arXiv:2302.02411v1 [math.RA] 5 Feb 2023

分裂四次凯莱代数的自同构、导子与分次。

VICTOR BLASCO 和 ALBERTO DAZA-GARCIA

Abstract. 分裂四次凯莱代数是一种结构可代数，曾被用于构造 $\mathbf{D_4}$ 型李代数。本文计算了它的自同构群、导子代数及其分次。

1. Introduction

结构代数是带有对合的一类代数，由 Allison 在 1978 [Ali78] 中引入，作为约旦代数的推广。这种推广体现在它们也具有构造李代数的 Tits-Kantor-Koecher（TKK）构造。其中一种代数是分裂四次凯莱代数，例如在 [Ali91] 中就用它来构造 $\mathbf{D_4}$ 型李代数。本文计算其自同构群、导子代数，以及其在同构意义下的所有分次。

全文结构如下：第 2 节定义分裂四次凯莱代数并给出乘法表；第 3 节计算其自同构群和导子代数；第 4 节计算其自同构。

我们将在特征不为 2、3 和 5 的代数闭域 $\mathbb{F}$ 上进行讨论。除非讨论具有自身记号的特定群，否则群均视为阿贝尔群，其单位元记为 e。

2. The split quartic Cayley algebra

本节将介绍分裂凯莱代数。为此，我们回顾 AF84] 中引入的一种修正的凯莱–迪克森过程，该过程从代数 $\mathcal{B} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$ 开始。取 $\mu \in \mathbb{F}^\times$。我们用 t 表示 $\mathcal{B}$ 的迹。对所有 $b \in \mathcal{B}$，定义$b^\theta = -b + \frac{1}{2}t(b)\mathbf{1}$。令 $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus s\mathcal{B} = \{b_1 + sb_2 \mid b_1, b_2 \in \mathcal{B}\}$。我们在 $\mathcal{A}$ 中定义乘法和对合如下：

$$(b_1 + sb_2)(b_3 + sb_4) = (b_1 b_3 + \mu(b_2 b_4^\theta)^\theta) + s(b_1^\theta b_4 + (b_2^\theta b_3^\theta)^\theta)$$
$$\overline{b_1 + sb_2} = b_1 - sb_2^\theta$$

我们将这个代数称为 $\mathfrak{CD}(\mathcal{B}, \mu)$。注意，由于我们处在代数闭域中，态射 $b_1 + sb_2 \mapsto b_1 + \sqrt{\mu}sb_2$ 是从 $\mathfrak{CD}(\mathcal{B}, \mu)$ 到 $\mathfrak{CD}(\mathcal{B}, 1)$ 的同构。因此，从现在起，我们将研究代数 $\mathfrak{CD}(\mathcal{B}, 1)$。我们将这个代数称为分裂四次凯莱代数。关于该同构，请参见 [AF84, Proposition 6.5] ；定义见 [Ali90]。

称 $x_1 = (1, 1, -1, -1)$ $x_2 = (1, -1, 1, -1)$ $x_3 = (1, -1, -1, 1)$。称 $\mathcal{K} = \mathbb{F}1 \oplus \mathbb{F}s$，它是 $\mathcal{A}$ 的一个子代数，并通过由以下映射给出的自同构与 $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ 同构

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：17A01；次要分类号：17A30；17A36。
Key words and phrases. 结构代数；自同构；分次。第二作者感谢 F.P.I. 项目 PRE2018-087018 的资助。他也感谢项目 MTM2017-83506-C2-1-P (AEI/FEDER，欧盟) 以及项目 PID2021-123461NB-C21 的资助；后者由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和“欧洲区域发展基金 建设欧洲之路”提供资金。

$1 \mapsto (1,1)$, $s \mapsto (1,-1)$。于是，作用 $\circ\colon \mathcal{K} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 由 $g \circ x = xg$ 给出，对所有 $g \in \mathcal{K}, x \in \mathcal{A}$ 均成立，从而赋予 $\mathcal{A}$ 左 $\mathcal{K}$-模结构；它是由 $1, x_1, x_2, x_3$ 张成的自由 $\mathcal{K}$-模。若将 $\mathcal{K}$ 与 $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ 等同，并将由 $\mathrm{ex}(x,y) = (y,x)$ 给出的对合记为 ex，则乘法和对合遵循以下规则：

$$\begin{aligned} (f1)(g1) = (fg)1,\ (gx_i)(f1) = (fg)x_i = (\overline{f}1)(fx_i) \\ (fx_i)(gx_i) = (f\overline{g})1,\ (fx_i)(gx_j) = (\overline{fg}x_k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

对所有 f、$g \in \mathcal{K}$、$\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ 和

$$\overline{f_0 1 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3} = \mathrm{ex}(f_0)1 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 \tag{2.2}$$

对所有 f_0、f_1、f_2、$f_3 \in \mathcal{K}$。

注 2.1. 注意，若我们定义子空间 $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{A} \mid \overline{x} = -x\}$、$\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{A} \mid \overline{x} = x\}$、$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H} \mid sx + xs = 0\}$，则有：

$$\mathcal{S} = \mathbb{F}s,\ \mathcal{H} = \mathbb{F}1 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{K}x_i \right),\ \mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{K}x_i,\ \mathrm{Alg}_{\mathbb{F}}(\mathcal{S}) = \mathcal{K}$$

注 2.2. 存在一个由 $\mathcal{A}_{(\bar{0},\bar{0})} = \mathcal{K}$、$\mathcal{A}_{(\bar{0},\bar{1})} = \mathcal{K}x_1$、$\mathcal{A}_{(\bar{1},\bar{0})} = \mathcal{K}x_2$ 和 $\mathcal{A}_{(\bar{1},\bar{1})} = \mathcal{K}x_3$ 给出的 $\mathbb{Z}_2^2$ 分次 $\mathcal{A}$。我们称此分次为标准四次分次，并记作 Γ_{SQ}。

3. Automorphisms and derivations

本节将计算 $(\mathcal{A}, -)$ 的自同构群和导子代数（即与对合可交换的自同构和导子）。我们先介绍一些简单性质：

引理 3.1. 设 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}, -)$ 且 $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}, -)$

(1) $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, $\varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, $d(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ 且 $d(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$(2) $\varphi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, $\varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, $d(\mathcal{K}) = 0$ 且 $d(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$。

证明. (1) 中每个包含关系“$\subseteq$”都源于对合与 φ 和 d 可交换这一事实。等式则由 φ 可逆这一事实得出。

由于 $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$，存在 $\lambda \in \mathbb{F}^{\times}$ 使得 $\varphi(s)e = \lambda s$。由于 $\varphi(1) = 1$，可得 $\varphi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$。若 $m \in \mathcal{H}$ 且 $sm + ms = 0$，应用 φ 可得 $\lambda(s\varphi(m) + \varphi(m)s) = 0$。因此 $\varphi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$。由于 φ 可逆，等式成立。由于 d 是导子，$d(1) = 0$。利用 (1)，存在 β 使得$d(s) = \beta s$。由于 $0 = d(1) = d(s^2) = 2\beta 1$，可得 $d(\mathcal{K}) = 0$。最后，若$m \in \mathcal{M}$ $0 = d(sm + ms) = sd(m) + d(m)s$。利用 (1) 可推出 $d(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$。□

现在，我们开始计算自同构。为此，令 S_3为 3 个元素上的对称群，并且我们需要以下引理。

引理 3.2. 令 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}, -)$。存在一个 S_3 中的置换，我们将其记为σ_φ，使得对于所有 $i \in \{1,2,3\}$，$\varphi(\mathcal{K}x_i) = \mathcal{K}x_{\sigma_\varphi(i)}$。

证明。根据引理 3.1，存在 $r_1, r_2, r_3 \in \mathcal{K}$，使得 $\varphi(x_i) = r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3$。令 i 满足 $r_i \neq 0$。那么，由于 $1 = \varphi(x_i)^2 = r_1\overline{r_1} + r_3\overline{r_3} + r_3\overline{r_3} + \overline{r_2r_3}x_1 + \overline{r_1r_3}x_2 + \overline{r_1r_2}x_3$。这根据注 2.2 意味着 $r_1r_2 = r_2r_3 = r_3r_1 = 0$，因为在相差一个标量的意义下，$\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ 中仅有的零因子是 (1, 0) 和 (0, 1)，这意味着$r_j, r_k = 0$，其中 $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$。因此 $\varphi(x_1) = r_ix_i$ 且 $r_i\overline{r_i} = 1$。由于根据引理 3.1 $\varphi(\mathcal{K}x_i) = \varphi(\mathcal{K})\varphi(x_i) = \mathcal{K}r_ix_i$，我们由此证明存在一个映射

σ_φ: $\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$，使得对于所有 $i\in\{1,2,3\}$，$\varphi(\mathcal{K}x_i)=\mathcal{K}x_{\sigma(i)}$。由于 φ 可逆，这个映射是一个置换。□

注3.3。设 σ 是 S_3中的一个置换。我们用 f_σ表示如下定义的映射：$\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ $f_\sigma(r_01+r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3)=r_01+r_1x_{\sigma(1)}+r_2x_{\sigma(2)}+r_3x_{\sigma(3)}$。利用(2.1)不难验证，这是$(\mathcal{A},-)$的一个自同构。此外，由 $\sigma\mapsto f_\sigma$ 定义的映射 θ：$S_3\to\mathrm{Aut}(\mathcal{A},-)$是群单态射，我们将其像记为 H。

若我们有一个带对合代数$(\mathcal{B},-)$、一个群 G 以及一个分次 Γ：$\mathcal{B}=\bigoplus_{g\in G}\mathcal{B}_g$，则记$\mathrm{Aut}(\mathcal{B},\Gamma,-):=\{\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{B},-)\mid\varphi(\mathcal{B}_g)=\mathcal{B}_g\ \forall g\in G\}$,

引理 3.4. $\mathrm{Aut}(\mathcal{A},-)\cong\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)\rtimes H$

证明。设 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{A},-)$。我们将证明 $\varphi\circ f_{\sigma_\varphi}^{-1}\in\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)$。由于注3.3中定义的 θ 是一个自同构 $f_{\sigma_\varphi}^{-1}=f_{\sigma_\varphi^{-1}}$。根据定义，对于所有 i，$\varphi(\mathcal{K}x_i)=\mathcal{K}x_{\sigma_\varphi(i)}$。因此，$\varphi\circ f_{\sigma_\varphi}^{-1}\in\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)$。所以，$\mathrm{Aut}(\mathcal{A},-)=\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)H$。最后，$f_\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)$ 当且仅当$\sigma=\mathrm{id}$。因此 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)\cap H=\{\mathrm{id}\}$。最后，不难证明 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)$ 是一个正规子群，故结论得证。

□

我们将底层集合为 $\{r\in\mathcal{K}^\times\mid r\overline{r}=1\}$ 的 $\mathcal{K}^\times$ 子群记作 S^1，并将由 σ 生成的 2 阶循环群记作 C_2。我们可以定义 $\mathcal{K}$ 上的作用为 $\sigma(s)=-s$。由此，我们将 C_2 与 $\mathrm{Aut}(\mathcal{K})$ 等同起来。

引理 3.5. $\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)\cong(S^1\times S^1)\rtimes C_2$，其乘法定义为 $(r_1,r_2,g)\star(s_1,s_2,h)=(r_1g(s_1)\ r_2g(s_2)\ gh)$。

证明. 考虑态射 θ: $(S^1\times S^1)\rtimes Aut(\mathcal{K})\to\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)$，其定义为 $\theta(r_1,r_2,\psi)(s_0+s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3)=\psi(s_0)+\psi(s_1)(r_1x_1)+\psi(s_2)(r_2x_2)+\psi(s_3)(r_3x_3)$。其中 $r_3=\overline{r_1r_2}$。利用 (2.1) 和 (2.2)，显然 $\theta(r_1,r_2,\psi)$ 是一个自同构。由于 $r_i(\overline{r}_ix_i)=x_i$，我们可以验证 $\theta(r_1,r_2,\psi)^{-1}=\theta(\psi^{-1}(\overline{r}_1)\ \psi^{-1}(\overline{r}_2)\ \psi^{-1})$。

显然，θ是单射。此外，若 φ是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A},\Gamma_{SQ},-)$ 中的元素，则令$\psi=\varphi_{|\mathcal{K}1}$, $\varphi(x_1)=r_1x_1$, $\varphi(x_2)=r_2x_2$，并令 $\varphi(x_3)=r_3x_3$。由于对于 $i=1$，2，有 $x_i^2=1$，因此可得 $r_i\overline{r_i}=1$。由 $x_1x_2=x_3$ 可得 $r_3=\overline{r_1r_2}$。因此，容易证明 $\theta(r_1,r_2,\psi)=\varphi$。由于 $\mathrm{Aut}(\mathcal{K})$ 由恒等映射和将 s 映到 $-s$的对合构成，因此容易验证它与 C_2同构。□

我们可以用下面的命题完成自同构的计算：

定理 3.6. $\mathrm{Aut}(\mathcal{A},-)\cong((S^1\times S^1)\rtimes C_2)\rtimes S_3$

证明。这是引理 3.4 和引理 3.5 的推论 □

最后，我们计算导子。为此，对于给定的两个数λ、$\beta\in\mathbb{F}$，我们定义映射 $d_{(\lambda,\beta)}$: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，其定义为 $d(r_0+r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3)=\lambda r_1(sx_1)+\beta r_2(sx_2)-(\lambda+\beta)r_3(sx_3)$。

定理 3.7。$\mathrm{Der}(\mathcal{A},-)=\{d_{\lambda,\beta}\mid\lambda,\beta\in\mathbb{F}\}$

证明。由引理 3.1可知，对于任意 $d\in\mathrm{Der}(\mathcal{A},-)$，$d(\mathcal{M})\subseteq\mathcal{M}$。因此，对于 $i,j,k=\{1,2,3\}$，可得 $d(x_i)=r_ix_i+r_jx_j+r_kx_k$，其中某些 $r_i,r_j,r_k\in\mathcal{K}$。由于 $0=d(1)=d(x_i^2)=x_id(x_i)+d(x_i)x_i$，可得 $r_i+\overline{r_i}+2(\overline{r_j}x_k+\overline{r_k}x_j)=0$。因此，存在某个 $\lambda_i\in\mathbb{F}$ 使得 $d(x_i)=\lambda_i(sx_i)$。此外，由于$\lambda_3(sx_3)=d(x_3)=d(x_1x_2)=x_1d(x_2)+d(x_1)x_2$，可知 $\lambda_3=-\lambda_1-\lambda_2$。最后，由于 $d(\mathcal{K})=0$，并利用导子的性质，可知$d(r_0+r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3)=\lambda_1r_1(sx_1)+\lambda_2r_2(sx_2)-(\lambda_1+\lambda_2)r_3(sx_3)$。现在，验证

that $d_{1,0}$ 以及 $d_{0,1}$ 是导子很容易验证；由于它们张成空间 $\{d_{\lambda,\beta} \mid \lambda,\beta \in \mathbb{F}\}$，等式即得。

□

4. Gradings

给定一个带对合代数 $(\mathcal{A}, -)$ 和一个群 G，$\mathcal{A}$上的 G-分次 Γ 是一个向量空间直和分解：

$$\Gamma\colon \mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$$

满足对所有 $g,h \in G$，$\mathcal{A}_g\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{gh}$ 和 $\overline{\mathcal{A}_g} \subseteq \mathcal{A}_g$。若分次固定，我们称 $\mathcal{A}$ 为带对合的 G-分次代数。若存在某个 $g \in G$ 使得 $x \in \mathcal{A}_g$，则称元素 x 为齐次元。在这种情况下，我们称x 的次数为 g，并记作 $\deg(x) = g$。若子空间 V 满足 $V = \bigoplus_{g\in G} (V \cap \mathcal{A}_g)$，则称它是 $\mathcal{A}$ 的分次子空间；此时记作 $V_g = V \cap \mathcal{A}_g$。

注4.1. 对于一个 G 分次 Γ，$\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{H}$ 是分次子空间（参见 [AC20，引理 3.8]）。此外，由于 $\mathcal{S} = s\mathbb{F}$ 和 $s^2 = 1$，我们有 $\deg(s)^2 = e$，其中 e 是 G的单位元。

给定两个带对合的 G-分次代数（$\mathcal{A}$, –）和（$\mathcal{B}$, –），若存在一个带对合代数同构 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，满足 $\varphi(\mathcal{A}_g) = \mathcal{B}_g$，则称它们同构。

给定（$\mathcal{A}$, –）的一个 G-分次 Γ 和一个 H-分次 Γ'，若对每个 $h \in H$，都存在一个 $g \in G$使得 $\mathcal{A}_g \subseteq \mathcal{A}_h$，则称 Γ' 是 Γ 的粗化（或称 Γ 是 Γ'的细化）。

关于分次的基本事实可见 [EK13]。

例 4.2. 给定分裂四次凯莱代数（$\mathcal{A}$, $-$）和 $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$，我们可以定义如下 $\mathbb{Z}_2$-分次 Γ^i_S：$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$，其中 $\mathcal{A}_{\bar{0}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}x_i$且 $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{K}x_j \oplus \mathcal{K}x_k$。

这些分次是标准四次分次 Γ_{SQ} 的粗化。此外，给定 $i \neq j$ 和一个置换 σ，满足 $\sigma(i) = j$，我们得到 Γ^i_s 通过自同构 f_σ 与 Γ_j 同构，其中采用 3.3 节的记号

在本节中，我们将确定 $(\mathcal{A}, -)$ 上的分次，直至同构。我们从一个引理开始：

引理4.3. 对于 $(\mathcal{A}, -)$ 上的一个 G-分次 Γ：$\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$，子空间 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{M}$ 是分次子空间。

证明. 在任意带对合代数中，$\mathcal{S}$ 和 $\mathbb{F}1$ 都是分次子空间。因此，$\mathcal{K} = \mathbb{F}1 \oplus \mathcal{S}$ 是一个分次子空间。

令 $m \in \mathcal{M}$，并令 $a_g \in \mathcal{A}_g$ 使得 $m = \sum_{g\in G} a_g$。令 g_0 为 s 的次数，并对每个 $g \in G$，记 π_g 为关于该分次给出的分解在 $\mathcal{A}_g$ 上的投影。由于 $0 = sm + ms$ 且 $0 = \pi_g(sm + ms) = sa_g + a_g s$，我们得到对每个 $g \in G$，$a_g \in \mathcal{M}$。因此，$\mathcal{M}$ 是一个分次子空间。□

由于 $s^2 = 1$，利用 (2.1) 很容易推得，对于任意 $m \in \mathcal{M}$ $s(sm) = m$。因此，我们可以定义 $\mathcal{M}$ 的两个子空间：

$$\mathcal{M}_\sigma = \{m \in \mathcal{M} \mid sm = \sigma m\} \text{ for } \sigma = \pm$$

以及 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_-$。

引理 4.4。对于一个 G 分次 Γ，$\deg(s)=e$ 当且仅当 $\mathcal{M}_+$ 和 $\mathcal{M}_-$ 是分次子空间。

证明。设 $\deg(s)=e$。在此情形下，若 $m\in\mathcal{M}_g$，对某个 $g\in G$，则存在 $m_+\in\mathcal{M}_+$和 $m_-\in\mathcal{M}_-$使得 $m=m_++m_-$。由于 $sm=m_+-m_-\in\mathcal{M}_g$，我们得到 $m_\sigma\frac{1}{2}(m+(\sigma sm))\in\mathcal{M}_g$，对 $\sigma=\pm$成立。因此，$\mathcal{M}_g=(\mathcal{M}_+\cap\mathcal{M}_g)\oplus(\mathcal{M}_-\cap\mathcal{M}_g)$。容易验证，$\mathcal{M}_+$ 和 $\mathcal{M}_-$ 是分次的。若 $\mathcal{M}_+$ 和 $\mathcal{M}_-$ 是分次的，设 $g=\deg(s)$。于是，设 $m\in(\mathcal{M}_+)$，对某个 $h\in G$，必有$h=\deg(m)=\deg(sm)=gh$，因此 $g=e$。□

注 4.5. 注意到 $\mathcal{M}_+=\frac{1}{2}(1+s)\mathcal{M}$ 且 $\mathcal{M}_-=\frac{1}{2}(1-s)\mathcal{M}$，因此我们将 $e_+=\frac{1}{2}(1+s)$ 和 $e_-=\frac{1}{2}(1-s)$称为。

我们将满足以下条件的双线性型记作 b：$\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathbb{F}$ $xy=b(x,y)1+\lambda s+m$，其中 $\lambda\in\mathbb{F}$ 且 $m\in\mathcal{M}$。

引理 4.6. 对于 $\mathcal{A}$ 上任意的 G分次，b 是一个非退化齐次双线性型（即 $b(\mathcal{M}_g,\mathcal{M}_h)=0$ 当且仅当 $gh=e$）。

证明. 为了证明 b 是非退化的，取 $m\in\mathcal{M}$。于是，存在r_1、r_2、$r_3\in\mathcal{K}$ 使得 $m=r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3$。不失一般性，假设 $r_1\neq0$。那么，对于 $\sigma=\pm$，要么 $r_1=\beta e_\sigma$，要么 $r_1\overline{r_1}=\beta x_1$；在这两种情况下都有 $\beta\neq0$。第一种情况下，$b(x,e_{-\sigma}x_1)=\beta$；第二种情况下，$b(x,r_1x_1)=\beta$。

为了说明它是齐次的，我们取 $x\in\mathcal{M}_g$ 和 $y\in\mathcal{M}_h$。那么，$xy\in\mathcal{A}_{gh}$。设 $gh\neq e$。若 $\deg(s)=gh$，则 $\mathcal{A}_{gh}=\mathbb{F}s\oplus\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_{gh}$；否则 $\mathcal{A}_{gh}=\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_{gh}$

□

例 4.7。设 G 是一个阿贝尔群，$i\in\mathbb{F}$ 满足 $i^2=-1$，且 $\zeta\in\mathbb{F}$ 是一个本原三次单位根。

(1) 对于 g_1，用 $\Gamma_{SQ}(G,g_1,g_2)$ 表示在 $(\mathcal{A},-)$ 上由 $\deg(s)=e$、$\deg(e_+x_1)=g_1$、$\deg(e_+x_2)=g_2$、$\deg(e_+x_3)=(g_1g_2)^{-1}$、$\deg(e_-x_1)=g_1^{-1}$、$\deg(e_-x_2)=g_2^{-1}$ 和 $\deg(e_-x_3)=g_1g_2$ 给出的分次。(2) 对于 $g,g_1,g_2\in G$，其中 g 是一个二阶元素，用 $\Gamma_{SQ}(G,g,g_1,g_2)$ 表示由 $\deg(s)=g$、$deg(x_1)=g_1$、$deg(x_2)=g_2$、$deg(x_3)=g_1g_2$、$deg(sx_1)=gg_1$、$deg(sx_2)=gg_2$ 和 $deg(sx_3)=gg_1g_2$ 给出的分次。(3) 对于 $\lambda\in\mathbb{F}^\times$ 和 $h,g,f\in G$，满足 $g^2=f^2=h^{-1}$ 且 $g\neq f$，我们用 $\Gamma_S(G,\lambda,h,g,f)$ 表示如下分次：$\deg(s)=e$，$\deg(e_+x_1)=h=\deg(e_-x_1)^{-1}$，$\deg(e_+(x_2+\lambda x_3))=g$，$\deg(e_+(-\lambda^{-1}x_2+x_3))=f$。(4) 对于 $h,g\in G$，其中 h 的阶为 2，我们用 $\Gamma_S^1(G,h,g)$ 表示由 $\deg(s)=h$、$\deg(e_+x_2+e_-x_3)=g$ 和 $\deg(e_-x_2+e_+x_3)=g^{-1}$ 诱导的分次。(5) 对于 $h,g\in G$，满足 h 的阶为 2 且 g 的阶为 4，我们用$\Gamma_S^2(G,h,g)$ 表示如下分次：$\deg(s)=h$，$\deg(x_1)=g^2$，且 $\deg(x_2+ix_3)=g$。(6) 对于 $h,g,f\in G$，其中 h,g 和 f的阶为 2，我们用 $\Gamma_S^3(G,h,g,f)$ 表示如下分次：$\deg(s)=h$，$\deg(x_2+x_3)=g$，且 $\deg(x_2-x_3)=f$。(6) 对于 g_1，其中 $g_2\in G$ 的阶为 3，且 $g_1\neq g_2\neq(g_1g_2)^{-1}$，我们用 $\Gamma(G,g_1,g_2)$ 表示由 $\deg(s)=e$、$\deg(e_+(x_1+\zeta x_2+\zeta^2x_3))=g_1$、$\deg(e_+(x_1+\zeta^2x_2+\zeta x_3))=g_2$、$\deg(e_+(x_1+x_2+x_3))=(g_1g_2)^{-1}$ 给出的分次。(7) 对于 $h,g_1\in G$，满足 h 的阶为 2 且 g 的阶为 3，我们用$\Gamma(G,h,g)$ 表示由 $\deg(s)=h$ 和 $\deg(x_1+\zeta x_2+\zeta^2x_3)=g$ 给出的分次。

给定一个 G分次 $\Gamma\colon\mathcal{A}=\bigoplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ 以及一个 H分次 $\Gamma'\colon\mathcal{A}=\bigoplus_{h\in H}\mathcal{A}_h$，如果这些分次满足 $\mathcal{A}=\bigoplus_{(g,\ h)\in G\times H}\mathcal{A}_g\cap\mathcal{A}_h$，则称它们是相容的。

命题 4.8. 若 Γ 是一个与 Γ_{SQ}相容的分次，则它同构于 $\Gamma_{SQ}(G, g_1, g_2)$（其中 g_1, $g_2 \in G$ 如例 4.7 所示），或同构于 $\Gamma_{SQ}(G, g, g_1, g_2)$（其中 g, g_1, g_2 如例 4.7 所示）。

证明。若 Γ: $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ 是这样一个分次，且 $\deg(s) = e$。由于它与 Γ_{SQ}兼容，对于每个 $i = 1$, 2, 3，都应存在一个 g_i，使得 $\mathcal{A}_{g_i} \cap \mathcal{K}x_i = \mathcal{K}x_i$ 或g_i，并存在一个 g_i'，使得 $(\mathcal{A}_{g_i} \cap \mathcal{K}x_i) \oplus (\mathcal{A}_{g_i'} \cap \mathcal{K}x_i)$。在第一种情况下，$\deg(e_+x_i) = \deg(e_-x_i) = g_i$。在第二种情况下，由于对 $h = g_i$ 或$h = g_i'$, $s(\mathcal{A}_h \cap \mathcal{K}x_i) = (\mathcal{A}_h \cap \mathcal{K}x_i)$，我们可以假设 $\mathcal{A}_{g_i} \cap \mathcal{K}x_i = e_+x_i$ 且 $\mathcal{A}_{g_i'} \cap \mathcal{K}x_i = e_-x_i$。由于 $(e_+x_i)(e_-x_i) = e_+$，可得在两种情况下，$\deg(e_+x_i)\deg(e_-x_i) = e$。最后，由于 $(e_-x_1)(e_-x_2) = e_+x_3$，可得 $g_3 = g_1^{-1}g_2^{-1}$。因此，$\Gamma = \Gamma_{SQ}(G, g_1, g_2)$。

若 Γ: $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ 是这样一种分次，且 $\deg(s) = g$，其中 g 是一个 2 阶元素。由于每个 $\mathcal{K}x_i$ 都是分次的，若对于 $\sigma = \pm$, $e_\sigma x_i$ 是齐次的，则 $\deg(e_\sigma x_i) = \deg(s(e_\sigma x_i)) = g\deg(e_\sigma x_i)$。因此，对于每个 $i = 1$, 2, 3，都存在一个群元素 g_i，使得存在一个可逆的 $r_i \in \mathcal{K}$，满足 $\deg(r_ix_i) = g_i$。由于域是代数闭的，我们可以假设 $r_i\overline{r_i} = 1$。由于 $(r_ix_i)^2 = 1$, $g_i^2 = e$。此外，由于 $(r_1x_1)(r_2x_2) = (\overline{r_1r_2})x_3$，我们可以假设 $r_3 = \overline{r_1r_2}$ 且 $g_3 = g_1g_2$。因此，Γ 通过态射 $\theta(r_1, r_2, Id)$ 同构于 $\Gamma_{SQ}(G, g, g_1, g_2)$，其中采用 3.5 节的记号。

□

命题 4.9. 若 Γ: $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ 是与 Γ_S^i 相容的分次，其中$i = 1$为 2、3，但与 Γ_{SQ} 不相容，那么它要么同构于 $\Gamma_S(G, \lambda, h, g, f)$，其中元素如例 4.7 所示；要么对于 $i = 1$, 2，同构于 $\Gamma_S^i(G, h, g)$，记号同例 4.7。

证明. 不失一般性，可设它与 Γ_S^1相容。由引理4.3，$\mathcal{K}x_1$ 是一个分次子空间。

若 $\deg(s) = e$，由于 $s\mathcal{K}x_1 = \mathcal{K}x_1$，则 e_+x_1 和 e_-x_2 是齐次的。设 $\deg(e_+x_1) = h$。由于 $(e_+x_1)(e_-x_1)$，可得 $\deg(e_-x_1) = h^{-1}$。我们将证明 e_+x_2 不可能是齐次的。用反证法证明。若它的次数为齐次的 g，则 $(e_+x_2)(e_+x_1) = e_-x_3$ 是次数为 gh的齐次元素。必定存在一个 $\lambda \in \mathbb{F}$，使得 $e_+(\lambda x_2 + x_3)$是次数为f的齐次元素。必定有 $f \neq g$，否则 e_+x_3 是齐次的；将其乘以 e_+x_1，可得 e_-x_1 是齐次的，这意味着该分次与Γ_{SQ}相容。现在，将其乘以 e_+x_1，可得 $e_(x_2 + \lambda x_3)$ 是次数为fh的齐次元素。由于 $b(e_-(x_2 + \lambda x_3)\ e_+x_2) = \frac{1}{2}$且 $b(e_-(x_2 + \lambda x_3)\ e_+(\lambda e_2, e_3)) = \lambda$，并且 $\ker(b(e_-(x_2 + \lambda x_3))\ \cdot)_{|(\mathcal{K}x_2\oplus\mathcal{K}_{x_3})\cap\mathcal{M}_+}$ 必须是一个分次子空间，因此 $\lambda = 0$。所以，e_+x_3 是齐次的；如前所见，这与 Γ 不与 Γ_{SQ}相容这一事实矛盾。

根据前面的讨论，我们可以假设（因为可以乘以标量），存在 $\lambda, \beta \in \mathbb{F}^\times$，使得 $e_+(x_2 + \lambda x_3)$ 是次数为 g 的齐次元素，且 $e_+(\beta x_2 + x_3))$ 是次数为 f 的齐次元素，并且二者线性无关。乘以 e_+x_1 后可得，$e_-(\lambda x_2 + x_3)$ 是次数为 gh 的齐次元素，且 $e_-(x_2 + \beta x_3)$ 是次数为 fh 的齐次元素。记 $\varphi = b(e_-(\lambda x_2 + x_3)\ \cdot)_{|(\mathcal{K}x_2\oplus\mathcal{K}_{x_3})\cap\mathcal{M}_+}$。由于 $\ker(\varphi$ 必须是 $x_2 \oplus \mathcal{K}_{x_3}) \cap \mathcal{M}_+$ 的分次子空间，而 $\varphi(e_+(x_2 + \lambda x_3)) = \lambda \neq 0$，因此必然有 $0 = \varphi(e_+(\beta x_2 + x_3)) = \frac{1}{2}(\lambda\beta + 1)$。为证明 $g^2 = f^2 = h^{-1}$，注意到 $(e_+(x_2 + \lambda x_3))$ 和 $e_+(-\lambda^{-1}x_2 + x_3)$ 的平方都是 e_-x_1 的非零倍数。因此，$\beta = -\lambda^{-1}$，从而 Γ 与 $\Gamma_S(G, \lambda, h, g, f)$ 同构。

若 $\deg(s) = h$ for $h \neq e$，显然 $h^2 = e$。由引理 4.4 可知，存在一个可逆的 $r_1 \in \mathcal{K}$，使得 r_1x_1 是次数为 f的齐次元素。利用自同构 $\theta(\frac{1}{\sqrt{r_1\overline{r_1}}}\overline{r_1}, 1, Id)$，可假设 $r_1 = 1$。我们将通过

反证法证明，对于任意 $r_2 \in \mathcal{K}$， r_2x_2 都不是齐次的。假设它是齐次的。若 r_2 是某个 $\sigma = \pm$的 e_σ 倍，则 $h\deg(r_2x_2) = \deg(s(r_2x_2)) = \deg(r_2x_2)$，这将导致矛盾。若 r_2 可逆，由于 $s(r_2x_2) = (sr_2)x_2$， $x_1(r_2x_2) = \overline{r_2}x_3$ 和 $(s\overline{r_2})x_3$ 都是齐次的， Γ 将与 Γ_{SQ}相容。因此，存在 r_2、 $r_3 \in \mathcal{K}\setminus 0$，使得 $r_2x_2 + r_3x_3$ 是次数为 g的齐次元素，然后乘以 x_1，可得 $\overline{r_3}x_2 + \overline{r_2}x_3$ 是次数为 gf的齐次元素。

若不存在一个齐次元素，其 r_2 可逆，那么对于这样的齐次元素，$(r_2x_2 + r_3x_3)^2 = 2\overline{r_2r_3}x_1 = 0$，因为对某个 $\sigma = \pm$， $r_2r_3 \in \mathbb{F}e_\sigma$。因此我们可以假设 $r_2 = \lambda e_\sigma$ 且 $r_3 = \beta e_{-\sigma}$。此外，通过缩放该元素，我们可以假设 $\lambda = 1$。记作 $x = r_2x_2 + r_3x_3$。由于x_1x 是由 x 和 sx 的线性组合，因此，要么 $x_1x = x$ ，此时 $\beta = 1$ 且 $\deg(x_1) = e$；要么 $x_1x = sx$，此时 $\beta = -1$ 且 $\deg(x_1) = \deg(s)$。必要时，利用 $\theta(s, 1, Id)$，我们可以假设 $\beta = 1$ 且 $\deg(x_1) = e$。因此， $x = e_+x_2 + e_-x_3$ 是次数为 g 的齐次元素；又由于应存在一个不属于 $\operatorname{span}\{x, sx, x_1x, (sx_1)x\} = \operatorname{span}\{x, sx\}$ 的齐次元素，运用相同的论证可知 $y = e_-x_2 + e_+x_3$ 是齐次的。由于 $xy = 1 + x_1$，我们得到 $b(x, y) \neq 0$，因此 y 是次数为 g^{-1} 的齐次元素。因此， Γ 同构于 $\Gamma^1_S(G, h, g)$

最后，假设 $r_2x_2 + r_3x_3$ 是齐次的，且 r_2, r_3 可逆。利用自同构 $\theta(1, \frac{1}{\sqrt{r_2\overline{r_2}}}\overline{r_2})$并乘以一个标量，我们可以假设 $r_2 = 1$。由于 $(x_2 + r_3x_3)^2 = 2\overline{r_3}x_1$ 且它是齐次的，我们可以假设 $r_3 \in \mathbb{F}1 \cup \mathbb{F}s$。必要时利用自同构 $\theta(s, 1, \mathrm{id})$，我们可以设 $r_3 = \lambda 1$，其中 $\lambda \in \mathbb{F}^\times$。若 $\deg(x_1) \neq e$，由于 $b(x, x_1x) \neq 0$ ，可得 $b(x, x_1x) = 0$ ，这意味着 $\lambda^2 = -1$。在这种情况下，由于 $-\lambda x_1x = x_2 - \lambda x_3$，任意选择的 λ 都是齐次元。因此，该分次同构于 $\Gamma^2_S(G, h, g)$。最后，若 $\deg(x_1) = e$，则 $\lambda = \pm 1$。由于 $\mathcal{K}x + \mathcal{K}(x_1x) = \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}sx$ ，我们需要再补充一个齐次元。根据同样的论证，它必定是 $y = x_2 - x_3$ ，因此该分次为 $\Gamma^3_S(G, h, g, f)$，其中 $\deg(x_2 + x_3) = g$。□

命题 4.10. 设 $\Gamma\colon \mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ 是 $(\mathcal{A}, -)$ 上的一个分次，它与任何 Γ^i_S 都不相容。那么它同构于 g_1, g_2 阶为 3 时的 $\Gamma(G, g_1, g_2)$，或同构于 h 阶为 2 且 g 阶为 3 时的 $\Gamma(G, h, g)$。

证明. 若 $\deg(s) = e$，我们先证明 $e_\sigma x_i$ 不可能是齐次的。由于可以使用自同构 f_τ 和 $\theta(1, 1, \mathrm{ex})$，只需对 $i = 1$ 和 $\sigma = +$ 证明即可。在这种情况下，$\ker(b(e_+x_1, \cdot)) \cap \mathcal{M}_- = \mathbb{F}e_-x_2 \oplus \mathbb{F}e_-x_3$ 是齐次的。接着，由于 b 非退化，应存在一个次数为 g、 $x = e_-(x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3)$ 且满足 $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}$ 的齐次元。由于 $b(e_+x_1, x)$ 和 $b(x^2, x)$ 均不为 0，可知 e_+x_1 和 x^2 的次数相同。由于 $y = \frac{1}{2}x^2 - \lambda_2\lambda_3e_+x_1 = e_+(\lambda_3x_2 + \lambda_2x_3)$，若 $\lambda_2\lambda_3 \neq 0$，则由于 y^2 是齐次的， e_-x_1 也是齐次的，于是 $\ker(b(e_+x_1, \cdot)) \cap \ker(b(e_-x_1, \cdot)) = \mathcal{K}x_2 \oplus \mathcal{K}x_3$ 是分次的，因此这个分次与 Γ^1_S 相容。若 $\lambda_2 \neq 0$ 但 $\lambda_3 = 0$。由于 $x^2(e_+x_1)$ 是齐次的， e_-x_2 是齐次的。因此 $z = x(e_-x_2) = e_+(\lambda_3x_1 + x_3)$ 是齐次的。由于 $b(x, z) = \lambda_3 \neq 0$，可知 z 和 e_+x_1 的次数相同，因此 $z - \lambda_3e_+x_1 = e_+x_3$ 是齐次的。所以，$(e_+x_2)(e_+x_3) = e_-x_1$ 是齐次的，由前述论证可知它与 Γ^1_S 不相容。若 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$，则同样的论证也可得出结论。

设 $x = e_+(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3)$ 是一个次数为 g 的齐次元。由此可得 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$。因此，通过数乘，我们可以假设 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$。再取另一个次数为 h 的齐次元 $y = e_+(\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3)$，满足 $\beta_1\beta_2\beta_3 = 1$，且 $g \neq h$ （这应该存在，因为该分次与 Γ^1_S 不兼容）。我们可以验证 $(x^2)^2 = 4x$ 且 $(y^2)^2 = 4y$。这意味着 $g^3 = e$ 且 $h^3 = e$。此外，很容易看出 $b(x, x^2) = 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ ，并且

$b(y,y^2) = 6\beta_1\beta_2\beta_3$。又因为 $h^2g \neq e$，我们推得 $b(x,y^2) = b(y,x^2) = 0$。这意味着

$$\lambda_1\lambda_2\beta_3 + \lambda_2\lambda_3\beta_1 + \lambda_3\lambda_1\beta_2 = \beta_1\beta_2\lambda_1 + \beta_2\beta_3\lambda_1 + \beta_3\beta_1\lambda_2 = 0 \qquad (4.1)$$

此外，由于 $hg \neq g^2$ 和 $gh \neq h^2$，我们可推得 $xy \neq x^2$ 和 $xy \neq y^2$。由于 $xy = e_+[(\lambda_2\beta_3 + \lambda_3\beta_2)x_1 + (\lambda_1\beta_3 + \lambda_3\beta_1)x_2 + (\lambda_2\beta_1 + \lambda_1\beta_2)x_3]$，利用（4.1）可知 $xy = e_+(-\lambda_2\lambda_3\beta_1\lambda_1^{-1}x_1 - \lambda_1\lambda_3\beta_2\lambda_2^{-1}x_1 - \lambda_1\lambda_2\beta_3\lambda_3^{-1}x_3)$。因此，若我们将 $z' = -xy$ 称为……，便可看出它的系数乘积等于 1。于是，对于$z = \frac{1}{2}z'^2$，我们得到 $z^2 = 2z$‘ 和 $(z^2)^2 = 4z$。并且可以验证，将 $x \mapsto \deg(e_+(x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3)) = g_1$、 $y \mapsto \deg(e_+(x_1 + \zeta^2 x_2 + \zeta x_3)) = g_2$以及 $z \mapsto \deg(e_+(x_1 + x_2 + x_3)) = (g_1g_2)^{-1}$ 对应起来的映射是一个同构，因此该分次与 $\Gamma(G,g,h)$ 同构。

若 $\deg(s) = h$，则与之前一样， $\mathcal{K}x_i$ 不能是分次子空间。

若所有满足 r_1、 r_2 和 r_3均非零的齐次元 $x = r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3$，则 x^2 在 $\mathcal{M}$ 中的投影为 $y = \overline{r_2r_3}x_1 + \overline{r_1r_3}x_3 + \overline{r_1r_2}x_3$，它是齐次的。若 r_1 和 r_2 不可逆，则它属于 $\mathcal{M}_\sigma$，其中 $\sigma = \pm$，于是会出现 $\deg(y) = \deg(sy)$，除非 $r_3 = 0$，否则这是不可能的。若 r_1 不可逆，但 r_2 和 r_3 可逆，我们使用 y 导出矛盾。因此，r_1、 r_2和 r_3 均可逆。利用映射 $\theta(\frac{1}{\sqrt{r_1\overline{r_1}}}\overline{r_1}, \frac{1}{\sqrt{r_2\overline{r_2}}}\overline{r_2})$，我们可以假设 r_1 和 r_2 是标量。若 $\deg(x) = g$，由于 $(x^2)^2 = (r_1r_2r_3)x$，我们可以假设 $r_3 \in \mathbb{F}s$ 或 $r_3 \in \mathbb{F}1$成立。由于可以进行数乘，我们不妨设 $r_1r_2r_3 = 1$ 或$r_1r_2r_3 = s$。在第一种情形和第二种情形下，若 $g^3h = e$，则可乘以 s并使用自同构 $\theta(s,s,\mathrm{id})$，从而归结为第一种情形。现在，要么存在一个这样的元素，其次数的阶为 3；要么存在 3 个线性无关元素，其次数为 3。在第二种情形下，由于 $\mathcal{K}$ 的维数为 2，必然存在一个次数为 3 的元素，使得 r_1、 r_2 或 r_3为 0，因此这里不予考虑。现在，由于 x、 x^2、 x^2x、 sx、 $s(x^2x)$在 $\mathcal{M}$ 上的投影张成 $\mathcal{M}$，必然有 $b(x,x^2) = 6r_1r_2r_3 \neq 0$，这意味着 $r_3 \in \mathbb{F}1$。现在，除去标量倍数，不妨设 $r_1r_2r_3 = 1$；我们可以验证，将$x \to x_1 + \zeta x_2 + \zeta x_3$映至相应元素的映射诱导出一个代数同构。因此， Γ 同构于 $\Gamma(G,h,g)$。

最后，我们将证明这就是所有可能的情形。事实上，若存在一个关于 r_1 和 r_2、次数为 g 的齐次元 $x = r_1x_1 + r_2x_2$，且 r_1 和 r_2 均不为 0，由于$x^2 = 2\overline{r_1r_2}x_3$ 必然成立，我们便得到 $r_1r_2 = 0$。因此，我们可以假设存在 λ_1、 $\lambda_2 \in \mathbb{F}$，使得 $x = \lambda_1e_+x_1 + \lambda_2e_-x_2$。此外， $sx = \lambda_1e_+x_1 - \lambda_2e_-x_2$也是次数为 gh 的齐次元。我们可以证明，所有满足 t_1、 t_2、 $t_3 \in \mathcal{K}$ 的齐次元$y = t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3$，其 t_1、 t_2 或 t_3 必有一个等于 0。否则，$xy = e_-\overline{t_2} + e_+\overline{t_3} + (e_+\overline{t_3})x_1 + (e_-\overline{t_3})x_2 + (e_-\overline{t_2} + e_+\overline{t_3})x_3$，所以 y 或 xy 的系数不可逆；按照前面的论证，这是不可能的。因此， $\mathcal{M}$ 中的所有齐次元都应具有如下形式： $\lambda_ie_\sigma x_i \pm \lambda_je_{-\sigma}x_j$，其中 $i \neq j$ 且 λ_i、 $\lambda_j \in \mathbb{F}$。最后，我们可以证明，若 $x = \lambda_1e_+x_1 + \lambda_2e_-x_2$ 是齐次的，则应存在 β_2、 $\beta_3 \in \mathbb{F}^\times$，使得 $y = \beta_2e_+ + \beta_3e_-$ 是齐次的。但由于 $xy = \lambda_2\beta_2e_- + \lambda_1\beta_2e_-x_3 + \lambda_2\beta_3e_+x_1$，这将意味着 e_- 是齐次的，因为 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{M}$ 是齐次子空间。然而，这与 $\deg(s)$ ≠$\deg(1)$ 这一事实矛盾。□

References

[Ali78] B.N. Allison, *A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras* **237** 1978 133 156 ，《数学年刊》（），–。[Ali91] B.N. Allison, *Construction of 3x3 matrix Lie algebra of type D4*, 《代数杂志》143（1991），63–92。[Ali90] B.N. Allison, *Simple structurable algebras of skew-dimension 1*, 《代数通讯》18（1990），1245–1279。

[AF84] B.N. Allison 和 J.R. Faulkner，*Cayley-Dickson process for a class of structurable algebras* **283** 1984 185 210 ，《美国数学会汇刊》（），–。[AC20] D. Aranda-Orna 和 A.S. Cordova-martinez *Gradings on tensor products of compositon algebras and on the Smirnov algebra* ，《线性代数及其应用》548（2020），1–36。[EK13] A. Elduque 和 M. Kochetov， *Gradings on simple Lie algebras*，《数学调查与专著》189，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯；大西洋数学科学研究协会（AARMS），新斯科舍省哈利法克斯，2013。

Departamento de Matemáticas e Instituto Universitario de Matemáticas y Aplica-ciones, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain*Email address*: victorblasco98@gmail.com

Departamento de Matemáticas e Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain*Email address*: albertodg@unizar.es