arXiv:2302.02442v2 [math.NA] 6 Apr 2023

非线性弹性复形与有限元图追踪

KAIBO HU

Abstract. 本文提出线性弹性（Cal- abi、Kr¨oner、黎曼变形）复形的一个非线性版本，该复形编码了等距嵌入、度量、曲率和比安基恒等式。我们将刚性定理和黎曼几何基本定理重新表述为该复形的正合性。随后，我们推广一种代数方法，用于构造 Bernstein-Gelfand-Gelfand（BGG）复形的有限元。特别地，我们讨论在 BGG 图中利用单射连接映射减少自由度。通过图追踪，我们推导出二维空间中的应变复形。

1. Introduction

复形是指由空间 V^k、$k=0$、$\cdots$、n 和算子 d^k 构成的序列：$V^k \to V^{k+1}$、$k=0$、$\cdots$、$n-1$，满足对任意 k，都有 $d^{k+1}\circ d^k = 0$。本文关注微分复形，其中 $d^\bullet$ 为微分算子。微分复形在几何、分析和数值偏微分方程中发挥着重要作用 [6, 8, 9, 10, 15, 17]。有限元外微积分（FEEC） [6, 8, 9] 受到电磁学和弹性问题的有限元方法启发。FEEC 的一个关键思想是，使用能够组成复形的空间对问题进行离散化。对于电磁学问题，de Rham 复形编码了连续问题的关键结构；而对于弹性问题，弹性（Calabi、Kr¨oner、黎曼变形）复形 [7, 27, 28, 44] 起着类似的作用。

现有的大多数文献都聚焦于具有线性微分算子的复形。对于线性算子，可以定义上同调，并且上同调携带丰富的信息（例如，有限维上同调进一步意味着各种分析结果 [10]）。在某些情况下，例如弹性复形中，算子是非线性版本线性化后得到的。该空间与非线性算子也构成一个复形。然而，这些具有非线性算子的原始复形（以下简称非线性复形）受到的关注较少。

研究非线性复形是很有意义的，因为它们

(1) 纳入非线性模型和偏微分方程的重要结构；(2) 为线性版本提供动机；(3) 有助于阐明非线性问题数值分析中的一些问题（例如，非线性弹性中不同有限元选择的稳定性/不稳定性 [2, 13]）。

Date：2023年4月7日。为2022年9月在意大利科尔托纳举行的 INdAM 会议“逼近理论与数值分析邂逅代数、几何与拓扑”的会议论文集而撰写的手稿。

此外，在非线性弹性的语境下，一些概念会更加清晰，例如拉回和框架无关性。本文第一部分介绍弹性复形的非线性版本，并证明该复形的正合性与刚性及黎曼几何基本定理相对应 [23] （从而阐明上述（1）和（2））。

在本文的第二部分，我们推广了一种构造线性弹性复形（二维空间中的应变复形和应力复形）的有限元版本的方法。弹性复形是 Bernstein-Gelfand-Gelfand（BGG）序列 [10, 16, 17, 28] 的一个特例。BGG 技术建立了 de Rham 复形与更复杂复形（例如弹性复形[10, 16]）之间的联系。具体而言，通过代数连接映射将多个 de Rham 复形副本连接起来，并从图中消去某些分量。在离散层面，可以仿照这一构造，并将有限元空间嵌入图中。我们将这种利用具有各种正则性的 de Rham 复形推导出更多有限元的方法称为有限元图追踪。这种方法的主要困难在于构造满足要求的有限元 de Rham 复形，因为输入复形应具有不同类型的正则性。最简单的情形可以说明这一点：将两个一维 de Rham 复形连接起来，可得到一个带有二阶算子的 BGG 复形（见图 1 和图 2）。在更高维度中，图追踪需要输入更加精细的有限元 de Rham 复形。

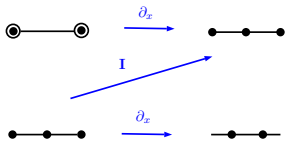


FIGURE 1. 用于导出含二阶算子的复形的 BGG图。两行分别是具有不同类型正则性的有限元 de Rham 复形。

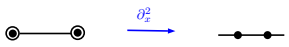


FIGURE 2. 导出的含二阶算子的 BGG 复形。

有限元图追踪最初在 [7] 中被用于重新诠释 Arnold-Winther 弹性单元。最近，这种方法已扩展到其他复形和有限元 [19, 20, 22]。在与 Hellinger-Reissner 原理相关的应用中（例如 [7]），连接映射是满射。在这种情况下，可以通过重写自由度来定义连接映射的离散版本 [7]。在其他示例中，连接映射可能是单射。空间和自由度的约化更加微妙。在 [19] 中构造了三维 Alfeld 剖分上的有限元弹性复形。第一个连接映射 mskw 是单射。离散 BGG 图在 [19] 中发挥着重要作用。然而，应变空间是直接推导出来的，而不是遵循系统的图追踪过程。

本文通过紧密遵循 BGG 图，展示空间和自由度的约化过程。我们以二维应变复形为例。所得到的空间并不对称，但在离散意义下是对称的（更详细的解释见第 3 节）。我们还讨论了四边形网格上的应力复形。

离散化整个 BGG 图不仅是推导离散 BGG 序列的一种方式，还可能有助于纳入更多物理因素。对于每个 BGG 图，我们可以将所有行中的空间汇集到一个**扭曲复形** 中，其中的算子包含一个非对角部分，用于混合不同行的分量 [10, 16]。扭曲复形所编码的信息比 BGG 序列更多，因为后者可以通过从前者中消去某些空间得到（而 BGG 技术的主要结论是，这种消去保持上同调）。这种消去具有物理意义。例如，对于弹性复形，扭曲复形的霍奇-拉普拉斯问题对应于线性科塞拉特模型，其中同时涉及位移和逐点旋转。随后，为了推导弹性复形，可以消去旋转自由度，从而得到仅以位移为主要未知量的标准弹性。文献 [16], 观察到，这种对应关系在二维的 Reissner-Mindlin板与 Kirchhoff-Love板中，以及在三维的科塞拉特模型与标准弹性中均成立。这里我们进一步观察到，1D 扭曲复形和 BGG 复形的霍奇-拉普拉斯问题（图 1 和图 2 的连续版本）分别采用能量泛函 $\|\partial_x u - w\|_A^2 + \|\partial_x w\|_B^2$ 和 $\|\partial_x^2 w\|_C^2$ 时，对应于线性化的铁木辛柯梁和欧拉-伯努利梁。这里 u 表示位移； w 表示挠度； $\|\cdot\|_\bullet$ 表示加权范数。因此，推导整个图的离散版本也可能有助于阐明这些问题。

微分复形还为标量样条与正则性相对较低的张量值空间之间提供了联系。特别地，复形 $(V^\bullet,\ d^\bullet)$ 的正合性给出了维数等式 $\sum_k (-1)^k \dim V^k = 0$。这种联系也启发了张量值有限元的构造。具体而言，也可以从复形中的一个光滑标量样条空间出发，对其求导，从而得到补全该序列的张量值空间。表 1 总结了若干标量空间和张量值空间，以及将它们联系起来的复形。

本文其余部分安排如下。第 2 节讨论一个带有非线性微分算子的复形。第 3 节通过图追踪推导有限元应变复形和应力复形。第 4 节给出结论性说明。

二维斯托克斯（2013年） [29]	Argyris（1968年） [4]	Falk-Neilan（2013年） [29]
二维斯托克斯（2018年） [21]	Clough-Tocher（1965年） [26]	Arnold-Qin（1992年） [11]
二维斯托克斯（2020年） [32]	Powell-Sabin（1977年） [49]	张（2008年） [49]
二维弹性 （2002年） [12]	Argyris（1968年） [4]	Arnold-Winther（2002年） [12]
二维弹性 （2018年） [20]	Argyris（1968年） [4]	Hu-Zhang（2014年） [34]
二维弹性（2022年） [22]	Clough-Tocher（1965年） [26]	Johnson-Mercier（1978年） [37]
三维 Stokes（2015年） [42]	Z̆en´ı˘sek（1973） [47]	Neilan（2015年） [42]
三维 Stokes（2020年） [30]	Alfeld（1984年） [1]	张（2005年） [48]
三维 Stokes（2022年） [33]	Worsey-Farin（1987年） [46]	张（2011年） [50]
三维弹性（2020） [19]	Alfeld（1984） [1]	Christiansen-Gopalakrishnan -Guzman-Hu（2020） [19]

TABLE 1. 复形将标量/向量样条与张量值空间联系起来。表格的第二列包含标量/向量样条空间，第三列包含相应的张量值空间。第一列指出包含这些空间的复形。另请参阅 [43] ，了解有限元 Stokes 复形综述；以及 [35] ，了解一些 BGG 复形。

2. NONLINEAR COMPLEX

本节介绍线性弹性复形的一个非线性版本 x.

在 $\mathbb{R}^3$ 上赋予平坦度量 g_0。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界区域，且 $\varphi_0 : \Omega \to \varphi_0(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$ 是给定的可逆光滑向量值函数。我们将以下序列称为非线性弹性复形:

$$\mathbb{RM} \xrightarrow{\subset} C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\iota} \Gamma_+(S^2T^*\Omega) \xrightarrow{\mathrm{Ric}} \Gamma(S^2T^*\Omega) \xrightarrow{\mathrm{Bian}} T^*\Omega \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

这里， $\mathbb{RM}$ 是由 φ_0复合而成的刚体运动空间，即

$$\mathbb{RM} := \{c + Q \cdot \varphi_0(x),\ c \in \mathbb{R}^3, Q \in SO(3)\}.$$

空间 $C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 在几何上表示将 Ω 嵌入 $\mathbb{R}^3$。每个这样的映射 φ 都会诱导度量的拉回 φ^*: $\Gamma(S^2T^*\mathbb{R}^3) \to \Gamma(S^2T^*\Omega)$，其中 $\Gamma(S^2T^*M)$ 表示流形 M 上的对称（ 0, 2 ）张量场截面。算子 ι表示度量的变化，即 $\iota(\varphi) := (\varphi)^*g_0 - (\varphi_0)^*g_0$；用坐标表示时，$\iota(\varphi) := D\varphi \cdot g_0 \cdot (D\varphi)^t - D\varphi_0 \cdot g_0 \cdot (D\varphi_0)^t$，其中 $(D\varphi)^{ij} := \partial_i\varphi_j$。对于任意 $r \in \mathbb{RM}$， r与 φ_0在度量上诱导相同的映射，因为 r 是 φ_0 与一个刚体运动的复合。因此容易看出，对于任意 $r \in \mathbb{RM}$， $\iota(r) = 0$ 。空间 $\Gamma_+(S^2T^*\Omega)$ 定义为

$$\Gamma_+(S^2T^*\Omega) := \{g \in \Gamma(S^2T^*\Omega) : g + (\varphi_0)^*g_0 > 0\}.$$

这里，矩阵 $g + (\varphi_0)^*g_0 > 0$ 表示 $g + (\varphi_0)^*g_0$ 是正定的。在 (2.1) 中，Ric 是将度量映射到里奇曲率的算子。在三维空间中，黎曼张量、里奇张量和爱因斯坦张量包含相同的信息。此外，Bian 是（缩并）微分比安基恒等式 $R_{ij} \mapsto \nabla^i(R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij})$ 中的算子，其中 R_{ij} 是里奇张量， $R := g^{ij}R_{ij}$ 是标量曲率，而 g_{ij} 是度量张量。注意， $R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}$ 是爱因斯坦张量。

在连续介质力学中，φ 表示从参考构形 Ω 到当前构形 $\varphi(\Omega)$ 的映射。当 $g_0 = I$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的欧几里得度量时，$\varphi^*(g_0)$，或者用矩阵形式表示为 $D\varphi \cdot (D\varphi)^t$，即为右柯西-格林张量 [41, 定义 3.5]。

定理1. 序列 (2.1) 是一个复形，因为连续两个算子复合后为零。

证明. 由于假设 φ_0 是平坦度量，因此 Ric $\circ\, \iota = 0$，而 Bian $\circ$ Ric $= 0$ 是比安基恒等式。□

注1. [3]研究了另一个与非线性弹性相关的复形。该复形包含嵌入 φ 和变形张量 $D\varphi$，因此对应于 ***de Rham*** 复形。[3] 中的复形算子是线性的。因此，序列中并未明确包含乘法结构。这不同于 (2.1)，后者包含 $D\varphi \cdot (D\varphi)^t$。

本节余下部分将讨论非线性复形的正合性，并说明它如何对应于一些经典结果。为简便起见，以下假设g_0 是欧几里得度量，或者用坐标表示为 $g_0 = I$。

零指标处的正合性（在空间 $C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 处）表明，如果 $D\varphi \cdot (D\varphi)^T - D\varphi_0 \cdot (D\varphi_0)^T = 0$，那么 φ 属于 $\mathbb{RM}$，即存在 c，Q 使得 $\varphi = c + Q\varphi_0$。这正是刚性定理 [23, 定理 8.7-1]，该定理针对 C^1 映射以及 $\mathbb{R}^n$的连通开子集而表述。连通性是一个自然条件，因为在线性情形中，正合性依赖于平凡拓扑。

一阶处的正合性表明，对于任意 $g \in \Gamma_+(S^2T^*\Omega)$，如果 Ricci（Riemann, Einstein）张量消失，那么存在 φ_0使得 $g = D\varphi \cdot (D\varphi)^t - D\varphi_0 \cdot (D\varphi_0)^t$。这等价于将关于“具有指定度量张量的浸入存在性”的定理 [23, 定理 8.6-1] 应用于 $g + D\varphi_0 \cdot (D\varphi_0)^t$。事实上，$g \in \Gamma_+(S^2T^*\Omega)$ 蕴含 $g + D\varphi_0 \cdot (D\varphi_0)^t$ 是正定的。此外，g是平坦的，这意味着 $g + D\varphi_0 \cdot (D\varphi_0)^T$ 也具有消失的 Riemann 张量。于是，我们具备应用 [23, 定理 8.6-1], 的全部条件；该定理断言，当 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单连通开集且 $g \in C^2$（因此嵌入 ϕ 于C^3）时，正合性成立。这再次对应于线性弹性复形正合性的拓扑条件。

如上所示，(2.1) 在零指标处的正合性对应于刚性，而在指标一处则是黎曼几何基本定理的一个特例。人们很自然地会想探究指标二处的正合性。一般而言，问题是：假设一个张量满足 Ric（黎曼）张量的对称性，它是否是某个度量的曲率张量？然而，这个问题定义得并不恰当，因为要表述比安基恒等式，必须预先给定一个度量。[45], 讨论了这一问题，作者探究了施加相容条件的另一种可能性：“存在 某个度量 g，使得 $\mathrm{Bian}_g\, \sigma = 0$”，其中 Bian^g 是由 g 定义的比安基算子。不过，在这一条件下，σ 未必是任何度量的黎曼张量，即“正合性”并不成立。

将 (2.1) 在欧几里得度量附近线性化，得到线性弹性复形

$$\mathrm{RM} \longrightarrow C^\infty \otimes \mathbb{V} \xrightarrow{\mathrm{def}} C^\infty \otimes \mathbb{S} \xrightarrow{\mathrm{inc}} C^\infty \otimes \mathbb{S} \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty \otimes \mathbb{V} \longrightarrow 0, \tag{2.2}$$

其中，我们用 $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ 表示向量空间，用 $C^\infty\otimes\mathbb{V}=C^\infty(\Omega)\otimes\mathbb{V}$ 表示光滑向量场空间。类似地， $\mathbb{S}$ 和 $C^\infty\otimes\mathbb{S}$ 分别表示对称矩阵空间和光滑矩阵场空间。这里，RM 是无穷小刚体运动空间

$$\mathrm{RM}:=\{c+K\cdot x,\ c\in\mathbb{R}^3, Q\in SO(3)\}=\{c+b\times x,\ c,b\in\mathbb{R}^3\}.$$

弹性复形中的算子包括变形算子或线性化应变算子 def $=$symgrad、不相容算子 inc $=$curl $\circ$T $\circ$curl（其中 T 表示转置运算，curl 按列作用于矩阵场），以及将矩阵映射为向量的逐列散度算子。

3. Finite element diagram chase

本节将通过图追踪构造二维中的弹性复形有限元版本。

按照 [10],，我们介绍二维中的一些记号。我们用 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{V}$、 $\mathbb{M}$、 $\mathbb{S}$ 和 $\mathbb{K}$ 分别表示标量、向量、矩阵、对称矩阵和反对称矩阵的（有限维）空间。也就是说， $\mathbb{V}:=\mathbb{R}^2$、 $\mathbb{M}:=\mathbb{R}^{2\times2}$，以及 $\mathbb{S}:=\mathbb{R}^{2\times2}_{\mathrm{sym}}$。算子 skw: $\mathbb{M}\to\mathbb{K}$ 和 sym: $\mathbb{M}\to\mathbb{S}$ 分别是反对称化和对称化。在 $\mathbb{R}^2$ 中，反对称矩阵可以与标量对应。令 mskw: $\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ 表示这一对应，即，

$$\mathrm{mskw}(u):=\begin{pmatrix}0&u\\-u&0\end{pmatrix}\quad\text{in }\mathbb{R}^2.$$

我们还令 sskw $=\mathrm{mskw}^{-1}\circ$skw : $\mathbb{M}\to\mathbb{R}$ 表示取矩阵的反对称部分并将其与一个标量对应起来的映射。

我们用 H^q 表示所有阶数小于或等于 q 的导数均为平方可积函数的索 Sobole夫空间。对于线性算子 D，定义 $H(D):=\{u\in L^2:Du\in L^2\}$。

3.1. 应力与应变复形：概述。 在二维中，有两个与 (2.2) 相关的复形。与 Hellinger-Reissner 原理相关的一个是应力复形

$$0\longrightarrow H^2\xrightarrow{\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}}H(\mathrm{div},\mathbb{S})\xrightarrow{\mathrm{div}}L^2\otimes\mathbb{V}\longrightarrow0,\tag{3.1}$$

其中 H(散度 $\mathbb{S}$) $:=\{\sigma\in L^2\otimes\mathbb{S}:$ 散度 $\sigma\in L^2\otimes\mathbb{V}\}$。应力复形可以看作将复形 (2.2) 的最后一部分限制在一个二维面上（因此 inc 变为旋度旋度，而散度保持不变）。应力复形可由以下图表推导:

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&H^2&\xrightarrow{\mathrm{curl}}&H^1\otimes\mathbb{V}&\xrightarrow{\mathrm{div}}&L^2&\longrightarrow&0\\&&&&\uparrow{\scriptstyle I}&&\uparrow{\scriptstyle -2\,\mathrm{sskw}}&&\\0&\longrightarrow&H^1\otimes\mathbb{V}&\xrightarrow{\mathrm{curl}}&H(\mathrm{div})\otimes\mathbb{V}&\xrightarrow{\mathrm{div}}&L^2\otimes\mathbb{V}&\longrightarrow&0.\end{array}\tag{3.2}$$

弹性 Hellinger-Reissner 原理的应用使用图表的最后一部分。在连续层面，从图表（3.2）推导出（3.1）的思路是尽可能从图表中消去由代数对角映射连接的空间。例如，我们移除由 I 连接的两个空间，以及由

sskw 连接的分量（因此， L^2 从顶行中移除，而底行中保留H（散度） $\otimes \mathbb{V}$ 的对称部分）。关于 BGG 技术的详细讨论，请参阅 [10, 16] 。

为推 导出有限元，我们打算在图（3.2）中拟合有限元空间 :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & W^0 & \xrightarrow{\mathrm{curl}} & W^1 & \xrightarrow{\mathrm{div}} & W^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \nearrow_{I} & & \nearrow_{-2\,\mathrm{sskw}} & & & \\
0 & \longrightarrow & Y^0 & \xrightarrow{\mathrm{curl}} & Y^1 & \xrightarrow{\mathrm{div}} & Y^2 & \longrightarrow & 0.
\end{array}
\tag{3.3}
$$

首先，为第一行构造一个有限元 Stokes 复形 $W^\bullet$ （具有增强正则性的 de Rham 复形）。然后选择 Y^0 ，使其与 W^1完全相同，从而通过连接映射 I精确匹配。

一旦我们有了一个带有离散空间的图（3.3），类似于连续层面的论证便可得到（3.1）的离散化。导出复形中的空间是连接代数映射的核与余核。这个方法并不能直接给出自由度。尽管如此，我们可以改写 Y^1的自由度，将其中一些自由度与 W^2 的自由度对应起来，并将它们设为零。剩余的自由度便构成对称张量的一组自由度。关于这一论证的详细内容，请参阅 [7, 20]。

二维弹性复形的另一种形式：应变复形

$$
0 \longrightarrow H^2 \otimes \mathbb{V} \xrightarrow{\mathrm{def}} H^1(\mathrm{rot}, \mathbb{S}) \xrightarrow{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}} L^2 \longrightarrow 0,
\tag{3.4}
$$

是将三维复形（2.2）的前几个空间限制到二维平面上得到的（具有更高的 Sobolev 正则性，参见 [22, (64)]）。这里 $H^1(\mathrm{rot}\ \mathbb{S}) := \{u \in H^1 \otimes \mathbb{S} : \mathrm{rot}\, u \in H^1 \otimes \mathbb{V}\}$。应变复形（3.4）包含位移和线性化高斯曲率（见附录）。复形（3.4）可由以下图表导出

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2 \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & H^1(\mathrm{rot}, \mathbb{M}) & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & H^1 \otimes \mathbb{V} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \nearrow_{\mathrm{mskw}} & & \nearrow_{I} & & & \\
0 & \longrightarrow & H^2 & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & H^1 \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & L^2 \otimes \mathbb{V} & \longrightarrow & 0,
\end{array}
\tag{3.5}
$$

其中 $H^1(\mathrm{rot}\ \mathbb{M}) := \{e \in H^1 \otimes \mathbb{M} : \mathrm{rot}\, e \in H^1 \otimes \mathbb{V}\}$。在离散层面，为了使有限元空间适用于（3.5）的离散版本，

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z^0 & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & Z^1 & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & Z^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \nearrow_{\mathrm{mskw}} & & \nearrow_{I} & & & \\
0 & \longrightarrow & V^0 & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & V^1 & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & V^2 & \longrightarrow & 0.
\end{array}
\tag{3.6}
$$

我们可以沿用应力复形（3.2）的相同思路，让由 I连接的两个槽位使用相同的空间，即 $V^1 = Z^2$。然而，从Z^1 中消去 V^0 比应力复形的情形更微妙。为此，我们首先注意到，在（3.3）中，图追踪表明，只要 sskw 将 Y^1 映射到 W^2 （由于W^2 要求的正则性通常较低，这种情况往往成立），且两行均正合，那么在离散层面上 sskw 也满射，即 W^2 恰好对应于 Y^1的反对称部分。相反，（3.5）的微妙之处在于，没有规范的方法来选择这两个

由 mskw 连接的空间，使得 mskw V^0 恰好是Z^1的反对称部分。事实上，在典型例子中，mskw 将 Z^0 映射到 V^1，但与 Z^1的反对称部分相比， V^0 往往太小。

事实上，在 [10]框架下，(3.3)与(3.6)之间的这种差异在连续层面上就已显现。在 [10], 中，BGG 复形由两个输入复形导出。存在某个 $J > 0$，使得连接映射 S^j 对于 $j \geq J$是单射，对于 $j \geq J$ 是满射（因此对于 $j = J$是双射） [10, (19)]。这两部分的推导形式略有不同。例如，导出的算子 [10,(26)] 在小 j 的情况下包含到余核的投影（例如，对称梯度 $= P_{\mathcal{R}(\mathrm{mskw})^\perp}$ 梯度）；而对于大 j，算子则直接由输入复形导出（例如，散度）。与已有的(3.1)结果相比，这在一定程度上解释了处理(3.4)和(3.3)时的差异与困难 [7, 20]。

3.2. 四边形网格上的离散应力复形。 我们从一个 BGG 图导出一个离散应力复形。其思路与其他类型网格上的已有结果类似 [7, 20, 22]。因此，我们只作简要概述。尽管如此，所得复形在现有文献中似乎尚未出现。

在构造中，我们连接四边形的一对对角顶点，将其分割成四个子三角形。所有有限元空间均定义在这一细分上（称为交叉网格；见图3）。

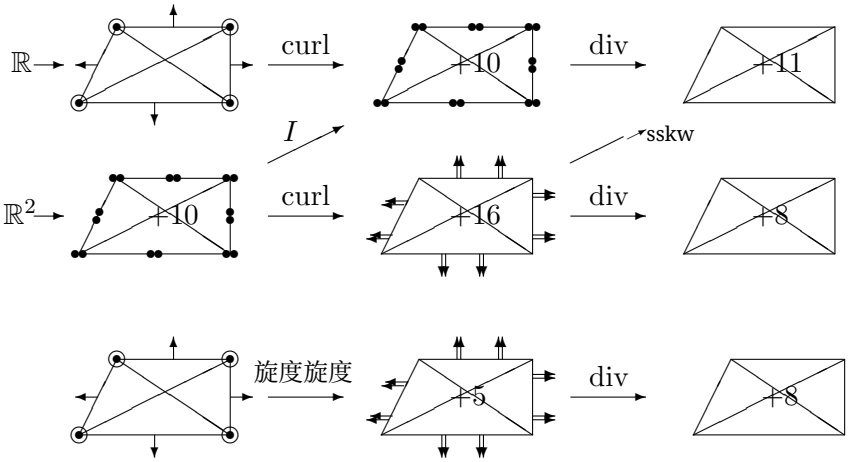


FIGURE 3. 四边形宏单元的图追踪。我们将顶行记为 $(W^\bullet, d^\bullet)$，底行记为 $(Y^\bullet, d^\bullet)$，遵循 (3.3) 中的记号。

我们将使用 (3.3) 中的记号来定义这些空间。顶行的序列在 [36] 中进行了研究。标量样条空间 W^0 可见于 [38]。该空间由具有连续导数的分段三次多项式构成。第一行的最后两个空间由 Arnold 和 Qin [11] 作为 Stokes 对讨论。具体来说， W^1 由连续分段二次多项式构成。因此共有 10 个内部自由度

（细分四边形内部的 5 个拉格朗日点各有 2 个）。显然，散度将 W^1 映射到分片线性多项式空间，但该映射不是满射。事实上，对任意 $u \in W^1$，散度 u 在两条对角线的交点处满足一个关系。图4展示了一种特殊构型，其中这两条直线分别是 x 轴和 y 轴。于是可以验证

$$(\operatorname{div} u|_{T_1} - \operatorname{div} u|_{T_2} + \operatorname{div} u|_{T_3} - \operatorname{div} u|_{T_4})(z) = 0.$$

情　　况与两条直线不正交的一般构型类似　　.

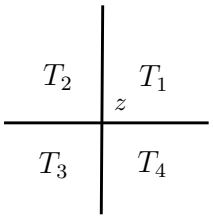


FIGURE 4. 在每个奇异顶点 z处施加相容条件。

施加这一约束后，每个四边形上的分片线性多项式空间维数为 11。由两条直线相交的顶点称为奇异顶点 [11]。在 Powell-Sabin 划分上构造有限元时也会出现类似情况：两条直线在三角剖分的边上相交 [32]。

第二行（$Y^\bullet$，$d^\bullet$）是一个向量值（两份）有限元 de Rham 复形，由交叉网格上的二次拉格朗日元、分片线性 Brezzi-Douglas-Marini（BDM）元 [14],和分片常数组成。

与连续层面类似，为了得到 BGG 复形，我们从 W^0 开始，并连接两行以得到二阶算子旋度旋度。然后我们将其限制到$\mathcal{N}$(sskw) $\subset Y^1$。 $\mathcal{N}$(sskw) 的自由度可通过从 Y^1 中消去 W^2 的自由度得到。更准确地说，边上的所有自由度都予以保留，同时得到 $5 = 16 - 11$ 个内部自由度。有限元应力复形如下

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\subset} W^0 \xrightarrow{\operatorname{curl}\operatorname{curl}} \mathcal{N}(\operatorname{sskw}) \xrightarrow{\operatorname{div}} Y^2 \longrightarrow 0. \tag{3.7}$$

通过维数计数的标准论证可得以下结论。

定理2. 序列 (3.7) 是一个复形。在可缩区域上，(3.7) 是正合的，但零指标处除外，此时 $\mathcal{N}$(旋度旋度) $= \mathcal{P}_1$，即线性多项式空间。

Johnson 和 Mercier [37] 在四边形交叉网格上构造了一组稳定的有限元弹性配对。在 [37], 中，位移的每个分量（对应于 Y^2）都是定义在四边形上的线性多项式（而非细分后的三角形）。因此，每个四边形上的局部形函数空间维数为 6。应力空间的边自由度与 (3.7) 中的 $\mathcal{N}$(sskw) 相同，但有 3 个内部自由度，而 $\mathcal{N}$(sskw) 有 5 个。因此，[37] 中的配对无法构成复形，因为分片函数在四边形上的导数通常不是多项式。

3.3. **一种新的有限元应变复形**。 本节构造适用于 (3.6) 的有限元，并推导出由此得到的 (3.4) 的离散 BGG 复形。特别地，我们讨论应变张量反对称分量的离散约化。(3.6) 的有限元汇总于图 5。

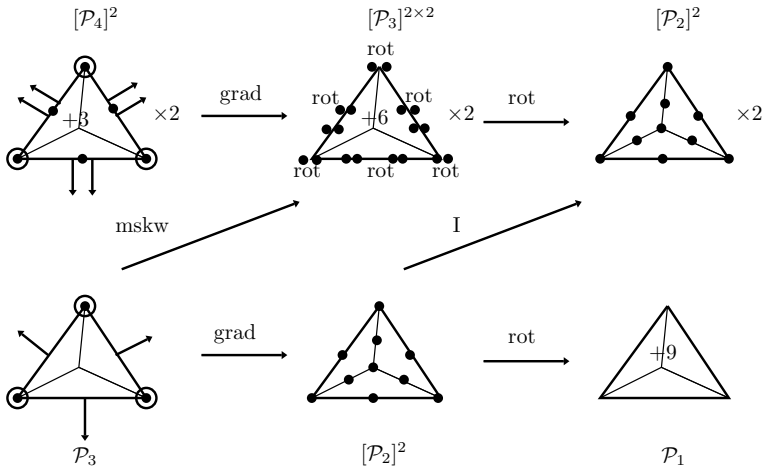


FIGURE 5. 用于推导离散应变复形的有限元图（3.6） ex.

所有这些有限元都定义在三角形的 Clough-Tocher 剖分上，即在三角形内选取一个内点，并将其与三个顶点相连所形成的剖分。因此，一个三角形被划分为三个较小的三角形（参见 [38]）。Clough-Tocher 网格由经过 Clough-Tocher 剖分的三角形组成。

在以下讨论中，我们用 $\mathcal{P}_r(S)$ 表示定义域 S 上次数小于或等于 r 的多项式空间。通常， S 是一个三角形或其边。我们用 $\mathcal{T}_h$ 表示 Clough-Tocher 网格，而 $T \in \mathcal{T}_h$ 是由三个三角形组成的宏单元。我们用 $T_i \in T_{\mathrm{CT}}$、$i = 1$、2、3，表示 T 的三个子三角形。此外，$\Delta_k(\mathcal{T}_h)$，或简写为 Δ_k，是 $\mathcal{T}_h$ 中所有 k 维子单形的集合。如果 $e \in \Delta_1$ 是 $\mathcal{T}_h$ 的一条边，那么 τ_e 和 n_e 分别是单位切向量和法向量。我们用 $\Delta_k(T)$ 表示 T 中 k 单形的集合。

位于（$Z^\bullet$， $d^\bullet$）顶行的复形（3.6）由一个 Clough-Tocher H^2 元、一个 H^1(旋度) 元以及定义在 Clough-Tocher 网格上的拉格朗日元组成。该复形的最低阶版本（从分段三次多项式开始）见 [21, 命题 3]。

– Z^0。注意， Z^0 是向量值的。 Z^0 的每个分量都是由分片四次多项式构成的 Clough-Tocher C^1元。这类元中由分段三次多项式构成的最低阶形式可见例如 [38], ，而三角形上的高阶版本可见 [30]。宏单元 T 上的局部形函数为

$$\mathcal{P}_{Z_0}(T) := \{u_h \in C^1(T) : u_h|_{T_i} \in \mathcal{P}_4(T_i) \otimes \mathbb{V},\, T_i \subset T_{\mathrm{CT}},\ i = 1, 2, 3\}.$$

$w \in Z^0$ 的自由度可表示为

- $w(x)$ $\partial_l w(x)$ $x \in \Delta_0(T)$ $l = 1,$ 2,
- $\int_e \partial_n w q\, ds,$ $q \in \mathcal{P}_1(e)$ $e \in \Delta_1(T)$,

- 3内部自由度。

这里 $\partial_n w := n \cdot$ 梯度 w。

– Z^1。空间 Z^1 由两个副本组成，每个副本都是一个 H^1(旋度)协调元（连续场具有连续旋度）。单个副本（矩阵的每一列）的局部形函数空间为

$$\mathcal{P}_{Z_1}(T) := \{u_h \in C^0(T) : \operatorname{rot} u_h \in C^0(T), u_h|_{T_i} \in \mathcal{P}_3(T_i) \otimes \mathbb{M},\, T_i \subset T_{\mathrm{CT}},\ i = 1,2,3\}.$$

$\mathcal{P}_{Z_1}(T)$的自由度可由下式给出:

$$u(a), \quad \forall a \in \Delta_0(T), \tag{3.8a}$$

$$\operatorname{rot} u(a), \quad \forall a \in \Delta_0(T), \tag{3.8b}$$

$$\int_e uq, \quad \forall q \in \mathcal{P}_1(e), \quad \forall e \in \Delta_1(T), \tag{3.8c}$$

$$\int_e \operatorname{rot} u \cdot \tau_e, \quad \forall e \in \Delta_1(T), \tag{3.8d}$$

$$\int_e \operatorname{rot} u \cdot n_e, \quad \forall e \in \Delta_1(T), \tag{3.8e}$$

$$\int_T u : q, \quad \forall q \in \mathcal{C}(T), T \in \Delta_2(T), \tag{3.8f}$$

其中 $\mathcal{C}(T)$表示 T上的泡空间。

内部自由度的具体形式并不那么重要，因为它们不会影响单元间连续性。 Z^i, $i = 0,1,2$的维数以及泡空间（即内部自由度的维数）可见 [30,第 3]节。

– Z^2。空间 Z^2 由 Clough-Tocher 剖分上的两个标量二次拉格朗日元副本组成。

定理3. (3.8) 中的自由度是唯一确定的，由全局有限元空间构成的复形$(Z^\bullet, d^\bullet)$在可缩区域上正合（指标*0*除外）。

证明. Z^i 的唯一确定性直接源于 [30,第 3]节中的维数公式。事实上，我们可以证明，如果所有顶点和边上的自由度都为零，那么该场由 [30]意义下的泡函数组成。再由其与泡函数的积分为零，可知该场实际上为零。

为证明正合性，我们首先注意到，对于任意 $u \in Z^1$， u 也属于 N´ed´elec 空间。接着，rot $u = 0$ 意味着存在拉格朗日空间中的某个 ϕ，使得 $u =$ grad ϕ（标准有限元 de Rham 序列的正合性）。由于 u是 C^0，我们得出ϕ 是 C^1，因此 $\phi \in Z^0$。然后通过维数计数1 = dim Z^0 − dim Z^1 + dim Z^2 以及欧拉示性数 $1 = V - E + T$可得正合性，其中 V、 E和T 分别是顶点、边和三角形的数量。□

底行（$V^\bullet$， $d^\bullet$）的上同调可见 [21]。

（3.6）中的底部复形是 Clough-Tocher有限元Stokes复形 [21,(59)]。第一个空间是标量 Clough-Tocher C^1 元，第二个空间是向量值二次拉格朗日元，最后一个空间由分片线性多项式组成。

在本节余下部分，我们从（3.6）出发，推导应变复形的一个离散版本

$$0 \longrightarrow Z^0 \xrightarrow{\operatorname{def}_h} U^1 \xrightarrow{\operatorname{rot}\operatorname{rot}} V^2 \longrightarrow 0. \tag{3.9}$$

(3.14) 中的第一个和最后一个空间可直接从 (3.6) 读取。空间 U^1 是具有约化对称性的 Z^1（粗略地说，是从 Z^1中去除 V^0 分量后得到的）。与现有应力复形构造中对反对称分量进行约化的做法 [7, 20] 相比，关键区别在于， U^1 仅在离散意义下是对称的，而 def_h 不同于连续层面上导致对称场的 def 算子。精确定义见下文的 (3.12) 和 (3.13)。

我们先观察以下恒等式。

引理 1. 我们有 $\operatorname{rot}\operatorname{skw} u = -\operatorname{grad}\operatorname{sskw} u$，因此 $\operatorname{rot} u = -\operatorname{grad}\operatorname{sskw} u + \operatorname{rot}\operatorname{sym} u$。

注意，$\operatorname{sskw}(Z^1)$ 不属于 V^0。受引理 1 中恒等式的启发，我们定义离散 sskw 算子 $\operatorname{sskw}_h\colon Z^1 \to V^0$，并通过设置 V^0 的自由度来定义：

$$\operatorname{sskw}_h u(a) := \operatorname{sskw} u(a), \quad \forall a \in \Delta_0, \tag{3.10a}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{sskw}_h u(a) := -\operatorname{rot} u(a), \quad \forall a \in \Delta_0, \tag{3.10b}$$

$$\int_e \partial_n \operatorname{sskw}_h u := -\int_e n \cdot \operatorname{rot} u, \quad \forall e \in \Delta_1. \tag{3.10c}$$

我们有 $\operatorname{sskw}_h\operatorname{mskw} = I$，因为

$$\operatorname{sskw}_h \operatorname{mskw} v(a) = \operatorname{sskw}\operatorname{mskw} v(a) = v(a), \quad \forall a \in \Delta_0, \tag{3.11a}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{sskw}_h \operatorname{mskw} v(a) = -\operatorname{rot}\operatorname{mskw} v(a) = \operatorname{grad} v(a), \quad \forall a \in \Delta_0, \tag{3.11b}$$

$$\int_e \partial_n \operatorname{sskw}_h \operatorname{mskw} v = -\int_e n \cdot \operatorname{rot}\operatorname{mskw} v = \int_e \partial_n v, \quad \forall e \in \Delta_1, \tag{3.11c}$$

也就是说，对于任意 $v \in V^0$，在 $\operatorname{sskw}_h\operatorname{mskw} v$ 和 v 上，自由度的取值相同。

将 U^1 的形函数空间定义为 sskw_h 的核（在 Z^1 中）

$$U^1 := \mathcal{N}(\operatorname{sskw}_h, Z^1), \tag{3.12}$$

and

$$\operatorname{def}_h := (I - \operatorname{mskw}\operatorname{sskw}_h)\operatorname{grad}. \tag{3.13}$$

于是得到一个序列

$$0 \longrightarrow Z^0 \xrightarrow{\operatorname{def}_h} U^1 \xrightarrow{\operatorname{rot}\operatorname{rot}} V^2 \longrightarrow 0. \tag{3.14}$$

注意，$\operatorname{def}_h Z^0 \subseteq U^1$，因为 $\operatorname{sskw}_h\operatorname{def}_h = \operatorname{sskw}_h(I - \operatorname{mskw}\operatorname{sskw}_h)\operatorname{grad} = 0$。此外，$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{def}_h = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(I - \operatorname{mskw}\operatorname{sskw}_h)\operatorname{grad} = 0$，因为通过对 (3.6) 进行图追踪可得 $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{mskw} = 0$。因此，(3.14) 是一个复形。

接下来，我们证明 (3.14) 的正合性（零指标除外）。首先注意到 $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\colon Z^1 \to V^2$ 是满射，因为 $\operatorname{rot}\colon Z^1 \to Z^2$ 和 $\operatorname{rot}\colon V^1 \to V^2$ 都是满射，并且 $Z^2 = V^1$。下面的定理说明了在 U^1 处的正合性。

定理 4。 $\mathcal{N}(\text{旋度 旋度 } U^1) = \text{定义为}_h Z^0$。

*P*证明。 由下列复形的正合性可知（见 [19, 命题 2.3]）

$$\begin{array}{ccccccc} Z^0 & \xrightarrow{\operatorname{grad}} & Z^1 & \xrightarrow{\operatorname{rot}\operatorname{rot}} & V^2 & \longrightarrow & 0 \\ & \overset{\operatorname{mskw}}{\nearrow} & & & & & \\ V^0 & & & & & & \end{array} \tag{3.15}$$

我们有

$$\mathcal{N}(\operatorname{rot}\operatorname{rot}, Z^1) = \operatorname{grad} Z^0 + \operatorname{mskw} V^0.$$

这意味着对于任意 $u \in U^1$，$\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = 0$，都存在 $\phi \in Z^0, \psi \in V^0$，使得

$$u = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{mskw}\psi. \tag{3.16}$$

因此

$$0 = \operatorname{sskw}_h u = \operatorname{sskw}_h \operatorname{grad}\phi + \operatorname{sskw}_h \operatorname{mskw}\psi = \operatorname{sskw}_h \operatorname{grad}\phi + \psi.$$

因此，$\psi = -\operatorname{sskw}_h \operatorname{grad}\phi$。将此恒等式代入 (3.16)，

$$u = \operatorname{grad}\phi - \operatorname{mskw}\operatorname{sskw}_h \operatorname{grad}\phi = (I - \operatorname{mskw}\operatorname{sskw}_h)\operatorname{grad}\phi = \operatorname{def}_h \phi.$$

□

接下来，我们通过从 Z^1 中消去对应于反对称分量的自由度（从 Z^1 中消去 V^0），来定义 U^1 的自由度。

U^1 的自由度可表示如下：

$$\operatorname{sym} u(a), \quad \forall a \in \Delta_0(T), \tag{3.17a}$$

$$\int_e uq, \quad \forall q \in \mathcal{P}_1(e), \quad \forall e \in \Delta_1(T), \tag{3.17b}$$

$$\int_e \operatorname{rot} u \cdot \tau_e, \quad \forall e \in \Delta_1(T), \tag{3.17c}$$

$$\int_T u : q, \quad \forall q \in \mathcal{C}(T), T \in \Delta_2(T). \tag{3.17d}$$

定理 5. 在 (3.17) 中的自由度对 U^1 是唯一确定的。

证明。 首先证明，若 (3.17) 中的所有自由度在 $u \in U^1$ 上均为零，则$u = 0$。为此，我们将利用 (3.17) 以及 $u \in \mathcal{N}(\operatorname{sskw}_h)$ 这一事实，验证 (3.8) 中的所有自由度（即 (3.10) 中的泛函）在 u 上均为零。然后，根据 (3.8) 在 Z^1 上的非奇异性，得到 $u = 0$，因为 $U^1 \subset Z^1$。为此，我们验证以下事实：

- $u(a) = 0, \quad \forall a \in \Delta_0(T)$，由（3.17a）和（3.10a）给出
- 旋度 $u(a) = -$ 梯度 $\operatorname{sskw}_h u(a) = 0, \quad \forall a \in \Delta_0(T)$，由（3.10b）给出
- $\int_e uq = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_1(e) \quad \forall e \in \Delta_1(T)$，由（3.17b）给出
- $\int_e$ 旋度 $u \cdot \tau_e = 0, \quad \forall e \in \Delta_1(T)$，由（3.17c）给出
- $\int_e$ 旋度 $u \cdot n_e = -\int_e \partial_n \operatorname{sskw}_h u = 0, \quad \forall e \in \Delta_1(T)$，由（3.10c）给出
- 根据定义，内部自由度消失。由（3.17d）

根据 Z^1 的非奇异性，我们得到 $u = 0$。

接下来只需证明自由度的数量等于局部形函数空间的维数。为此，我们注意到 $\operatorname{mskw}: V^0 \to Z^1$

在 (3.6) 中是单射。因此， U^1的局部形函数空间的维数满足 $\dim\ U^1 = \dim\ Z^1 - \dim\ V^0$。另一方面，我们注意到，从 (3.8) 得到的 (3.17) 的约化自由度数量也等于 $\dim V^0$。因此，$\dim\ U^1$ 等于 (3.17) 中自由度的数量。

□

注 2. 根据上述构造， U^1 具有 H^1(旋度)相容性，因为它是 Z^1的子空间。然而， U^1 的形函数可能并不对称。

注 3 (强对称与弱对称)**.** 在线性弹性的 *Hellinger-Reissner* 原理中，强对称是指以对称矩阵值函数作为局部形函数的有限元。由于在某些情况下构造这类有限元较为困难，因此有人提出了另一种方法，即使用拉格朗日乘子来施加对称条件 [5]。这称为弱对称方法。*BGG*图在为弱对称选择 *inf-sup*稳定有限元对时发挥着关键作用 [5]。在这种情况下，(3.3)中的两行并不完全匹配，即 Y^0 与 W^1并不相同。相反，我们选择 Y^0大于 W^1，并使用插值来替换(3.3)中的 I。弱对称方法与强对称在多个方面相关。首先，如果离散 *BGG* 图中的有限元完全匹配（例如 $\mathrm{sskw}\ Y^1 = W^2$），那么采用弱施加对称性的弹性公式会得到具有强对称性的应力张量。这一现象由 [31] 发现，并称为“偶然的精确对称性”。其次，在“偶然的精确对称性”情况下，在有限元层面上，还可以进一步消去与反对称分量对应的形函数和自由度，从而得到具有强对称性的有限元 [12, 20]。

本文中的有限元图追踪符合这一图景，因为我们在有限元层面消去了形函数和自由度。然而，应变复形需要新的技术，因为连接映射是单射。我们无法重复 [12, 20] 或 [5] 中的论证，因为该论证要求满射性。将弱施加对称性的格式推广到 *BGG* 图中连接映射为单射的部分，仍是一个开放问题。

4. Conclusions

本文提出了弹性复形的一个非线性版本。这些空间和算子编码了弹性理论和黎曼几何中的关键结构。零指标和一指标处的正合性分别对应一个刚性定理，以及黎曼流形等维嵌入的一个特殊情形。Korn不等式也有非线性版本 [24, 25]。文献中在各种正则性假设下确立了此类结果，参见 [23, 40]。对于线性化版本，BGG 技术提供了一种系统的方法来确立相应结果。因此，未来一个值得探究的方向是，BGG 技术和线性化理论能为非线性情形带来哪些见解。

在本文的第二部分，我们通过图追踪构造了二维有限元弹性复形。我们着重研究了采用最低阶多项式的例子。主要目的是展示带有单射连接映射的图追踪。研究结果或可推广至高阶多项式和更高维度（参见 [19]）。

此外，研究非线性复形在非线性弹性和几何问题（例如 [2, 13]）计算中的作用也很有意义。如何将离散（有限元）空间纳入非线性复形并保持正合性（即离散层面的刚性和嵌入定理），仍是一个悬而未决的问题。一项重大挑战是阐明非线性复形中各算子所定义的代数簇。

Appendix: coordinate forms of linearized operators

在本附录中，我们给出几何中一些线性化算子的坐标（向量/矩阵）形式。特别是，这澄清了弹性复形中的各项。类似的公式可见于，例如， [18, 39]。

设 g_{ij} 为一个黎曼度量。克里斯托费尔符号的形式为

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right),$$

以及它们的缩并形式

$$\Gamma^i = \frac{1}{2} g^{jk} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right).$$

因此，围绕欧几里得度量的线性化为

$$\begin{aligned}\Gamma^i &\sim \frac{1}{2}\delta^{jk}\delta^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)\\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g^j_j}{\partial x^l} = \operatorname{div} g - \frac{1}{2}\nabla \operatorname{tr}(g) = \operatorname{div} S^{-1} g.\end{aligned}$$

这表明，线性化的缩并克里斯托费尔符号对应于算子散度 S^{-1}。

欧几里得度量附近的线性化里奇张量：

$$R_{ij} = 1/2(-\partial_k\partial^k g_{ij} - \partial_i\partial_j g^k_k + \partial_i\partial^k g_{kj} + \partial_j\partial^k g_{ik}),$$

用向量／矩阵记法表示，则为：

$$Ric = 1/2(-\Delta g - \nabla\nabla \operatorname{tr}(g) + 2\operatorname{def}\operatorname{div} g).$$

取迹，

$$R = -\Delta \operatorname{tr}(g) + \operatorname{div}\operatorname{div} g = -\operatorname{div}\operatorname{div} Sg.$$

这对应于线性化爱因斯坦方程 [39, (5.7)]中的标量（哈密顿）约束。爱因斯坦张量的线性化 $G_{ij} := R_{ij} - 1/2 R g_{ij}$ 为

$$G_{ij} = 1/2\left[-\partial_k\partial^k g_{ij} - \partial_i\partial_j g^k_k + \partial_i\partial^k g_{kj} + \partial_j\partial^k g_{ik} + (\partial_k\partial^k g^l_l - \partial^k\partial^l g_{kl})\eta_{ij}\right],$$

其中 η_{ij} 是欧几里得度量，用向量／矩阵记法表示，则为：

$$G = 1/2[-\Delta g - \operatorname{hess}\operatorname{tr}(g) + 2\operatorname{def}\operatorname{div} g + (\Delta \operatorname{tr}(g) - \operatorname{div}\operatorname{div} g)I]. \tag{4.1}$$

在二维情况下，经过直接计算可得

$$R = -\operatorname{div}\operatorname{div} Sg = \partial_1^2 g_{22} + \partial_2^2 g_{11} - 2\partial_1\partial_2 g_{12} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} g. \tag{4.2}$$

在三维空间中，我们有

$$G = \frac{1}{2}\operatorname{inc} g,$$

and

$$Ric = S^{-1}G = 1/2S^{-1}\operatorname{inc} g.$$

由（4.1）可得

$$\operatorname{tr}(G) = \frac{1}{2}[\Delta \operatorname{tr}(g) - \operatorname{div}\operatorname{div} g].$$

W在上述计算中，我们使用了空间维数 $n = 3$ 。于是有

(4.3) $Ric = S^{-1}G = 1/2[-\Delta g - \text{hess tr}(g) + 2\,\text{def 散度 } g + 1/2(\Delta\text{tr}(g) - \text{散度 散度 } g)I]$

引理 2. 在三维空间中， $R_{ijkl} = \frac{1}{2}G_{ijkl}$，其中 $G_{ijkl} := \epsilon_{ij}{}^{s}\epsilon_{kl}{}^{t}(\operatorname{inc} g)_{st}$是 $\operatorname{inc} g$ 的四阶张量形式（通过将 $\operatorname{inc} g$ 的两组指标分别与一个“反对称矩阵”对应得到），而 R_{ijkl} 是 g 的线性化黎曼张量。此外，线性化爱因斯坦张量 $Ein = 1/2\operatorname{inc} g$。

证明。

$$\begin{aligned}
G_{pqcd} &= \epsilon_{pq}{}^{i}\epsilon_{cd}{}^{j}\epsilon_{iab}\epsilon_{jst}\partial^a\partial^s g^{bt} \\
&= (\delta_{pa}\delta_{qb} - \delta_{pb}\delta_{qa})(\delta_{cs}\delta_{dt} - \delta_{ct}\delta_{ds})\partial^a\partial^s g^{bt} \\
&= (\delta_{cs}\delta_{dt} - \delta_{ct}\delta_{ds})\left(\partial_p\partial^s g_q^t - \partial_q\partial^s g_p^t\right) \\
&= 2(\delta_{cs}\delta_{dt} - \delta_{ct}\delta_{ds})\left(\partial_{[p}\partial^s g_{q]}^{\ t}\right) \\
&= 4\partial_{[p}\partial_{[[c}g_{q]d]]},
\end{aligned}$$

wher $\partial_{[p}\partial_{[[c}g_{q]d]]}$ 表示分别关于 p、 q 以及 c、 d 的反对称化。

O另一方面，我们有线性化的黎曼张量 $R_{ij}{}^{k}{}_{l} = 2\partial_{[i}\Gamma^k_{j]l}$，并且

$$\Gamma^k_{jl} = \frac{1}{2}g^{ks}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^s}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^k{}_j}{\partial x^l} + \frac{\partial g^k{}_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}\right) \sim g_j{}^{[k}\nabla_{l]} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^k{}_l}{\partial x^j}.$$

这意味着 $R_{ij}{}^{k}{}_{l} = 2\partial_{[i}\Gamma^k_{j]l} \sim 2\partial_{[i}g_{j]}^{\ [[k}\nabla_{l]]}$，即 $Riem = 2\text{mskw inc } g$，其中 mskw 将 $\operatorname{inc} g$ 的每个指标映射为对应于一个反对称二阶张量的两个指标。

对恒等式 $R_{pq,\ cd} = 1/2\epsilon^{\ i}_{pq}\epsilon^{\ j}_{cd}\epsilon_{iab}\epsilon_{jst}\partial^a\partial^s g^{bt}$ 取迹，得到

$$\begin{aligned}
R_{qd} &= -\frac{1}{2}[\epsilon_{pq}{}^{i}\epsilon^{p}{}_{d}{}^{j}\epsilon_{iab}\epsilon_{jst}\partial^a\partial^s g^{bt}] \\
&= -\frac{1}{2}[\left(\delta_{qd}\delta^{ij} - \delta^j_q\delta^i_d\right)\epsilon_{iab}\epsilon_{jst}\partial^a\partial^s g^{bt}] \\
&= -\frac{1}{2}[\epsilon_{iab}\epsilon^{i}{}_{st}\partial^a\partial^s g^{bt}\delta_{qd} - \epsilon_{dab}\epsilon_{qst}\partial^a\partial^s g^{bt}] \\
&= -\frac{1}{2}[(\delta_{as}\delta_{bt} - \delta_{at}\delta_{bs})\partial^a\partial^s g^{bt}\delta_{qd} - \epsilon_{dab}\epsilon_{qst}\partial^a\partial^s g^{bt}] \\
&= -\frac{1}{2}[(\Delta \operatorname{tr} g - \operatorname{div}\operatorname{div} g)I - \operatorname{inc} g]_{qd}.
\end{aligned}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\operatorname{inc} g &= \epsilon^{d}{}_{ab}\epsilon_{dst}\partial^a\partial^s g^{bt} \\
&= (\delta_{as}\delta_{bt} - \delta_{at}\delta_{bs})\partial^a\partial^s g^{bt} \\
&= \Delta \operatorname{tr} g - \operatorname{div}\operatorname{div} g.
\end{aligned}$$

这意味着

$$2Ric = S\,\mathrm{inc}\,g,$$

and

$$Ein = S^{-1}Ric = \frac{1}{2}\,\mathrm{inc}\,g.$$

□

Acknowledgement

本研究得到胡克研究奖学金和英国皇家学会大学研究奖学金（URF\R1\221398）的资助。作者感谢 Douglas N. Arnold 指出了参考文献 [45]。

References

[1] P. Alfeld, *A trivariate Clough-Tocher scheme for tetrahedral data*, 《计算机辅助几何设计》, 1 (1984年), 第169–181页。[2] A. Angoshtari, M. F. Shojaei, and A. Yavari, *Compatible-strain mixed finite element methodsfor 2D compressible nonlinear elasticity*, 《计算机方法在应用力学与工程中的应用》, 313 (2017), 第596–631页。[3] A. Angoshtari and A. Yavari, *Hilbert complexes of nonlinear elasticity*, Zeitschrift f¨ur ange- wandte Mathematik und Physik, 67 (2016), 第1–30页。[4] J. H. Argyris, I. Fried, and D. W. Scharpf, *The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method* 72 1968 701 709 , 《航空学杂志》, ( ), 第–页。[5] D. Arnold, R. Falk, and R. Winther, *Mixed finite element methods for linear elasticity with weakly imposed symmetry* 76 2007 1699 1723 , 《计算数学》, ( ), 第–页。[6] D. N. Arnold, *Finite element exterior calculus*, 工业与应用数学学会, 2018年。[7] D. N. Arnold, R. S. Falk, and R. Winther, *Differential complexes and stability of finite element methods II: The elasticity complex* 2006 47 67 , 相容空间离散, ( ), 第–页。[8] D. N. Arnold, R. S. Falk, and R. Winther, *Finite element exterior calculus homological techniques and applications* 15 2006 1 , ,, 《数值学报》, ( ), 第页。[9] , *Finite element exterior calculus: from Hodge theory to numerical stability*, 《美国数学会通报》, 47 (2010), 第281–354页。[10] D. N. Arnold and K. Hu, *Complexes from complexes*, 《计算数学基础》, (2021), 第1–36页。[11] D. N. Arnold and J. Qin, *Quadratic velocity/linear pressure Stokes elements*, 偏微分方程的计算机方法进展, 7 (1992年), 第28–34页。[12] D. N. Arnold and R. Winther, *Mixed finite elements for elasticity*, 《数值数学》, 92 (2002年), 第401–419页。[13] F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, A. Reali, R. L. Taylor, and P. Wrig-gers, *Approximation of incompressible large deformation elastic problems: some unresolved issues*, 《计算力学》, 52 (2013年), 第1153–1167页。[14] F. Brezzi, J. Douglas, Jr., and L. D. Marini, *Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems* 47 1985 217 235 , 《数值数学》, ( ), 第–页。[15] J. Brüning and M. Lesch, *Hilbert complexes*, 《泛函分析杂志》, 108 (1992年), 第88–132页。[16] A. Čap and K. Hu, *BGG sequences with weak regularity and applications*, arXiv预印本 arXiv:2203.01300, (2022年)。[17] A. Čap, J. Slovák, and V. Souček, *Bernstein-Gelfand-Gelfand sequences*, 《数学年刊》, 154 (2001), 第97–113页。[18] S. H. Christiansen, *On the linearization of Regge calculus*, 《数值数学》, 119 (2011), 第613–640页。

[19] S. H. Christiansen, J. Gopalakrishnan, J. Guzmán, and K. Hu, *A discrete elasticity complex on three-dimensional Alfeld splits* 2009 07744, 2020 , arXiv预印本 arXiv: 。( )。[20] S. H. Christiansen, J. Hu, and K. Hu, *Nodal finite element de Rham complexes*, 《数值数学》, 139 (2018年), 第411–446页。[21] S. H. Christiansen and K. Hu, *Generalized finite element systems for smooth differential forms and Stokes' problem* 140 2018 327 371 , 《数值数学》, ( ), 第 – 页。[22] , *Finite element systems for vector bundles: elasticity and curvature*, 《计算数学基础》, (2022 年), 第 1–52 页。[23] P. G. Ciarlet, *Linear and nonlinear functional analysis with applications*, 第 130 卷, 工业与应用数学学会, 2013年。[24] P. G. Ciarlet, L. Gratie, and C. Mardare, *A nonlinear Korn inequality on a surface*, Journal de math´ematiques pures et appliqu´ees, 85 (2006年), 第2–16页。[25] P. G. Ciarlet and C. Mardare, *Nonlinear Korn inequalities*, Journal de Math´ematiques Pures et Appliqu´ees, 104 (2015年), 第1119–1134页。[26] R. W. Clough and J. L. Tocher, *Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending* 1965 515 , 《结构力学矩阵方法会议》论文集, ( ), 第–545页。[27] M. Eastwood, *A complex from linear elasticity*, 载于第19届冬季学校“几何与物理”论文集, 巴勒莫数学圈, 2000年, 第23–29页。[28] M. G. Eastwood, *Variations on the de Rham complex*, 《美国数学学会通讯》, 46 (1999年), 第1368–1376页。[29] R. S. Falk and M. Neilan, *Stokes complexes and the construction of stable finite elements with pointwise mass conservation* 51 2013 1308 1326 , 《SIAM 数值分析杂志》, ( ), 第–页。[30] G. Fu, J. Guzmán, and M. Neilan, *Exact smooth piecewise polynomial sequences on Alfeld splits*, 《计算数学》, 89 (2020年), 第1059–1091页。[31] J. Gopalakrishnan and J. Guzmán, *A second elasticity element using the matrix bubble*, 《IMA 数值分析杂志》, 32 (2012年), 第352–372页。[32] J. Guzmán, A. Lischke, and M. Neilan, *Exact sequences on Powell–Sabin splits*, 《Calcolo》, 57 (2020年), 第1–25页。[33] J. Guzmán, A. Lischke, and M. Neilan, *Exact sequences on Worsey–Farin splits*, 《计算数学》, (2022年), [34] J. Hu and S. Zhang, *A family of conforming mixed finite elements for linear elasticity on triangular grids* 1406 7457, 2014 , arXiv预印本 arXiv: 。( )。[35] K. Hu, *Oberwolfach report: Discretization of Hilbert complexes*, arXiv预印本 arXiv:2208.03420, (2022年)。[36] K. Hu, J. Sun, and Q. Zhang, *Quadratic and cubic Lagrange finite elements for mixed formulation of Laplace eigenvalue problem on criss-cross meshes* 2023 , 准备中, ( )。[37] C. Johnson and B. Mercier, *Some equilibrium finite element methods for two-dimensional elasticity problems* 30 1978 103 116 , 《数值数学》, ( ), 第 – 页。[38] M.-J. Lai and L. L. Schumaker, *Spline functions on triangulations*, 第 110 号, 剑桥大学出版社, 2007年。[39] L. Li, *Regge finite elements with applications in solid mechanics and relativity*, 博士论文, 明尼苏达大学, 2018年。[40] S. Mardare, *On isometric immersions of a Riemannian space with little regularity*, 《分析与应用》, 2 (2004年), 第193–226页。[41] J. E. Marsden and T. J. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Courier Corporation, 1994年。[42] M. Neilan, *Discrete and conforming smooth de Rham complexes in three dimensions*, 《计算数学》, (2015年)。[43] , *The Stokes complex: A review of exactly divergence-free finite element pairs for incompress-ible flows*, 载于《计算数学75年》: 庆祝《计算数学》创刊75周年研讨会, 2018年11月1日至3日, 计算与实验数学研究所（ICERM）, 第754卷, 美国数学学会, 2020年, 第141页。[44] D. Pauly and W. Zulehner, *The elasticity complex: compact embeddings and regular decompositions* 2001 11007, 2020 , arXiv预印本 arXiv: 。( )。

[45] A. D. Rendall, *Insufficiency of the Ricci and Bianchi identities for characterising curvature*, 《几何与物理学杂志》, 6 (1989), 第 159–163 页。[46] A. Worsey and G. Farin, *An n-dimensional Clough-Tocher interpolant*, 《构造性逼近》, 3 (1987), 第 99–110 页。[47] A. Ženíšek, *Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method*, 《逼近理论杂志》, 7 (1973), 第 334–351 页。[48] S. Zhang, *A new family of stable mixed finite elements for the 3D Stokes equations*, 《计算数学》, 74 (2005), 第 543–554 页。[49] , *On the P1 Powell-Sabin divergence-free finite element for the Stokes equations*, 《计算数学杂志》, (2008年), 第 456–470 页。[50] , *Quadratic divergence-free finite elements on Powell–Sabin tetrahedral grids*, 《Calcolo》, 48 (2011), 第 211–244 页。

Mathematical Institute, University of Oxford, Andrew Wiles Building, Radcliffe Observatory Quarter, Oxford, OX2 6GG, UK*Email address*: Kaibo.Hu@maths.ox.ac.uk