我们推导了逼近误差在 H^1 范数下的上界，并通过拉德马赫复杂度对统计误差进行估计。

arXiv:2302.02405v1 [math.NA] 5 Feb 2023

1. 引言。深度学习 [8] 在高维数据分析领域取得了诸多突破，例如计算机视觉和自然语言处理 [13, 24]。其卓越表现也推动了它在求解高维偏微分方程方面的应用，而这对经典数值方法（例如有限元方法 [10] 和有限差分方法 [25]）而言是一项艰巨任务。将神经网络用于求解偏微分方程的研究可追溯至 20 世纪 90 年代 [14]，当时针对的是低维问题。近年来，基于神经网络的偏微分方程求解器重新受到关注，并被用于求解高维偏微分方程，取得了巨大成功并有了新的发展 [5, 18, 23, 26, 28]。这些方法的核心思想是用神经网络逼近偏微分方程的解，并基于方程及其边界条件构造损失函数。 [18, 23] 将定义域上的残差平方作为损失函数，并将边界条件视为惩罚项，这类方法称为物理信息神经网络（PINNs）。受里兹方法启发， [26] 提出了深度 Ritz 方法（DRM），并将偏微分方程的变分形式用作损失函数。 [28], 也采用了 Galerkin 方法的思想，他们通过将偏微分方程弱解的求解问题重新表述为最小化一个算子范数来提出一种极小极大训练过程；该算子范数由弱形式诱导的一个极大化问题定义。本文将受 Galerkin 方法启发的这一方案简称为 DGMW（在原论文 [28], 中，该方法称为弱对抗网络方法，简称 WAN）。

1.1. 相关工作与我们的贡献。尽管近年来深度学习方法在偏微分方程方面取得了显著的实证成果，但如何像有限元法那样进行严格的误差分析，仍是一个具有挑战性且值得探讨的问题。近期已有多项研究致力于推动这一方向的发展。文献[15, 27, 22, 4, 12, 3, 16, 3]研究了 DRM 的误差分析。 [15] 探讨了深度 Ritz 方法在两层神经网络下的先验泛化分析，并假设偏微分方程的精确解属于谱巴伦空间。另见 [27]，该文通过两层 ReLU^k 网络处理解属于谱巴伦空间的一般方程。 [4, 12, 16] 研究了深度网络在索伯列夫空间中的 DRM 误差分析。 [20, 17, 21, 11, 16] 考察了物理信息神经网络的收敛性和收敛速率。

*武汉大学数学与统计学院、湖北省计算科学重点实验室，中华人民共和国武汉市，邮编430072。（yulingjiaomath@whu.edu.cn）

†武汉大学数学与统计学院，中华人民共和国武汉市，邮编430072。（laiyanming@whu.edu.cn）

‡香港科技大学数学系，香港九龙清水湾（yangwang@ust.hk）§马里兰大学数学系，美国马里兰州大学公园市，邮编20742（hzyang@umd.edu）

¶香港科技大学数学系，香港九龙清水湾（yyangdc@connect.ust.hk）

由于 DGMW 的训练损失采用极小极大形式，且需要训练两个网络，因此相比 DRM 和物理信息神经网络，为 DGMW 提供理论保证更具挑战性。据我们所知，尽管文献 [28]展示了 DGMW 出色的数值表现，但目前尚无关于 DGMW 的收敛结果。本文首次对 DGMW 求解分别具有狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件的二阶椭圆方程进行收敛速率分析，其中使用索伯列夫空间中的深度神经网络。我们的结果说明了如何设置深度和宽度等超参数，从而根据训练样本数量达到所需的收敛速率。本文的主要贡献总结如下。

- 我们为 DGMW 推导了新的误差分解结果，这些结果对于深度网络的极小极大训练具有独立的研究价值。
- 我们首次建立了具有狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件的 DGMW 的收敛速率。 $\forall \epsilon > 0$，我们证明，若将样本数量设为 $\mathcal{O}(\epsilon^{-d}\log^{d})$，并将两个网络的深度、宽度和权重界设为

$$\mathcal{D} \leq \mathcal{O}(\log d), \quad \mathcal{W} \leq \epsilon^{-d}, \quad B_\theta \leq \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{-9d-8}{2}}),$$

则 DGMW 的期望 H^1 范数误差小于 ϵ。

1.2. 组织结构。本文其余部分的安排如下。第 2 节给出 DGMW 的误差分解；第 3 节和第 4 节分别详述逼近误差和统计误差。第 5 节专门讨论 DGMW 的收敛速率。最后，我们在第 6 节给出结论并探讨拓展方向。

本节最后介绍本文中使用的一些记号。设 $\mathcal{D} \in \mathbb{N}^+$。由神经网络实现的函数 $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n_\mathcal{D}}$ 定义为

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \\ &\mathbf{f}_\ell(\mathbf{x}) = \rho\left(A_\ell \mathbf{f}_{\ell-1} + \mathbf{b}_\ell\right) \quad \text{for } \ell = 1, \ldots, \mathcal{D}-1, \\ &\mathbf{f} := \mathbf{f}_\mathcal{D}(\mathbf{x}) = A_\mathcal{D}\mathbf{f}_{\mathcal{D}-1} + \mathbf{b}_\mathcal{D}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $A_\ell = \left(a_{ij}^{(\ell)}\right) \in \mathbb{R}^{n_\ell \times n_{\ell-1}}$ 且 $\mathbf{b}_\ell = \left(b_i^{(\ell)}\right) \in \mathbb{R}^{n_\ell}$。 ρ 称为激活函数，并按分量作用。 $\mathcal{D}$ 称为网络的深度， $\mathcal{W} := \max\{n_\ell\colon \ell = 1, \cdots, \mathcal{D}\}$ 称为网络的宽度。 $\phi = \{A_\ell, \mathbf{b}_\ell\}_\ell$ 称为权重参数。为方便起见，我们将 $\mathfrak{n}_i$, $i = 1, \cdots, \mathcal{D}$ 记作表示式 (1.1) 中前 i 层的非零权重数。显然， $\mathfrak{n}_\mathcal{D}$ 是非零权重总数。有时，我们将神经网络实现的函数简记为 $\mathbf{f}_\rho$。我们用记号 $\mathcal{N}_\rho(\mathcal{D}, \mathfrak{n}_\mathcal{D}, B_\theta)$ 表示由深度为 $\mathcal{D}$、非零权重总数为 $\mathfrak{n}_\mathcal{D}$ 且每个权重均不超过 B_θ的 $\rho-$ 神经网络所实现的函数集合。

2. 误差分解。我们考虑椭圆方程中的以下二阶散度型：

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j(a_{ij}\partial_i u) + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i u + cu = f \quad \text{in } \Omega \tag{2.1}$$

具有三种边界条件：

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega \tag{2.2a}$$

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_i u n_j = g \text{ on } \partial\Omega \tag{2.2b}$$

$$\alpha u + \beta \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_i u n_j = g \text{ on } \partial\Omega, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0 \tag{2.2c}$$

它们分别称为狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件。需要注意的是，对于狄利克雷问题，我们这里只考虑齐次边界条件，因为非齐次情形可以通过平移转化为齐次情形。我们还指出，诺伊曼条件（2.2b）包含在罗宾条件（2.2c）之中。因此，下面我们只考虑 Dirichlet 问题和 Robin 问题。

我们对方程中的已知项作如下假设：

(A1) $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $c > 0$存在 $\lambda, \Lambda > 0$ 使得
(A2) $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega\ \xi \in \mathbb{R}^d$(A3) $4\lambda c > d$最大值$1 \leq i \leq d \|b_i\|^2_{L^\infty(\Omega)}$

下文为简便起见，将依赖于方程中已知项的常数 $C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\ \|a_{ij}\|_{C(\bar{\Omega})}, \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}\ \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\ \lambda\right)$ 记作 $C(coe)$。

在上述假设下，很容易得到一个强制性结果。

Lemma 2.1. 设 (A1)-(A3) 成立。对于任意 $u \in H^1(\Omega)$,

$$\sum_{i,j=1}^{d} (a_{ij}\partial_i u, \partial_j u) + \sum_{i=1}^{d} (b_i\partial_i u, u) + (cu, u) \geq C(d, coe)\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

证明。应用 Hölder 不等式和柯西不等式，并选择 δ 使得

$$\frac{d \max_{1\leq i\leq d} \|b_i\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{4c} < \delta < \lambda$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{d} (a_{ij}\partial_i u, \partial_j u) + \sum_{i=1}^{d} (b_i\partial_i u, u) + (cu, u) \\
&\geq \lambda|u|^2_{H^1(\Omega)} + c\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \sqrt{d} \max_{1\leq i\leq d} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} |u|_{H^1(\Omega)} \\
&\geq (\lambda - \delta)|u|^2_{H^1(\Omega)} + \left(c - \frac{d \max_{1\leq i\leq d} \|b_i\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{4\delta}\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C(coe)\|u\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

□

强制性保证了 Dirichlet 问题和 Robin 问题弱解的存在唯一性。具体而言，对于问题 (2.1)(2.2a)，变分问题为：求 $u \in H^1_0(\Omega)$，使得

$$\sum_{i,j=1}^{d} (a_{ij}\partial_i u, \partial_j v) + \sum_{i=1}^{d} (b_i\partial_i u, v) + (cu, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \tag{2.3}$$

Lemma 2.2. 设 (A1)-(A3) 成立。设 u_D 为问题 (2.3) 的解。则 $u_D \in H^2(\Omega)$。

证明。见 [6]。 □

对于问题 (2.1)(2.2c)，变分问题为：求 $u \in H^1(\Omega)$，使得

$$\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}\partial_i u, \partial_j v) + \sum_{i=1}^{d}(b_i\partial_i u, v) + (cu, v) + \frac{\alpha}{\beta}(T_0 u, T_0 v)|_{\partial\Omega} = (f, v) + \frac{1}{\beta}(g, T_0 v)|_{\partial\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.4}$$

其中， T_0 是零阶迹算子。

LEMMA 2.3. 设 (A1)-(A3) 成立。设 u_R 为问题 (2.4) 的解。则 $u_R \in H^2(\Omega)$ 和$\|u_R\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C_{(coe)}}{\beta}$ 对任意 $\beta > 0$均成立。

证明。见 [7]。 □

直观而言，当 $\alpha = 1$、 $g = 0$和 $\beta \to 0$时，我们预期 Robin 问题的解收敛到 Dirichlet 问题的解。因此，我们只需考虑 Robin 问题，因为 Dirichlet 问题可以通过极限过程处理。下一个引理将验证这一论断。

LEMMA 2.4. 设 (A1)-(A3) 成立。设 $\alpha = 1$、 $g = 0$。设 u_D 为问题 (2.3) 的解， u_R为问题 (2.4) 的解。则有

$$\|u_R - u_D\|_{H^1(\Omega)} \leq C(d, \Omega, coe)\beta^{1/2}$$

证明。根据 u_R 和 u_D的定义，对任意 $v \in H^1(\Omega)$，我们有

$$\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}\partial_i u_R, \partial_j v) + \sum_{i=1}^{d}(b_i\partial_i u_R, v) + (cu_R, v) + \frac{1}{\beta}(T_0 u_R, T_0 v)|_{\partial\Omega} = (f, v) \tag{2.5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}\partial_i u_D, \partial_j v) + \sum_{i=1}^{d}(b_i\partial_i u_D, v) + (cu_D, v) = (f, v) + \sum_{i,j=1}^{d}\int_{\partial\Omega} a_{ij}\partial_i u_D T_0 v n_j ds \tag{2.6}$$

其中 n_j 是 n 的 j分量，n 是沿 $\partial\Omega$ 的外指单位法向量。从 (2.5) 中减去 (2.6)，并取 $v = u_R - u_D$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}\partial_i(u_R - u_D), \partial_j(u_R - u_D)) + \sum_{i=1}^{d}(b_i\partial_i(u_R - u_D), (u_R - u_D)) \\
&+ (c(u_R - u_D), (u_R - u_D)) + \frac{1}{\beta}(T_0(u_R - u_D), T_0(u_R - u_D))|_{\partial\Omega} \\
&= \sum_{i,j=1}^{d}\int_{\partial\Omega} a_{ij}\partial_i u_D T_0(u_R - u_D) n_j ds
\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中我们利用了这一事实： $T_0 u_D = 0$。对于 (2.7) 右端的项，根据 H¨older 不等式和柯西不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\partial\Omega} a_{ij}\partial_i u_D T_0(u_R - u_D) n_j ds \\
&\leq \max_{1\leq i,j\leq d}\|a_{ij}\|_{C(\bar{\Omega})} d^{3/2}|T_0 u_D|_{H^1(\partial\Omega)}\|T_0(u_R - u_D)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{4}\beta\left(\max_{1\leq i,j\leq d}\|a_{ij}\|_{C(\bar{\Omega})}\right)^2 d^3|T_0 u_D|^2_{H^1(\partial\Omega)} + \frac{1}{\beta}\|T_0(u_R - u_D)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}\beta\left(\max_{1\leq i,j\leq d}\|a_{ij}\|_{C(\bar{\Omega})}\right)^2 d^3C(\Omega)\|u_D\|^2_{H^2(\Omega)} + \frac{1}{\beta}\|T_0(u_R-u_D)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \tag{2.8}$$

其中在最后一步中，我们应用了迹定理

$$\|T_0v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(\Omega)\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

更多详情见 [1]。现在结合引理 2.1、(2.7) 和 (2.8) 可得所需结果。 □

定义

$$\mathcal{L}(u,v) := \sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}\partial_i u, \partial_j v) + \sum_{i=1}^{d}(b_i\partial_i u, v) + (cu,v) + \frac{\alpha}{\beta}(T_0u, T_0v)|_{\partial\Omega} - (f,v) - \frac{1}{\beta}(g, T_0v)|_{\partial\Omega}$$

显然　　若 u 是问题 (2.4) 的解，则它满足以下优化问题：

$$\inf_{u\in H^1(\Omega)} \sup_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \|v\|_{H^1(\Omega)}\leq 1}} \mathcal{L}(u,v) \tag{2.9}$$

注意， $\mathcal{L}(u,v)$ 可等价地写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,v) =& |\Omega|\mathbb{E}_{X\sim U(\Omega)}\left(\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}\partial_i u\partial_j v)(X) + \sum_{i=1}^{d}(b_i\partial_i uv)(X) + (cuv)(X) - (fv)(X)\right)\\ &+ \frac{|\partial\Omega|}{\beta}\mathbb{E}_{Y\sim U(\partial\Omega)}\left(\frac{\alpha}{2}(T_0uT_0v)(Y) - (gT_0v)(Y)\right)\end{aligned}$$

其中， $U(\Omega)$ 和 $U(\partial\Omega)$ 分别是 Ω 和 $\partial\Omega$ 上的均匀分布。接下来，我们在 $C^1(\Omega)\times C^1(\Omega)$ 上引入 $\mathcal{L}$ 的离散版本：

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}(u,v) :=& \frac{|\Omega|}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}\partial_i u\partial_j v)(X_k) + \sum_{i=1}^{d}(b_i\partial_i uv)(X_k) + (cuv)(X_k) - (fv)(X_k)\right)\\ &+ \frac{|\partial\Omega|}{\beta M}\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\alpha}{2}(T_0uT_0v)(Y_k) - (gT_0v)(Y_k)\right)\end{aligned}$$

其中， $\{X_k\}_{k=1}^N$ 和 $\{Y_k\}_{k=1}^M$ 是分别服从 $U(\Omega)$ 和 $U(\partial\Omega)$ 的独立同分布随机变量。现在，我们考虑关于 $\mathcal{L}$的极小极大问题：

$$\inf_{u\in\mathcal{P}}\sup_{v\in\mathcal{P}}\widehat{\mathcal{L}}(u,v) \tag{2.10}$$

其中， $\mathcal{P}\subset C^1(\Omega)$ 表示参数化函数类。最后，我们将一个（随机）求解器 $\mathcal{A}$（例如随机梯度下降）用于最小化 $\sup_{v\in\mathcal{P}}\mathcal{L}(\cdot,v)$，并将 $\mathcal{A}$的输出（例如 $u_{\phi_{\mathcal{A}}}$）记为最终解。

为了研究 PDE (2.1)（u_R 和 u_D）的弱解与随机求解器生成的经验损失解（$u_{\phi_{\mathcal{A}}}$）之间的差异，我们首先对任意 $u\in H^1(\Omega)$ 定义：

$$\mathcal{L}_0(u) := \sup_{\substack{v\in H^2(\Omega)\\ \|v\|_{H^2(\Omega)}\leq 1}} \mathcal{L}(u,v)$$

$$\mathcal{L}_1(u) := \sup_{v\in\mathcal{P}}\mathcal{L}(u,v)$$

$$\mathcal{L}_2(u) := \sup_{v\in\mathcal{P}} \widehat{\mathcal{L}}(u,v)$$

以下结果将总误差分解为三部分，使我们能够采用不同的方法处理不同类型的误差。

PROPOSITION 2.5. 设 (A1)–(A3) 成立。假设 $\mathcal{P} \subset C^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)$ 且 $\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \mathcal{M}$ 对所有 $u \in \mathcal{P}$ 均成立。设 u_R 和 u_D 分别为问题 (2.4) 和 (2.3) 的解。设 $u_{\phi_{\mathcal{A}}}$ 为由随机求解器生成的问题 (2.10) 的解。

(1) 有

$$\|u_{\phi\mathcal{A}} - u_R\|_{H^1(\Omega)} \le C(d,\Omega,coe)\left(\mathcal{E}_{app} + \mathcal{E}_{sta} + \mathcal{E}_{opt}\right)$$

with

$$\mathcal{E}_{app} := \frac{\mathcal{M}}{\beta} \sup_{\substack{v_1\in H^2(\Omega)\\ \|v_1\|_{H^2(\Omega)}\le 1}} \inf_{v_2\in\mathcal{P}} \|v_1 - v_2\|_{H^1(\Omega)} + \frac{\mathcal{M}}{\beta} \inf_{\bar{u}\in\mathcal{P}} \|\bar{u} - u_R\|_{H^1(\Omega)} \tag{2.11}$$

$$\mathcal{E}_{sta} := 2\sup_{u\in\mathcal{P}} |\mathcal{L}_1(u) - \mathcal{L}_2(u)| \tag{2.12}$$

$$\mathcal{E}_{opt} := \mathcal{L}_2\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \inf_{u\in\mathcal{P}} \mathcal{L}_2\left(u\right) \tag{2.13}$$

(2) 令 $\alpha = 1, g = 0$。有

$$\|u_{\phi\mathcal{A}} - u_R\|_{H^1(\Omega)} \le C(d,\Omega,coe)\left(\mathcal{E}_{app} + \mathcal{E}_{sta} + \mathcal{E}_{opt} + \mathcal{E}_{pen}\right)$$

其中 $\mathcal{E}_{app}, \mathcal{E}_{sta}, \mathcal{E}_{opt}$ 由 (2.11)、(2.12)、(2.13) 给出，且

$$\mathcal{E}_{pen} := \|u_R - u_D\|_{H^1(\Omega)}$$

证明。我们只证明 (1)，因为 (2) 可由 (1) 和三角不等式直接得到。

取 $\mathcal{P}$ 中任意元素 $\bar{u}$，则有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_0\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \mathcal{L}_0\left(u_R\right)\\
&= \mathcal{L}_0\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \mathcal{L}_1\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) + \mathcal{L}_1\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \mathcal{L}_2\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) + \mathcal{L}_2\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \inf_{u\in\mathcal{P}} \mathcal{L}_2\left(u\right)\\
&\quad + \inf_{u\in\mathcal{P}} \mathcal{L}_2\left(u\right) - \mathcal{L}_2\left(\bar{u}\right) + \mathcal{L}_2\left(\bar{u}\right) - \mathcal{L}_1\left(\bar{u}\right) + \mathcal{L}_1\left(\bar{u}\right) - \mathcal{L}_1\left(u_R\right)\\
&\le \left[\mathcal{L}_0\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \mathcal{L}_1\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right)\right] + \left[\mathcal{L}_1\left(\bar{u}\right) - \mathcal{L}_1\left(u_R\right)\right] + 2\sup_{u\in\mathcal{P}} |\mathcal{L}_1(u) - \mathcal{L}_2(u)| + \left[\mathcal{L}_2\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \inf_{u\in\mathcal{P}} \mathcal{L}_2\left(u\right)\right],
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\mathcal{L}_0(u_R) = \mathcal{L}_1(u_R) = 0$ 这一事实。由于 $\bar{u}$ 可以是 $\mathcal{P}$ 中的任意元素，我们对上述表达式两边的 $\bar{u}$ 取下确界，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \mathcal{L}_0\left(u_R\right) \le{}& \left[\mathcal{L}_0\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \mathcal{L}_1\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right)\right] + \inf_{\bar{u}\in\mathcal{P}} \left[\mathcal{L}_1\left(\bar{u}\right) - \mathcal{L}_1\left(u_R\right)\right]\\
&+ 2\sup_{u\in\mathcal{P}} |\mathcal{L}_1(u) - \mathcal{L}_2(u)| + \left[\mathcal{L}_2\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right) - \inf_{u\in\mathcal{P}} \mathcal{L}_2\left(u\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

现在，对于 (2.14) 左边的项，由引理 2.1 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_0\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right)-\mathcal{L}_0\left(u_R\right)=\sup_{\substack{v\in H^2(\Omega)\\ \|v\|_{H^2(\Omega)}\le 1}}\left[\mathcal{L}(u_{\phi_{\mathcal{A}}},v)-\mathcal{L}(u_R,v)\right]\\
&=\sup_{\substack{v\in H^2(\Omega)\\ \|v\|_{H^2(\Omega)}\le 1}}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}\partial_i(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R),\partial_j v)+\sum_{i=1}^{d}(b_i\partial_i(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R),v)\\
&\qquad\qquad+(c(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R),v)+\frac{\alpha}{\beta}(T_0(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R),T_0 v)|_{\partial\Omega}\Bigg]\\
&\ge\sum_{i,j=1}^{d}\left(a_{ij}\partial_i(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R),\frac{\partial_j(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R)}{\|u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R\|_{H^1(\Omega)}}\right)+\sum_{i=1}^{d}\left(b_i\partial_i(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R),\frac{u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R}{\|u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R\|_{H^1(\Omega)}}\right)\\
&\quad+\left(c(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R),\frac{u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R}{\|u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R\|_{H^1(\Omega)}}\right)+\frac{\alpha}{\beta}\left(T_0(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R),\frac{T_0(u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R)}{\|u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R\|_{H^1(\Omega)}}\right)|_{\partial\Omega}\\
&\ge C(d,coe)\|u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

其中，第一步是因为 $\mathcal{L}_0(u_R)=0$。对于（2.14）右端的第一项，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_0\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right)-\mathcal{L}_1\left(u_{\phi_{\mathcal{A}}}\right)=\sup_{\substack{v\in H^2(\Omega)\\ \|v\|_{H^2(\Omega)}\le 1}}\mathcal{L}(u_{\phi_{\mathcal{A}}},v)-\sup_{v\in\mathcal{P}}\mathcal{L}(u_{\phi_{\mathcal{A}}},v)\\
&=\sup_{\substack{v_1\in H^2(\Omega)\\ \|v_1\|_{H^2(\Omega)}\le 1}}\inf_{v_2\in\mathcal{P}}\mathcal{L}(u_{\phi_{\mathcal{A}}},v_1-v_2)\\
&\le\sup_{\substack{v_1\in H^2(\Omega)\\ \|v_1\|_{H^2(\Omega)}\le 1}}\inf_{v_2\in\mathcal{P}}\frac{1}{\beta}C(d,\Omega,coe)\|u_{\phi_{\mathcal{A}}}\|_{H^1(\Omega)}\|v_1-v_2\|_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{\beta}C(d,\Omega,coe)\|v_1-v_2\|_{H^1(\Omega)}\\
&\le\frac{\mathcal{M}}{\beta}C(d,\Omega,coe)\sup_{\substack{v_1\in H^2(\Omega)\\ \|v_1\|_{H^2(\Omega)}\le 1}}\inf_{v_2\in\mathcal{P}}\|v_1-v_2\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

对于（2.14）右端的第二项，

$$
\mathcal{L}_1(\bar{u})-\mathcal{L}_1(u_R)=\sup_{v\in\mathcal{P}}\left[\mathcal{L}(\bar{u},v)-\mathcal{L}(u_R,v)\right]\le\frac{\mathcal{M}}{\beta}C(d,\Omega,coe)\|\bar{u}-u_R\|_{H^1(\Omega)}
\tag{2.17}
$$

结合（2.14）– （2.17）即可得到结果。 □

3. 逼近误差。本节研究（2.11）中定义的逼近误差 $\mathcal{E}_{app}$。显然，我们首先需要一个关于索伯列夫空间中神经网络逼近的结果。在这一领域， [9] 是一项全面的研究，涉及多种激活函数，包括 ReLU、S形函数等。 [9] 中的关键思路是构造一个近似的单位分解，从而建立索伯列夫空间中的上界。

Denote $\mathcal{F}_{s,p,d}:=\left\{f\in W^{s,p}\left([0,1]^d\right):\|f\|_{W^{s,p}([0,1]^d)}\le 1\right\}$.

THEOREM 3.1 (命题 4.8, [9]). 设 $p\ge 1$, $s,k,d\in\mathbb{N}^+$, $s\ge k+1$,$\bar{k}\ge k$。设 ρ为 $\max\{0,x\}^{\bar{k}}$(ReLU$^{\bar{k}}$)、$\frac{1}{1+e^{-x}}$(逻辑斯蒂函数)或 $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$(双曲正切函数)。对于任意 $\epsilon>0$和 $f\in\mathcal{F}_{s,\ p,\ d}$，存在一个神经网络 f_ρ，其深度为 $C\log(d+s)$，使得

$$
\|f-f_\rho\|_{W^{k,p}([0,1]^d)}\le\epsilon.
$$

(1) 若 $\rho = \max\{0, x\}^{\bar{k}}$，则 f_ρ 的非零权重数量有界于 $C(d, s, p, k)\epsilon^{-d/(s-k)}$。(2) 若 $\rho = \frac{1}{1+e^{-x}}$ 或 $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$，则 f_ρ 的非零权重数量有界于 $C(d, s, p, k)\epsilon^{-d/(s-k-\mu k)}$。此外，在情形 (2) 中，权重的绝对值有界于

$$C(d, s, p, k)\epsilon^{-2-\frac{2(d/p+d+k+\mu k)+d/p+d}{s-k-\mu k}}$$

其中 μ 是任意小的正数。

Remark 3.1. 定理中的界可见于 [9, 命题 4.8], 的证明，只是他们没有明确给出深度的界。在证明中，他们将 $[0,1]^d$ 划分为小块，用局部多项式 $\sum_m \phi_m p_m$的和来逼近 f，并用神经网络近似实现 $\sum_m \phi_m p_m$；其中，隆起函数 $\{\phi_m\}$ 构成了近似的单位分解，而$p_m = \sum_{|\alpha|<s} c_{f,m,\alpha} x^\alpha$ 是平均泰勒多项式。如 [9]所示， ϕ_m 可以用神经网络的 d维输出与常数层的乘积来逼近。恒等映射 $I(x) = x$ 和乘积函数 $\times(a, b) = ab$ 也可以用具有常数层的神经网络来逼近。为了逼近 $\phi_m x^\alpha$，我们需要实现 $d + s - 1$ 个乘积。因此，所需深度可由 $C\log(d + s)$界定。

由于区域 $[0,1]^d$ 比区域 Ω 大（回想一下，我们在开头不失一般性地假设 $\Omega \subset [0,1]^d$），因此需要以下延拓结果。

Lemma 3.1. 设 $k \in \mathbb{N}^+$， $1 \le p < \infty$。存在一个线性算子 E，从 $W^{k,\,p}(\Omega)$ 到 $W^{k,\,p}_0([0,1]^d)$，且 $Eu = u$ 在 Ω 中。

证明。参见 [7]中的定理7.25。 □

由引理 2.3 和式 (2.11) 可知，我们需要逼近 $H^1(\Omega)$ 中的函数，而目标函数属于 $H^2(\Omega)$。由定理 3.1 和引理 3.1 可立即得到所需结果。

Theorem 3.2. 设 ρ 为 $\frac{1}{1+e^{-x}}$（逻辑斯蒂函数）或 $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$（双曲正切函数）。对于任意充分小的 $\epsilon > 0$，定义参数化函数类

$$\mathcal{P} := \mathcal{N}_\rho\left(C\log(d+1), C(d, coe)(\beta^2\epsilon)^{\frac{-d}{1-\mu}}, C(d, coe)(\beta^2\epsilon)^{\frac{-9d-8}{2-2\mu}}\right) \bigcap B_{H^1(\Omega)}(0, 2)$$

其中 $B_{H^1(\Omega)}(0, 2) := \{f \in H^1(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} \le 2\}$，则 $\mathcal{E}_{app} \le \epsilon$，其中 $\mathcal{E}_{app}$ 由 (2.11) 定义。

证明。令 $k = 1, s = 2, p = 2$ 取为定理 3.1 中的相应量，并利用以下事实：$\|f - f_\rho\|_{H^2(\Omega)} \le \|Ef - f_\rho\|_{H^2([0,1]^d)}$，其中 E 是引理 3.1 中的延拓算子。由此可知，对于任意 $0 < \delta \le 1$ 和满足 $\|f\|_{H^2(\Omega)} \le 1$ 的 $f \in H^2(\Omega)$，存在一个深度为 $C\log(d + 1)$、权重数为 $C(d)\delta^{-d/(1-\mu)}$ 的神经网络 f_ρ，使得

$$\|f - f_\rho\|_{H^1(\Omega)} \le \delta \tag{3.1}$$

且权重的取值由 $C(d)\delta^{-(9d+8)/(2-2\mu)}$ 界定，其中 μ 是任意小的正数。记

$$\mathcal{P}_\delta^0 := \{f_\rho : f \in H^2(\Omega), \quad \|f\|_{H^2(\Omega)} \le 1\}$$

显然

$$\mathcal{P}_\delta^0 \subset \mathcal{P}_\delta^1 := \mathcal{N}_\rho\left(C\log(d+1), C(d)\delta^{-d/(1-\mu)}, C(d)\delta^{-(9d+8)/(2-2\mu)}\right)$$

此外，对于任意 $f_\rho \in \mathcal{P}_\delta^0$,

$$\|f_\rho\|_{H^1(\Omega)} \le \|f_\rho - f\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{H^1(\Omega)} \le \delta + 1 \le 2$$

因此

$$\mathcal{P}_\delta^0 \subset \mathcal{P}_\delta^1 \bigcap B_{H^1(\Omega)}(0,2)$$

其中 $B_{H^1(\Omega)}(0,2) := \{f \in H^1(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} \le 2\}$。

现在我们设定参数化函数类

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_\delta^B := \mathcal{P}_\delta^1 \bigcap B_{H^1(\Omega)}(0,2)$$

并估计由 (2.11) 定义的逼近误差 $\mathcal{E}_{app}$。我们首先对 (2.11) 中的第二项进行归一化。

$$\begin{aligned}
\inf_{\bar{u}\in\mathcal{P}_\delta^B} \|\bar{u} - u_R\|_{H^1(\Omega)} &= \|u_R\|_{H^1(\Omega)} \inf_{\bar{u}\in\mathcal{P}_\delta^B} \left\| \frac{\bar{u}}{\|u_R\|_{H^1(\Omega)}} - \frac{u_R}{\|u_R\|_{H^1(\Omega)}} \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&= \|u_R\|_{H^1(\Omega)} \inf_{\bar{u}\in\mathcal{P}_\delta^B} \left\| \bar{u} - \frac{u_R}{\|u_R\|_{H^1(\Omega)}} \right\|_{H^1(\Omega)} \\
&\le \frac{C(coe)}{\beta} \inf_{\bar{u}\in\mathcal{P}_\delta^B} \left\| \bar{u} - \frac{u_R}{\|u_R\|_{H^1(\Omega)}} \right\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

其中第三步应用了引理 2.3。因此

$$\mathcal{E}_{app} \le \frac{2}{\beta} \sup_{\substack{v_1\in H^2(\Omega) \\ \|v_1\|_{H^2(\Omega)}\le 1}} \inf_{v_2\in\mathcal{P}_\delta^B} \|v_1 - v_2\|_{H^1(\Omega)} + \frac{2C(coe)}{\beta^2} \inf_{\bar{u}\in\mathcal{P}_\delta^B} \left\| \bar{u} - \frac{u_R}{\|u_R\|_{H^1(\Omega)}} \right\|_{H^1(\Omega)} \tag{3.2}$$

令 $\delta = C(coe)\beta^2\epsilon$，并结合 (3.1) 和 (3.2) 即得结论。 □

4. 统计误差。本节研究由 (2.12) 定义的统计误差 $\mathcal{E}_{sta}$。

LEMMA 4.1. 对于统计误差 $\mathcal{E}_{sta}$，有

$$\mathcal{E}_{sta} \le \sum_{k=1}^{6} I_k$$

with

$$\begin{aligned}
I_1 &:= 2|\Omega| \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \mathbb{E}_{X\sim U(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{d} (a_{ij}\partial_i u \partial_j v)(X) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{d} (a_{ij}\partial_i u \partial_j v)(X_k) \right| \\
I_2 &:= 2|\Omega| \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \mathbb{E}_{X\sim U(\Omega)} \sum_{i=1}^{d} (b_i \partial_i uv)(X) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} (b_i \partial_i uv)(X_k) \right| \\
I_3 &:= 2|\Omega| \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \mathbb{E}_{X\sim U(\Omega)} (cuv)(X) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (cuv)(X_k) \right| \\
I_4 &:= 2|\Omega| \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \mathbb{E}_{X\sim U(\Omega)} (fv)(X) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (fv)(X_k) \right|
\end{aligned}$$

$$I_5 := 2\frac{|\partial\Omega|}{\beta}\sup_{u,v\in\mathcal{P}}\left|\mathbb{E}_{Y\sim U(\partial\Omega)}\frac{\alpha}{2}(T_0uT_0v)(Y) - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\frac{\alpha}{2}(T_0uT_0v)(Y_k)\right|$$
$$I_6 := 2\frac{|\partial\Omega|}{\beta}\sup_{u,v\in\mathcal{P}}\left|\mathbb{E}_{Y\sim U(\partial\Omega)}(gT_0v)(Y) - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}(gT_0v)(Y_k)\right|$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{sta} &= 2\sup_{u\in\mathcal{P}}|\mathcal{L}_1(u)-\mathcal{L}_2(u)| = 2\sup_{u\in\mathcal{P}}\left|\sup_{v\in\mathcal{P}}\mathcal{L}(u,v) - \sup_{v\in\mathcal{P}}\widehat{\mathcal{L}}(u,v)\right| \\ &\le 2\sup_{u\in\mathcal{P}}\sup_{v\in\mathcal{P}}\left|\mathcal{L}(u,v)-\widehat{\mathcal{L}}(u,v)\right| \le \sum_{k=1}^{6} I_k\end{aligned}$$

其中，第三步是基于以下事实:

$$\begin{aligned}\sup_{v\in\mathcal{P}}\mathcal{L}(u,v) - \sup_{v\in\mathcal{P}}\widehat{\mathcal{L}}(u,v) &\le \sup_{v\in\mathcal{P}}\left[\mathcal{L}(u,v)-\widehat{\mathcal{L}}(u,v)\right] \le \sup_{v\in\mathcal{P}}\left|\mathcal{L}(u,v)-\widehat{\mathcal{L}}(u,v)\right| \\ \sup_{v\in\mathcal{P}}\widehat{\mathcal{L}}(u,v) - \sup_{v\in\mathcal{P}}\mathcal{L}(u,v) &\le \sup_{v\in\mathcal{P}}\left[\widehat{\mathcal{L}}(u,v)-\mathcal{L}(u,v)\right] \le \sup_{v\in\mathcal{P}}\left|\mathcal{L}(u,v)-\widehat{\mathcal{L}}(u,v)\right|\end{aligned}$$

□

通过对称化技术，我们可以用拉德马赫复杂度来界定连续损失与经验损失之间的差异（即 I_1、$\cdots$、I_6）。我们首先介绍拉德马赫复杂度。

Definition 4.2. 集合 $A\subseteq\mathbb{R}^N$ 的拉德马赫复杂度定义为

$$\mathfrak{R}_N(A) = \mathbb{E}_{\{\sigma_i\}_{k=1}^N}\left[\sup_{a\in A}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sigma_k a_k\right],$$

其中，$\{\sigma_k\}_{k=1}^N$ 是 N 个独立同分布的拉德马赫变量，满足 $\mathbb{P}(\sigma_k=1)=\mathbb{P}(\sigma_k=-1)=\frac{1}{2}$. 与随机样本 $\{X_k\}_{k=1}^N$ 相关联的函数类 $\mathcal{F}$ 的拉德马赫复杂度定义为

$$\mathfrak{R}_N(\mathcal{F}) = \mathbb{E}_{\{X_k,\sigma_k\}_{k=1}^N}\left[\sup_{u\in\mathcal{F}}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sigma_k u(X_k)\right].$$

Lemma 4.3. 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\{X_k\}_{k=1}^N} I_i &\le 4|\Omega|\mathfrak{R}_N(\mathcal{F}_i), \quad i=1,\cdots,4 \\ \mathbb{E}_{\{Y_k\}_{k=1}^M} I_i &\le \frac{4|\partial\Omega|}{\beta}\mathfrak{R}_M(\mathcal{F}_i), \quad i=5,6\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &:= \left\{\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_i u\partial_j v : u,v\in\mathcal{P}\right\}, & \mathcal{F}_2 &:= \left\{\sum_{i=1}^{d} b_i\partial_i uv : u,v\in\mathcal{P}\right\} \\ \mathcal{F}_3 &:= \{cuv : u,v\in\mathcal{P}\}, & \mathcal{F}_4 &:= \{fv : u,v\in\mathcal{P}\} \\ \mathcal{F}_5 &:= \left\{\frac{\alpha}{2}T_0uT_0v : u,v\in\mathcal{P}\right\}, & \mathcal{F}_6 &:= \{gT_0v : u,v\in\mathcal{P}\}\end{aligned}$$

证明。我们仅给出关于 I_3 的证明，因为其他不等式也可用类似方法证明。取 $\{\widetilde{X_k}\}_{k=1}^N$ 为 $\{X_k\}_{k=1}^N$ 的一个独立副本，则

$$\begin{aligned} I_3 &= 2|\Omega| \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \mathbb{E}_{X\sim U(\Omega)}(cuv)(X) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N (cuv)(X_k) \right| \\ &\le \frac{2|\Omega|}{N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \mathbb{E}_{\{\widetilde{X_k}\}_{k=1}^N} \sum_{k=1}^N \left[(cuv)(\widetilde{X_k}) - (cuv)(X_k) \right] \right| \\ &\le \frac{2|\Omega|}{N} \mathbb{E}_{\{\widetilde{X_k}\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \sum_{k=1}^N \left[(cuv)(\widetilde{X_k}) - (cuv)(X_k) \right] \right| \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\{X_k\}_{k=1}^N} I_3 &\le \frac{2|\Omega|}{N} \mathbb{E}_{\{X_k,\widetilde{X_k}\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \sum_{k=1}^N \left[(cuv)(\widetilde{X_k}) - (cuv)(X_k) \right] \right| \\ &= \frac{2|\Omega|}{N} \mathbb{E}_{\{X_k,\widetilde{X_k},\sigma_k\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \left| \sum_{k=1}^N \sigma_k \left[(cuv)(\widetilde{X_k}) - (cuv)(X_k) \right] \right| \\ &= \frac{2|\Omega|}{N} \mathbb{E}_{\{X_k,\widetilde{X_k},\sigma_k\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \\ &\qquad \max\left\{ \sum_{k=1}^N \sigma_k \left[(cuv)(\widetilde{X_k}) - (cuv)(X_k) \right], \sum_{k=1}^N \sigma_k \left[(cuv)(X_k) - (cuv)(\widetilde{X_k}) \right] \right\} \end{aligned}$$

其中第二步是因为引入拉德马赫变量不会改变分布。我们注意到

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\{X_k,\widetilde{X_k},\sigma_k\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^N \sigma_k \left[(cuv)(\widetilde{X_k}) - (cuv)(X_k) \right] \\ &\le \mathbb{E}_{\{X_k,\widetilde{X_k},\sigma_k\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^N \sigma_k (cuv)(\widetilde{X_k}) + \mathbb{E}_{\{X_k,\widetilde{X_k},\sigma_k\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^N -\sigma_k (cuv)(X_k) \\ &= 2\mathbb{E}_{\{X_k,\sigma_k\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^N \sigma_k (cuv)(X_k) \end{aligned}$$

同理，

$$\mathbb{E}_{\{X_k,\widetilde{X_k},\sigma_k\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^N \sigma_k \left[(cuv)(X_k) - (cuv)(\widetilde{X_k}) \right] \le 2\mathbb{E}_{\{X_k,\sigma_k\}_{k=1}^N} \sup_{u,v\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^N \sigma_k (cuv)(X_k)$$

因此

$$\mathbb{E}_{\{X_k\}_{k=1}^N} I_3 \le 4|\Omega| \mathfrak{R}_N(\mathcal{F}_3)$$

□

为了界定拉德马赫复杂度，我们需要覆盖数这一概念。

Definition 4.4. 度量空间 (S,τ) 中集合 T 的一个 ϵ-覆盖，是一个子集 $T_c \subset S$，使得对每个$t \in T$，都存在一个 $t_c \in T_c$ 满足 $\tau(t,t_c) \le \epsilon$。T 的 ϵ-覆盖数，记作 $\mathcal{C}(\epsilon,T,\tau)$，定义为关于度量 τ 的 T 的所有 ϵ-覆盖中基数的最小值。

在欧几里得 欧几里得空间中，我们可以轻松地为有界集建立覆盖数的上界 y.

LEMMA 4.5. 假设 $T \subset \mathbb{R}^d$ 且 $\|t\|_2 \leq B$ 对于 $t \in T$，则

$$\mathcal{C}(\epsilon, T, \|\cdot\|_2) \leq \left(\frac{2B\sqrt{d}}{\epsilon}\right)^d.$$

证明。令 $m = \left\lfloor \frac{2B\sqrt{d}}{\epsilon} \right\rfloor$ 并定义

$$T_c = \left\{-B + \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}, -B + \frac{2\epsilon}{\sqrt{d}}, \cdots, -B + \frac{m\epsilon}{\sqrt{d}}\right\}^d,$$

则对于 $t \in T$，存在 $t_c \in T_c$ 使得

$$\|t - t_c\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{d}}\right)^2} = \epsilon.$$

因此

$$\mathcal{C}(\epsilon, T, \|\cdot\|_2) \leq |T_c| = m^d \leq \left(\frac{2B\sqrt{d}}{\epsilon}\right)^d.$$

□

利普希茨参数化使我们能够将函数空间的覆盖转换为参数空间的覆盖。这一性质在我们对统计误差的分析中起着至关重要的作用。

LEMMA 4.6. 设 $\mathcal{F}$ 是一个参数化函数类：$\mathcal{F} = \{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$。设 $\|\cdot\|_\Theta$ 是 Θ 上的一个范数，且 $\|\cdot\|_\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一个范数。假设映射 $\theta \mapsto f(x;\theta)$ 是 L-利普希茨的，即

$$\left\|f(x;\theta) - f\left(x;\widetilde{\theta}\right)\right\|_\mathcal{F} \leq L\left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|_\Theta,$$

那么对于任意 $\epsilon > 0$，$\mathcal{C}(\epsilon, \mathcal{F}, \|\cdot\|_\mathcal{F}) \leq \mathcal{C}(\epsilon/L, \Theta, \|\cdot\|_\Theta)$。

证明。假设 $\mathcal{C}(\epsilon/L, \Theta, \|\cdot\|_\Theta) = n$，且 $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ 是 Θ 的一个 ϵ/L-覆盖。那么对于任意 $\theta \in \Theta$，存在 $1 \leq i \leq n$ 使得

$$\|f(x;\theta) - f(x;\theta_i)\|_\mathcal{F} \leq L\|\theta - \theta_i\|_\Theta \leq \epsilon.$$

因此，$\{f(x;\theta_i)\}_{i=1}^n$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个 ϵ-覆盖，这意味着 $\mathcal{C}(\epsilon, \mathcal{F}, \|\cdot\|_\mathcal{F}) \leq n$。□

为了找出拉德马赫复杂度与覆盖数之间的关系，我们首先需要下面陈述的 Massart 有限类引理。

LEMMA 4.7. 对于任意直径为 $D = \sup_{a\in A}\|a\|_2$ 的有限集 $A \subset \mathbb{R}^N$，

$$\mathfrak{R}_N(A) \leq \frac{D}{N}\sqrt{2\log|A|}.$$

证明。例如参见 [19, 引理 26.8]。 □

LEMMA 4.8. 设 $\mathcal{F}$ 为一个函数类，且对于任意 $f \in \mathcal{F}$，我们有 $\|f\|_\infty \leq B$

$$\mathfrak{R}_N(\mathcal{F}) \leq \inf_{0<\delta<B/2} \left(4\delta + \frac{12}{\sqrt{N}} \int_\delta^{B/2} \sqrt{\log \mathcal{C}(\epsilon, \mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty)} d\epsilon \right).$$

证明。我们应用链式方法。令 $\epsilon_k = 2^{-k+1}B$。记 $\mathcal{F}_k$ 使得 $\mathcal{F}_k$ 是 $\mathcal{F}$ 和 $|\mathcal{F}_k| = \mathcal{C}(\epsilon_k, \mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty)$ 的 ϵ_k-覆盖。因此，对于任意 $u \in \mathcal{F}$，存在 $u_k \in \mathcal{F}_k$ 使得$\|u - u_k\|_\infty \leq \epsilon_k$。令 K 为稍后确定的正整数。我们有

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{R}_N(\mathcal{F}) = \mathbb{E}_{\{\sigma_i, X_i\}_{i=1}^N} \left[\sup_{u\in\mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i u(X_i) \right] \\
&= \mathbb{E}_{\{\sigma_i, X_i\}_{i=1}^N} \left[\frac{1}{N} \sup_{u\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^N \sigma_i (u(X_i) - u_K(X_i)) + \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i (u_{j+1}(X_i) - u_j(X_i)) + \sum_{i=1}^N \sigma_i u_1(X_i) \right] \\
&\leq \mathbb{E}_{\{\sigma_i, X_i\}_{i=1}^N} \left[\sup_{u\in\mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i (u(X_i) - u_K(X_i)) \right] + \sum_{j=1}^{K-1} \mathbb{E}_{\{\sigma_i, X_i\}_{i=1}^N} \left[\sup_{u\in\mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i (u_{j+1}(X_i) - u_j(X_i)) \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\{\sigma_i, X_i\}_{i=1}^N} \left[\frac{1}{N} \sup_{u\in\mathcal{F}_1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i u(X_i) \right].
\end{aligned}$$

我们可以选择 $\mathcal{F}_1 = \{0\}$ 消去第三项。对于第一项，

$$\mathbb{E}_{\{\sigma_i, X_i\}_{i=1}^N} \sup_{u\in\mathcal{F}} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \sigma_i (u(X_i) - u_K(X_i)) \right] \leq \mathbb{E}_{\{\sigma_i, X_i\}_{i=1}^N} \sup_{u\in\mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\sigma_i| \|u - u_K\|_\infty \leq \epsilon_K.$$

对于第二项，对于任意固定的样本 $\{X_i\}_{i=1}^N$，我们定义

$$V_j := \{(u_{j+1}(X_1) - u_j(X_1), \ldots, u_{j+1}(X_N) - u_j(X_N)) \in \mathbb{R}^N : u \in \mathcal{F}\}.$$

于是，对于任意 $v^j \in V_j$,

$$\begin{aligned}
\|v^j\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |u_{j+1}(X_i) - u_j(X_i)|^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{n} \|u_{j+1} - u_j\|_\infty \\
&\leq \sqrt{n} \|u_{j+1} - u\|_\infty + \sqrt{n} \|u_j - u\|_\infty = \sqrt{n}\epsilon_{j+1} + \sqrt{n}\epsilon_j = 3\sqrt{n}\epsilon_{j+1}.
\end{aligned}$$

应用引理 4.7，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{K-1} \mathbb{E}_{\{\sigma\}_{i=1}^N} \left[\sup_{u\in\mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i (u_{j+1}(X_i) - u_j(X_i)) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{K-1} \mathbb{E}_{\{\sigma_i\}_{i=1}^N} \left[\sup_{v^j\in V_j} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i v_i^j \right] \leq \sum_{j=1}^{K-1} \frac{3\epsilon_{j+1}}{\sqrt{N}} \sqrt{2\log|V_j|}.
\end{aligned}$$

根据 V_j 的定义，我们知道 $|V_j| \leq |\mathcal{F}_j| |\mathcal{F}_{j+1}| \leq |\mathcal{F}_{j+1}|^2$。因此

$$\sum_{j=1}^{K-1} \mathbb{E}_{\{\sigma_i, X_i\}_{i=1}^N} \left[\sup_{u\in\mathcal{F}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i (u_{j+1}(X_i) - u_j(X_i)) \right] \leq \sum_{j=1}^{K-1} \frac{6\epsilon_{j+1}}{\sqrt{N}} \sqrt{\log|\mathcal{F}_{j+1}|}.$$

现在我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_N(\mathcal{F}) &\le \epsilon_K + \sum_{j=1}^{K-1} \frac{6\epsilon_{j+1}}{\sqrt{N}} \sqrt{\log |\mathcal{F}_{j+1}|} \\ &= \epsilon_K + \frac{12}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{K-1} (\epsilon_{j+1} - \epsilon_{j+2}) \sqrt{\log \mathcal{C}(\epsilon_{j+1}, \mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty)} \\ &\le \epsilon_K + \frac{12}{\sqrt{N}} \int_{\epsilon_{K+1}}^{B/2} \sqrt{\log \mathcal{C}(\epsilon, \mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty)} d\epsilon.\end{aligned}$$

我们通过选择 K 使得对于任意 $0 < \delta < B/2$，都有 $\epsilon_{K+2} < \delta \le \epsilon_{K+1}$，从而完成引理的证明。 □

由引理 4.6 可知，要利用引理 4.3 中定义的 $\mathcal{F}_i$ 对 $\mathcal{C}(\epsilon, \mathcal{F}_i, \|\cdot\|_\infty)$ 进行界定，关键在于计算函数类 $\mathcal{F}_i$的 Lipschitz 常数上界，这在引理 4.9–4.12 中完成。

LEMMA 4.9. 设 $\mathcal{D}, \mathfrak{n}_\mathcal{D}, n_i \in \mathbb{N}^+$, $n_\mathcal{D} = 1$, $B_\theta \ge 1$ 和 ρ 是有界 Lipschitz 连续函数，满足 B_ρ, $L_\rho \le 1$。假设参数化函数类 $\mathcal{P} \subset \mathcal{N}_\rho(\mathcal{D}, \mathfrak{n}_\mathcal{D}, B_\theta)$。对于任意 $f(x;\,\theta) \in \mathcal{P}$，$f(x;\,\theta)$ 关于变量 θ 是 $\sqrt{\mathfrak{n}_\mathcal{D}} B_\theta^{\mathcal{D}-1} \left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)$-利普希茨连续的，即，

$$\left|f(x;\theta) - f(x;\widetilde{\theta})\right| \le \sqrt{\mathfrak{n}_\mathcal{D}} B_\theta^{\mathcal{D}-1} \left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right) \left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|_2, \quad \forall x \in \Omega.$$

证明。对于 $\ell = 2$、$\cdots$、$\mathcal{D}$（$\ell = \mathcal{D}$ 的情形论证略有不同），

$$\begin{aligned}\left|f_q^{(\ell)} - \widetilde{f}_q^{(\ell)}\right| &= \left|\rho\left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} a_{qj}^{(\ell)} f_j^{(\ell-1)} + b_q^{(\ell)}\right) - \rho\left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)} + \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right)\right| \\ &\le L_\rho \left|\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} a_{qj}^{(\ell)} f_j^{(\ell-1)} - \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)} + b_q^{(\ell)} - \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right| \\ &\le L_\rho \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|a_{qj}^{(\ell)}\right| \left|f_j^{(\ell-1)} - \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + L_\rho \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right| \left|\widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + L_\rho \left|b_q^{(\ell)} - \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right| \\ &\le B_\theta L_\rho \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|f_j^{(\ell-1)} - \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + B_\rho L_\rho \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right| + L_\rho \left|b_q^{(\ell)} - \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right| \\ &\le B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|f_j^{(\ell-1)} - \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right| + \left|b_q^{(\ell)} - \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right|.\end{aligned}$$

对于 $\ell = 1$,

$$\begin{aligned}\left|f_q^{(1)} - \widetilde{f}_q^{(1)}\right| &= \left|\rho\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_{qj}^{(1)} x_j^+ b_q^{(1)}\right) - \rho\left(\sum_{j=1}^{n_0} \widetilde{a}_{qj}^{(1)} x_j + \widetilde{b}_q^{(1)}\right)\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n_0} \left|a_{qj}^{(1)} - \widetilde{a}_{qj}^{(1)}\right| + \left|b_q^{(1)} - \widetilde{b}_q^{(1)}\right| = \sum_{j=1}^{\mathfrak{n}_1} \left|\theta_j - \widetilde{\theta}_j\right|.\end{aligned}$$

对于 $\ell = 2$,

$$\left|f_q^{(2)} - \widetilde{f}_q^{(2)}\right| \le B_\theta \sum_{j=1}^{n_1} \left|f_j^{(1)} - \widetilde{f}_j^{(1)}\right| + \sum_{j=1}^{n_1} \left|a_{qj}^{(2)} - \widetilde{a}_{qj}^{(2)}\right| + \left|b_q^{(2)} - \widetilde{b}_q^{(2)}\right|$$

$$\leq B_\theta \sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_1}\left|\theta_k-\widetilde{\theta}_k\right|+\sum_{j=1}^{n_1}\left|a_{qj}^{(2)}-\widetilde{a}_{qj}^{(2)}\right|+\left|b_q^{(2)}-\widetilde{b}_q^{(2)}\right|$$
$$\leq n_1 B_\theta \sum_{j=1}^{\mathfrak{n}_2}\left|\theta_j-\widetilde{\theta}_j\right|.$$

假设对于 $\ell\geq 2$,

$$\left|f_q^{(\ell)}-\widetilde{f}_q^{(\ell)}\right|\leq\left(\prod_{i=1}^{\ell-1}n_i\right)B_\theta^{\ell-1}\sum_{j=1}^{\mathfrak{n}_\ell}\left|\theta_j-\widetilde{\theta}_j\right|,$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|f_q^{(\ell+1)}-\widetilde{f}_q^{(\ell+1)}\right|&\leq B_\theta\sum_{j=1}^{n_\ell}\left|f_j^{(\ell)}-\widetilde{f}_j^{(\ell)}\right|+\sum_{j=1}^{n_\ell}\left|a_{qj}^{(\ell+1)}-\widetilde{a}_{qj}^{(\ell+1)}\right|+\left|b_q^{(\ell+1)}-\widetilde{b}_q^{(\ell+1)}\right|\\&\leq B_\theta\sum_{j=1}^{n_\ell}\left(\prod_{i=1}^{\ell-1}n_i\right)B_\theta^{\ell-1}\sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_1}\left|\theta_k-\widetilde{\theta}_k\right|+\sum_{j=1}^{n_\ell}\left|a_{qj}^{(\ell+1)}-\widetilde{a}_{qj}^{(\ell+1)}\right|+\left|b_q^{(\ell+1)}-\widetilde{b}_q^{(\ell+1)}\right|\\&\leq\left(\prod_{i=1}^{\ell}n_i\right)B_\theta^{\ell}\sum_{j=1}^{\mathfrak{n}_{\ell+1}}\left|\theta_j-\widetilde{\theta}_j\right|.\end{aligned}$$

因此，根据归纳法和 H¨older 不等式，我们得出

$$\left|f-\widetilde{f}\right|\leq\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1}n_i\right)B_\theta^{\mathcal{D}-1}\sum_{j=1}^{\mathfrak{n}_\mathcal{D}}\left|\theta_j-\widetilde{\theta}_j\right|\leq\sqrt{\mathfrak{n}_\mathcal{D}}B_\theta^{\mathcal{D}-1}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1}n_i\right)\left\|\theta-\widetilde{\theta}\right\|_2.$$

□

LEMMA 4.10. 令 $\mathcal{D},\mathfrak{n}_\mathcal{D},n_i\in\mathbb{N}^+$, $n_\mathcal{D}=1$, $B_\theta\geq 1$和 ρ为一个满足 ρ'有界于$B_{\rho'}$的函数。假设参数化函数类 $\mathcal{P}\subset\mathcal{N}_\rho(\mathcal{D},\mathfrak{n}_\mathcal{D},B_\theta)$。令 $p=1,\cdots,d$。我们有

$$\left|\partial_{x_p}f_q^{(\ell)}\right|\leq\left(\prod_{i=1}^{\ell-1}n_i\right)\left(B_\theta B_{\rho'}\right)^\ell,\quad \ell=1,2,\cdots,\mathcal{D}-1,$$
$$\left|\partial_{x_p}f\right|\leq\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1}n_i\right)B_\theta^{\mathcal{D}}B_{\rho'}^{\mathcal{D}-1}.$$

证明。对于 $\ell=1,2,\cdots,\mathcal{D}-1$,

$$\begin{aligned}\left|\partial_{x_p}f_q^{(\ell)}\right|&=\left|\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}a_{qj}^{(\ell)}\partial_{x_p}f_j^{(\ell-1)}\rho'\left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}a_{qj}^{(\ell)}f_j^{(\ell-1)}+b_q^{(\ell)}\right)\right|\leq B_\theta B_{\rho'}\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|\partial_{x_p}f_j^{(\ell-1)}\right|\\&\leq\left(B_\theta B_{\rho'}\right)^2\sum_{k=1}^{n_{\ell-1}}\sum_{j=1}^{n_{\ell-2}}\left|\partial_{x_p}f_j^{(\ell-2)}\right|=n_{\ell-1}\left(B_\theta B_{\rho'}\right)^2\sum_{j=1}^{n_{\ell-2}}\left|\partial_{x_p}f_j^{(\ell-2)}\right|\\&\leq\cdots\leq\left(\prod_{i=2}^{\ell-1}n_i\right)\left(B_\theta B_{\rho'}\right)^{\ell-1}\sum_{j=1}^{n_1}\left|\partial_{x_p}f_j^{(1)}\right|\\&\leq\left(\prod_{i=2}^{\ell-1}n_i\right)\left(B_\theta B_{\rho'}\right)^{\ell-1}\sum_{j=1}^{n_1}B_\theta B_{\rho'}=\left(\prod_{i=1}^{\ell-1}n_i\right)\left(B_\theta B_{\rho'}\right)^\ell.\end{aligned}$$

$\left|\partial_{x_p}f\right|$ 的界可以用类似的方法推导。 □

LEMMA 4.11. 设 $\mathcal{D}, \mathfrak{n}_{\mathcal{D}}, n_i \in \mathbb{N}^+$, $n_{\mathcal{D}} = 1$, $B_\theta \geq 1$ 和 ρ 为函数，使得 ρ, ρ' 分别由 $B_\rho, B_{\rho'} \leq 1$ 界定，且其 Lipschitz 常数分别为 $L_\rho, L_{\rho'} \leq 1$。假设参数化函数类 $\mathcal{P} \subset \mathcal{N}_\rho(\mathcal{D}, \mathfrak{n}_{\mathcal{D}}, B_\theta)$。那么，对于任意 $f(x;\theta) \in \mathcal{P}$, $p = 1, \cdots, d$, $\partial_{x_p} f(x;\theta)$ 关于变量 θ 是 $\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}(\mathcal{D}+1)B_\theta^{2\mathcal{D}}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^2$-利普希茨连续的，即

$$\left|\partial_{x_p} f(x;\theta) - \partial_{x_p} f(x;\widetilde{\theta})\right| \leq \sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}(\mathcal{D}+1)B_\theta^{2\mathcal{D}}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^2 \left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|_2, \quad \forall x \in \Omega.$$

证明。对于 $\ell = 1$,

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_{x_p} f_q^{(1)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_q^{(1)}\right| \\
=&\left|a_{qp}^{(1)} \rho'\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_{qj}^{(1)} x_j + b_q^{(1)}\right) - \widetilde{a}_{qp}^{(1)} \rho'\left(\sum_{j=1}^{n_0} \widetilde{a}_{qj}^{(1)} x_j + \widetilde{b}_q^{(1)}\right)\right| \\
\leq&\left|a_{qp}^{(1)} - \widetilde{a}_{qp}^{(1)}\right| \left|\rho'\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_{qj}^{(1)} x_j + b_q^{(1)}\right)\right| + \left|\widetilde{a}_{qp}^{(1)}\right| \left|\rho'\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_{qj}^{(1)} x_j + b_q^{(1)}\right) - \rho'\left(\sum_{j=1}^{n_0} \widetilde{a}_{qj}^{(1)} x_j + \widetilde{b}_q^{(1)}\right)\right| \\
\leq& B_{\rho'}\left|a_{qp}^{(1)} - \widetilde{a}_{qp}^{(1)}\right| + B_\theta L_{\rho'} \sum_{j=1}^{n_0}\left|a_{qj}^{(1)} - \widetilde{a}_{qj}^{(1)}\right| + B_\theta L_{\rho'}\left|b_q^{(1)} - \widetilde{b}_q^{(1)}\right| \leq 2B_\theta \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_1}\left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right|
\end{aligned}$$

对于 $\ell \geq 2$，我们建立递推关系：

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_{x_p} f_q^{(\ell)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_q^{(\ell)}\right| \\
\leq& \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)}\right|\left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)}\right| \left|\rho'\left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} a_{qj}^{(\ell)} f_j^{(\ell-1)} + b_q^{(\ell)}\right) - \rho'\left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)} + \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right)\right| \\
&+ \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)} \partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)} \partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| \left|\rho'\left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)} + \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right)\right| \\
\leq& B_\theta L_{\rho'} \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)}\right| \left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)} f_j^{(\ell-1)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + \left|b_q^{(\ell)} - \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right|\right) \\
&+ B_{\rho'} \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)} \partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)} \partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| \\
\leq& B_\theta L_{\rho'} \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)}\right| \left(B_\rho \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right| + B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|f_j^{(\ell-1)} - \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + \left|b_q^{(\ell)} - \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right|\right) \\
&+ B_{\rho'} B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + B_{\rho'} \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right|\left|\partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| \\
\leq& B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)}\right| \left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right| + B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|f_j^{(\ell-1)} - \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + \left|b_q^{(\ell)} - \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right|\right) \\
&+ B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right|\left|\partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| \\
\leq& B_\theta \left(\prod_{i=1}^{\ell-1} n_i\right) B_\theta^\ell \left(\sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right| + B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}}\left(\prod_{i=1}^{\ell-2} n_i\right) B_\theta^{\ell-2} \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_{\ell-1}}\left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right| + \left|b_q^{(\ell)} - \widetilde{b}_q^{(\ell)}\right|\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|a_{qj}^{(\ell)} - \widetilde{a}_{qj}^{(\ell)}\right| \left(\prod_{i=1}^{\ell-2} n_i\right) B_\theta^{\ell-1} \\
&\leq B_\theta \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell-1)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell-1)}\right| + B_\theta^{2\ell} \left(\prod_{i=1}^{\ell-1} n_i\right)^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_\ell} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right|
\end{aligned}
$$

对于 $\ell = 2$,

$$
\begin{aligned}
\left|\partial_{x_p} f_q^{(2)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_q^{(2)}\right| &\leq B_\theta \sum_{j=1}^{n_1} \left|\partial_{x_p} f_j^{(1)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(1)}\right| + B_\theta^4 n_1^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_2} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right| \\
&\leq 2B_\theta^2 n_1 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_1} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right| + B_\theta^4 n_1^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_2} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right| \leq 3B_\theta^4 n_1^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_2} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right|
\end{aligned}
$$

假设对于 $\ell \geq 2$,

$$
\left|\partial_{x_p} f_q^{(\ell)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_q^{(\ell)}\right| \leq (\ell+1) B_\theta^{2\ell} \left(\prod_{i=1}^{\ell-1} n_i\right)^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_\ell} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right|
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\partial_{x_p} f_q^{(\ell+1)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_q^{(\ell+1)}\right| \\
\leq & B_\theta \sum_{j=1}^{n_\ell} \left|\partial_{x_p} f_j^{(\ell)} - \partial_{x_p} \widetilde{f}_j^{(\ell)}\right| + B_\theta^{2\ell+2} \left(\prod_{i=1}^{\ell} n_i\right)^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_{\ell+1}} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right| \\
\leq & B_\theta \sum_{j=1}^{n_\ell} (\ell+1) B_\theta^{2\ell} \left(\prod_{i=1}^{\ell-1} n_i\right)^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_\ell} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right| + B_\theta^{2\ell+2} \left(\prod_{i=1}^{\ell} n_i\right)^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_{\ell+1}} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right| \\
\leq & (\ell+2) B_\theta^{2\ell+2} \left(\prod_{i=1}^{\ell} n_i\right)^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_{\ell+1}} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right|
\end{aligned}
$$

因此，通过归纳法和 H¨older 不等式，我们得出

$$
\left|\partial_{x_p} f - \partial_{x_p} \widetilde{f}\right| \leq (\mathcal{D}+1) B_\theta^{2\mathcal{D}} \left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^2 \sum_{k=1}^{\mathfrak{n}_\mathcal{D}} \left|\theta_k - \widetilde{\theta}_k\right| \leq \sqrt{\mathfrak{n}_\mathcal{D}} (\mathcal{D}+1) B_\theta^{2\mathcal{D}} \left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^2 \left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|_2
$$

□

LEMMA 4.12. 设 $\mathcal{D}, \mathfrak{n}_\mathcal{D}, n_i \in \mathbb{N}^+$, $n_\mathcal{D} = 1$, $B_\theta \geq 1$ 和 ρ 为函数，使得 ρ, ρ' 分别以 $B_\rho, B_{\rho'} \leq 1$ 为界，且其 Lipschitz 常数分别为 $L_\rho, L_{\rho'} \leq 1$。假设参数化函数类 $\mathcal{P} \subset \mathcal{N}_\rho(\mathcal{D}, \mathfrak{n}_\mathcal{D}, B_\theta)$。则 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_5$ 是关于参数集 $\Theta \times \Theta$ 的参数化函数类，而 $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_6$ 是关于参数集 $\widetilde{\Theta}$ 的参数化函数类，其中 $\Theta := \{\theta \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_\mathcal{D}} : \|\theta\|_2 \leq B_\theta\}$。此外，对于任意 $f_i(x; \theta)$ $f_i(x; \theta) \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, \cdots, 6$，均有

$$
\begin{aligned}
|f_i(x;\theta)| &\leq B_i, \quad \forall x \in \Omega, \\
|f_i(x;\theta) - f_i(x;\widetilde{\theta})| &\leq L_i \|\theta - \widetilde{\theta}\|_2, \quad \forall x \in \Omega,
\end{aligned}
$$

with

$$B_1 = C(coe)d^2 B_\theta^{2\mathcal{D}} \left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^2, \qquad B_2 = C(coe)d(n_{\mathcal{D}-1}+1)B_\theta^{\mathcal{D}+1}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right),$$
$$B_3 = C(coe)(n_{\mathcal{D}-1}+1)^2 B_\theta^2, \qquad B_4 = C(coe)(n_{\mathcal{D}-1}+1)B_\theta,$$
$$B_5 = \frac{\alpha}{2}(n_{\mathcal{D}-1}+1)^2 B_\theta^2, \qquad B_6 = C(coe)(n_{\mathcal{D}-1}+1)B_\theta$$

and

$$L_1 = C(coe)d^2\sqrt{2\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}(\mathcal{D}+1)B_\theta^{3\mathcal{D}}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^3,$$
$$L_2 = C(coe)d\sqrt{2\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}(\mathcal{D}+1)(n_{\mathcal{D}-1}+1)B_\theta^{2\mathcal{D}+1}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^2,$$
$$L_3 = C(coe)\sqrt{2\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}(n_{\mathcal{D}-1}+1)B_\theta^{\mathcal{D}}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right),$$
$$L_4 = C(coe)\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}B_\theta^{\mathcal{D}-1}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right),$$
$$L_5 = \frac{\alpha}{2}\sqrt{2\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}(n_{\mathcal{D}-1}+1)B_\theta^{\mathcal{D}}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right),$$
$$L_6 = C(coe)\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}B_\theta^{\mathcal{D}-1}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)$$

证明。由引理 4.9、4.10、4.11及标准计算可直接得出。 □

现在我们陈述关于统计误差 $\mathcal{E}_{sta}$的主要结果。

THEOREM 4.1. 设 $\mathcal{D}$、$\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}$、$n_i \in \mathbb{N}^+$、$n_{\mathcal{D}} = 1$、$B_\theta \geq 1$和 ρ为函数，使得 ρ、ρ'分别以 B_ρ、$B_{\rho'} \leq 1$为界，且其 Lipschitz 常数分别为 L_ρ、$L_{\rho'} \leq 1$。假设参数化函数类 $\mathcal{P} \subset \mathcal{N}_\rho(\mathcal{D}, \mathfrak{n}_{\mathcal{D}}, B_\theta)$。那么，若 $N = M$，对于 (2.12) 中定义的 $\mathcal{E}_{sta}$，有:

$$\mathbb{E}_{\{X_i\}_{i=1}^N, \{Y_j\}_{j=1}^M}\mathcal{E}_{sta} \leq \frac{C(\Omega, coe, \alpha)}{\beta}\frac{d^3\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}^{\frac{7}{2}\mathcal{D}-\frac{3}{2}}B_\theta^{\frac{7}{2}\mathcal{D}+\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{4}}}$$

证明。根据引理 4.5、4.6 和 4.8，我们有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_N(\mathcal{F}_i) &\leq \inf_{0<\delta<B_i/2}\left(4\delta + \frac{12}{\sqrt{N}}\int_\delta^{B_i/2}\sqrt{\log \mathcal{C}(\epsilon, \mathcal{F}_i, \|\cdot\|_\infty)}d\epsilon\right) \\
&\leq \inf_{0<\delta<B_i/2}\left(4\delta + \frac{12}{\sqrt{N}}\int_\delta^{B_i/2}\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}\log\left(\frac{2L_iB_\theta\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}}{\epsilon}\right)}d\epsilon\right) \\
&\leq \inf_{0<\delta<B_i/2}\left(4\delta + \frac{6\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}B_i}{\sqrt{N}}\sqrt{\log\left(\frac{2L_iB_\theta\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}}{\delta}\right)}\right).
\end{aligned}$$

取 $\delta = 1/\sqrt{N} < B_i/2$ 并应用引理 4.12，对于 $i = 1, \cdots,$ 有 4,

$$\mathfrak{R}_N(\mathcal{F}_i) \leq \frac{4}{\sqrt{N}} + \frac{6\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}B_i}{\sqrt{N}}\sqrt{\log\left(2L_iB_\theta\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}}\sqrt{N}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{C(coe,\alpha)}{\sqrt{N}} \cdot d^2\sqrt{\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}} \left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^2 B_\theta^{2\mathcal{D}} \sqrt{\log\left(d^2\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}+1)B_\theta^{3\mathcal{D}+1}\left(\prod_{i=1}^{\mathcal{D}-1} n_i\right)^3\sqrt{N}\right)} \\
&\leq \frac{C(coe,\alpha)}{\sqrt{N}} \cdot d^2\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}^{2\mathcal{D}-\frac{1}{2}} B_\theta^{2\mathcal{D}} \sqrt{\log\left(d^2\mathcal{D}\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}^{3\mathcal{D}-2}B_\theta^{3\mathcal{D}+1}\sqrt{N}\right)} \\
&\leq \frac{C(coe,\alpha)d^3\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}^{\frac{7}{2}\mathcal{D}-\frac{3}{2}}B_\theta^{\frac{7}{2}\mathcal{D}+\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

类似地，对于 $i=5$，有 6,

$$
\mathfrak{R}_M(\mathcal{F}_i) \leq \frac{C(coe,\alpha)d^3\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}^{\frac{7}{2}\mathcal{D}-\frac{3}{2}}B_\theta^{\frac{7}{2}\mathcal{D}+\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{4}}} \tag{4.2}
$$

结合引理 4.1、4.3、(4.1) 和 (4.2)，我们得到，若 $N=M$,

$$
\mathbb{E}_{\{X_i\}_{i=1}^N,\{Y_j\}_{j=1}^M}\mathcal{E}_{sta} \leq \frac{C(\Omega,coe,\alpha)}{\beta}\frac{d^3\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}^{\frac{7}{2}\mathcal{D}-\frac{3}{2}}B_\theta^{\frac{7}{2}\mathcal{D}+\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{4}}}
$$

□

5. Galerkin 方法的收敛速率。现在陈述我们的主要结果。

THEOREM 5.1. 设 (A1)-(A3) 成立。假设 $\mathcal{E}_{opt}=0$。令 ρ 为逻辑斯蒂函数 $\frac{1}{1+e^{-x}}$ 或双曲正切函数 $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$。令 $u_{\phi_{\mathcal{A}}}$ 为随机求解器 $\mathcal{A}$ 生成的 (2.10) 问题的解。

(1)令 u_R 为 Robin 问题 (2.1)(2.2*c*) 的弱解。假设 $\epsilon>0$ 足够小。定义参数化函数类

$$
\mathcal{P} := \mathcal{N}_\rho\left(C\log(d+1), C(d,coe,\beta)\epsilon^{\frac{-d}{1-\mu}}, C(d,coe,\beta)\epsilon^{\frac{-9d-8}{2-2\mu}}\right)\bigcap B_{H^1(\Omega)}(0,2)
$$

其中 $\mu>0$ 可以是任意小的数，且 $B_{H^1(\Omega)}(0,2) := \{f\in H^1(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\}$。定义样本数量

$$
N = M = C(d,\Omega,coe,\alpha,\beta)\epsilon^{-Cd\log d},
$$

then

$$
\mathbb{E}_{\{X_i\}_{i=1}^N,\{Y_j\}_{j=1}^M}\|u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_R\|_{H^1(\Omega)} \leq \epsilon.
$$

(2)设 u_D 为 Dirichlet 问题 (2.1)(2.2*a*) 的弱解。设 $\alpha=1, g=0$。假设 $\epsilon>0$ 足够小。设惩罚参数 $\beta = C(d,\Omega\ coe)\epsilon^2$。设参数化函数类

$$
\mathcal{P} := \mathcal{N}_\rho\left(C\log(d+1), C(d,coe)\epsilon^{\frac{-d}{1-\mu}}, C(d,coe)\epsilon^{\frac{-9d-8}{2-2\mu}}\right)\bigcap B_{H^1(\Omega)}(0,2)
$$

其中 $\mu>0$ 可以是任意小的数，且 $B_{H^1(\Omega)}(0,2) := \{f\in H^1(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\}$。令样本数量

$$
N = M = C(d,\Omega,coe)\epsilon^{-Cd\log d},
$$

then

$$
\mathbb{E}_{\{X_i\}_{i=1}^N,\{Y_j\}_{j=1}^M}\|u_{\phi_{\mathcal{A}}}-u_D\|_{H^1(\Omega)} \leq \epsilon.
$$

证明。将定理 3.2 中的逼近误差 $\mathcal{E}_{app}$ 设为 $\frac{\epsilon}{2}$，并将定理 4.1 中的统计误差 $\mathcal{E}_{sta}$ 设为 $\frac{\epsilon}{2}$。结合命题 2.5、定理 3.2 和定理 4.1，可得 (1)。

在定理 3.2 中令逼近误差 $\mathcal{E}_{app}$ 为 $\frac{\epsilon}{3}$，在定理 4.1 中令统计误差 $\mathcal{E}_{sta}$ 为 $\frac{\epsilon}{3}$，并在引理 2.4 中令惩罚误差 $\mathcal{E}_{pen}$ 为 $\frac{\epsilon}{3}$。结合命题 2.5、定理 3.2、定理 4.1 和引理 2.4，可得 (2)。

□

6. 结论与拓展。本文分析了深度伽辽金方法（DGMW）在 $\mathbb{R}^d$ 中求解具有狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件的二阶椭圆方程的收敛速率。通过根据训练样本数量 n适当选择两个网络的深度和宽度，我们首次给出了 DGMW 的 $\mathcal{O}(n^{-1/d})$ 收敛速率。未来工作中，我们将把当前分析拓展至弗里德里希斯学习方法 [2] 。

致谢。Y. Jiao 的工作部分得到国家自然科学基金委员会项目（资助编号：11871474）和 KLATASDSMOE 研究基金的支持。Y. Wang 的工作部分得到香港研究资助局项目（资助编号：16308518 和 16317416）、香港创新科技基金 ITS/044/18FX，以及粤港澳数据驱动流体力学与工程应用联合实验室的支持。H. Yang 的工作部分得到美国国家科学基金会资助（项目编号：D MS-2244988、DMS-2206333）和海军研究办公室项目（资助编号：N00014-23-1-2007）的支持。

参考文献

[1] R. A. Adams and J. J. Fournier, *Sobolev spaces*, 爱思唯尔, 2003 年。[2] F. Chen, J. Huang, C. Wang, and H. Yang, *Friedrichs learning: Weak solutions of partial differential equationsvia deep learning*, arXiv 预印本 arXiv:2012.08023, （2020 年）。[3] P. Dondl, J. Müller, and M. Zeinhofer, *Uniform convergence guarantees for the deep ritz method for nonlinearproblems*, arXiv 预印本 arXiv:2111.05637, （2021 年）。[4] C. Duan, Y. Jiao, Y. Lai, Dingwei Li, X. Lu, and Z. Yang, *Convergence rate analysis for deep ritz method*, arXiv 预印本 arXiv:2103.13330, （2021 年）。[5] W. E, J. Han, and A. Jentzen, *Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations*, 《数学与统计学通讯》, 5（2017 年）, 第 349–380 页。[6] L. C. Evans, *Partial differential equations*, 《数学研究生教材》, 19（1998 年）。[7] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 施普林格, 2015 年。[8] I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville, and Y. Bengio, *Deep learning*, 麻省理工学院出版社, 剑桥, 2016 年。[9] I. Gühring and M. Raslan, *Approximation rates for neural networks with encodable weights in smoothness spaces*, 《神经网络》, 134（2021 年）, 第 107–130 页。[10] T. J. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Courier 公司, 2012 年。[11] Y. Jiao, Y. Lai, D. Li, X. Lu, F. Wang, J. Z. Yang, et al., *A rate of convergence of physics informed neural networks for the linear second order elliptic pdes*, 《计算物理学通讯》, 31（2022 年）, 第 1272–1295 页。[12] Y. Jiao, Y. Lai, Y. Lo, Y. Wang, and Y. Yang, *Error analysis of deep ritz methods for elliptic equations*, arXiv 预印本 arXiv:2107.14478, （2021 年）。[13] A. Krizhevsky, I. Sutskever, and G. E. Hinton, *Imagenet classification with deep convolutional neural networks*, 《美国计算机协会通讯》, 60（2017 年）, 第 84–90 页。[14] I. E. Lagaris, A. Likas, and D. I. Fotiadis, *Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations*, 《IEEE 神经网络汇刊》, 9（1998 年）, 第 987–1000 页。[15] J. Lu, Y. Lu, and M. Wang, *A priori generalization analysis of the deep ritz method for solving high dimensionalelliptic equations*, arXiv 预印本 arXiv:2101.01708, （2021 年）。[16] Y. Lu, H. Chen, J. Lu, L. Ying, and J. Blanchet, *Machine learning for elliptic pdes: Fast rate generalizationbound, neural scaling law and minimax optimality*, arXiv 预印本 arXiv:2110.06897, （2021 年）。

[17] S. Mishra and R. Molinaro, *Estimates on the generalization error of physics informed neural networks (pinns) for approximating pdes*, arXiv 预印本 arXiv:2006.16144, （2020 年）。[18] M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis, *Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*, 《计算物理学杂志》, 378（2019 年）, 第 686–707 页。[19] S. Shalev-Shwartz and S. Ben-David, *Understanding machine learning: From theory to algorithms*, 剑桥大学出版社, 2014 年。[20] Y. Shin, J. Darbon, and G. E. Karniadakis, *On the convergence and generalization of physics informed neuralnetworks*, arXiv 预印本 arXiv:2004.01806, （2020 年）。[21] Y. Shin, Z. Zhang, and G. E. Karniadakis, *Error estimates of residual minimization using neural networks forlinear pdes*, arXiv 预印本 arXiv:2010.08019, （2020 年）。[22] J. W. Siegel and J. Xu, *Approximation rates for neural networks with general activation functions*, 《神经网络》, 128（2020 年）, 第 313–321 页。[23] J. A. Sirignano and K. Spiliopoulos, *Dgm: A deep learning algorithm for solving partial differential equations*, 《计算物理学杂志》, 375（2018 年）, 第 1339–1364 页。[24] I. Sutskever, O. Vinyals, and Q. V. Le, *Sequence to sequence learning with neural networks*, 载于《神经信息处理系统进展》, Z. Ghahramani、M. Welling、C. Cortes、N. Lawrence 和 K. Q. Weinberger 编, 第 27 卷, Curran Associates, Inc., 2014 年。[25] J. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, 第 22 卷, 施普林格科学与商业媒体, 2013 年。[26] E. Weinan and B. Yu, *The deep ritz method: A deep learning-based numerical algorithm for solving variationalproblems*, 《数学与统计学通讯》, 6（2017 年）, 第 1–12 页。[27] J. Xu, *The finite neuron method and convergence analysis*, arXiv 预印本 arXiv:2010.01458, （2020 年）。[28] Y. Zang, G. Bao, X. Ye, and H. Zhou, *Weak adversarial networks for high-dimensional partial differential equa-tions*, 《计算物理学杂志》, 411（2020 年）, 第 109409 页。