arXiv:2302.02413v1 [math.AP] 5 Feb 2023

¨具有不规则势的退化薛定谔方程

´DUVAN CARDONA、MARIANNA CHATZAKOU、JULIODELGADO 和 MICHAEL RUZHANSKY

Abstract. 本文通过引入适当的 H¨ormander 度量 g 和一个 g-权函数 m，研究了与 $\mathbb{R}^n$ 上具有不规则势的退化椭圆算子相关的一类退化薛¨定谔方程。我们证明了相应退化薛¨定谔方程和退化抛物方程的适定性。当退化椭圆算子具有次椭圆性时，我们推导出一类退化哈密顿量的谱性质。我们还研究了符号属于 $S(m^{-\beta}、g)$ 类的算子的 L^p 映射性质，其思路源自经典 Fefferman L^p-界在 $(\rho、\delta)$ 微积分中的应用。最后，在我们的 $S(m、g)$ 类中，我们还研究了 H¨ormander 平方和对应的薛¨定谔算子的锐 L^p-估计和 Schatten 性质。

Contents

1. 引言 2 1.1. 结构概述 2 1.2. 研究现状与贡献 3 2. 预备知识：Weyl-H¨ormander 演算 6 3. 适用于退化哈密顿量的 H¨ormander 度量 9 4. 退化 Schr¨odinger 方程与退化抛物方程适定性的一些应用 14 5. 退化算子的 L^p-界、 H^1-L^1 与 L^∞-BMO 估计 18 5.1. L^∞-BMO 与 H^1-L^1 有界性 18 5.2.L^p-有界性 26 6. H¨ormander 平方和对应的 Schr¨odinger 算子的改进 L^p 估计与 Schatten 性质 31 7. 哈密顿量的 Schatten-von Neumann 类 38 参考文献 41

2020年数学主题分类：35L80，47G30，35L40，35A27。关键词和短语：退化调和振子、退化椭圆算子、Schr¨odinger方程、 L^p-界、Schatten-von Neumann理想。作者得到FWO Odysseus 1资助G.0H94.18N：分析与偏微分方程项目以及根特大学特别研究基金（BOF）的Methusalem计划（资助编号01M01021）的支持。J. Delgado还获得了瓦列大学副校长研究资助CI 71329、MathAmSud以及哥伦比亚科学部MATHAMSUD21-MATH-03项目的支持。Marianna Chatzakou还获得了FWO研究员资助，编号12B1223N。Michael Ruzhansky还获得了英国工程与自然科学研究委员会资助EP/R003025/2。

1. Introduction

1.1. 结构概述。本文研究一类与如下哈密顿量相对应的退化 Schr¨odinger 方程： $\mathcal{H}_V = a_2(x,D) + V(x)$，其中 $a_2(x,D)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的二阶退化椭圆算子，而势 V 是 ∞ 处的实值可测二次阶函数。我们的分析涵盖以下情形：算子 $a_2(x,D)$ 的主符号 $a_2(x,\xi)$ 属于二阶 Kohn-Nirenberg 类；我们假设该算子为正，且其满足如下类型的估计

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_2(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{2-|\alpha|},\ (x,\xi)\in T^*\mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

注意，根据二阶自伴算子的谱理论，正性条件 $a_2(x,\xi)\geqslant 0$ 也涵盖了如下形式的微分算子：

$$a_2(x,D) = -\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f + \text{ lower order terms}, \qquad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1.2}$$

其系数 $a_{ij}\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ 属于实值光滑函数空间，这些函数及其所有导数在 $\mathbb{R}^n$ 上均一致有界，并且对每个 $x\in\mathbb{R}^n$.， $A(x)=(a_{ij}(x))$ 都是半正定矩阵。于是，我们的研究框架也包括 H¨ormander 次拉普拉斯算子

$$a_2(x,D) = -\sum_{j=1}^k X_j^2$$

它们是实向量场的平方和。对于微分算子 $a_2(x,\ D)$其符号如（1.1）所示，我们引入相空间上的度量 g ，其定义如下：

$$g_X(dx,d\xi) := \frac{(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)}{m(x,\xi)}\left(dx^2+\frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2+|x|^2}\right), \tag{1.3}$$

其中

$$m(x,\xi) = a(x,\xi)+\langle(x,\xi)\rangle, \tag{1.4}$$

with

$$a(x,\xi)=a_2(x,\xi)+|x|^2,\ X=(x,\xi),\ \langle(x,\xi)\rangle=(1+|x|^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

上述度量和权函数相对于 H¨ormander 条件是尖锐的：温和性、慢连续性和不确定性原理，这些条件定义了包含 Schr¨odinger 算子 $a_2(x,D)+|x|^2.$的 $S(m,g)$ 类

在确认我们处于合适的 $S(m\,g)$ 伪微分演算框架中后，也就是说，度量 g 确实是一个 H¨ormander 度量，且 m 是一个 g权函数。我们考虑V 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值 Borel 函数，使得对于适当的常数 $C\,C_1C_2>0$ $|V(x)|\leqslant C|x|^2$，对几乎处处的$|x|\geqslant C_1$ 和 $V(x)\geqslant -C_2$，对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$均成立。然后，利用 Weyl-H¨ormander 演算的工具，我们：

- 证明以下柯西问题在索伯列夫空间 $H(M\,g)$上的适定性:

$$\begin{cases} i\partial_t u &= \mathcal{H}_V u, \\ u(0) &= f. \end{cases} \tag{1.5}$$

- 我们分析如下形式的退化抛物方程的适定性

$$\begin{cases} \partial_t u &= \mathcal{H} u, \\ u(0) &= f, \end{cases} \tag{1.6}$$

  on $L^2(\mathbb{R}^n)$. 哈密顿量 $\mathcal{H}$ 被认为是不规则的。

- 我们建立了关于其度量为 g, 权重数理论 m ，分别如式 (1.3) 和式 (1.4) 所示。此外，当 ε 且 $a_2(x,\ D)$ 是 H¨ormander 次拉普拉斯算子的主符号时，我们给出了尖锐指标L^p。由此，在这种情况下，我们获得了退化薛定谔型算子的负幂的 ¨-有界性。

- 我们研究算子属于类 $S(m^{-\mu}, g)$以及 Schatten-von Neumann 类 $S_r(L^2(\mathbb{R}^n))$. 的情形。由此获得了一类薛定谔¨型算子的特征值分布信息，以及其特征值的增长率。

1.2. 研究现状与贡献。 近几十年来，人们一直积极研究哈密顿量在薛¨定谔半群与热半群之间的相互作用，以分析哈密顿量在 L^p 空间上的特征函数的行为。这一研究始于 B. Simon 和 Carmona 的开创性工作 [76], [77], [75], [17]。另见 [1], [53], [57] ，了解这一问题的进一步进展。因此，本文对 L^2 情形的阐述在某种程度上秉承了相同的思路。我们还将通过分析 Schatten-von Neumann 类，获得形如$\mathcal{H}_V + J_{\langle(x,\ \xi)\rangle}$的哈密顿算子的谱性质，其中 $J_{\langle(x,\ \xi)\rangle}$是符号为 $\langle(x,\xi)\rangle$ 的伪微分算子；为保证离散谱的存在，我们需要对 ∞ 处的势 V施加某种增长条件，这与经典椭圆理论中薛¨定谔算子的情形众所周知。比如，若 $V = |x|^2.$ ，这将是典型情形。我们通过研究此类算子在适当 Schatten-von Neumann 类中的负幂，获得 $\mathcal{H}_V + J_{\langle(x,\ \xi)\rangle}$ 的谱性质。

为避免对本文及相关 Schr¨odinger 方程研究中简并术语的误解，我们在此回顾几点。在 Schr¨odinger 方程的研究中，通常以另一种含义使用“简并”一词。具体而言，在量子力学中，如果量子系统的某个能级 E 对应两个或更多状态，就称该能级为简并能级。该情境下，对应于 E 的不同状态数称为该能级的简并度。Y. Morimoto 在 [68] 中研究了退化 Schr¨odinger 算子的亚椭圆性和 L^2 估计，这是对 C. Fefferman[44]开创性著作第二章定理 4 的推广。

迄今为止，我们的结果有一个重要特点：我们没有对算子 $a_2(x,D)$施加任何次椭圆性条件，因此例如允许平方和不满足 H¨ormander 条件的情形，尤其是无限退化椭圆算子。显然，我们的度量既不满足所谓的强不确定性原理（[6], [71], [72]），也不满足 Beals 条件（[2],[3]），因而无法保证 L^p 符号属于 $S(1,g)$的算子有界性；从其他角度来看，这使得它在某种程度上具有病态性。

此外，我们还建立了退化抛物方程的适定性，其中

$$a_2(x,D) = -\sum_{j=1}^{k} X_j^2$$

为实向量场的平方和时，我们还证明了退化抛物型方程的适定性。我们还将上述关于哈密顿量正幂的适定性结果进行了推广。进一步地，通过利用度量 g ([62], [9]) 所谓的测地温和性，并假设 $a_2(x\,D)$ 是次椭圆的，我们证明了

$$\mathcal{H}_V + C : H(m,g) \to L^2(\mathbb{R}^n), \tag{1.7}$$

当 $C > 0$ 足够大时是一个同构。

特别地，可以考虑 $a_2(x、\ \xi)$ 为平方和的符号这一重要情形

$$L = -\sum_{j=1}^{k} X_j^2,$$

其中 X_j 是 $\mathbb{R}^n$上的实向量场。在 $n = 2$的情形下，我们将给出 L^p 界的改进版本，这得益于当 ¨时对 H $a_2(x$ 条件的具体了解，$\xi) = \xi_1^2 + \tilde{x_1}^2\xi_2^2$，其中 $\tilde{x_1}$ 由（1.9）给出。所研究的（重缩放）算子现在表示如下

$$a(x,D) := -(\partial_{x_1}^2 + \tilde{x}_1^2\partial_{x_2}^2) + |x|^2\,, \tag{1.8}$$

归结为所谓退化薛定谔算子的一个特例，也称为退化谐振子。为了说明使用“退化谐振子”这一术语的合理性，我们来考虑 $\tilde{x}_1 \equiv 1$ 的情形；在这种情况下，作用于 $\mathbb{R}^2$ 上的二阶微分算子为

$$a(x,D) = -(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) + |x|^2$$

对应于 $\mathbb{R}^2$上的量子谐振子；例如参见专著[70]。在由（1.8）描述的退化情形中，这些算子由一族适当的光滑函数参数化，$\tilde{x}_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ 它们满足

$$\tilde{x}_1 := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_1)\, x_1, & |x_1| \leqslant 2 \\ c' \operatorname{sgn}(x_1), & |x_1| \geqslant 4. \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 $c' \in \mathbb{R}$，且 $c' \neq 0$。

我们的下一个目标是在 $S(m^{-t},g)$ 类中，对退化薛定谔算子的负幂的定性 L^p 映射性质进行数学研究。关于其他方向的分析工作，

退化薛¨定谔方程；例如参见 Doi [40, 41], Hara [46], Ichi-nose [55, 56], Hiroshi 和 Kajitani [47], Mizohata [67] 以及 Takeuchi [79] 及其中的参考文献。

L^∞-BMO、H^1-L^1 以及 L^p-有界性将在第5节中研究，并将 Fefferman [42]中的估计推广到我们的情形。值得指出的是，在研究 L^p 类 $S(m,g)$ 伪微分算子的有界性时，必须考虑 Beal条件。事实上，R. Beals 在 [2]和 [3] 中刻画了 H¨ormander 度量 g，它们保证了算子在 $OpS(1,g)$ 和 $1<p<\infty$ 中的 L^p 有界性。对于分裂度量$g_{x,\ \xi}(z,\theta)=g_{x,\ \xi}(z,0)+g_{x,\ \xi}(0,\theta)$，Beals 发现的条件为

$$g_{x,\xi}(0,\theta)\leqslant C.$$

对于$S^0_{\rho,\ \delta}$类，Beals条件不过是众所周知的限制条件 $\rho=1$。对于我们的度量 g，该条件等价于不等式

$$g_{\tilde{x},\tilde{\xi}}(0,\xi)=\frac{|\xi|^2}{a(x,\xi)+\langle X\rangle}\leqslant C,$$

除非 a 是椭圆的，否则该结论不成立。由于我们关注的是退化情形，因此对于 $OpS(1,g)$ 中的算子，我们无法得到 L^p 有界性。不过，对于以 $p=2$为中心的某些区间，以及由 (1.4) 定义的权函数 $m(x,\xi)$ 的适当负幂，可以得到 L^p 有界性。在 $\rho<1$ 且属于 $S^{-t}_{\rho\,\delta}$ 类的情形下，后者是众所周知的结果，并由 Fefferman（[42]）证明。关于 Fefferman有界性定理 [42]在 $S(m,g)$-类中的其他推广，本文作者之一已在 [20, 26]中证明。Fefferman 的结果向其他非交换结构的推广见 [15] 和 [34]。谐振子背景下的 L^p-有界性已在[16]中得到研究。

关于 Op$(S(m^{-t},g))$ 这一类的有界性性质，我们发现了以下事实。对于微分算子的非负符号 $a_2=a_2(x,\xi)\in S^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，有：

- If $\frac{3}{4}\leqslant\beta<1$, then $\mathrm{Op}(S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g))\subset\mathscr{B}(L^\infty(\mathbb{R}^n),BMO(\mathbb{R}^n))$.
- 若 $0\leqslant\beta<\frac{3}{4}$且 $\sigma(x,D)\in$ Op$(S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g))$，则 $\sigma(x,D)$：$L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ 可延拓为有界算子，前提是

$$\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{n}{2}\beta. \tag{1.10}$$

本文结构安排如下。在第 2节，我们将介绍本文所需的伪微分算子理论背景，尤其是关于 Weyl-H¨ormander 类的一些基础知识。第 3节中，除其他结果外，我们证明了在 (g 1.3) 中定义的度量 ¨是一个 H m ormander 度量，而权函数 g确实是一个 m -权函数。第 4 节将介绍其在退化 Schr¨odinger 算子和退化抛物方程适定性方面的一些应用，正如上文在 L^2-框架下所概述的那样。第

5 和 6 节专门研究如上所述的类 L^p 的有界性。本文最后在第 $S(m^{-\beta}$节中 $g)$, 推导出关于退化 Schr7 odinger 算子谱性质的一些推论。¨

2. Preliminaries: Weyl-Hörmander calculus

本节概述一些关于 Weyl 量子化和 Weyl-H¨ormander 演算的预备知识。为此，我们将遵循 H¨ormander [52,第 18 节。5]以及 [62]的第 2 章。

$a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 的 Weyl 量子化是算子 $a(x,D)$: $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ，其弱意义下的定义由对称表达式给出

$$a^w(x,D)u(x) := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle} a((x+y)/2,\xi)u(y)dyd\xi,\ u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

$a(\cdot,\cdot)$ 的 Weyl 量子化是 τ量子化在 $a(\cdot,\cdot)$上的特例，对 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$定义为

$$a^\tau(x,D)f(x) := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle} a(\tau x+(1-\tau)y,\xi)u(y)dyd\xi,$$

它也在弱意义下定义。因此， $a(\cdot,\cdot)$ 的 Weyl 量子化是 $a(\cdot,\cdot)$的 $(1/2)$量子化，即 $a^{\frac{1}{2}}(x,D) = a^w(x,D)$.。 $a(\cdot,\cdot)$的 1-量子化（Kohn-Nirenberg 量子化）还原了与“符号” $a(\cdot,\cdot)$ 相关的伪微分算子的通常定义：

$$a(x,D)u(x) \equiv a^1(x,D)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi,$$

其中，两种表示等价，是因为傅里叶变换是 Schwartz 空间上的同构，这意味着$\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 这里我们滥用记号，将 $a(x,\xi)\widehat{u} := a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)$记作 $a(\cdot,\cdot)$ ；当分布 a与某个局部可积函数一致时，这样的写法是有意义的。对于 $b \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \tau$ 和 $\tau' \leqslant 1$, $a^\tau(x,$ 等式 $D) =$,$b^{\tau'}(x\,D)$,成立，当且仅当

$$a(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle \xi-\eta,z\rangle} b(x+(\tau'-\tau)z,\eta)d\eta,$$

这意味着我们总可以通过半群 $(J_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 从一种量子化方式转换到另一种，其定义如下：

$$J_t a(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle \xi-\eta,z\rangle} b(x+tz,\eta)dyd\eta,$$

其满足 $J_{t+s} = J_tJ_s$, $t,s \in \mathbb{R}$. 特别地，对于 a的 Weyl 量子化和 Kohn-Nirenberg 量子化，分别有

$$a(x,D) = (J_{1/2}a)^w(x,D), \quad a^w(x,D) = (J_{-1/2}a)(x,D).$$

注记 2.1（Weyl 量子化的伴随）。 以下显著性质： $a^w(x,\ D)^* = \overline{a}^w(x,\ D)$, 意味着 $a^w(x,\ D)^* = a^w(x,\ D)$ 对于实值符号成立；这也是赫尔曼 · 外尔为量子力学的目的引入这种量子化的原因之一（见 H¨ormander [52, 页151]）。另一项重要性质是其辛不变性，此处不再讨论。

注 2.2（Weyl 量子化中的复合）。我们将 $X = (x, \xi)$（或 $Y = (y, \eta)$ 等）表示相空间 $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$（分别为 $\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\eta$).）中的点。Weyl 量子化中的复合 $a^w \circ b^w(x, D) \equiv a^w(x, D) \circ b^w(x, D)$ 与 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = T^*\mathbb{R}^n$ 的辛结构有关。事实上，对于 $a, b \in S(\mathbb{R}^n)$，定义

$$(a\#b)(X) := \frac{1}{\pi^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-2i\sigma(X-Y_1, X-Y_2)} a(Y_1) b(Y_2) dY_1 dY_2,$$

其中 $\sigma(X, Y) := \langle y, \xi\rangle - \langle x, \eta\rangle$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$. 上的辛形式。于是，就运算 # 而言，我们有 $a^w(x, D) \circ b^\omega(x, D) = (a\#b)^\omega(x, D)$。

为了引入 Weyl-H¨ormander 微积分，我们需要 H¨ormander 度量这一概念。原因之一是，如果我们想研究某个算子 L的性质，就可以为 L 它关联这种度量。

定义 2.3（H¨ormander 度量）。对于 $X \in \mathbb{R}^{2n}$，设 $g_X(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$上的一个正定二次型。若满足以下三个条件，则称 $g(\cdot)$ 为 H¨ormander 度量：

i. 连续性或缓变性。存在常数 $C > 0$ ，使得

$$g_X(X - Y) \leqslant C^{-1} \Longrightarrow \left(\frac{g_X(T)}{g_Y(T)}\right)^{\pm 1} \leqslant C,$$

对所有 X、$Y \in \mathbb{R}^{2n}$、 $T \in \mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$，均有。

ii. 不确定性原理。根据辛形式 $\sigma(Y$、 $Z) :=\langle z$、 $\eta\rangle - \langle y$、 $\zeta\rangle$，定义

$$g^\sigma_X(T) := \sup_{W \neq 0} \frac{\sigma(T, W)^2}{g_X(W)}. \tag{2.1}$$

若 g 满足不确定性原理，则

$$\lambda_g(X) = \inf_{T \neq 0} \left(\frac{g^\sigma_X(T)}{g_X(T)}\right)^{1/2} \geqslant 1,$$

对所有 X、$T \in \mathbb{R}^{2n}$。

iii. 温和性。若存在 $\overline{C} > 0$ 和 $J \in \mathbb{N}$ 使得 g 满足温和性，则称 g 为温和的。

$$\left(\frac{g_X(T)}{g_Y(T)}\right)^{\pm 1} \leqslant \overline{C}(1 + g^\sigma_Y(X - Y))^J,$$

对所有 $X, Y, T \in \mathbb{R}^{2n}$。

设 g 为一个 H¨ormander 度量。与 g 相关联的不确定性参数或普朗克函数定义为

$$h_g(X)^2 = \sup_{T\neq 0} \frac{g_X(T)}{g_X^{\sigma}(T)}.$$

注意，由于 $h_g(X) = (\lambda_g(X))^{-1}$，不确定性原理可转化为条件

$$h_g(X) \leqslant 1.$$

定义2.4（g-权）。设 M： $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^+$ 是一个函数。那么，

- 我们称 M 是 g-连续的，如果存在 $C > 0$ 使得

$$g_X(X-Y) \leqslant \frac{1}{\tilde{C}} \Longrightarrow \left(\frac{M(X)}{M(Y)}\right)^{\pm 1} \leqslant \tilde{C}\,.$$

对所有 X， $Y \in \mathbb{R}^{2n}$。

- 我们称 M 是 g-温和的，如果存在 $C > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left(\frac{M(X)}{M(Y)}\right)^{\pm 1} \leqslant \tilde{C}(1 + g_Y^{\sigma}(X-Y))^N\,,$$

对所有 $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$。

若 M 是 g-权函数，且它是 g-连续并且 g-温和的。

现在我们可以定义适用于 H¨ormander 度量 g 和 g-权函数 M 的符号类。

定义2.5。对于 H¨ormander 度量 g 和 g-权函数 M，类 $S(M,g)$ 由所有光滑函数 $\sigma \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ 组成，且满足：对任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $C_k > 0$，使得对所有 $X, T_1, ..., T_k \in \mathbb{R}^{2n}$，我们有

$$|\sigma^{(k)}(X; T_1 \otimes \cdots \otimes T_k)| \leqslant C_k M(X) \prod_{i=1}^{k} g_X^{1/2}(T_i)\,. \tag{2.2}$$

记号 $\sigma^{(k)}$ 表示 σ 和 $\sigma^{(k)}(X$ 的 k^{th} 阶导数；$T_1, ..., T_k)$ 表示 a 在 X 处沿方向 $T_1, ..., T_k$ 的 k^{th} 阶导数张量。对于 $\sigma \in S(M,g)$，我们用 $\| \sigma \|_{k,S(M,g)}$ 表示满足上述不等式的最小 C_k。类 $S(M,g)$ 成为一个 Fr´echet 空间，并配备半范数族 $\|\cdot\|_{k,S(M,g)}$。

魏尔量子化在 Sobolev空间上的作用由以下定理确定（参见 [8]）。

定理 2.6. 设 g 为一个 H¨ormander 度量， M_1、 M_2 为两个 g-权函数。那么对于任意 $a \in S(M$、 $g)$，我们有

$$a^{\tau}(x,D) : H(M_1, g) \longrightarrow H(M_1/M, g)\,,$$

对所有 τ，均存在有界延拓。由于 $H(1$、 $g) = L^2$，在特殊情形 $M_1 = M$、 a^{τ} 下：$H(M$、 $g) \longrightarrow L^2$，存在有界延拓。

关于伪微分算子的一般性质以及 L^p 和 H¨older 有界性，请读者参阅 Beals [2, 3] 以及较新的著作[20, 26]和 [13]。

3. The Hörmander metric adapted to the degenerate Hamiltonian

受算子族（1.8）研究的启发，本节将研究与更广泛的一类伪微分算子相关的广义度量（3.1），其符号如（1.7）所示。特别地，在引理3.7 中，我们证明 $a \in S(m,\ g)$ 对于 $m,\ g$ 如下面的定理所述，该定理适用于 $\mathbb{R}^n$上的一般情形。

定理3.1. 设 $a_2 \in S^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 为非负的 $(\geqslant 0)$。我们在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$上定义如下黎曼度量，

$$g_X(dx, d\xi) := m^{-1}(x,\xi)(\langle\xi\rangle^2 + |x|^2)dx^2 + m^{-1}(x,\xi)d\xi^2\,, \tag{3.1}$$

其中

$$m(x,\xi) = a(x,\xi) + \langle X\rangle, \tag{3.2}$$

且符号 a 定义为

$$a(x,\xi) = a_2(x,\xi) + |x|^2\,. \tag{3.3}$$

则 g 是一个H ¨ormander度量。

在给出证明之前，下面的不等式将有助于证明度量 g 的连续性；该不等式可通过简单地运用二阶泰勒公式得到。

命题3.2. 设 f 是 $C^2(\mathbb{R})$中的非负函数。则

$$(f'(t))^2 \leqslant \|f''\|_{L^\infty} f(t),\ \textit{for all}\ t \in \mathbb{R}.$$

此外，下面的引理将用于简化度量的连续性和温和性的证明。

引理 3.3. 设 g_s 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的黎曼度量，定义为

$$(g_s)_X := dx^2 + \frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2 + |x|^2}.$$

则 g_s 是一个 H ¨ormander 度量。

证明. 由于 $1 \leqslant \langle\xi\rangle^2 + |x|^2$，且 $g_s^\sigma(dx、\ d\xi) = (\langle\xi\rangle^2 + |x|^2)dx^2 + d\xi^2$，故不确定性原理成立。

注意到

$$(G_s)_X(dx, d\xi) := \frac{dx^2}{1 + |\xi|^2 + |x|^2} + \frac{d\xi^2}{1 + |\xi|^2 + |x|^2} \leqslant C(g_s)_X.$$

由于权函数 $1 + |\xi|^2 + |x|^2$ 关于 Shubin 度量G_s连续，因此它关于 g_s也连续。由此可知， g_s 连续。

为证明 g_s的温和性，我们将看到

$$\frac{\langle\xi\rangle^2 + |x|^2}{\langle\eta\rangle^2 + |y|^2} \leqslant C((g_s)_Y^\sigma(X - Y) + 1)^N,$$

对于适当的 C、N。

我们注意到

$$\frac{\langle\xi\rangle^2+|x|^2}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}=\frac{\langle\xi\rangle^2+|x|^2-\langle\eta\rangle^2-|y|^2}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}+1=\frac{\langle\xi\rangle^2-\langle\eta\rangle^2+|x|^2-|y|^2}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}+1.$$

Now

$$\frac{\langle\xi\rangle^2-\langle\eta\rangle^2}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}\leqslant C\frac{(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}\leqslant C(|\xi-\eta|^2+1)\leqslant C((g_s)_Y^\sigma(X-Y)+1). \quad (3.4)$$

另一项 $\frac{|x|^2-|y|^2}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}$ 可以用类似的方法估计。因此， g_s 是温和的，由此完成引理的证明。□

证明。 (定理 3.1的证明。) 不确定性原理可由下式推出

$$\langle\xi\rangle^2+|x|^2\leqslant(a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle)^2,$$

这显然成立。

为证明连续性，我们注意到

$$g_X=\frac{\langle\xi\rangle^2+|x|^2}{a_2+|x|^2+\langle X\rangle}\left(dx^2+\frac{d\xi^2}{\langle\xi\rangle^2+|x|^2}\right)\geqslant C'(g_s)_X\geqslant C(G_s)_X, \quad (3.5)$$

因为 $\frac{\langle\xi\rangle^2+|x|^2}{m(X)}\geqslant C'$，且其中 G_s 是引理3.3证明中的 Shubin 度量。但 $\langle\xi\rangle^2+|x|^2$ 是相对于 G_s的连续权函数，因此相对于 g 也同样成立。

g的连续性现在归结为研究比值 $\frac{m(X)}{m(Y)}$，而这又可归结为分析$\frac{m(X)-m(Y)}{m(Y)}$。

因此，我们首先注意到

$$m(X)-m(Y)=(a_2(X)-a_2(Y))+|x|^2-|y|^2+\langle X\rangle-\langle Y\rangle.$$

对于项 $a_2(X)-a_2(Y)$，我们使用二阶泰勒不等式:

$$|a_2(X)-a_2(Y)-da_2(Y)\cdot(X-Y)|\leqslant C\sup_{t\in[0,1]}|d^2a_2(Y+t(X-Y))\cdot(X-Y)^2|.$$

由于 $a_2\in S^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\sup_{t\in[0,1]}|d^2a_2(Y+t(X-Y))\cdot(X-Y)^2|\leqslant C(\langle\eta\rangle^2|x-y|^2+|\xi-\eta|^2).$$

另一方面，由命题3.2 应用于 a_2的偏导数可得

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]}|da_2(Y+t(X-Y))\cdot(X-Y)|\leqslant&C(|\partial_xa_2(Y)\cdot(x-y)|+|\partial_\xi a_2(Y)\cdot(\xi-\eta)|.\\ \leqslant&Ca_2^{\frac12}(Y)\langle\eta\rangle|x-y|+Ca_2^{\frac12}(Y)|\xi-\eta|.\end{aligned}$$

因此

$$|a_2(X)-a_2(Y)|\leqslant C(a_2^{\frac12}(Y)\langle\eta\rangle|x-y|+a_2^{\frac12}(Y)|\xi-\eta|+\langle\eta\rangle^2|x-y|^2+|\xi-\eta|^2).$$

Now

$$\frac{|a_2(X)-a_2(Y)|^2}{m^2(Y)}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{a_2(Y)\langle\eta\rangle^2|x-y|^2}{(a+\langle Y\rangle)^2}+\frac{a_2(Y)|\xi-\eta|^2}{(a+\langle Y\rangle)^2}+\frac{\langle\eta\rangle^4|x-y|^4}{(a+\langle Y\rangle)^2}+\frac{|\xi-\eta|^4}{(a+\langle Y\rangle)^2}\right)$$

$$\leqslant C\left(\frac{(\langle\eta\rangle^2+|y|^2)|x-y|^2}{a+\langle Y\rangle}+\frac{|\xi-\eta|^2}{a+\langle Y\rangle}\right)+C\left(\frac{(\langle\eta\rangle^2+|y|^2)^2|x-y|^4}{(a+\langle Y\rangle)^2}+\frac{|\xi-\eta|^4}{(a+\langle Y\rangle)^2}\right)$$

$$\leqslant C(g_Y(X-Y)+(g_Y(X-Y))^2).$$

所以

$$\frac{|a_2(X)-a_2(Y)|}{m(Y)}\leqslant C\left(g_Y(X-Y))^{\frac{1}{2}}+g_Y(X-Y)\right). \tag{3.6}$$

对于项 $\frac{\langle X\rangle-\langle Y\rangle}{m(Y)}$，注意到 $|\langle X\rangle-\langle Y\rangle|\leqslant C(||\xi|-|\eta||+||x|-|y||)$。我们有

$$\frac{(|\xi|-|\eta|)^2}{m^2(Y)}\leqslant\frac{|\xi-\eta|^2}{m^2(Y)}\leqslant\frac{|\xi-\eta|^2}{a+\langle Y\rangle}\leqslant Cg_Y(X-Y).$$

我们还有

$$\frac{(|x|-|y|)^2}{m^2(Y)}\leqslant\frac{|x-y|^2}{m^2(Y)}\leqslant\frac{(\langle\eta\rangle^2+|y|^2)|x-y|^2}{a+\langle Y\rangle}\leqslant Cg_Y(X-Y).$$

Thus

$$\frac{|\langle\xi\rangle-\langle\eta\rangle|}{m(Y)}\leqslant C(g_Y(X-Y))^{\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

项 $\frac{||x|^2-|y|^2|}{m(Y)}$ 可以用类似的方法分析，得到

$$\frac{||x|^2-|y|^2|}{m(Y)}\leqslant C\frac{|x-y|^2+|y|^2}{m(Y)}\leqslant C\left(\frac{(\langle\eta\rangle^2+|y|^2)|x-y|^2}{m(Y)}+1\right)=C(g_Y(X-Y)+1). \tag{3.8}$$

由（3.6）、（3.7）和（3.8），可得

$$\frac{m(X)}{m(Y)}\leqslant C(g_Y(X-Y)+g_Y^{\frac{1}{2}}(X-Y))+1)\leqslant C(g_Y(X-Y)+1). \tag{3.9}$$

因此，度量 g 是连续的。

为了证明 g的温和性，我们首先注意到，根据引理3.3的证明，利用（3.4）中的第一个不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{|\langle\xi\rangle^2-\langle\eta\rangle^2|}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}\leqslant&\quad C\left(\tfrac{|\xi-\eta|^2}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}+1\right)\\ \leqslant&\quad C\left(\tfrac{a(Y)+\langle Y\rangle}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}|\xi-\eta|^2+1\right)\\ \leqslant&\quad C(g_Y^\sigma(X-Y)+1).\end{aligned}$$

类似地，对于项 $\frac{|x|^2-|y|^2}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}$，我们有

$$\frac{||x|^2-|y|^2|}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}\leqslant\quad C\left(\tfrac{|x-y|^2}{\langle\eta\rangle^2+|y|^2}+1\right)$$

$$\begin{aligned} &\leqslant C\left((a(Y)+\langle Y\rangle)|x-y|^2+1\right)\\ &\leqslant C(g_Y^\sigma(X-Y)+1). \end{aligned}$$

另一方面，对于比值$\frac{m(X)}{m(Y)}=\frac{a(X)+\langle X\rangle}{a(Y)+\langle Y\rangle}$，注意到由（3.9）且由于 $g\leqslant g^\sigma$，可得

$$\frac{m(X)}{m(Y)}\leqslant C(g_Y(X-Y)+1)\leqslant C(g_Y^\sigma(X-Y)+1). \tag{3.10}$$

因此， g 是温和的，我们由此得证。 □

由（3.10）可知 m 确实是一个 g-权函数。

推论 3.4。函数 m 由(3.2) 给出，是关于度量 g （定义见(3.1)）的 g-权函数。

引理 3.5。设考虑 H ¨ormander 度量 g，其定义见(3.1)，以及g-权函数（见(3.2)）。那么，光滑符号 $\sigma:=\sigma(x,\ \xi)\in S(m,\ g)$ 当且仅当

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}m^{1-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{|\beta|}{2}}(X)(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)^{\frac{|\beta|}{2}}. \tag{3.11}$$

证明。H¨ormander 度量由下式给出:

$$g_X(dx,d\xi):=m^{-1}(x,\xi)(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)dx^2+m^{-1}(x,\xi)d\xi^2. \tag{3.12}$$

类 $S(m,g)$ 由所有满足以下条件的光滑函数组成：对于任意$k\in\mathbb{N}$，存在 $C_k>0$，使得对于所有 $X,T_1,...,T_k\in\mathbb{R}^{2n}$，我们都有

$$|\sigma^{(k)}(X;T_1\otimes\cdots\otimes T_k)|\leqslant C_km(X)\prod_{i=1}^k g_X^{1/2}(T_i). \tag{3.13}$$

因此， $\sigma\in S(m,g)$当且仅当对于每个 $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$和每个 $\beta\in\mathbb{N}_0^n$，我们都有

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta}m(x,\xi)\left(m^{-1}(x,\xi)(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)\right)^{\frac{|\beta|}{2}}(m^{-1}(x,\xi))^{\frac{|\alpha|}{2}},$$

由于关于 x的任意偏导数在任意典范方向 x_i上，在(3.13)的右端以因子

$$\left(m^{-1}(x,\xi)(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

此外，关于 ξ的任意偏导数在任意典范方向 ξ_j上，在(3.13)的右端以因子

$$\left(m^{-1}(x,\xi))\right)^{\frac{1}{2}}.$$

注意到

$$\begin{aligned} &m(x,\xi)\left(m^{-1}(x,\xi)(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)\right)^{\frac{|\beta|}{2}}m^{-1}(x,\xi)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\\ &=m(x,\xi)^{1-\frac{|\beta|}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)^{\frac{|\beta|}{2}}, \end{aligned}$$

我们得出引理 3.13的证明。 □

现在，我们将注意力限制在二阶微分算子的非负符号 a_2 上。

定义 3.6。令 $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 函数类，这些函数的任意阶导数均有界。我们用 Diff $_+^2(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上系数为 $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且符号为非负符号的二阶微分算子类。

引理3.7. 设 $a_2(x,\ D) \in$ 属于 Diff $_+^2(\mathbb{R}^n)$。我们考虑 $a(x,\ \xi) = a_2(x,\ \xi) + |x|^2$以及相应的 H ¨ormander 度量 g 和权函数 m ，如 (3.1) 和(3.2)中所述。于是 a, $m \in S(m,\ g)$。

证明。我们首先考虑 a 属于 $S(m,g)$的情形。我们要证明，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，存在 $C_k > 0$，使得对于所有 $X, T_1, \cdots, T_k \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$|(a^{(k)}(X); T_1 \otimes T_2 \otimes \cdots \otimes T_k)| \leqslant C_k m(X) \prod_{j=1}^{k} g_X^{\frac{1}{2}}(T_j).$$

按照惯例，这些估计可归结为典范方向上的估计，而后者等价于以下符号不等式（见引理 3.5）：对于所有 α, β, 存在 $C_{\alpha\beta} > 0$ 使得

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} m^{1-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{|\beta|}{2}}(X)(\langle\xi\rangle^2 + |x|^2)^{\frac{|\beta|}{2}}.$$

我们还将证明 $m \in S(m,g)$. 我们写作

$$T = (t,\tau) = (t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

我们注意到，由度量的定义 g 可得

$$\frac{(\langle\xi\rangle^2 + |x|^2)}{m(X)}|t|^2 \leqslant g_X(T); \quad \frac{|\tau|^2}{m(X)} \leqslant g_X(T).$$

Then

$$\frac{|t_i|}{g_X^{\frac{1}{2}}(T)} \leqslant \frac{m^{\frac{1}{2}}(X)}{(\langle\xi\rangle^2 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad \frac{|\tau_j|}{g_X^{\frac{1}{2}}(T)} \leqslant m^{\frac{1}{2}}(X).$$

对于 $k = 1$，我们将对符号$a_2 \in S^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$的偏导数应用命题 3.2 $a_2 \in S^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$。由于 $\partial_{x_i} a(X) = \partial_{x_i} a_2(X) + 2x_i$，我们有

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i} a(X)| \frac{1}{m(X)} \frac{m^{\frac{1}{2}}(X)}{(\langle\xi\rangle^2 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} &\leqslant C \frac{a_2^{\frac{1}{2}}(X)\langle\xi\rangle + |x_i|}{m^{\frac{1}{2}}(X)(\langle\xi\rangle^2 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\leqslant C \frac{a_2^{\frac{1}{2}}(X)\langle\xi\rangle}{m^{\frac{1}{2}}(X)\langle\xi\rangle} + C \frac{|x_i|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant C. \end{aligned}$$

另一方面，由于 $\partial_{\xi_j} a(X) = \partial_{\xi_j} a_2(X)$，我们有

$$|\partial_{\xi_j} a(X)| \frac{1}{m(X)} m^{\frac{1}{2}}(X) \leqslant C \frac{a_2^{\frac{1}{2}}(X)}{m^{\frac{1}{2}}(X)} \leqslant C.$$

If $k = |\alpha| + |\beta| \geqslant 2$，我们将利用 a_2 属于类 $S^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 这一事实).

我们首先注意到，如果 $|\alpha| = 0$，那么 $|\beta| \geqslant 2$ 且

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| = |\partial_x^\beta (a_2(x,\xi) + |x|^2)| \leqslant C_1\langle\xi\rangle^2 + C_2 \leqslant C\langle\xi\rangle^2.$$

如果 $0<|\alpha|\leqslant 2$，则有

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)|=|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a_2(x,\xi)|\leqslant C\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|}.$$

因此，对于 $0\leqslant|\alpha|\leqslant 2$，我们得到

$$\begin{aligned}|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| &\leqslant C_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|}\\ &\leqslant C_{\alpha\beta}(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)^{1-\frac{|\alpha|}{2}}\\ &= C_{\alpha\beta}\ m(X)(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)^{\frac{|\beta|}{2}}m^{-\frac{|\beta|}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)^{1-\frac{|\beta|}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}m^{-1+\frac{|\beta|}{2}+\frac{|\alpha|}{2}}\\ &\leqslant C_{\alpha\beta}\ m(X)(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)^{\frac{|\beta|}{2}}m^{-\frac{|\beta|}{2}-\frac{|\alpha|}{2}},\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了 $\left(\frac{m(X)}{\langle\xi\rangle^2+|x|^2}\right)^{\frac{|\alpha|+|\beta|-2}{2}}\leqslant C$ 这一事实，因为 $m(X)\leqslant C(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)$. 这就给出了 $0\leqslant|\alpha|\leqslant 2$ 的正确估计。

对于 $|\alpha|\geqslant 3$ 的情形，我们注意到，由于 $a_2(x,\ D)$ 是一个二阶微分算子，因此有

$$\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)=\partial_\xi^\alpha a_2(x,\xi)=0.$$

因此，$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\ \xi)=0$，证明得证。

为了说明 $\langle X\rangle\in S(m,\ g)$，我们注意到 $\langle X\rangle$ 是关于度量 G_s 的正则权重。于是

$$\langle X\rangle\in S(\langle X\rangle,G_s)\subset S(\langle X\rangle,g)\subset S(m,g). \tag{3.14}$$

我们还用到了 $\langle X\rangle$ 是一个 g–权函数这一事实。

因此，$m=a+\langle X\rangle\in S(m,g)$。 □

在 $a_2(x$的特殊情形下，$\xi)=\xi_1^2+\tilde{x_1}^2\xi_2^2$，因此我们有以下性质。

推论 3.8。度量 g 由 (3.1) 给出，其中 $a_2(x,\ \xi)=\xi_1^2+\tilde{x_1}^2\xi_2^2$，是定义在 ¨ 上的 H $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ ormander 度量，$m(X)=\xi_1^2+\tilde{x_1}^2\xi_2^2+|x|^2+\langle X\rangle$ 是一个 g-权函数，且$\xi_1^2+\tilde{x_1}^2\xi_2^2+|x|^2$，$m=\xi_1^2+\tilde{x_1}^2\xi_2^2+|x|^2+\langle X\rangle\in S(m,\ g)$.

4. Some applications to well-posedness for degenerate Schrödinger and degenerate parabolic equations

现在，我们将在 L^2 和 Sobolev 空间 $H(M$、$g)$ 的背景下确立一些推论。事实上，为适用于我们的退化谐振子而构造的度量 g 和类 $S(m$、$g)$，还带来了其他结果，涉及 L^2 框架下退化 Schr¨odinger 方程和退化抛物方程的适定性。我们在 $\mathbb{R}^n$ 上引入以下适当的势函数类。

定义 4.1. 我们用 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ 表示满足以下条件的 Borel 函数类 $V:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

(V1) 存在 $C,C_1>0$ 使得 $|V(x)|\leqslant C|x|^2$，对几乎处处的 $|x|\geqslant C_1$.

(V2) There exists $C_2 > 0$ such that $V(x) \geqslant -C_2$, for a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

值得指出的是，我们并未对 V施加任何正则性假设，这与经典薛定谔算子谱理论的大多数主要定理中的惯例不同¨；那些定理的条件通常更可能涉及可积性（[5], [48]）。我们将考虑如下形式的哈密顿量 $\mathcal{H}_V = a_2(x, D) + V$。

定理 4.2. 设 $a_2(x, D) \in \mathbf{Diff}^2_+(\mathbb{R}^n)$ 是形式自伴的，$V \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$，$g$ H¨ormander 度量，以及与 m 相应的 g权函数，如 $a_2(x, D)$ 中的 (3.1)所示。则 $-i\mathcal{H}_V$ 是一个酉算子群的无穷小生成元。因此，相应退化薛定谔方程的下列柯西问题在 C_0−上适定：¨ L^2:

$$\begin{cases} i\partial_t u &= \mathcal{H}_V u, \\ u(0) &= f. \end{cases} \tag{4.1}$$

此外，若 $a_2(x, D) = -\sum_{j=1}^k X_j^2$是实向量场的平方和，则$\mathcal{H} = -(a_2(x, D) + |x|^2)$ 是一个 C_0−压缩算子半群（退化调和半群）的无穷小生成元，相应的退化抛物方程在 L^2上适定：

$$\begin{cases} \partial_t u &= \mathcal{H} u, \\ u(0) &= f. \end{cases} \tag{4.2}$$

证明。我们首先说明势算子的有界性。事实上，首先注意到，由于 $|x|^2 \in S(m, g)$，我们有 $|x|^2 : H(m, g) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是有界的。由 **(V1)** 和 **(V2)**，对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，有 $|V(x)| \leqslant C(1 + |x|^2)$。由于 $m \geqslant 1$，因此显然

$$||V(x)u||_{L^2} \leqslant C||u||_{H(m,g)}, \tag{4.3}$$

对于所有 $u \in H(m, g)$。

另一方面，算子 $a_2(x, D) + V(x)$ 是对称的；引理 3.7、定理 2.6 以及不等式 (4.3) 表明算子 $a_2(x, D) + V(x) : H(m, g) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是有界的。此外，由于 $0 \leqslant a_2(x, \xi) \in S^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，应用 **Fefferman-Phong** 定理，可得存在 $C > 0$ 使得

$$\mathrm{Re}\langle a_2(x, D)v, v\rangle \geqslant -\frac{C}{2}||v||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

因此

$$\mathrm{Re}\langle (a_2(x, D) + C)v, v\rangle \geqslant \frac{C}{2}||v||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

˜因此，利用 **(V2)**，存在 $C > 0$ ，使得

$$\mathrm{Re}\langle (a_2(x, D) + V(x) + \widetilde{C})v, v\rangle \geqslant \frac{C}{2}||v||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$||(a_2(x, D) + V(x) + \widetilde{C})v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geqslant C||v||_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.4}$$

因此，Friedrichs延拓定理保证 $\mathcal{H}_V+\widetilde{C}:\ H(m,\ g)\to L^2(\mathbb{R}^n)$是自伴的。因此，$\mathcal{H}_V$ 也自伴。现在，应用 Stone 定理可知 $-i\mathcal{H}_V$ 是一个 C_0-酉算子群的无穷小生成元。因此，相应简并 Schr¨odinger 方程（4.1）在 L^2上适定。

另一方面，由于 $\mathcal{H}=-(a_2(x,\ D)+|x|^2)$ 是自伴的，$-\mathcal{H}+C$ 因此对于某个 $C>0$ （如上所述，且 $V=|x|^2$），$-a_2(x,\ D)$ 作为实向量场的平方和，$\mathcal{H}$ 是耗散的。因此，Lumer–Phillips 定理保证 $\mathcal{H}$ 是一个 C_0-压缩算子半群的无穷小生成元，因此相应的退化抛物方程（4.2）是适定的。□

注 4.3。我们回顾一下，近几十年来，同时研究哈密顿量作为薛定谔¨半群和热半群的无穷小生成元，一直是一个活跃的研究领域，正如 B. Simon 在[76]中指出的那样。例如，在考察 L^p 的特征函数性质时，$\mathcal{H}=-\Delta+V(x)$，若 $\mathcal{H}\psi=E\psi$ 且 $\psi\in L^2$，可以看出，由于 $e^{-t\mathcal{H}}\psi=e^{-tE}\psi$，因此 $\psi\in e^{-t\mathcal{H}}(L^2)$。于是，可以利用如下映射性质$e^{-t\mathcal{H}}:\ L^2\to L^\infty$ 推知 ψ 也属于 L^∞。B. Si mon 和 R. Carmona 关于薛定谔¨半群的研究深刻影响了人们对这类半群的研究；它们的应用十分广泛，相关文献如今已相当丰富。关于这一问题的更多论述，参见 [1], [17], [77], [75], [53], [57], 。因此，薛定谔¨半群对于研究L^p 薛定谔算子特征函数的性质，尤其是所谓的基态，具有重要意义。

作为我们先前 L^2 估计的推论，我们可以将适定性结果推广到 $\mathcal{H}$的正幂情形，其中

$$a_2(x,D)=-\sum_{j=1}^{k}X_j^2$$

是实向量场的平方和，且这组向量场满足 H¨ormander 二阶条件。考虑与满足 H¨ormander 条件的向量场系统相关联的次拉普拉斯算子，一个原因是，在这种情况下，与该 H´ormander 系统相关的 Carn´ot–Carathéodory 距离所定义的球，其几何性质通过 Nagel、Stein 和 Wainger 的奠基性工作得到了充分理解[69], ，见注释 6.1。

另一方面，得益于 Fefferman-Phong 不等式，我们可以定义 $\mathcal{H}^\beta$ 的正幂，并且有 $\mathcal{H}^\beta\in OpS(m^\beta,g)$ 的归属关系。此外，$a_2(x,D)$ 的最大拟椭圆性保证了索伯列夫空间 $H(m^\beta,g)$ 可由条件 $(a_2(x,D)+|x|^2+C)^\beta u\in L^2$ 刻画。因此，$(a_2(x,D)+|x|^2+C)^\beta$ 是下半有界的，从而得到以下推论。

推论 4.4. 令 $\beta > 0$. 令

$$a_2(x,D) = -\sum_{j=1}^{k} X_j^2$$

是实向量场的平方和，其中 X_1、……、X_k 满足二阶 H ¨ormander 条件， g 为 H ¨ormander 度量，且 m 为与 $a_2(x$相关的 g权函数， $D)$ 如 (3.1) 所示。于是，存在 $C > 0$，使得 $\mathcal{H}_C = a_2(x、 D) +|x|^2 + C$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$中半有界，且 $-i\mathcal{H}_C$ 是一个C_0–半群的无穷小生成元。因此，相应的退化薛定谔方程的柯西问题在 L^2上适定：

$$\begin{cases} i\partial_t u + \mathcal{H}_0^{\beta} u &= 0, \\ u(0) &= f. \end{cases} \tag{4.5}$$

此外，算子

$$\mathcal{H} = -(a_2(x,D) + |x|^2),$$

是一个 C_0–压缩算子半群（退化调和半群）的无穷小生成元，相应的退化抛物方程在 L^2上适定：

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathcal{H}^{\beta} u &= 0, \\ u(0) &= f. \end{cases} \tag{4.6}$$

为了进一步开展分析，我们需要度量 测地温和性 这一性质 g。这一性质使我们能够将哈密顿量作为伪微分算子证明其可逆性。Bony 和 Chemin 在 [8], 中首次提出了这一重要概念，最初称之为 强温和性。我们先回顾其定义，参见 [62], [9]。

令 $d^{\sigma}(X,Y)$ 表示黎曼度量 g^{σ} 下 X 与 Y之间的测地距离，其中 g^{σ} 由式（2.1）给出。

定义 4.5。若 H ¨ormander 度量 g 是温和的，且存在 $C, N > 0$ 使得

$$\frac{g_Y}{g_X} \leqslant C(1 + d^{\sigma}(X,Y))^N. \tag{4.7}$$

众所周知（参见 [9]），条件（4.7）等价于：存在 $C, N > 0$使得

$$C^{-1}(1 + d^{\sigma}(X,Y))^{\frac{1}{N}} \leqslant (1 + g^{\sigma}(X - Y)) \leqslant C(1 + d^{\sigma}(X,Y))^N. \tag{4.8}$$

由于我们的 H ¨ormander 度量是对称分裂的，根据 Bony 的一个结果（参见定理 5 (i)， [9]），它在测地意义下是温和的。下文需要用到如下定义。我们指出，二阶微分算子 $P(x,D)$ 是 $0 < \tau \leqslant 2$ 阶次椭圆的，如果它满足 先验估计

$$\|v\|_{H^{\tau}} \leqslant C_1(\|P(x,D)v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}), \quad \forall v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \tag{4.9}$$

其中 H^{τ} 表示 $\mathbb{R}^n$. 上阶数为 τ 的标准索伯列夫空间

推论 4.6。 设 $a_2(x,\ D) \in$ 微分 $^{2}_{+}(\mathbb{R}^n)$ 为形式自伴且次椭圆的，其次椭圆阶为 $0 < \tau \leqslant 2,$ g H ¨ormander 度量以及 m 与 g 相关的权函数 $a_2(x,\ D)$ 如 (3.1)所示。那么，存在 $C > 0$ 使得算子

$$\mathcal{H}_C = a_2(x, D) + |x|^2 + C : H(m, g) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

是一个同构，其逆是一个伪微分算子

$$\mathcal{H}_C^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to H(m, g),$$

其符号属于 $S(m^{-1}, g)$。

证明。 先验 估计 (4.4) 以及 $\mathcal{H}_C$ 的自伴性保证了满射性。另一方面， $a_2(x$的次椭圆性 $D)$ 给出

$$\|v\|_{H^\tau} \leqslant C_1(\|(a_2(x, D) + |x|^2)v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}), \ \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4.10}$$

再次利用先验估计 (4.4) 和 (4.10，存在常数 $C_2 > 0$使得

$$\|u\|_{H^\tau} \leqslant C_2\|\mathcal{H}_C u\|_{L^2}, \ \ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4.11}$$

现在，仿照 D. Delgado 等人 [25],中引理 3.3 的证明，将相空间划分为相对于 g 的椭圆区域和次椭圆区域，可得

$$\|u\|_{H(m,g)} \leqslant C_2\|\mathcal{H}_C u\|_{L^2}, \ \ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

因此 $\mathcal{H}_C$: $H(m,\ g) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是单射。因此，应用[8]中的推论 7.7即可完成证明。□

5. L^p-BOUNDS, H^1-L^1 AND L^∞-BMO ESTIMATES FOR DEGENERATE OPERATORS

本节将分析与以下退化类算子相关联的伪微分算子 $S(m,\ g)$ 其中 g 是（3.1）中的度量。

5.1. L^∞-BMO 和 H^1-L^1 有界性。

下一个引理对我们估计权函数 $m(x$ 的最优分数幂至关重要， $\xi)$，该分数幂决定了适用于 L^p-有界性的合适类。通过分析所关注符号的单位分解，可以得到 L^∞-BMO 有界性。每个部分的估计由下一个引理给出，该引理是经典 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的推广。

引理 5.1. 设 $\varepsilon_0 = \frac{3}{4}$和 $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon < 1$，并设 $q \in S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon}, g)$ 支撑于$R \leqslant a(x,$ $\xi) + \langle X\rangle \leqslant 3R$，其中 $R > 1$。那么，对所有 $l > n/4$，我们有

$$||q(x, D)f||_\infty \leqslant C||q||_{l;S(m^{-\frac{n\varepsilon}{2}},g)}||f||_{L^\infty},$$

其中常数 C 与 q 和 f无关。

证明. 设 $q \in S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon}, g)$ 支撑于

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : R \leqslant a(x, \xi) + \langle X\rangle \leqslant 3R\},$$

对固定的 $R > 1$ 。我们观察到

$$q(x, D)f(x) = (2\pi)^{-n} \int\int e^{i(x-y)\cdot\xi} q\,(x, \xi)\, f(y)dyd\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \hat{q}_x(y-x)f(y)dy \\
&= \hat{q}_x * f(x),
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{}q_x$ 是关于变量 ξ 的 $q_x(\xi) = q(x$ 傅里叶变换 $\xi)$。我们得到

$$|q(x,D)f(x)| \leqslant ||\hat{q}_x||_{L^1}||f||_{L^\infty},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

因此，只需证明对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $l > n/4$

$$||\hat{q}_x||_{L^1} \leqslant C||q||_{l;S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon},g)}.$$

下面固定 $b > 0$。应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{|y|<b} |\hat{q}_x(y)|dy &\leqslant Cb^{\frac{n}{2}} \left(\int\limits_{|y|<b} |\hat{q}_x(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant Cb^{\frac{n}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |q(x,\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C||q||_{l;S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon},g)} b^{\frac{n}{2}} \left(\int\limits_{a(x,\xi)+\langle x,\xi\rangle \leqslant 3R} m^{-n\varepsilon}(x,\xi)d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C||q||_{l;S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon},g)} b^{\frac{n}{2}} \left(\int\limits_{\langle\xi\rangle \leqslant 3R} \langle\xi\rangle^{-n\varepsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

现在，通过选取 $b = R^{\varepsilon-1}$，我们得到

$$\int\limits_{|y|<b} |\hat{q}_x(y)|dy \leqslant C||q||_{l;S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon},g)}.$$

另一方面，为了分析积分$\int$ $\hat{}q_x(y)|dy$，我们首先注意到$|y|\geqslant b$对于整数 $k > \frac{n}{4}$，有 $k > \frac{n}{4} \geqslant n(1-\varepsilon)$，因为 $\varepsilon \geqslant \frac{3}{4}$。因此

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{|y|\geqslant b} |\hat{q}_x(y)|dy &\leqslant Cb^{\frac{n}{2}-k} \left(\int\limits_{y\geqslant b} |y|^{2k}|\hat{q}_x(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant Cb^{\frac{n}{2}-k} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla_\xi^k q(x,\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

而帕าร์เซ瓦尔定理推出不等式

$$\int\limits_{|y|\geqslant b}|\hat{q}_x(y)|dy\leqslant C||q||_{k;S(m^{-\frac{n\varepsilon}{2}},g)}b^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R}m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.1}$$

为了估计最后一个积分，我们首先注意到存在 $C>1$，使得对所有 $(x、\xi)$:

$$a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant C(\langle\xi\rangle^2+|x|^2).$$

我们将论证分为两种情况： $|x|^2\leqslant\frac{R}{2C}$ 和 $|x|^2>\frac{R}{2C}$。

若 $|x|^2\leqslant\frac{R}{2C}$，则得到

$$R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant C(\langle\xi\rangle^2+|x|^2)\leqslant C\langle\xi\rangle^2+\frac{R}{2}.$$

因此 $\frac{R}{2}\leqslant C\langle\xi\rangle^2$. 于是

$$b^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R}m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant Cb^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{R\leqslant 2C\langle\xi\rangle^2}\langle\xi\rangle^{-n\varepsilon-k}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant CR^{(\varepsilon-1)(\frac{n}{2}-k)+\frac{1}{4}(n(1-\varepsilon)-k)}\leqslant C.$$

为证明最后一个不等式，我们注意到

$$(\varepsilon-1)(\frac{n}{2}-k)+\frac{1}{4}(n(1-\varepsilon)-k)=\frac{n}{4}(\varepsilon-1)+k(\frac{3}{4}-\varepsilon).$$

由于 $\varepsilon\geqslant\frac{3}{4}$，我们得到了所需的界。

另一方面，如果 $|x|^2>\frac{R}{2C}$，我们有 $-|x|^2<-\frac{R}{2C}$ 且

$$\langle\xi\rangle\leqslant a_2(x,\xi)+\langle X\rangle\leqslant 3R-|x|^2\leqslant 3R-\frac{R}{2C}=\frac{(6C-1)}{2C}R.$$

由于 $6C-1>0$，并利用$|x|^2>\frac{R}{2C}$这一事实，我们有 $\langle x\rangle^{-k}\leqslant C'R^{-\frac{k}{2}}$，从而得到

$$b^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R}m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{\langle\xi\rangle\leqslant C'R}m^{-n\varepsilon}(x,\xi)m^{-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lesssim R^{(\frac{n}{2}-k)(\varepsilon-1)}\left(\int\limits_{\langle\xi\rangle\leqslant C'R}\langle\xi\rangle^{-n\varepsilon}\langle x\rangle^{-2k}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lesssim R^{(\frac{n}{2}-k)(\varepsilon-1)}\langle x\rangle^{-k}\left(\int\limits_{\langle\xi\rangle\leqslant C'R}\langle\xi\rangle^{-n\varepsilon}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant CR^{(\frac{n}{2}-k)(\varepsilon-1)}R^{-\frac{k}{2}}R^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon)}.$$

注意到

$$R^{(\frac{n}{2}-k)(\varepsilon-1)+\frac{n}{2}(1-\varepsilon)-\frac{k}{2}}=R^{k(\frac{1}{2}-\varepsilon)}\leqslant C,$$

由于 $\varepsilon\geqslant\frac{3}{4}\geqslant\frac{1}{2}$，所需的估计即得。 □

现在，我们可以将 L^∞-BMO 界作为我们 L^∞-L^∞ 估计的推论来陈述。

定理 5.2. 设 $\frac{3}{4}\leqslant\beta<1$，并设 $\sigma(x,D)\in\mathrm{Op}(S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g))$. 那么，对于 $\ell>\frac{n}{4}$，我们有

$$\|\sigma(x,D)f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|\sigma(x,\xi)\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

其中常数 $C>0$ 与 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 无关。因此，$\sigma(x,D)$：$L^\infty(\mathbb{R}^n)\to BMO(\mathbb{R}^n)$ 可扩张为一个有界算子。

证明。设 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，并记 $A=\sigma(x,D)$. 取定一个球 $B(x_0,r)$，其中 $x_0\in\mathbb{R}^n$，且 $r>0$。我们将证明存在一个常数 $C>0$，与 f 和 r 无关，使得

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}|Af(x)-(Af)_{B(x_0,r)}|dx\leqslant C\|\sigma\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\tag{5.2}$$

其中

$$(Af)_{B(x_0,r)}:=\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}Af(x)dx.$$

我们将 σ 拆分为两个符号之和

$$\sigma(x,\xi)=\sigma^0(x,\xi)+\sigma^1(x,\xi),\ \ \sigma^j(x,\xi)\in S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g),\ j=0,1,$$

使得 $\sigma^0(x,\xi)$ 和 $\sigma^1(x,\xi)$ 均满足估计

$$\|\sigma^j\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\leqslant C_{j,\ell}\|\sigma\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)},\ \ j=0,1,\ \ell\geqslant1.\tag{5.3}$$

现在，若 $A^j:=\mathrm{Op}(\sigma^j)$，对于 $j=0,1$，则 $A=A^0+A^1$ 在 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上，我们只需证明

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}|A^jf(x)-(A^jf)_{B(x_0,r)}|dx\leqslant C\|\sigma^j\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.\tag{5.4}$$

那么，若我们证明（5.3），便可推出（5.2）。现在，我们继续证明存在 σ^0 和 σ^1，使其满足所要求的性质。定义

$$\sigma^0(x,\xi)=\sigma(x,\xi)\tilde\gamma(x,\xi),\ \sigma^1(x,\xi)=\sigma(x,\xi)-\sigma^0(x,\xi),\ (x,\xi)\in\mathbb{R}^n,\tag{5.5}$$

其中

$$\tilde\gamma(x,\xi):=\gamma(r\times m(x,\xi))=\gamma(r\times(a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle x,\xi\rangle)),$$

且 $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}、\ \mathbb{R}_0^+)$ 是一个支撑在 $\{t:\ |t| \leqslant 1\}$ 中的光滑函数，满足$\gamma(t) = 1$，对于 $|t| \leqslant \frac{1}{2}$.

为证明 (5.3)，我们按以下步骤进行。由于 $\tilde{\gamma}(x,\xi)$ 是一个截断函数，其支撑包含于集合 $\{(x,\xi):\ a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle x,\xi\rangle \leqslant r^{-1}\}$，在此区域内，符号 $\sigma^0(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\tilde{\gamma}(x,\xi)$ 也满足 (2.2) 中的 $S(m,g)$-估计，但这些估计可能依赖于 $r > 0$。为消除 $r > 0$ 中的这种依赖，我们采用 $S(m,g)$ 上由其半范数族诱导的自然 Fr´echet 拓扑。这是 $S(m,g)$ 上使这些半范数连续的最弱拓扑。事实上，我们有

$$\lim_{r\to 0^+} \|\sigma(x,\xi)\gamma(r\times(a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle x,\xi\rangle))\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)} = \|\sigma(x,\xi)\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)},$$

and

$$\lim_{r\to\infty} \|\sigma(x,\xi)\gamma(r\times(a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle x,\xi\rangle))\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)} = 0.$$

因此，存在 $0 < \varkappa < 1$，使得对所有 $r \in (0,\varkappa)\cup[\varkappa^{-1},\infty)$，我们有

$$\|\sigma(x,\xi)\gamma(r\times(a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle x,\xi\rangle))\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)} \leqslant 2\|\sigma(x,\xi)\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}.$$

另一方面，函数

$$r \in [\varkappa,\varkappa^{-1}] \mapsto \sigma(x,\xi)\gamma(r\times(a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle x,\xi\rangle)) \in S(m,g), \tag{5.6}$$

是连续的，并且由于 $S(m,g)$ 是完备拓扑空间，存在$r_0 \in [\varkappa,\varkappa^{-1}]$ 使得

$$\begin{aligned}&\max_{r\in[\varkappa,\varkappa^{-1}]} \|\sigma(x,\xi)\gamma(r\times(a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle x,\xi\rangle))\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\\ &= \|\sigma(x,\xi)\gamma(r_0\times(a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle x,\xi\rangle))\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)} \lesssim_{r_0} \|\sigma(x,\xi)\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}.\end{aligned}$$

由于前面的估计依赖于 r_0，进而依赖于 $\varkappa$，但与 $r > 0$ 无关，上述估计证明了（5.3）中的估计。

为了估计积分

$$I_0 := \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} |A^0 f(x) - (A^0 f)_{B(x_0,r)}|dx,$$

我们将使用中值定理。事实上，注意到

$$|A^0 f(x) - A^0 f(y)| \leqslant C_0 \sum_{k=1}^n \|\partial_{x_k} A^0 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x-y| \quad \leqslant Cr\sum_{k=1}^n \|\partial_{x_k} A^0 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.7}$$

为了估计 L^∞范数的$\partial_{x_k} A^0 f$，首先注意，$\partial_{x_k} A^0 = \mathrm{Op}(\sigma_k')$ 的符号由下式给出

$$\sigma_k'(x,\xi) := 2\pi i\xi_k\sigma^0(x,\xi) + (\partial_{x_k}\sigma^0(x,\xi)). \tag{5.8}$$

事实上，莱布尼茨法则给出

$$\partial_{x_k} A^0 f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_k}(e^{i2\pi x\xi}\sigma^0(x,\xi))\widehat{f}(\xi))\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} ([\partial_{x_k}(e^{i2\pi x\xi})\sigma^0(x,\xi) + e^{i2\pi x\xi}\partial_{x_k}\sigma^0(x,\xi))]\widehat{f}(\xi))\, d\xi\,,$$

由此得到

$$\partial_{x_k} A^0 f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} ([e^{i2\pi x\xi} 2\pi i\xi_k \sigma^0(x,\xi) + e^{i2\pi x\xi}\partial_{x_k}\sigma^0(x,\xi))]\widehat{f}(\xi)),$$

这证明了（5.8）。利用适当的单位分解，我们将按如下方式分解$\sigma_k'(x,\ \xi)$：

$$\sigma_k'(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{j,k}(x,\xi).$$

为了构造算子族 $\rho_{j,\ k}(x,\xi)$ ，我们将按如下步骤进行。选取一个光滑实函数 η ，使得 $\eta(t) \equiv 0$ 对 $|t| \leqslant 1$ 成立，且 $\eta(t) \equiv 1$ 对$|t| \geqslant 2.$ 成立。令

$$\rho(t) = \eta(t) - \eta(\frac{t}{2}).$$

ρ 的支撑满足 $\mathrm{supp}(\rho) \subset [1,4].$ 。容易验证

$$1 = \eta(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho(2^j t), \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

事实上，

$$\eta(t) + \sum_{j=1}^{\ell} \rho(2^j t) = \eta(t) + \sum_{j=1}^{\ell} \left(\eta(2^j t) - \eta(2^{j-1}t)\right) = \eta(2^\ell t) \to 1,\ \ell \to \infty.$$

对于 $t = rm(x,\xi)$ ，有

$$1 = \eta(rm(x,\xi)) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho(2^j rm(x,\xi)).$$

注意到

$$\sigma_k'(x,\xi) = \eta(rm(x,\xi))\sigma_k'(x,\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho(2^j rm(x,\xi))\sigma_k'(x,\xi).$$

由于 $\eta(rm(x,\xi))\sigma_k'(x,\xi) = 0$，鉴于 $\tilde{\gamma}$ 和 η 的支撑集互不相交，我们有

$$\sigma_k'(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{j,k}(x,\xi),\ \ \rho_{j,k}(x,\xi) := \rho(2^j rm(x,\xi))\sigma_k'(x,\xi).$$

由中值定理可得，

$$\begin{aligned} |A^0 f(x) - A^0 f(y)| &\leqslant C_0 \sum_{k=1}^{n} |y-x| \cdot \|\partial_{x_k} A^0 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim r \sum_{k=1}^{n} \|\partial_{x_k} A^0 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

因此，我们有，

$$\begin{aligned}
I_0 :&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} |A^0 f(x) - (A^0 f)_{B(x_0,r)}|dx\\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} \left|\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} (A^0 f(x) - A^0 f(y))dy\right| dx\\
&\leqslant \frac{1}{|B(x_0,r)|^2}\int\limits_{B(x_0,r)}\int\limits_{B(x_0,r)} |A^0 f(x) - A^0 f(y)|dydx \lesssim r \sup_{1\leqslant k\leqslant n}\|\partial_{x_k} A^0 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&= r\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\|\mathrm{Op}(\sigma_k')f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant r\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathrm{Op}(\rho_{j,k})f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim r\sum_{j=1}^{\infty} r^{-1}2^{-j}\|\sigma\|_{\ell,S(m^{-\beta},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim rr^{-1}\|\sigma\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|\sigma\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

其中我们用到了对于 $\ell > \frac{n}{4}$

$$\|\mathrm{Op}(\rho_{j,k})\|_{\mathscr{B}(L^\infty(\mathbb{R}^n))} \lesssim \|\rho_{j,k}\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)} \lesssim r^{-1}2^{-j}\|\sigma\|_{\ell,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)},$$

鉴于引理 5.1 以及 [20] 应用于 $\rho_{j,\ k}$ 其中 $s = 2^j r$. 为了完成证明，我们需要证明 (5.4) 对于 $j = 1$. 为了得到类似的 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-$BMO(\mathbb{R}^n)$ 估计，对于 A^1，我们将按如下方式进行。令 ϕ 是一个支撑紧包含于 $B(x_0,\ 2r)$ 的光滑函数，满足

$$\phi(x) = 1,\ \text{for}\ \ x \in B(x_0,r),\ \text{and}\ 0 \leqslant \phi \leqslant 10.$$

注意到

$$|B(x_0,r)| \leqslant \int\limits_{B(x_0,r)} \phi(x)^2 dx \leqslant \int\limits_{B(x_0,2r)} \phi(x)^2 dx = \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant 100|B(x_0,2r)|,$$

因此

$$|B(x_0,r)|^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant 10|B(x_0,2r)|^{\frac{1}{2}} \leqslant 10C|B(x_0,r)|^{\frac{1}{2}}, \tag{5.9}$$

其中在最后一个不等式中，我们用到了 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度满足倍增性质。考虑到

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} |A^1 f(x) - (A^1 f)_{B(x_0,r)}|dx \leqslant \frac{2}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} |A^1 f(x)|dx,$$

我们将估计右侧。事实上，注意到

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} |A^1 f(x)|dx \leqslant \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} |\phi(x)A^1 f(x)|dx$$

$$\leqslant \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}|A^1[\phi f](x)|dx+\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}|[M_\phi,A^1]f(x)|dx$$
$$:=I+II,$$

其中， M_ϕ 是关于 ϕ.的乘法算子。为了估计 I，注意到根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}|A^1[\phi f](x)|dx\leqslant\frac{1}{|B(x_0,r)|^{\frac{1}{2}}}\left(\int\limits_{B(x_0,r)}|A^1[\phi f](x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $L:=m(x,D)^{\frac{n}{2}\beta\varepsilon}\in\mathrm{Op}(S(m^{\frac{n}{2}\beta\varepsilon},g))$，其中 $0<\varepsilon<1.$。注意

$$\mathrm{Op}(S(m^{-\frac{n}{2}\beta\varepsilon},g))\subset\mathrm{Op}(S(1,g))\subset\mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}^n))\,. \tag{5.10}$$

由于 $A^1\in S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)$，Weyl-H¨ormander 演算给出

$$A^1L\in\mathrm{Op}(S(m^{-\frac{n}{2}\beta(1-\varepsilon)},g)).$$

由（5.10）可知 A^1L 在 $L^2(\mathbb{R}^n).$ 上有界。因此，

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|^{\frac{1}{2}}}\left(\int\limits_{B(x_0,r)}|A^1L[L^{-1}(\phi f)](x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\|A^1L[L^{-1}(\phi f)]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{|B(x_0,r)|^{\frac{1}{2}}}$$
$$\leqslant\frac{C\|\sigma_{A^1L}\|_{k,S(m^{-\frac{n}{2}\beta(1-\varepsilon)},g)}\|L^{-1}(\phi f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{|B(x_0,r)|^{\frac{1}{2}}}.$$

注意到

$$\|L^{-1}(\phi f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|\phi f\|_{H(m^{-\frac{n}{2}\beta\varepsilon},g)},$$

其中 $H(m^{-\frac{n}{2}\beta\varepsilon},g)$是阶数为 $-\frac{n}{2}\beta\varepsilon$ 的索伯列夫空间，嵌入关系 $L^2(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow H(m^{-\frac{n}{2}\beta\varepsilon},g)$ 意味着

$$\|L^{-1}(\phi f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|\phi f\|_{H(m^{-\frac{n}{2}\beta\varepsilon},g)}\lesssim\|\phi f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

此外，由（5.9），我们推得不等式

$$\|\phi f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lesssim 10\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|B(x_0,r)|^{\frac{1}{2}}.$$

因此，我们得出结论

$$I:=\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}|A^1[\phi f](x)|dx\leqslant C\|\sigma_{A^1L}\|_{\ell',S(1,g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leqslant C\|\sigma_{A^1}\|_{\ell'',S(m^{-\frac{n\beta\varepsilon}{2}},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

这就是所需的 $I.$ 估计。事实上，由于 $A^1L\in S(1,\ g)$，我们有 $A^1=A^1LL^{-1}\in S(m^{-\frac{n\beta\varepsilon}{2}},\ g).$。现在，我们将估计 $II.$。为此，注意到

$[M_\phi,\ A^1] = \mathrm{Op}(\theta)$ 的符号为

$$\theta(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi(x) - \phi(x-y))k(y,x-y)e^{-2\pi iy\xi}dy, \tag{5.11}$$

其中 $x \mapsto k(\cdot,\ \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，是 A^1. 的积分核。事实上，等式（5.11）已在 [20, 第 364]页证明。利用泰勒展开，我们得到

$$\phi(x-y) = \phi(x) + \sum_{|\alpha|=1} C_\alpha(\partial_x^\alpha\phi)(x)y^\alpha,$$

因此，我们可以写成

$$\theta(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=1} C_\alpha\partial_x^\alpha\phi(x)\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi).$$

假设 $\sigma \in S(m^{-\frac{n}{2}\beta}, g)$，可推出 $\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi) \in S(m^{-\frac{n}{2}\beta}, g)$；又由于 ϕ 具有紧支集，同样的结论也适用于 θ ： $\theta(x,\xi) \in S(m^{-\frac{n}{2}\beta}, g)$. 因此，有

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Op}(\theta)\|_{\mathscr{B}(L^\infty(\mathbb{R}^n))} &\lesssim \left(\sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n},|\alpha|\leqslant\ell'} |[\partial_\xi^\alpha\theta(x,\xi)]m(x,\xi)^{\frac{n}{2}\beta})|\right)\\
&\lesssim \sup_{|\alpha|\leqslant\ell} \|\partial_x^\alpha\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left(\sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n},|\alpha|\leqslant\ell'} |[\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)]m(x,\xi)^{\frac{n}{2}\beta})|\right)\\
&\lesssim_{\ell'} \|\sigma\|_{\ell'+1,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}.
\end{aligned}$$

因此，我们推得

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} |[M_\phi, A^1]f(x)| \leqslant \|[M_\phi, A^1]f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

因此，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} |[M_\phi, A^1]f(x)| &\leqslant \|\mathrm{Op}(\theta)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim \|\sigma\|_{\ell'+1,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$II := \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} |[M_\phi, A^1]f(x)|dx \leqslant C\|\sigma_A\|_{\ell'+1,S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

因此，证明完成。 □

5.2. L^p-有界性。前述定理与经典实插值对类 $S(m^{-\frac{n}{2}\beta}, g)$ 的 L^p-有界性有如下推论。本定理的证明遵循标准论证，故略去。

定理 5.3. 设 $\varepsilon_0 = \frac{3}{4}$和 $\varepsilon_0 \leqslant \beta < 1$，且 $\sigma(x,D) \in \mathrm{Op}S(m^{-\frac{n}{2}\beta}, g)$.那么， $\sigma(x,D)$: $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 可延拓为有界算子，对所有 $1 < p <$8 均成立。此外，对每个 $\ell > \frac{n}{4}$，我们有

$$\|\sigma(x,D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\sigma(x,\xi)\|_{\ell,S(m^{-n\beta/2},g)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中常数 $C > 0$ 与 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 无关,

对于下文中较小的指数 ε_0 ，应用 Fefferman-Stein 插值可得以下界:

定理 5.4。设 $\varepsilon_0 = \frac{3}{4}$ 和 $0 \leqslant \beta < \varepsilon_0$，且 $\sigma(x, D) \in \mathrm{Op}(S(m^{-\frac{n}{2}\beta}, g))$.。那么， $\sigma(x, D)$： $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 可延拓为有界算子，条件是

$$\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{n}{2}\beta. \tag{5.12}$$

此外，对于这样的 p 以及所有 $\ell > \frac{n}{4}$，我们有

$$\|\sigma(x,D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\sigma(x,\xi)\|_{\ell,S(m^{-n\beta/2},g)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中常数 $C > 0$ 与 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 无关

证明。 现在，既已证明定理 5.2，证明过程与文献 [20]中定理 2.10 的证明完全相同。为使本文内容完整，我们在此给出论证。我们将使用复 Fefferman-Stein 插值定理。考虑由 $z \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(z) \in [0,1]$ 所指标化的复算子族，其定义如下:

$$T_z := \mathrm{Op}(\sigma_z), \quad \sigma_z(x,\xi) := e^{z^2}\sigma(x,\xi)m(x,\xi)^{\frac{n\beta}{2}+\frac{n}{2}(\frac{3}{4})(z-1)}.$$

算子族 $\{T_z\}$定义了一个从 $\mathfrak{Re}(z) \in (0,1)$（分别在 $\mathfrak{Re}(z) \in [0,1]$ 时连续）到 $L^2(\mathbb{R}^n)$. 上有界算子代数的解析算子族。注意到 $\sigma_0(x,\xi) = \sigma(x,\xi)m(x,\xi)^{\frac{n\beta}{2}-\frac{n}{2}(\frac{3}{4})}$，且 $\sigma_1(x,\xi) = e\sigma(x,\xi)m(x,\xi)^{\frac{n\beta}{2}}$.。由于 T_0是从 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$到 $BMO(\mathbb{R}^n)$的有界算子，而 T_1在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上有界，Fefferman-Stein 插值定理表明， T_t可延拓为 $L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界算子，其中 $p = \frac{2}{t}$ 且任意 $0 < t \leqslant 1$. 。由于$0 \leqslant \beta < \frac{3}{4}$，存在 $t_0 \in (0,1)$使得 $\beta = \frac{3}{4}(1-t_0)$.。因此， $T_{t_0} = e^{t_0^2}A$可延拓为 $L^{\overline{t_0}}$. 上的有界算子。Fefferman-Stein 插值定理、 A 的$L^2(\mathbb{R}^n)$-有界性以及 $L^{\frac{2}{t_0}}$-有界性，推出 A对所有 $2 \leqslant p \leqslant \frac{2}{t_0}$均具有 $L^p(\mathbb{R}^n)$-有界性；再将 A 的 $L^{\frac{2}{t_0}}(\mathbb{R}^n)$-有界性与$L^\infty(\mathbb{R}^n)$-$BMO(\mathbb{R}^n)$ 有界性进行插值，可得 A 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$上对所有 $\frac{2}{t_0} \leqslant p < \infty$. 均有界。因此， A 可延拓为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子，对所有$2 \leqslant p < \infty$.均成立。由对偶论证可得， A 在 $1 < p \leqslant 2$ 时具有 $L^p(\mathbb{R}^n)$-有界性。□

引理 ε_0 中的指数 5.1可以进一步改进，前提是我们掌握关于 a_2的更多信息。例如，若 L 是一个形式自伴的二阶微分算子，

$$Lf = -\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}f + \text{ lower order terms}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{5.13}$$

满足（1.2）中的条件，且对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，矩阵 $a_{i,\ j}(x)$ 的秩为$r(x) \geqslant r_0$。上述情形的一个重要特例来自平方和

$$L = -\sum_{j=1}^{M} X_j^* X_j,$$

其中 X_j 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实向量场，条件是向量场族 $\{X_j(x)\}_{1\leqslant j\leqslant M}$ 的线性张成至少为 r_0 维， $r_0 \geqslant 1$，对每个 x 均成立。

我们给出一个关于 $\mathbb{R}^2$ 的例子，考虑算子

$$a(x, D) := -(\partial_{x_1}^2 + \tilde{x}_1^2 \partial_{x_2}^2) + |x|^2. \tag{5.14}$$

指数 $\varepsilon_0 = \frac{3}{4}$ 可以通过将其替换为 3 2 引理 5.1，从而得到改进，并相应地改进定理 5.2、5.3 和 5.6。

现在我们陈述引理 5.1 对于对应于算子 (5.14) 的类别所作的改进。更确切地说，仔细考察引理 5.1的证明，可以将参数 ε_0 从 $3/4$ 改进至 $5/12$，如下所示。

引理 5.5. 考虑度量 g，其定义于 (3.1)，其中 $a_2(x,\ \xi) = \xi_1^2 + \tilde{x_1}^2 \xi_2^2$，$(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 是退化椭圆算子的符号

$$a_2(x, D) := -(\partial_{x_1}^2 + \tilde{x}_1^2 \partial_{x_2}^2).$$

考虑 g-权函数 $m(X) = \xi_1^2 + \tilde{x_1}^2 \xi_2^2 + |x|^2 + \langle X \rangle \in S(m, g)$. 令$\varepsilon_0 = \frac{5}{12}$ 且 $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon < 1$. 取一个符号 $q \in S(m^{-\varepsilon}, g)$，其支撑于 $R \leqslant a(x,\xi) + \langle X \rangle \leqslant 3R$ 对 $R > 1$ 成立。则对所有 $l > 1$，有

$$||q(x, D)f||_\infty \leqslant C||q||_{l;S(m^{-\varepsilon},g)}||f||_{L^\infty},$$

其中常数 C 与 q 及 f无关。

P证毕。 我们按照引理 5.1 中的方法进行。令 $q \in S(m^{-\varepsilon},\ g)$ 的支撑于n

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : R \leqslant a(x, \xi) + \langle X \rangle \leqslant 3R\},$$

固定 $R > 1$。因此，只需证明对所有 $x \in \mathbb{R}^2$ 和 $l > 1$,

$$||\hat{q}_x||_{L^1} \leqslant C||q||_{l;S(m^{-\varepsilon},g)}.$$

Let us 考虑 $b = R^{\varepsilon-1}$. 柯西-施瓦茨不等式给出如下估计

$$\int_{|y|<b} |\hat{q}_x(y)|dy \leqslant C||q||_{l;S(m^{-\varepsilon},g)}.$$

另一方面，对于积分$\int_{|y|\geqslant b} |\hat{q}_x(y)|dy$，我们首先注意到，对于整数$k > 1$，有

$$\int_{|y|\geqslant b} |\hat{q}_x(y)|dy \leqslant Cb^{1-k} \left(\int_{y\geqslant b} |y|^{2k} |\hat{q}_x(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \quad Cb^{1-k}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\nabla_\xi^k q(x,\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \quad C||q||_{k;S(m^{-\varepsilon},g)}b^{1-k}\left(\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R} m^{-2\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

为了估计最后一个积分，我们分两种情况讨论： $|x|^2 \leqslant \frac{R}{2C}$ 和$|x|^2 > \frac{R}{2C}$。

如果 $|x|^2 \leqslant \frac{R}{2C}$，我们得到

$$R \leqslant a_2(x,\xi) + |x|^2 + \langle X\rangle \lesssim C(\xi_1^2 + |\xi_2| + |x|^2).$$

由于在次椭圆区域 $R \lesssim \xi_1^2 + |\xi_2|$，我们有

$$\xi_1^2 + |\xi_2| \lesssim a_2(x,\xi) + |x|^2 + \langle X\rangle = m(x,\xi),$$

我们可以比较

$$\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R} m^{-2\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi \lesssim \int\limits_{\substack{R\lesssim\xi_1^2+\xi_2\\ \xi_1,\xi_2>0}} (\xi_1^2+|\xi_2|)^{-2\varepsilon-k}d\xi.$$

通过进行变量替换

$$(\xi_1,\xi_2) = (\sqrt{R}u_1, Ru_2^2),\ u_1,u_2>0,$$

我们可以估计

$$\int\limits_{\substack{R\lesssim\xi_1^2+\xi_2\\ \xi_1,\xi_2>0}} (\xi_1^2+|\xi_2|)^{-2\varepsilon-k}d\xi \lesssim \int\limits_{\substack{1\lesssim u_1^2+u_2^2\\ u_1,u_2>0}} (u_1^2+u_2^2)^{-2\varepsilon-k}R^{-2\varepsilon-k}R^{\frac{3}{2}}u_2 du_1 du_2 = R^{-2\varepsilon-k+\frac{3}{2}}I,$$

其中积分

$$I = \int\limits_{\substack{1\lesssim u_1^2+u_2^2\\ u_1,u_2>0}} (u_1^2+u_2^2)^{-2\varepsilon-k}u_2 du_1 du_2 < \infty \tag{5.15}$$

收敛，因为当 $k > 3-2\varepsilon$. 因此，将前面的所有估计结合起来，我们推得

$$\int\limits_{|y|\geqslant b} |\hat{q}_x(y)|dy \lesssim R^{(\varepsilon-1)(1-k)-\varepsilon-\frac{k}{2}+\frac{3}{4}} \leqslant C.$$

为得出最后一个估计，注意到 $R>1$ 并且

$$(\varepsilon-1)(1-k)-\varepsilon-\frac{k}{2}+\frac{3}{4} = k(\frac{1}{2}-\varepsilon)-\frac{1}{4} \leqslant 0, \tag{5.16}$$

例如，如果 k 是（ I 在（5.15）中收敛的临界参数，即$k=3$，由此得到不等式

$$3(\frac{1}{2}-\varepsilon)-\frac{1}{4} \leqslant 0,$$

因此我们要求 $\varepsilon \geqslant 5/12$.

另一方面，若 $|x|^2 > \frac{R}{2C}$，则有 $-|x|^2 < -\frac{R}{2C}$，并且

$$\xi_1^2 + |\xi_2| \leqslant a_2(x,\xi) + \langle \xi \rangle \leqslant 3R - |x|^2 \leqslant 3R - \frac{R}{2C} = \frac{(6C-1)}{2C} R.$$

由于 $6C-1>0$，且利用事实 $|x|^2 > \frac{R}{2C}$，我们有 $\langle x \rangle^{-k} \leqslant C' R^{-\frac{k}{2}}$，从而得到

$$\begin{aligned}
b^{1-k} \left(\int\limits_{R \leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X \rangle \leqslant 3R} m^{-2\varepsilon-k}(x,\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} &= b^{1-k} \left(\int\limits_{\xi_1^2+|\xi_2| \leqslant C'R} m^{-2\varepsilon}(x,\xi) m^{-k}(x,\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant b^{\frac{n}{2}-k} \left(\int\limits_{\xi_1^2+|\xi_2| \leqslant C'R} (\xi_1^2 + |\xi_2|)^{-2\varepsilon} \langle x \rangle^{-2k} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant R^{(\varepsilon-1)(1-k)-\frac{k}{2}} \left(\int\limits_{\xi_1^2+|\xi_2| \leqslant C'R} (\xi_1^2 + |\xi_2|)^{-2\varepsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim R^{(\varepsilon-1)(1-k)-\frac{k}{2}} \left(\int\limits_{\substack{u_1^2+u_2^2 \lesssim 1 \\ u_1,u_2>0}} (u_1^2+u_2^2)^{-2\varepsilon} R^{-2\varepsilon} R^{\frac{3}{2}} u_2 du_1 du_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= R^{(\varepsilon-1)(1-k)-\frac{k}{2}} R^{-\varepsilon+\frac{3}{4}} \sqrt{J},
\end{aligned}$$

其中

$$J = \int\limits_{\substack{u_1^2+u_2^2 \lesssim 1 \\ u_1,u_2>0}} (u_1^2+u_2^2)^{-2\varepsilon} u_2 du_1 du_2 \lesssim \int\limits_{\substack{u_1^2+u_2^2 \lesssim 1 \\ u_1,u_2>0}} (u_1^2+u_2^2)^{-2\varepsilon} du_1 du_2$$

对任意满足 $2\varepsilon < 2$ 的 ε，该级数都收敛，也就是说，当 $\varepsilon < 1.$ 时成立。因此，在 $|x|^2 > \frac{R}{2C}$ 的情况下，这一分析表明

$$\int\limits_{|y| \geqslant b} |\hat{q}_x(y)| dy \lesssim R^{(\varepsilon-1)(1-k)-\frac{k}{2}} R^{-\varepsilon+\frac{3}{4}} \leqslant C,$$

例如，当 $k=3$ 时，根据不等式

$$(\varepsilon-1)(1-k) - \frac{k}{2} - \varepsilon + \frac{3}{4} = 3(\frac{1}{2} - \varepsilon) - \frac{1}{4} \leqslant 0$$

对于任意 $\varepsilon \geqslant 5/12.$ 引理的证明完毕。 □

关于下面改进后的指数 ε_0，应用 Fefferman-Stein 插值可得到以下估计。由于其证明采用了与定理 5.6 证明中相同的论证，故略去。

定理 5.6. 设 $\varepsilon_0 = \frac{5}{12}$ 和 $0 \leqslant \beta < \varepsilon_0$ ，且令 $\sigma(x,D) \in \mathbf{Op}(S(m^{-\beta},g))$.则， $\sigma(x,D)$ ： 若满足以下条件， $L^p(\mathbb{R}^2) \to L^p(\mathbb{R}^2)$ 可延拓为有界算子

$$\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \beta. \tag{5.17}$$

此外，对于这样的 p ，我们有

$$\|\sigma(x,D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant C\|\sigma(x,\xi)\|_{3,S(m^{-\beta},g)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

其中常数 $C > 0$ 与 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$. 无关

6. Improved L^p estimates and Schatten properties for Schrödinger operators for Hörmander sums of squares

本节将针对向量场平方和的情形，改进引理5.1 中得到的估计 $\sum_{j=1}^k X_j^2$，其中的向量场 X_j 满足二阶 H¨ormander 条件。这意味着向量场 X_j 及其交换子$[X_i, X_j]$ 张成 $\mathbb{R}^n$. 因此，所有相应的 L^p 关于类$S(m^{-\frac{n\theta}{2}}, g)$ 的估计也将得到改进。此外，在这种情况下，还给出了一个尖锐的指标 μ_0，它使算子 $S(m^{-\mu}, g)$ 属于 Schatten–von Neumann 类 $S_r(L^2(\mathbb{R}^n))$，当 $\mu > \mu_0$ 时。

注 6.1. 关于以下性质，我们遵循 Nagel、Stein 和 Wainger [69], ，另见 Jerison 和 S´anchez-Calle [58]。设 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 是满足二阶 H¨ormander 条件的一组向量场。那么，我们可以为 $\mathbb{R}^n$ 赋予如下幂零结构。若 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是向量$X_1, X_2, \cdots, X_k$及其交换子 $[X_i, X_j]$的一个枚举，则当 Y_j是向量场 X_i之一时，定义 $d_j = \mathbf{deg}(Y_j) = 1$；当 Y_j 是一个交换子时，定义 $d_j(Y_j) = 2$。令$Q = \sum_j d_j$ 为与 H¨ormander 系统 $\{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$. 相关联的 Carnot-Carath´eodory 距离 $|\cdot|_{cc}$所对应的齐次维数。对于每个j，令 $X_j(x,\xi)$ 为向量场 X_j, $1 \leqslant j \leqslant k$. 的主符号。那么：

- 函数 $(x,\xi) \mapsto a_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^k X_j(x,\xi)^2$ 是$a_2(x,D)$.• 的主符号。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，都存在一个正定矩阵 $(a_{i,\ j}(x))_{i,\ j=1}^n$ ，使得

$$a_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^k X_j(x,\xi)^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\,,1\leqslant \ell\leqslant n} a_{j,\ell}(x)\xi_j\xi_\ell,$$

  且秩为 $r_0(x) \geqslant r_0$.
- 存在一个非奇异矩阵 $\theta(x)$，使得 $\det(\theta(x)) = 1$ ，且

$$a_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^{r(x)} \lambda_j(x)(\theta(x)\xi)_j, \tag{6.1}$$

  其中 $0 < \lambda_j(x)\ 1 \leqslant j \leqslant r(x)$ 是矩阵 $(a_{j,\ \ell}(x))$. 的正特征值

- 函数 $\xi \mapsto \overline{\xi} = \theta(x)\xi$，以及范数

$$\|\overline{\xi}\| := \left(\sum_{j=1}^{r_0} \overline{\xi}_j^4 + \sum_{j=r_0+1} \overline{\xi}_j^2\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{6.2}$$

在 $\overline{\xi} \neq 0$ 处是一次齐次的，即 $\|\delta_a \overline{\xi}\| = a\|\overline{\xi}\|$，其中膨胀族 $(\delta_a)_{a>0}$, $\delta_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 定义为

$$(C): \quad \delta_a(x) = (ax_1, \cdots, ax_{r_0}, a^2 x_{r_0+1}, \cdots, a^2 x_n).$$

此外，还具有变量替换性质 $d(\delta_a \xi) = a^Q d\xi$.

- 有如下估计

$$(1 + \|\overline{\xi}\|) \leqslant C m(x, \theta^{-1}(x)\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{6.3}$$

对于某个 $C > 0$.

采用注 6.1 中的记号，我们给出以下引理。

引理 6.2. 设 $\mathbb{X} := \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的一族实向量场，满足二阶 H ¨ormander 条件。设 $a_2(x, D)$ 是 H ¨ormander 次拉普拉斯算子

$$a_2(x, D) = -\sum_{j=1}^{k} X_j^2, \tag{6.4}$$

并考虑度量 g 和 g-权函数 m，分别按(3.1) 和(3.2)中的定义给出。设$\varepsilon_0 = \frac{Q}{2n}$，并设 $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. 考虑一个符号 $q \in S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon}, g)$，其支撑包含于 $R \leqslant a(x,\xi) + \langle X \rangle \leqslant 3R$对于 $R > 1$。那么，对所有 $k \geqslant 1$，都有

$$||q(x, D)f||_\infty \leqslant C||q||_{k;S(m^{-n\varepsilon},g)}||f||_{L^\infty},$$

其中常数 C 与 q 和 f 无关。

证明。我们只需在临界情形 $\varepsilon = \varepsilon_0$. 证明该引理。 $\varepsilon \in [\varepsilon_0$的其他取值情形 $1)$ 可由$S(m, g)$-类的包含性质推出。必要时，我们将改进引理5.1的证明。设 $q \in S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon}, g)$ 的支撑包含于

$$\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : R \leqslant a(x,\xi) + \langle X \rangle \leqslant 3R\},$$

对固定的 $R > 1$。根据卷积恒等式

$$q(x, D)f(x) = \hat{q}_x * f(x),$$

其中 $\hat{}q_x$ 是关于变量 ξ 的傅里叶变换 $q_x(\xi) = q(x,\xi)$，我们得到

$$|q(x, D)f(x)| \leqslant ||\hat{q}_x||_{L^1}||f||_{L^\infty},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

因此，只需证明对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $l > n/4$

$$||\hat{q}_x||_{L^1} \leqslant C||q||_{l;S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon},g)}.$$

考虑 $b>0$，其将在下文固定。我们可以沿用引理 5.1 证明中的相同论证，并使用柯西-施瓦茨不等式，从而得到如下估计

$$\int\limits_{|y|<b}|\hat{q}_x(y)|dy\leqslant C||q||_{l;S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon},g)}b^{\frac{n}{2}}\left(\int\limits_{\langle\xi\rangle\leqslant 3R}\langle\xi\rangle^{-n\varepsilon}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

现在，通过选取 $b=R^{\varepsilon-1}$，我们得到

$$\int\limits_{|y|<b}|\hat{q}_x(y)|dy\leqslant C||q||_{l;S(m^{-\frac{n}{2}\varepsilon},g)}.$$

另一方面，对于积分 $\int\limits_{|y|<b}|\hat{q}_x(y)|dy$，我们首先注意到，对于一个整数 $k>\frac{n}{4}$，有 $k>1$ 我们有

$$\begin{aligned}\int\limits_{|y|\geqslant b}|\hat{q}_x(y)|dy\leqslant\ & Cb^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{y\geqslant b}|y|^{2k}|\hat{q}_x(y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant\ & Cb^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla_\xi^k q(x,\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

帕าร์เซ瓦尔定理推出不等式

$$\int\limits_{|y|\geqslant b}|\hat{q}_x(y)|dy\leqslant C||q||_{k;S(m^{-n\varepsilon},g)}b^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R}m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.5}$$

Let $X_j(x,\xi)$ 是向量场 X_j, $1\leqslant j\leqslant k$. 的主符号。于是

$$a_2(x,\xi)=\sum_{j=1}^{k}X_j(x,\xi)^2 \tag{6.6}$$

是 $a_2(x,D)$. 的主符号。对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$，根据注 6.1，我们可以找到一个正定矩阵 $(a_{i,j}(x))_{i,j=1}^n$，使得

$$a_2(x,\xi)=\sum_{j=1}^{k}X_j(x,\xi)^2=\sum_{1\leqslant j\leqslant k,1\leqslant\ell\leqslant n}a_{j,\ell}(x)\xi_j\xi_\ell,$$

且值域为 $r_0(x)\geqslant r_0$. 因此，存在一个非奇异矩阵 $\theta(x)$，使得 $\det(\theta(x))=1$ 且满足

$$a_2(x,\xi)=\sum_{j=1}^{r(x)}\lambda_j(x)(\theta(x)\xi)_j, \tag{6.7}$$

其中，$0<\lambda_j(x)$、$1\leqslant j\leqslant r(x)$ 是矩阵 $(a_{j,\ \ell}(x))$. 的正特征值。通过定义

$$\overline{\xi}:=\theta(x)\xi, \tag{6.8}$$

$$\|\overline{\xi}\| := \left(\sum_{j=1}^{r_0} \overline{\xi}_j^4 + \sum_{j=r_0+1}^{n} \overline{\xi}_j^2\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{6.9}$$

我们使用以下膨胀族

$$\delta_r(x) := (r\overline{\xi}_1, \cdots, r\overline{\xi}_{r_0}, r^2\overline{\xi}_{r_0+1}, \cdots, r^2\overline{\xi}_n),\ r > 0. \tag{6.10}$$

注意， $d(\delta_r\xi) = r^Q d\xi$. $\theta(x)$ 的性质给出了下界

$$(1 + \|\overline{\xi}\|)^2 \lesssim a_2(x, \theta(x)^{-1}\overline{\xi}). \tag{6.11}$$

为了估计（6.5）中的积分，我们分两种情况讨论： $|x|^2 \leqslant \frac{R}{2C}$ 和 $|x|^2 > \frac{R}{2C}$。

若$|x|^2 \leqslant \frac{R}{2}$，我们按如下方式估计（6.5）：

$$\begin{aligned}
\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R} m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi &= \int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)\leqslant 3R-|x|^2-\langle X\rangle} m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi \\
&\leqslant \int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)} m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi \\
&= \int\limits_{R\leqslant a_2(x,\theta(x)^{-1}\overline{\xi})} m^{-n\varepsilon-k}(x,\theta(x)^{-1}\overline{\xi})|\det(\theta(x)^{-1})|d\overline{\xi} \\
&\lesssim \int_{\mathcal{A}} \left(\sum_{j=1}^{r_0} \overline{\xi}_j^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)} \lambda_j(x)|\overline{\xi}_j|^2 + |\overline{\xi}|\right)^{-n\varepsilon-k} d\overline{\xi},
\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{A} := \left\{\overline{\xi} : \sum_{j=1}^{r_0} |\overline{\xi}_j|^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)} \lambda_j(x)|\overline{\xi}_j|^2 + |\overline{\xi}| \geqslant R\right\}.$$

变量替换 $\overline{\xi} := \delta_{\sqrt{R}}\xi'$ 给出了不等式

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R} m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi \\
&\lesssim \sqrt{R}^{Q-2(n\varepsilon+k)} \int_{\mathcal{A}'} \left(\sum_{j=1}^{r_0} \overline{\xi'}_j^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)} R\lambda_j(x)|\overline{\xi'}_j|^2 + |\overline{\xi'}|\right)^{-n\varepsilon-k} d\overline{\xi'},
\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{A}' := \left\{\overline{\xi} : \sum_{j=1}^{r_0} |\overline{\xi}'_j|^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)} R\lambda_j(x)|\overline{\xi'}_j|^2 + |\overline{\xi'}| \geqslant 1\right\}.$$

考虑集合 $B = \{j : \ r_0 \leqslant j \leqslant r(x)$ 和 $R\lambda_j(x) \geqslant 1\}$. 。应用变量替换 $\overline{\xi}' \mapsto \overline{\xi}$，其定义为

$$\overline{\xi}_j := \overline{\xi}'_j,\ j \notin B,$$

and

$$\overline{\xi}_j := \delta_{\sqrt{R\lambda_j(x)}}\overline{\xi}'_j,\ j \in B.$$

由于 $d\xi'_j = (R\lambda_j)^{-1}d\overline{\xi}_j$，对于 $j \in B$，此变量替换的雅可比行列式为

$$d\overline{\xi}'_1 d\overline{\xi}'_2 \cdots d\overline{\xi}'_{r_0}\Pi_{j\in B}d\overline{\xi}'_j\Pi_{j\in(\{r_0+1,\cdots,r(x)\}\backslash B\cup\{r(x)+1,r(x)+2,\cdots,n\}}d\overline{\xi}'_j$$
$$= \Pi_{j\in B}(R\lambda_j(x))^{-|B|}d\overline{\xi}.$$

特征值条件 $R\lambda_j(x) \geqslant 1, j \in B$，意味着

$$|\overline{\xi}| \geqslant |\overline{\xi}'| \geqslant C\sum_{i=r(x)+1}^{n}|\overline{\xi}'_i|,\ \text{for some } C > 0,$$

并且考虑到 $(R\lambda_j(x))^{-|B|} \leqslant 1$，对于任意 $j \in B$，我们有如下估计

$$\int_{\mathcal{A}'}\left(\sum_{j=1}^{r_0}\overline{\xi'}_j^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)}R\lambda_j(x)|\overline{\xi'}_j|^2 + |\overline{\xi'}|\right)^{-n\varepsilon-k}d\overline{\xi'}$$
$$\leqslant \int_{\mathcal{A}'}\left(\sum_{j=1}^{r_0}\overline{\xi'}_j^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)}R\lambda_j(x)|\overline{\xi'}_j|^2 + \sum_{i=r(x)+1}^{n}|\overline{\xi}'_i|\right)^{-n\varepsilon-k}d\overline{\xi'}$$
$$\lesssim \int_{\mathcal{A}''}\left(\sum_{j=1}^{r_0}|\overline{\xi}_j|^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)}|\overline{\xi}_j|^2 + \sum_{i=r(x)+1}^{n}|\overline{\xi}_i|\right)^{-n\varepsilon-k}d\overline{\xi}$$

其中

$$\mathcal{A}'' := \left\{\overline{\xi} : \sum_{j=1}^{r_0}|\overline{\xi}_j|^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)}|\overline{\xi}_j|^2 + |\overline{\xi}| \geqslant 1\right\}.$$

然后，我们可以比较

$$\int_{\mathcal{A}''}\left(\sum_{j=1}^{r_0}|\overline{\xi}_j|^2 + \sum_{j=r_0+1}^{r(x)}|\overline{\xi}_j|^2 + \sum_{i=r(x)+1}^{n}|\overline{\xi}_i|\right)^{-n\varepsilon-k}d\overline{\xi}$$
$$\lesssim \int_{\{\xi':\sum_{j=1}^{r(x)}\xi'^2_j+|\xi'|\geqslant 1\}}\left(\sum_{j=1}^{r_0}\overline{\xi'}_j^2 + |\overline{\xi}|\right)^{-n\varepsilon-k}d\overline{\xi'} \leqslant C(n,k,Q) < \infty$$

when

$$n\varepsilon + k > \frac{Q}{2}.$$

因此，综合以上所有估计，我们得到

$$\int_{|y|\geqslant b}|\hat{q}_x(y)|dy \leqslant C||q||_{k;S(m^{-n\varepsilon},g)}R^{(\varepsilon-1)(\frac{n}{2}-k)}\left(\int_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R}m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lesssim C\|q\|_{k;S(m^{-n\varepsilon},g)}R^{(\varepsilon-1)(\frac{n}{2}-k)}\left(\sqrt{R}^{Q-2(n\varepsilon+k)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\|q\|_{k;S(m^{-n\varepsilon},g)}R^{(\varepsilon-1)(\frac{n}{2}-k)+\frac{1}{4}(Q-2(n\varepsilon+k))}$$

因此，为了用一个与 $R>1$ 无关的界来估计范数 $\int_{|y|\geqslant b}|q_x(y)|dy$，我们需要满足以下两个条件

$$n\varepsilon+k>\frac{Q}{2} \tag{6.12}$$

and

$$(\varepsilon-1)(\frac{n}{2}-k)+\frac{1}{4}(Q-2\left(n\varepsilon+k\right))\leqslant 0. \tag{6.13}$$

若 $k\geqslant 1$，对于 $\varepsilon=\varepsilon_0=\frac{Q}{2n}$，我们有

$$n\varepsilon+k\geqslant\frac{Q}{2}+1>\frac{Q}{2} \tag{6.14}$$

这表明，对于 $k\geqslant 1$，(6.12) 中的不等式自动成立。注意到

$$\begin{aligned}(\varepsilon-1)\left(\frac{n}{2}-k\right)+\frac{1}{4}(Q-2\left(n\varepsilon+k\right))&=\left(\frac{Q}{2n}-1\right)\left(\frac{n}{2}-k\right)+\frac{Q}{4}-\frac{Q}{4}-\frac{k}{2}\\&=\frac{Q}{4}-\frac{Qk}{2n}-\frac{n}{2}+\frac{k}{2}\leqslant 0,\end{aligned}$$

对任意 $k\geqslant 1.$。事实上，由于 $Q=2n-r_0$，有

$$Q/4-n/2=-r_0/4.$$

还要注意，不等式 $Q\geqslant n$ 蕴含 $Q/2n\geqslant 1/2,$，由此对任意 $k\geqslant 1$，我们可得所需条件

$$\frac{Q}{4}-\frac{Qk}{2n}-\frac{n}{2}+\frac{k}{2}=\left(\frac{Q}{4}-\frac{n}{2}\right)-k\left(\frac{Q}{2n}-\frac{1}{2}\right)\leqslant -r_0/4\leqslant 0.$$

另一方面，若 $|x|^2>\frac{R}{2C}$，则有 $-|x|^2<-\frac{R}{2C}$，并且

$$\langle\xi\rangle\leqslant a_2(x,\xi)+\langle X\rangle\leqslant 3R-|x|^2\leqslant 3R-\frac{R}{2C}=\frac{(6C-1)}{2C}R.$$

由于 $6C-1>0$，并利用 $|x|^2>\frac{R}{2C}$ 这一事实，我们有 $\langle x\rangle^{-k}\leqslant C'R^{-\frac{k}{2}}$，从而得到

$$\begin{aligned}b^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R}m^{-n\varepsilon-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}&=b^{\frac{n}{2}-k}\left(\int\limits_{\langle\xi\rangle\leqslant C'R}m^{-n\varepsilon}(x,\xi)m^{-k}(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant CR^{(\frac{n}{2}-k)(\varepsilon-1)}\left(\int\limits_{\langle\xi\rangle\leqslant C'R}\langle\xi\rangle^{-n\varepsilon}\langle x\rangle^{-2k}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\leqslant CR^{(\frac{n}{2}-k)(\varepsilon-1)}\langle x\rangle^{-k}\left(\int\limits_{\langle\xi\rangle\leqslant C'R}\langle\xi\rangle^{-n\varepsilon}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant CR^{(\frac{n}{2}-k)(\varepsilon-1)}R^{-\frac{k}{2}}R^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon)}.$$

注意到

$$R^{(\frac{n}{2}-k)(\varepsilon-1)+\frac{n}{2}(1-\varepsilon)-\frac{k}{2}}=R^{k(\frac{1}{2}-\varepsilon)}\leqslant C,$$

因为 $\varepsilon=Q/2n\geqslant 1/2$. 所需的估计即可得出。 □

注意，指标 $\varepsilon_0=Q/2n$ 对于我们在引理 6.2的证明中所采用的方法而言是最优的。由于 L^p类的有界性 $S(m,g)$ 对所有 $1<p<\infty$ 都取决于引理 ε_0 中计算出的指标 6.2，本文的方法可推出以下 L^p有界性结果。

定理 6.3. 设 $\mathbb{X}:=\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的一族实向量场，满足二阶 H ¨ormander 条件。设 $a_2(x,D)$ 为 H ¨ormander 次拉普拉斯算子

$$a_2(x,D)=-\sum_{j=1}^{k}X_j^2, \tag{6.15}$$

并考虑度量 g 以及 g权函数 m ，其定义分别见 (3.1) 和 (3.2)。设 $\varepsilon_0=\frac{Q}{2n}$和 $\varepsilon_0\leqslant\beta\leqslant 1$. 设 $\sigma(x,D)\in \mathrm{Op}S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g)$. 则，$\sigma(x,D):\ L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ 可延拓为有界算子，对所有 $1<p<\infty$.此外，对每个 $k\geqslant 1$，我们有

$$\|\sigma(x,D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|\sigma(x,\xi)\|_{k,S(m^{-n\beta/2},g)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中常数 $C>0$ 与 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 无关,

对于下面较小的指数 ε_0 ，应用 Fefferman-Stein 插值可得到以下估计:

定理 6.4. 设 $\mathbb{X}:=\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的一族实向量场，满足二阶 H ¨ormander 条件。设 $a_2(x,D)$ 为 H ¨ormander 次拉普拉斯算子

$$a_2(x,D)=-\sum_{j=1}^{k}X_j^2, \tag{6.16}$$

并考虑度量 g 和 g-权函数 m ，其定义分别见 (3.1) 和 (3.2)。设 $\varepsilon_0=\frac{Q}{2n}$和 $0\leqslant\beta<\varepsilon_0$. 设 $\sigma(x,D)\in \mathrm{Op}(S(m^{-\frac{n}{2}\beta},g))$. 则，$\sigma(x,D):\ L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ 可延拓为有界算子，条件是

$$\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{n}{2}\beta. \tag{6.17}$$

此外，对于这样的 p 及所有 $\ell>\frac{n}{4}$，我们有

$$\|\sigma(x,D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|\sigma(x,\xi)\|_{\ell,S(m^{-n\beta/2},g)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中常数 $C>0$ 与 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 无关

注记 6.5。 从引理 6.2 证明中的论证可得以下估计

$$\int\limits_{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R} m^{-s}(x,\xi)d\xi$$
$$\lesssim \sqrt{R}^{Q-2s}\int\limits_{\{\xi':\sum_{j=1}^{r(x)}\xi'^2_j+|\xi'|\geqslant 1\}}\left(\sum_{j=1}^{r_0}\overline{\xi'}^2_j+||\overline{\xi'}||\right)^{-s}d\overline{\xi'}<\infty,$$

当 $s>\frac{Q}{2}$ 和 $R\geqslant 1$.时，我们将在下一节利用这个不等式，为 $S(m、g)$ 类给出精确的谱性质。

7. Schatten-von Neumann classes of the Hamiltonians

本节介绍形如 (1.7) 的哈密顿量谱分析的一些方面。我们首先讨论算子 Schatten-von Neumann 类的一些基本性质。关于算子迹类的初步介绍可参见 [61], ; 关于 Schatten-von Neumann 类的理论，读者可参见 [45], [73] 或 [78]。

设 H 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的可分希尔伯特空间，赋有内积 $(\cdot,\cdot)$，并设 $T:H\to H$ 是某个紧线性算子，其伴随算子为 T^*。显然， T^*T是正、对称且紧的，并且我们可以将 $|T|=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$写作 T的绝对值。

根据谱定理，存在由 $|T|$的特征函数组成的 H 的标准正交基。令 $s_n(T)$ 表示相应的非零特征值，也称为算子 T 的奇异值。

定义 7.1. 希尔伯特空间 H 上从 T 到 H 的紧算子属于 Schatten-von Neumann 类 $\mathsf{S}_p(H)$, $1\leqslant p<\infty$，如果

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(s_k(T))^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\,. \tag{7.1}$$

和式 (7.1) 是 T 在 S_p 中的范数，记作 $\|\cdot\|_{S_p}$。

注 7.2. 若在 S_p, $1\leqslant p<\infty$ 上赋予范数 $\|\cdot\|_{S_p}$，则 S_p 成为一个巴拿赫空间。

作为空间 S_p, $1\leqslant p<\infty$ 的一个特例，S_2 是希尔伯特-施密特算子空间。此外，Schatten-von Neumann 类是嵌套的，并且有

$$S_p\subset S_q\,,\quad \text{if}\quad 1\leqslant p\leqslant q<\infty\,.$$

在 Weyl-H $L^r(\mathbb{R}^n)$ ormander 微积分背景下，算子的 Schatten-von Neumann 类与勒贝格空间中的函数 ¨之间的类比，由 Toft 在以下命题中给出；参见注 6。4 [82]。

命题 7.3。我们有如下结论：

(A) If $p\in[1,\infty]$, then $S(m,g)\subset s_{t,p}(\mathbb{R}^{2n})$ if and only if $m\in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(B) 若 $p\in[1、\ \infty]、\ a\in L^p(\mathbb{R}^{2n})\cap S(m、\ g)$ 和 $h_g^{N/2}m\in L^p(\mathbb{R}^{2n})$ 对某个 $N\geqslant 0$ 成立，则 $a\in s_{t,\ p}(\mathbb{R}^{2n})$,

其中，我们用 $s_{\tau,\ p}(\mathbb{R}^{2n})$ 表示 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中满足 $a^\tau(x、\ D)、\ \tau\in\mathbb{R}$ 属于 $S_p(L^2(\mathbb{R}^n))$ 的所有符号的集合。

下面的定理是命题 7.3 在与此处考虑的形式为（¨1.7）的哈密顿量相关的 Hormander 类中的应用，针对的是平方和这一特殊情形。

定理 7.4. 设 $\mathbb{X}:=\{X_1,X_2,\dots,X_k\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的一族实向量场，满足二阶 H ¨ormander 条件。设 $a_2(x,D)$ 为 H ¨ormander 次拉普拉斯算子

$$a_2(x,D)=-\sum_{j=1}^{k}X_j^2, \tag{7.2}$$

并考虑度量 g 以及 g权函数 m ，分别按 (3.1) 和 (3.2)定义。于是有

$$m^{-\mu}\in L^r(\mathbb{R}^{2n}),$$

对于某个 $0<r<\infty$，只要

$$\mu>\frac{Q}{r}=\frac{2n-r_0}{r}. \tag{7.3}$$

因此，对于这样的 μ 取值以及 $a\in S(m^{-\mu}、\ g)$ ，我们有

$$a^\tau(x,D)\in S_r(L^2(\mathbb{R}^n)),\quad for\ all\quad \tau\in\mathbb{R}.$$

证明。为了估计范数 $\|m^{-\mu}\|_{L^r(\mathbb{R}^{2n})}$，我们借鉴调和分析中的一种策略，对相空间作适当的三进分解。为此，我们将 $\mathbb{R}^{2n}$ 分解为三进扇区

$$A_R:=\{R\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3R\} \tag{7.4}$$

其中 $R=3^k$ 并且 $k\in\mathbb{Z}$. 此外，注意到当 $m(x,\ \xi)\geqslant 1$，只有环带 A_{3^k}满足 $k\in\mathbb{N}$ 才会对范数 $\|m^{-\mu}\|_{L^r(\mathbb{R}^{2n})}$. 的估计产生贡献。事实上，利用备注 6.5 以及 $s=\mu r/2>Q/2$ （由此可得 $\mu r>Q\geqslant n$），我们可以如下估计范数 $\|m^{-\mu}\|_{L^r(\mathbb{R}^{2n})}$：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}m(x,\xi)^{-\mu r}\,dxd\xi\\
&\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\{3^k\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3^{k+1}\}}m(x,\xi)^{-\mu r/2}m(x,\xi)^{-\mu r/2}dx\,d\xi\\
&\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x\rangle\leqslant 3^{k+1}\}}\ \int_{\{\xi\in\mathbb{R}^n:3^k\leqslant a_2(x,\xi)+|x|^2+\langle X\rangle\leqslant 3^{k+1}\}}m(x,\xi)^{-\mu r/2}m(x,\xi)^{-\mu r/2}\,d\xi\,dx\\
&\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\{\langle x\rangle\leqslant 3^{k+1}\}}\left(|x|^2\right)^{-\mu r/2}dx\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{\{3^k\leqslant a_2(y,\xi)+|y|^2+\langle(y,\xi)\rangle\leqslant 3^{k+1}\}}m(y,\xi)^{-\mu r/2}d\xi
\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k(\mu r-n)} \int\limits_{\{\langle x\rangle\leqslant 1\}} \langle x\rangle^{-\mu r} dx \sqrt{3}^{k(Q-\mu r)} \int\limits_{\{\xi':\sum_{j=1}^{r(y)}\xi_j'^2+|\xi'|\geqslant 1\}} \left(\sum_{j=1}^{r_0}\overline{\xi'}_j^2+||\overline{|\xi'|}||\right)^{-\mu r} d\overline{\xi'}$$

$$\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k(\mu r-n)}\sqrt{3}^{k(Q-\mu r)} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k(n-\mu r)}3^{k(Q/2-\mu r/2)}.$$

由于 $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k(n-\mu r/2)}3^{k(Q/2-\mu r/2)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 3^{k/2(Q-\mu r)} < \infty$ 我们已经证明，条件 $\mu > Q/r$ 蕴含 $m^{-\mu} \in L^r(\mathbb{R}^{2n})$，于是应用命题 （A）中的条件 7.3 即可完成定理的证明。□

注 7.5。 我们注意到，条件（7.3）是尖锐的。事实上，在椭圆情形下取 $r_0 = n$ 拉普拉斯算子以及 $r = 2$进行检验时，条件（7.3）恰好与希尔伯特-施密特类的著名尖锐条件 $\mu > \frac{n}{2}$ 一致。

现在我们推导算子 $m(x、 D) = a_2(x、 D) + |x|^2 + J_{\langle X\rangle}$的特征值增长速率的一些推论，其中 $a_2(x、 D)$ 与定理 7.4中的相同，且 $J_{\langle X\rangle} = (-\Delta+|x|^2+1)^{\frac{1}{2}}$。为此，我们将定理 7.4应用于 $m(x、 D)$的负幂，从而得到特征值的衰减速率，进而得到其增长速率。

定理 7.6。 设 $a_2(x, D)$ 为定理 ¨7.4 中的 Hormander 次拉普拉斯算子。则 $m(x, D) = a_2(x, D) + |x|^2 + J_{\langle X\rangle}$满足

$$m(x, D)^{-\mu} \in S_r(L^2(\mathbb{R}^n)),$$

若 $\mu > \frac{2n-r_0}{r}$. 成立

$a_2(x$ 的 $a_2(x、 D)+|x|^2 + J_{\langle X\rangle}$ 的特征值序列 $\lambda_j(a_2(x、 D)+|x|^2+J_{\langle X\rangle})$ 具有至少如下阶的增长

$$j^{\frac{1}{r}}, \ as \ j \to \infty, \tag{7.5}$$

若 $r > 2n - r_0$ 成立。因此， $\lambda_j(a_2(x, D) +|x|^2)$ 的特征值序列至少具有如下增长阶 (7.5) 对于 $r > 2n - r_0$。

证明。 若 $\mu > \frac{2n-r_0}{r}$，则 $m(x, D)^{-\mu}$ 属于类 $S_r(L^2(\mathbb{R}^n))$ 是定理 7.4的直接推论。另一方面，注意到从 $\mu = 1$这一情形，可以推导出 $m(x, D)^{-1}$的特征值衰减速率，从而得到 $r > 2n - r_0$

$$\lambda_j(m(x, D)^{-1}) = o(j^{-\frac{1}{r}}), \ \text{as } j \to \infty. \tag{7.6}$$

由此我们将得到关于 $m(x、 D) = a_2(x、 D) + |x|^2 + J_{\langle X\rangle}$ 的特征值增长速率的以下估计：

对于每个 $L \in \mathbb{N}$，都存在 $L_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$Lj^{\frac{1}{r}} \leqslant \lambda_j(m(x, D)), \ \text{ for } j \geqslant L_0. \tag{7.7}$$

因此，特征值 $\lambda_j(a_2(x、\ D)+|x|^2+J_{\langle X\rangle})$ 的增长阶至少为

$$j^{\frac{1}{r}},\ \text{as } j\to\infty, \tag{7.8}$$

已提供 $r>2n-r_0$。

最后一部分，我们注意到，由于 $2n-r_0=n+n-r_0\geqslant n$ 且 $J_{\langle X\rangle}=(-\Delta+|x|^2+1)^{\frac{1}{2}}$的特征值的阶为 $j^{\frac{1}{r}}$，其中 $r>n$。由此可知，$\lambda_j(a_2(x$ 的特征值 $D)+|x|^2)$ 至少以（7.5）的速度增长，其中$r>2n-r_0$。□

为得到（7.6），可以应用下面的魏尔不等式，它将紧算子 $s_n(T)$ 的奇异值与特征值 $\lambda_n(T)$ 联系起来。该算子作用于复可分希尔伯特空间 T 上：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n(T)|^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}s_n(T)^p,\quad p>0.$$

References

1. Albeverio, S. Mazzucchi, S. 具有多项式势的热半群的迹公式。随机分析、随机场与应用研讨会 VI，3—21，概率论进展，63，Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2011。2. Beals, R. 伪微分算子的 L^p 和 H¨older 估计：充分条件。傅里叶研究所年刊。29(3)，(1979)，239–260。3. Beals R. 伪微分算子的 Lp 和 H¨older 估计：必要条件。载于：欧几里得空间中的调和分析（纯数学专题讨论会论文集，威廉姆斯学院，Williamstown，MA，1978）；普罗维登斯，R.I.：美国数学会；(1979)。第153–157页。4. Beals, R., Greiner, P., Gaveau, B. 某些高度退化椭圆算子的格林函数。《J. Funct. Anal.》，165(2)，(1999)，407–429。5. Berezin, F. A., Shubin, M. A，《Schr¨odinger 方程》，Kluwer，多德雷赫特，1991。6. Bilyj, O. Schrohe, E. Seiler, J. 亚椭圆伪微分算子的 H_∞-演算，《美国数学会会刊》138(5) (2010)，1645–1656。7. Bongioanni, B. and Torrea, J.L. 与谐振子相关的Sobolev空间，《印度科学院数学科学会刊》116 (2006)，1–24。8. Bony, J.M, Chemin, J.Y. 与 Weyl-H¨ormander 演算相关的函数空间。《法国数学会学报》（1994），122(1)，77–118。9. Bony, J.M. 伪微分算子的刻画（新旧结果）。《带应用的相空间分析研究》，21–34，非线性微分方程及其应用进展，84，Birkh¨auser/Springer，纽约，2013。10. Buzano, E. Nicola, F. 伪微分算子与 Schatten-von Neumann类。载于：P. Boggiatto, R. Ashino, M. W. Wong（编），伪微分算子进展（ISAAC 会议论文集，多伦多，2003），算子理论进展及其应用，第155卷，Birkha¨user，巴塞尔，(2004)，117–130。11. Buzano, E. Nicola, F. 亚椭圆伪微分算子的复幂，《J. Funct. Anal.》245，(2007)，353–378。12. Cancelier, C. E. Chemin, J.-Y. Xu, C.-J. Weyl-H¨ormander 演算与次椭圆算子。傅里叶研究所年刊，卷43，1993，第1157–1178页。13. Cardona, D. Hölder空间中的伪微分算子再探：Weyl-H¨ormander演算与Ruzhansky-Turunen 类。《Mediterr. J. Math.》16 (2019)，6(17)，第148号，17页。

14. Cardona, D. Chatzakou, M. Ruzhansky, M. Toft, J. 紧李群上 H¨ormander 类的 Schatten–von Neumann 性质，arXiv:2301.04044 15. Cardona, D., Delgado, J., Ruzhansky, M. 分次李群上伪微分算子的 L^p–界。arXiv:1911.03397 16. Cardona, D., Ruzhansky, M. 与谐振子相关的伪乘子的 H¨ormander 条件。arXiv:1810.01260 17. Carmona, R. Schrödinger 半群与狄利克雷半群的正则性，《J. Funct. Anal.》33 (1979)，259–296。18. Chatzakou, M. Delgado, J. Ruzhansky, M. 一类非谐振子，《J. Math. Pures Appl.》153，(9) (2021)，1–29。19. Chatzakou, M. Delgado, J. Ruzhansky, M. 一类非谐振子 II：一般情形，《Bull. Sci. Math.》，180 (2022)，103196。20. Delgado, J. Weyl-H¨ormander 演算框架下一类伪微分算子的 Lp 估计，《J. Anal. Math.》100 (2006)，337–374。21. Delgado, J. R. 在 L^p 上核算子的迹公式。载于：伪微分算子：复分析与偏微分方程，算子理论进展及其应用第205卷，第181–193页。Birkha¨user Verlag，巴塞尔，2010。22. Delgado, J. 环面上伪微分算子的 L^p 界，《Operators Theory, Advances and Applications》231，(2012)，103–116。23. Delgado, J. Bochner可积函数空间中核算子的迹公式。《Monatsh. Math.》172 (2013)，第3–4期，259–275。24. Delgado, J. 勒贝格空间上某些积分算子的r-核性。《Tohoku Math. J.》(2) 67 (2015)，第1期，125–135。25. Delgado, J. S(m,g)类中的一类可逆次椭圆算子。《Results Math.》67，(2015)，第3–4期，431–444。26. Delgado, J. L^p 界与 $S(m、g)$-演算，《Complex Variables and Elliptic Equations》61(3)，(2016)，315–337。27. Delgado, J. 环面上的Poincar´é行列式。《J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.》13 (2022)，第3期，论文第29号，13页。28. Delgado, J. Ruzhansky, M. 紧流形上的Schatten类：核条件。《J. Funct. Anal.》267 (2014)，第3期，772–798。29. Delgado, J., Ruzhansky, M. 紧流形上的Schatten类与r-核性的核与符号判据。《C. R. Math. Acad. Sci. Paris》352，(2014)，第10期，第779–784页。30. Delgado, J., Ruzhansky, M. 紧李群上的 L^p-核性、迹与 Grothendieck–Lidskii公式。《J. Math. Pures Appl.》(9) 102，(2014)，第1期，第153–172页。31. Delgado, J., Ruzhansky, M. 紧群上的 Schatten类与迹。《Math. Res. Lett.》24，(2017)，第4期，第979–1003页。32. Delgado, J. Ruzhansky, M. 变指数勒贝格空间的有界逼近性质与核性。《Math. Scand.》122 (2018)，第2期，299–319。33. Delgado, J., Ruzhansky, M. 紧流形上的傅里叶乘子、符号与核性。《J. Anal. Math.》135(2)，(2018)，第757–800页。34. Delgado J., Ruzhansky M., 紧李群上伪微分算子的 L^p-界。《J. Inst. Math. Jussieu》18，(2019)，531–559。35. Delgado, J. Ruzhansky, M. 积分算子的Schatten–von Neumann类，《J. Math. Pures Appl.》154，(9)，(2021)，1–29。36. Delgado, J. Ruzhansky, M. Tokmagambetov, N. 带边界流形上的 Schatten类、核性与非调和分析。《J. Math. Pures Appl.》(9) 107，(2017)，第6期，758–783。37. Delgado, J. Ruzhansky, M. Wang, B. 混合范数 Lp、调制空间和 Wiener拼接空间上的逼近性质与核性。《J. Lond. Math. Soc.》(2) 94，(2016)，第2期，391–408。38. Delgado, J. Ruzhansky, M. Wang, B. 混合范数空间与变指数勒贝格空间上的 Grothendieck–Lidskii迹公式。《J. Spectr. Theory》6(4)，(2016)，781–791。

39. Delgado, J., Zamudio, A. M. 一类退化椭圆算子的可逆性。《J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.》1(2), (2010), 207–231。40. Doi, S. 关于 Schr¨odinger 型方程的柯西问题及解的正则性，《数学京都大学杂志》34, (1994), 319–328。41. Doi, S. 关于 Schr¨odinger 型方程柯西问题的评论，《偏微分方程通讯》21 (1996), 163–178。42. Fefferman, C. 伪微分算子的 L^p-界。《以色列数学杂志》 14, (1973), 413–417。43. Fefferman, C. Phong, D.H. 不确定性原理与尖锐的 g˚arding 不等式。《纯粹与应用数学通讯》34, (1981), 285-331。44. Fefferman, C. 不确定性原理。《美国数学会通报》9 (1983), 129–206。˘45. Gohberg, I. C. Krein, D.H. 线性非自伴算子理论导论。《数学专著译丛》第18卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1969。A. Feinstein 由俄文译出。46. Hara, S. 变系数 Schr¨odinger 型方程的 H^∞ 适定柯西问题的必要条件，《数学京都大学杂志》32–2 (1992), 287-305。47. Hiroshi, A. Kajitani, K. 变系数 Schrodinger 型方程的柯西问题，筑波大学预印本。48. Hislop, P. D. 和 Sigal, I. M. 谱理论导论：及其在 Schr¨odinger 算子中的应用。应用数学科学丛书第113卷。Springer-Verlag，纽约，1996。49. H¨ormander, L. R^n中伪微分算子特征值的渐近分布。《数学档案》17 (1979), 297–313。50. H¨ormander, L. 伪微分算子与次椭圆方程。《奇异积分》（《纯粹数学专题讨论会论文集》第X卷，芝加哥，伊利诺伊州，1966），(1967)，第138–183页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。51. H¨ormander, L. 线性偏微分算子分析，第三卷。Springer-Verlag，(1985)。52. H¨ormander, L. 线性偏微分算子分析，第三卷。Springer-Verlag，(1985)。53. Imekraz, R. Ouhabaz, E. M. 通过热半群得到的伯恩斯坦不等式。《数学年刊》382 (2022), 第1-2期，783–819。54. Ichinose, W. Schr¨odinger 型方程适定性的充分条件，《偏微分方程通讯》9 (1984), 33-48。55. Ichinose, W. Schr¨odinger 型方程适定性的充分条件，《偏微分方程通讯》9 (1984), 33–48。56. Ichinose, W. 变系数 Schrodinger 型方程的柯西问题，《大阪数学杂志》24 (1987), 853–886。57. Ishige, K. Kabeya, Y. 非负 Schr¨odinger 热半群的 Lp范数及热点的大时间行为。《J. Funct. Anal.》262 (2012), 第6期，2695–2733。58. Jerison, D., S´anchez-Calle, A. 次椭圆二阶微分算子。载于：Berenstein, C.A.（编）《复分析 III》。《数学讲义》第1277卷，(1987)，Springer，柏林，海德堡。59. Kohn, J.J., Nirenberg, L. 伪微分算子代数。《纯粹与应用数学通讯》18, 269-305, 1965。60. Kumano-go, H., Nagase, M. 具有非正则符号的伪微分算子及其应用，《泛函方程》21 (1978), 151–192。61. Lax, P. D. 泛函分析。《纯粹与应用数学》（纽约）。约翰·威立父子出版公司，纽约，2002。Wiley-Interscience 出版物。62. Lerner, N. 相空间上的度量与非自伴伪微分算子，《伪微分算子》，Birkh¨auser，巴塞尔，2010。63. Levendorskii, S. 退化椭圆方程。《数学及其应用》。多德雷赫特：克吕维尔学术出版社集团，第258卷。(1993)。

64. Li, C. Z., Wang, R. H. 关于若干类伪微分算子的 Lp有界性，《中国数学年刊》5 B (1984), 193–213。65. Marcinkiewicz, J. 关于傅里叶级数的乘子。《数学研究》8, (1939), 78–91。66. Mihlin, S. G. 关于傅里叶积分的乘子。《苏联科学院学报》（新系列）109, (1956), 701–703，俄文。67. Mizohata, S. 关于柯西问题，Academic Press (1985)。68. Morimoto, Y. 退化 Schr¨odinger 算子的估计及无穷阶退化椭圆算子的亚椭圆性。《数学京都大学杂志》32-2, (1992), 333-372。69. Nagel, A. Stein, E. Wainger, S. 由向量场定义的球与度量 I：基本性质，《数学学报》155 (1985), 103–147。70. Parmeggiani, A.《非交换调和振子的谱理论：导论》，《数学讲义》，《数学讲义》，Springer，2010。71. Nicola, F., Rodino, L., 欧几里得空间上的全局伪微分演算。第4卷，《伪微分算子理论与应用》。Birkh¨auser (2010)。72. Nicola, F., Rodino, L., 一般伪微分算子的 Dixmier 可迹性，载于《C*代数与椭圆理论 II》，第227–237页（Birkh¨auser，巴塞尔，瑞士，2008）。73. Reed, M. Simon, B.《现代数学物理方法》。II. 傅里叶分析、自伴性。Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 纽约，1975。74. Shubin, M. A.《伪微分算子与谱理论》。Springer–Verlag，柏林等地，1987。75. Simon, B.《泛函积分与量子物理》，Academic Press，纽约，1981。76. Simon, B. Schr¨odinger 半群。《美国数学会通报》（新系列）7(3), (1982), 447–526。77. Simon, B. 勘误：Schr¨odinger 半群。《美国数学会通报》（新系列）11(2), (1984)。78. Simon, B.《算子理论：分析综合教程》第IV卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010。79. Takeuchi, J. 某类演化方程柯西问题适定性的必要条件，《日本学士院纪要》50, (1974), 133-137。80. Taylor, M.《伪微分算子》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1981。81. Thangavelu, S.《Hermite 展开与拉盖尔展开讲义》，《数学札记》第42卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1993。82. Toft, J. Weyl 演算中的 Schatten–von Neumann 性质及辛向量空间上的度量演算。《全球分析与几何年刊》30(2), (2006), 169–209。83. Weyl, H. 线性变换的两类特征值之间的不等式，《美国国家科学院院刊》35 (1949), 408-411。84. Xu, C., Zhu, X. 关于退化椭圆算子的逆。《当代数学杂志》(1995), 16(3)。

Duván Cardona:Department of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Belgium电子邮箱地址
duvan.cardonasanchez@ugent.be

Marianna Chatzakou:Department of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Belgium电子邮箱地址
Marianna.Chatzakou@UGent.be

Julio Delgado:
Departmento de Matematicas
Universidad del ValleCali-Colombia电子邮
件地址 delgado.julio@correounivalle.edu.co

Michael Ruzhansky:

Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics
Ghent University, BelgiumandSchool of Mathematical Sciences
Queen Mary University of LondonUnited Kingdom电子邮件地址
michael.ruzhansky@ugent.be