arXiv:2302.02443v1 [physics.flu-dyn] 5 Feb 2023

纵向激励圆柱容器中的超谐波共振旋涡波

Alice Marcotte、François Gallaire† 和 Alessandro Bongarzone

[1]流体力学与失稳实验室，洛桑联邦理工学院，洛桑，CH-1015，瑞士

（收到日期 xx；修订日期 xx；接受日期 xx）

Faltinsen等（2016）研究了圆柱容器中的共振晃荡，并运用其理论描述由容器的简谐椭圆轨道引起的稳态共振波。在容器纵向运动的极限情况下，平面波解会发生对称性破缺，顺时针和逆时针旋涡出现的可能性相同。除这种基频谐波动力学外，先前的实验还发现，远离基频共振时可以观测到多种超谐波动力学。其中，Reclari等（2014）在旋转晃荡中首次观测到的所谓双波峰（DC）动力学尤其值得关注，因为其表现形式最受外部驱动空间结构的促进。继Bongarzone等（2022*a*）之后，本文开展弱非线性（WNL）分析，以描述系统对超谐波纵向激励的响应。所得振幅方程组预测，在超谐波激励下，平面波也可能通过稳定的旋涡运动发生对称性破缺。实验观测证实了这一发现，并确定了三种可能的超谐波状态，即：（i）稳定平面双波峰波；（ii）不规则运动；以及（iii）稳定旋涡双波峰波。相应的稳定性边界在强迫频率—振幅平面中与本文的理论估算定量吻合。

关键词：

1. 引言

如今，液体晃荡相关问题仍受到许多工程领域的高度关注。根据外部强迫的类型和容器形状，自由液面可能呈现不同类型的运动，其特性对于飞机、火箭、航天器以及公路及船舶油罐等的设计至关重要，因为晃荡运动可能对其动力稳定性产生重大影响（Ibrahim 2005；Faltinsen & Timokha 2009）。直立圆柱容器中的共振晃荡是最典型的晃荡系统之一，事实上，人们已从理论、实验和数值角度对其进行了广泛研究。

在他们的 的研究中，Faltinsen 等人(2016) 详细考察了直立环形（圆形）储液槽中的谐波共振晃荡

† 通讯邮箱：francois.gallaire@epfl.ch

动力学。通过应用 Narimanov–Moiseev 多模态晃荡理论（Narimanov 1957；Moiseev 1958；Dodge 等人1965；Faltinsen 1974；Narimanov 等人1977；Lukovsky 1990；Lukovsky & Timokha 2011, 2015；Lukovsky 2015；Takahara & Kimura 2012），该理论能够准确描述主谐振附近且不存在次级共振时的非线性波动动力学（Faltinsen 等人2005, 2016；Raynovskyy & Timokha2018*a*,2020），即对于无量纲液深 $H \gtrsim 1.05$ 的情况，他们推导出了平面椭圆型储罐激励下的响应曲线。在两个极限情形下，得到了纵向运动和储罐旋转运动对应的系统响应。

旋转晃荡广泛应用于生物和化学工业领域，例如用于细菌和细胞培养的小型及大型生物反应器（McDaniel & Bailey 1969; Wurm 2004）。在这些设备中，液体运动可防止悬浮细胞在液体培养基中沉降，并使溶解氧和营养物质的浓度保持均匀。出于这些原因，过去几十年来，人们对这些设备中发生的气体交换和混合过程产生了浓厚兴趣（Büchs 等 2000*a*,*b*; Büchs 2001; Maier 等 2004; Muller 等 2005; Micheletti 等 2006; Zhang 等 2009; Tissot 等 2010; Tan 等 2011; Tissot等 2011; Klöckner & Büchs 2012）。

Reclari（2013）和Reclari 等 （2014）等人（另见Hutton（1964）；Bouvard等 （2017）；Moisy 等 （2018）；Horstmann 等 （2020, 2021））对轨道振荡圆柱体的流体动力学进行了详尽的实验表征；这类圆柱体是实验室规模生物反应器的典型形状。除了通过单波峰（SC）波动力学产生的主谐波系统响应外，研究还观察到了不同的多波峰波型。其中，Reclari等 （2014）所称的超谐波双峰（DC）波动力学尤其值得关注，因为它似乎最为稳定，且呈现出最大的非线性振幅响应，最终可能导致破波，而且破波可发生在远离谐波共振的区域，甚至在驱动振幅适中的情况下也会发生。其出现自然受到外部驱动的空间结构（即时间和方位角周期性）的促进，因此，理解并预测这种现象对于生物反应器设计等实际应用可能至关重要。

Bongarzone 等 （2022*a*）所阐述的分析专门用于发展无黏弱非线性分析，该分析被证明能够成功捕捉支配超谐双峰旋涡的这一微妙的加性与乘性共振中的非线性效应，并且与Reclari（2013）和Reclari 等（2014）的实验结果吻合良好。

尽管如此，上述分析的适用范围仅限于旋转晃荡，而原则上，任何椭圆型容器激励都可能产生超谐双峰动力学，因此纵向激励也不例外。

后一种强迫条件数十年来一直受到理论和实验研究（Hutton（1963）；Abramson（1966）；Chu（1968））。由于会出现滞后的对称性破缺条件（Miles 1984*a*,*b*），从流体动力不稳定性的角度来看，这种条件也颇具研究价值。对于圆柱形容器，尤其值得关注的是 Abramson *et al.*（1966）、Royon-Lebeaud *etal.*（2007）以及 Hopfinger 与 Baumbach（2009）的实验研究；他们测定了谐波平面波、旋涡运动波与不规则波之间的稳定性边界，其估算结果后来被 Faltinsen *et al.*（2016）用于验证其理论分析。然而，这些研究大多聚焦于谐波共振附近的系统响应；除旋转晃荡领域的 Reclari *et al.*（2014）和 Bongarzone *et al.*（2022*a*）外，文献中似乎缺少针对最重要的次级超谐共振的全面实验与理论研究（这里所说的超谐共振，是指频率为 ω 、由频率为 $\Omega = \omega/2$ 的激励所产生的波，其中 Ω 为

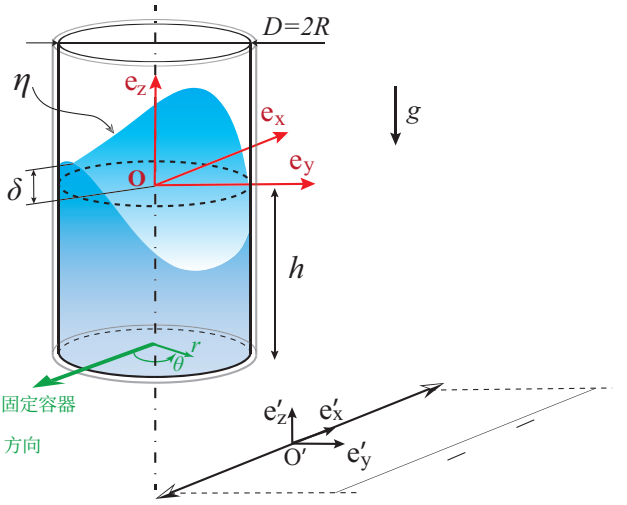

图 1：圆柱形容器示意图，其直径为 $D = 2R$，液深为 h。重力加速度记为 g。$O'\mathbf{e}'_x\mathbf{e}'_y\mathbf{e}'_z$ 为笛卡尔惯性参考系，而 $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ 为随容器运动的笛卡尔参考系。运动柱坐标系 (r, θ, z) 的原点位于容器旋转轴上，具体而言，位于未扰动液面高度处，即 $z = 0$。受扰动的自由液面和接触线高度分别记为 η 和 δ。$\bar{a}_x$ 为纵向周期激励的振幅，其驱动角频率为 $\bar{\Omega}$。

驱动角频率），即远离主共振、在纵向激励或更普遍而言在容器椭圆激励下的情形。

在本研究中，我们朝这一方向迈出了第一步，将 Bongarzone等人 （2022*a*）针对圆形容器运动所建立的分析推广至纵向平面激励。秉承多重时间尺度法的思路，我们建立了一个弱非线性模型，得到一组由两个振幅方程构成的系统。通过与专门开展的实验室规模实验进行全面比较，证明该模型能够令人满意地描述系统对超谐波纵向激励的稳态响应，尤其能够识别各种可能的动力学状态。

论文结构安排如下。第 §2节给出了流动构型和控制方程。第 §3节简要介绍经典线性势流模型，并简述本文采用的数值方法。类比 Bongarzone等人 (2022*a*)，第 §4节首先研究较简单的谐波单峰波（SC）波情形。随后，第 §5节将建立超谐波纵向激励下控制双峰波动力学的弱非线性（WNL）振幅方程组，这也是本研究的核心内容。第 §6节介绍实验装置、实验流程和研究结果，并与本文的理论估算进行全面的定量比较。最后，第 §7节概述本文的评述与结论。附录B 则对理论模型作补充，简要说明如何将本文分析直接推广至容器的一般椭圆轨道，而无需进行额外计算，从而为进一步的分析和实验研究铺平道路。

2. 流动构型与控制方程

我们考虑一个直径为 $D = 2R$、装有液体至液深 h 的圆柱形容器，液体密度为 ρ。气液表面张力记为 γ，而重力加速度

记为 g。 $O'\mathbf{e}'_x\mathbf{e}'_y\mathbf{e}'_z$ 为笛卡尔惯性参考系，而 $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ 为随容器运动的笛卡尔参考系。运动柱坐标系 (r,θ,z) 的原点位于容器旋转轴上，具体而言，处于未扰动液面高度 $z=0$ 处（见图 1）。水平面内的纵向振动（例如沿 x 轴）可由以下方程表示，这些方程描述了容器轴与 $z=0$ 平面的交点的运动速度，并以极坐标 (r,θ) 为参数，

$$\dot{\mathbf{X}}_0 = \begin{cases} -\bar{a}_x\bar{\Omega}\sin\left(\bar{\Omega}t\right)\cos\theta\,\mathbf{e}_r \\ \bar{a}_x\bar{\Omega}\sin\left(\bar{\Omega}t\right)\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta \end{cases}, \tag{2.1}$$

其中，$\bar{a}_x$ 为有量纲的激励振幅，$\bar{\Omega}$ 为有量纲的驱动角频率。在势流极限下，运动容器内液体的运动由拉普拉斯方程支配，并满足固体侧壁和底部的齐次不可穿透条件，

$$\Delta\Phi = 0, \quad \nabla\Phi\cdot\mathbf{n} = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

并满足自由液面 $z=\eta(r,\theta)$ 上的动力学和运动学边界条件（Ibrahim 2005；Faltinsen & Timokha 2009），

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + \eta - \frac{\kappa(\eta)}{Bo} = rf\cos(\Omega t)\cos\theta, \tag{2.3a}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\Phi\cdot\nabla\eta - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \tag{2.3b}$$

这些方程采用容器的特征长度 R、速度 $\sqrt{gR}$ 和时间尺度 $\sqrt{R/g}$ 进行了无量纲化。在 (2.3a) 中，$\kappa(\eta)$ 表示完全非线性曲率，而 $Bo=\rho g R^2/\gamma$ 为邦德数。当邦德数足够大时，即 $Bo\sim 10^3$（Bouvard 等人 2017），表面张力的影响几乎可以忽略（对于 $Bo\gtrsim 10^4$，除接触线附近外，可完全忽略（Faltinsen 等人 2016））。下文假设邦德数较大，因此忽略 (2.3a) 中的曲率项。沿 x 轴的无量纲驱动加速度为 $f=a_x\Omega^2$，其中$a_x=\bar{a}_x/R$ 且 $\Omega=\bar{\Omega}/\sqrt{g/R}$。最后，无量纲流体深度为 $H=\mathrm{h}/R$。

---

3. 线性势流模型

远离共振且在激励振幅较小的极限下，线性理论预计能够很好地近似谐波系统响应。考虑静止态附近的小扰动，

$$\mathbf{q}(r,\theta,z,t) = \{\Phi(r,\theta,z,t),\eta(r,\theta,t)\}^T = \epsilon\mathbf{q}' = \epsilon\{\Phi',\eta'\}^T + \mathrm{O}\left(\epsilon^2\right), \tag{3.1}$$

并假设小驱动激励幅值为 O (ϵ)阶，即 $f=\epsilon F$，其中 ϵ为小参数，$\epsilon\ll 1$ 而辅助变量 F 为 O(1)阶。在 ϵ阶，方程（2.2）-（2.3b）化为一个受迫线性系统，其矩阵紧凑形式为，

$$(\partial_t\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\,\mathbf{q}' = \boldsymbol{\mathcal{F}}', \tag{3.2}$$

与 $\boldsymbol{\mathcal{F}}' = F\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\left(\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}(\Omega t-\theta)}+\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}(\Omega t+\theta)}\right)+c.c.$，$\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}} = \{0,\frac{r}{2}\}^T$ 和

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_\eta & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & -I_\eta \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

其中 $c.c.$ 表示复共轭，而 I_η 是与界面 η相关的单位矩阵。请注意，运动学条件并未显式出现在（3.3）中，但它作为界面处的边界条件得以施加（Viola 等 2018）。接着，我们寻求如下形式的驻波解

$$\mathbf{q}'(r,\theta,z,t) = F\hat{\mathbf{q}}(r,z)\left(\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}(\Omega t-\theta)} + \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}(\Omega t+\theta)}\right) + c.c., \tag{3.4}$$

其中，$\hat{\mathbf{q}}$可通过求解该系统直接计算得出

$$(\mathrm{i}\Omega\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}_{m=1})\,\hat{\mathbf{q}} = \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}, \tag{3.5}$$

注意，由于采用了正规模态假设（3.4），线性算子 $\boldsymbol{A}_m$ 取决于方位波数 m，此处 $m = 1$。尽管方程（3.5）可通过贝塞尔-傅里叶级数表示轻易得到精确解析解，本文仍与 Bongarzone 等 (2022*a*) 一样，采用基于离散化技术的数值方案，并使用切比雪夫伪谱配置法对线性算子 $\boldsymbol{B}$和 $\boldsymbol{A}_m$ 进行空间离散化，采用 Matlab 实现的二维映射；该方法类似于 Viola 等 (2018) 和 Bongarzone 等 (2021*b*) 所述的方法。数值方案要求在 $r = 0$ 处明确给出边界条件，以便对旋转轴（$r = 0$）处的问题进行正则化，即

$$m = 0: \quad \frac{\partial\hat{\eta}}{\partial r} = \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r} = 0, \tag{3.6a}$$

$$m \geqslant 1: \quad \hat{\eta} = \hat{\Phi} = 0. \tag{3.6b}$$

我们重 称为无黏重力波的著名色散关系（Lamb 1993），

$$\omega_{mn}^2 = k_{mn}\tanh(k_{mn}H), \tag{3.7}$$

其中波数 k_{mn} 由满足 m 阶第一类贝塞尔函数的一阶导数的 n 次根给出，即 $J'_m(k_{mn}) = 0$。将与固有频率 ω_{mn} 相关联的特征向量 $\hat{\mathbf{q}}_{mn}$记为，其为方程（3.5）齐次形式在 $\Omega = \omega_{mn}$下的解；鉴于该问题的对称性，在其余分析中注意到，系统满足以下不变变换是很有用的

$$(\hat{\mathbf{q}}_{mn}, +m, \mathrm{i}\omega_{mn}) \longrightarrow (\hat{\mathbf{q}}_{mn}, -m, \mathrm{i}\omega_{mn})\,. \tag{3.8}$$

这种不变性表明，对于具有时间和方位周期性 $\hat{\mathbf{q}}(r,z)$的外部强迫，系统响应的空间结构 (Ω, m) 与对 $(\Omega, -m)$计算得到的相同，因此线性解形式（3.4）成立。

4. 谐波单峰（SC）共振

为了推导描述纵向激励下超谐波双峰动力学（DC）的弱非线性（WNL）振幅方程组，我们首先研究较简单的谐波单峰波（SC）问题。我们寻求该系统的三阶渐近解

$$\mathbf{q} = \{\Phi,\eta\}^T = \epsilon\mathbf{q}_1 + \epsilon^2\mathbf{q}_2 + \epsilon^3\mathbf{q}_3 + \mathrm{O}\left(\epsilon^4\right), \tag{4.1}$$

其中省略了与静止态相关的零阶解$\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$。

关于单峰波，特别是驱动频率接近某个非轴对称 $m = \pm1$ 模态的固有频率时的谐波响应，我们假设 ω_{1n}

此处激励振幅较小，量级为 ϵ^3。这一假设的依据是，接近共振时 $\Omega \approx \omega_{1n}$，且在不存在耗散的情况下，即使很小的激励也会引起较大的系统响应。因此，预计该分析适用于 $\Omega = \omega_{1n} + \lambda$，其中 λ 是一个小失谐参数，假设其量级为 ϵ^2。按照多尺度法的思路，我们引入慢时间尺度 $T_2 = \epsilon^2 t$，其中 t 为快时间尺度。因此，假设采用以下标度：

$$f = \epsilon^3 F, \quad \Omega = \omega_{1n} + \epsilon^2 \Lambda, \quad T_2 = \epsilon^2 t, \tag{4.2}$$

其中辅助参数 F 和 Λ的阶为 O (1)。

鉴于外部强迫具有方位周期性，即 $m = \pm 1$，我们假设主阶解为两个反向传播行波之和，

$$\mathbf{q}_1 = A_1(T_2)\,\hat{\mathbf{q}}_1^{A_1} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t-\theta)} + B_1(T_2)\,\hat{\mathbf{q}}_1^{B_1} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t+\theta)} + c.c., \tag{4.3}$$

其中 $\hat{\mathbf{q}}_1^{A_1} = \hat{\mathbf{q}}_1^{B_1}$(由于 (3.8)) 是通过在 $\Omega = \omega_{1n}$处求解 (3.5) 的齐次解得到的特征模态，其中 ω_{1n} 由 (3.7) 给出。复振幅 A_1 和 B_1是慢时间尺度 T_2 的函数，在此展开阶段尚未确定；它们描述两个振荡波的慢时间振幅调制，必须在更高阶确定。

将展开推进至二阶，可得到一个由一阶解的组合强迫的线性系统。这些强迫项与 A_1^2 和 B_1^2（二次谐波）、$|A_1|^2$ 和 $|B_1|^2$（稳态轴对称平均流修正）以及 $A_1 B_1$ 和 $A_1 B_1$ （交叉二次相互作用）成正比，

—

$$\begin{aligned}(\partial_t \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}_m)\,\mathbf{q}_2 = \mathcal{F}_2 = &\left(|A_1|^2 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_2^{A_1\bar{A}_1} + |B_1|_1^2 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_2^{B_1\bar{B}_1}\right) \\ &+ \left(A_1^2 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_2^{A_1A_1} e^{\mathrm{i}2(\omega_{1n}t-\theta)} + B_1^2 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_2^{B_1B_1} e^{\mathrm{i}2(\omega_{1n}t+\theta)} + c.c.\right) \\ &+ \left(A_1 B_1 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_2^{A_1B_1} e^{\mathrm{i}2\omega_{1n}t} + A_1\overline{B}_1 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_2^{A_1\overline{B}_1} e^{-\mathrm{i}2\theta} + c.c.\right).\end{aligned} \tag{4.4}$$

因此，我们寻求如下形式的二阶解

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_2 = |A_1|^2 \hat{\mathbf{q}}_2^{A_1\bar{A}_1} + |B_1|^2 \hat{\mathbf{q}}_2^{B_1\bar{B}_1} + &\left(A_1^2 \hat{\mathbf{q}}_2^{A_1A_1} e^{\mathrm{i}2(\omega_{1n}t-\theta)} + B_1^2 \hat{\mathbf{q}}_2^{B_1B_1} e^{\mathrm{i}2(\omega_{1n}t+\theta)} + c.c.\right) \\ &+ \left(A_1 B_1 \hat{\mathbf{q}}_2^{A_1B_1} e^{\mathrm{i}2\omega_{1n}t} + A_1\overline{B}_1 \hat{\mathbf{q}}_2^{A_1\overline{B}_1} e^{-\mathrm{i}2\theta} + c.c.\right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

鉴于不变变换（3.8），这些二阶响应中仅有一部分需要显式计算，例如$\hat{\mathbf{q}}_2^{A_1\bar{A}_1} = \hat{\mathbf{q}}_2^{B_1\bar{B}_1}$和$\hat{\mathbf{q}}_2^{A_1A_1} = \hat{\mathbf{q}}_2^{B_1B_1}$。

现在我们继续讨论 ϵ^3阶问题。它再次是一个线性问题，其强迫项由一阶解（4.3）和二阶解（4.5）的组合构成，这些组合由三阶非线性项产生，例如动力学条件中的 $(\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2 + \nabla\Phi_2 \cdot \nabla\Phi_1)/2$，或运动学方程中的$\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\eta_2 + \nabla\Phi_2 \cdot \nabla\eta_1$，以及慢时间-$T_2$ 导数

的 le　　主阶解和外部强迫（其阶数假定为 ϵ^3）

，

$$
\begin{aligned}
(\partial_t \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}_m)\,\mathbf{q}_3 = \mathcal{F}_3 = &-\frac{\partial A_1}{\partial T_2}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{A_1} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t-\theta)} - \frac{\partial B_1}{\partial T_2}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{B_1} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t+\theta)} \\
&+|A_1|^2 A_1 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|A_1|^2 A_1} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t-\theta)} + |B_1|^2 B_1 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|B_1|^2 B_1} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t+\theta)} \\
&+|B_1|^2 A_1 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|B_1|^2 A_1} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t-\theta)} + |A_1|^2 B_1 \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|A_1|^2 B_1} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t+\theta)} \\
&+\frac{1}{2}F\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{F} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t-\theta)} e^{\mathrm{i}\Lambda T_2} + \frac{1}{2}F\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{F} e^{\mathrm{i}(\omega_{1n}t+\theta)} e^{\mathrm{i}\Lambda T_2} \\
&+\mathrm{N.R.T.} + c.c.,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

其中 $\hat{\mathrm{F}}_3^F = \{0, r/2\}^T$，N.R.T. 表示非共振项。这些项与后续分析并无直接关系，因此可以忽略。要求方程 (4.6) 的解中不出现世俗项，即可得到 A_1 和 B_1 的振幅方程。世俗性源于 F_3 中的所有共振强迫项（其明确表达式见 Bongarzone 等人（2022a）的附录D），也就是说，所有与 q_1, e.g. $(\omega, m) = (\omega_{1n}, \pm 1)$ 具有相同频率和波数的项，以及实际上在 (4.6) 中明确写出的所有项。由此可知，必须通过 Fredholm 择一定理（Friedrichs 2012）施加相容条件，该定理要求振幅 $A = \epsilon A_1 e^{-\mathrm{i}\lambda t}$ 和 $B = \epsilon B_1 e^{-\mathrm{i}\lambda t}$ 满足以下正规形

$$
\frac{dA}{dt} = -\mathrm{i}\lambda A + \mathrm{i}\,\frac{\mu_{SC}}{2} f + \mathrm{i}\,\nu_{SC}|A|^2 A + \mathrm{i}\,\xi_{SC}|B|^2 A, \tag{4.7a}
$$

$$
\frac{dB}{dt} = -\mathrm{i}\lambda B + \mathrm{i}\,\frac{\mu_{SC}}{2} f + \mathrm{i}\,\nu_{SC}|B|^2 B + \mathrm{i}\,\xi_{SC}|A|^2 B, \tag{4.7b}
$$

其中，重新引入了物理时间 $t = T_2/\epsilon^2$，并将激励振幅和失谐参数改写为相应的物理量 $f = \epsilon^3 F$ 和 $\lambda = \epsilon^2\Lambda = \Omega - \omega_{1n}$，以消除小的隐式参数 ϵ（Bongarzone 等人 2021a、2022b）。下标 $_{SC}$ 表示单峰（SC）。由于不存在耗散，各正规形系数均为实数；它们通过计算伴随模态 $\hat{\mathrm{q}}^{A_1\dagger}_1 = \hat{\mathrm{q}}^{B_1\dagger}_1$ 与三阶共振强迫项之间的标量积得到，前者与 $\hat{\mathrm{q}}_1^{A_1} = \hat{\mathrm{q}}_1^{B_1}$ 相关（更多细节见附录A和 Bongarzone 等人（2022a））。

计算出稳定定常解后，A 和 B 代入表达式（4.3）和（4.5），并重构得到总谐波单峰波解

$$
\mathbf{q}_{SC} = \{\Phi, \eta\}^T = \epsilon\mathbf{q}_1 + \epsilon^2\mathbf{q}_2. \tag{4.8}
$$

为此，首先将方程（4.7*a*）-（4.7*b*）用极坐标表示较为方便，即定义 $A = |A|e^{\mathrm{i}\Phi_A}$ 和 $B = |B|e^{\mathrm{i}\Phi_B}$，然后引入以下变量变换，$|a| = |A| + |B|$ 和 $|b| = |A| - |B|$。通过寻找定常振幅为 $|A|$、$|B| \neq 0$的周期解，可将方程（4.7*a*）与（4.7*b*）相加和相减，从而得到：

$$
f = a_x\Omega^2 = \pm|a|\left(\lambda - \left(\frac{\nu_{SC} + \xi_{SC}}{4}\right)|a|^2 - \left(\frac{3\nu_{SC} - \xi_{SC}}{4}\right)|b|^2\right)\frac{1}{\mu_{SC}}, \tag{4.9a}
$$

$$
0 = |b|\left(\lambda - \left(\frac{\nu_{SC} + \xi_{SC}}{4}\right)|b|^2 - \left(\frac{3\nu_{SC} - \xi_{SC}}{4}\right)|a|^2\right). \tag{4.9b}
$$

不出所料，方程（4.9*b*）表明存在两种可能的解。对于

$$|b| = |A| - |B| = 0 \longrightarrow |A| = |B|, \tag{4.10a}$$

$$a_x\Omega^2 = \pm|a|\left(\lambda - \left(\frac{\nu_{SC} + \xi_{SC}}{4}\right)|a|^2\right)\frac{1}{\mu_{SC}}, \tag{4.10b}$$

而旋涡波解则在 $|b| \neq 0$and 时得到

$$|b|^2 = \left(\lambda - \left(\frac{3\nu_{SC} - \xi_{SC}}{4}\right)|a|^2\right)\left(\frac{4}{\nu_{SC} + \xi_{SC}}\right), \tag{4.11a}$$

$$a_x\Omega^2 = \pm 2|a|\left(\frac{\xi_{SC} - \nu_{SC}}{\nu_{SC} + \xi_{SC}}\right)\left(\lambda - \nu_{SC}|a|^2\right)\frac{1}{\mu_{SC}}. \tag{4.11b}$$

由（4.10*b*）和（4.11*a*）-（4.11*b*）给出的各种分支，在 $|a|$ 和 $|b|$ 作为 $\tau = \Omega/\omega_{1n}$ 的函数且无量纲振动幅值 a_x 固定时，采用 Matlab 函数*fimplicit*进行计算。

我们注意到，原则上存在四种可能的定常相位组合，Φ_A 和 $\Phi_B \in [0, 2\pi]$，即：(i) $\Phi_A = \Phi_B = 0$，(ii) $\Phi_A = \Phi_B = \pi$，(iii) $\Phi_A = 0$，$\Phi_B = \pi$ 以及 (iv)$\Phi_A = \pi$，$\Phi_B = 0$。然而，(iii) 和 (iv) 分别与 (i) 和 (ii) 完全等价，其振幅为 $|a| \to |b|$ 和 $|b| \to |a|$。因此，仅保留组合 (i) $\Phi_A = \Phi_B = \Phi = 0$和 (ii) $\Phi = \pi$，它们在（ ± 式（4.9*a*）中产生该符号。

在图 2 中，我们重现了 Faltinsen 等人 (2016) 的图 8，该图展示了谐近平面波、不规则波和旋涡波出现的频率范围之间边界的估计值。本研究分析的结果与 Faltinsen 等人(2016) 的结果以及 Royon-Lebeaud等人 (2007) 的实验测量结果一致。附录 μ_{SC}、ν_{SC} 和 ξ_{SC} 中表 1 所列的正规形系数 A 证实，正如 Faltinsen 等人(2016) 对无量纲液深 $H \gtrsim 1.05$所述，稳定性边界随液体深度的变化较小，但对激励振幅的依赖显著；随着激励振幅增大，不规则波和旋涡波的频率范围也随之扩大。在此语境下，不规则是指平面波解和旋涡波解均不稳定，因此可以预期会出现不规则的混沌模式，并在平面运动与旋涡运动之间切换。绿色阴影区域对应稳定的单峰（SC）旋涡波，而浅紫色阴影区域对应多解区域；在该区域内，稳定的旋涡 SC 波运动和平面 SC 波运动都可能出现，具体取决于初始瞬态，即初始条件，这正是滞回系统的典型特征。

在图 3(a) 和 (b) 中，按照（4.8）重构总流场解所计算得到的无量纲最大稳态波面升高，与 Faltinsen 等人 （2016）（黑色虚线）在其图 8 中给出的理论估计，以及 Royon-Lebeaud 等人 （2007）的相应实验测量结果（彩色实心标记）进行了比较。当前模型与实验结果相当吻合，并与 Faltinsen 等人 （2016）的预测一致。Faltinsen等人 （2016）推测，较小激励振幅下理论与实验之间较大的偏差，可能是因为这些波振幅的实际波面升高约为1毫米，因此难以足够精确地测量。这里也观察到了类似的偏差。

顺带一提，我们注意到，在当前无黏框架下，左下方稳定平面分支 $\Omega/\omega_{11} < 1$ 对应相位 $\Phi = 0$，这意味着流体运动与容器运动同相；而右下方平面分支 $\Omega/\omega_{11} > 1$ 则具有 a

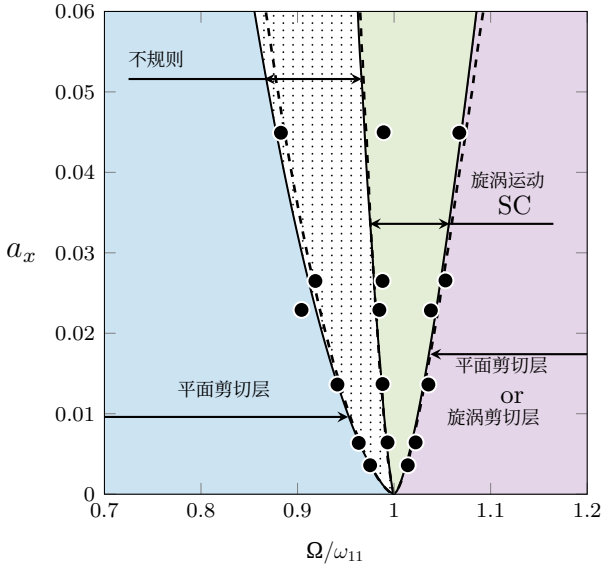

图2：在（Ω/ω_{11}，a_x）平面中，对容器进行纵向简谐运动时，平面波、不规则波和旋涡波出现的频率范围之间边界的估计。实心标记：Royon-Lebeaud等（2007）的实验。黑色虚线：Faltinsen等（2016）的理论预测，其理论曲线由手动采样其原始图8(*a*)中报告的数据后在此复现。

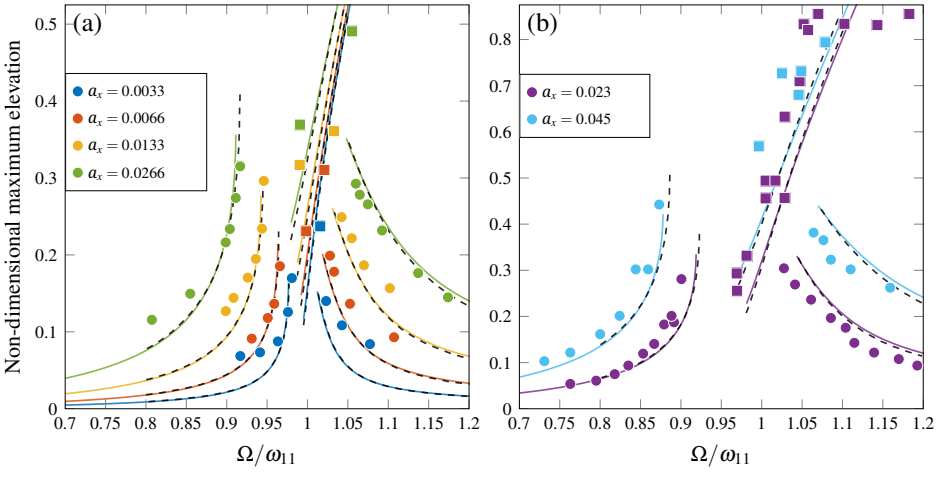

图3：无量纲最大稳态波面升高，$\max_{t,\ \theta=0,\ \pi/2}\eta$（最大值取自位于（$x$，$y$）=（0.875，0）和（0，0.875）的两个探头的测量值），随驱动频率Ω/ω_{11}变化，并对应不同的x纵向振动振幅a_x：(*a*) 0.0033、0.0066、0.0133和0.0266；(*b*) 0.023和0.045。标记对应于Royon-Lebeaud等（2007）的两个实验序列（实验数据取自其原始图2（现为(*a*)）和图7（现为(*b*)））。实心圆表示在平面状态下进行的测量，实心方块则表示旋涡运动。黑色虚线表示Faltinsen等（2016）预测的稳定分支。在可获得的频率范围内，即$\Omega/\omega_{11} \in [0.7,\ 1.2]$，通过手动采样其原始图10中报告的数据，在此仔细复现了这些曲线。彩色实线表示本文对稳定分支的理论预测。

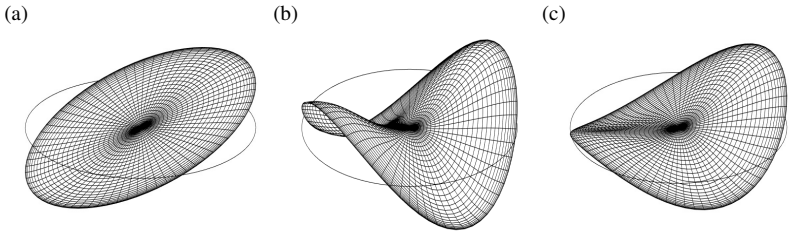

图4：一阶贡献的空间结构：(a) $\mathbf{q}_1^F(r,\ z)e^{\mathrm{i}\cos\theta}$（单峰 SC）和 (b) $\hat{}\mathbf{q}_1^{A_2}\cos 2\theta = \hat{}\mathbf{q}_1^{B_2}\cos 2\theta$（双峰 DC），见式（5.2），计算所用参数为 $t=0$ 和 $T_1=0$。（c）(a) 与 (b) 的叠加。此处为便于展示，任意选取了相应的振幅；但需注意，尽管振幅 A_2 和 B_2 仍有待确定，一旦给定外部驱动的振幅 F和振荡频率 Ω，单峰解 (a) 的振幅便可唯一确定。

相位 $\Phi=\pi$，因此意味着相位相反。稳定旋涡分支的特征由 $\Phi=0$ 描述。这与先前的研究结果一致（Royon-Lebeaud 等，2007）。

5. 超谐波双峰（DC）共振

现在我们着手研究纵向振动下的双峰（DC）波响应，这是本研究的核心内容。我们提醒读者，双峰动力学发生在驱动频率为 $\Omega\approx\omega_{2n}/2$ 时（见 Reclari 等人（2014）的图 4）。为确保普适性，以下分析将针对任意模态（2，n）进行形式化处理，即 $\Omega=\omega_{2n}/2+\lambda$，其中 λ 为小失谐参数。

与 Bongarzone 等人（2022a）类似，这里假设主阶解由特解和齐次解之和构成。特解是外部强迫的线性响应，通过求解 (3.5)（其中取 $\Omega=\omega_{2n}/2$ 和 $m=\pm1$）得到；齐次解则由与 ω_{2n} 相关的（m，n）=（±2，n）的两个自然模态表示，其振幅留待高阶确定。在第二阶，（Ω，m）=（$\omega_{2n}/2$，±1）中的二次项将在（ω_{2n}，±2）中产生共振项。这些 ϵ^2 阶共振项将因此要求按照多重时间尺度分析的思路，附加一个二阶可解性条件，由此表明存在两个慢时间尺度，即 T_1 和 T_2。因此，双峰（DC）波弱非线性展开的渐近标度如下：

$$f=\epsilon F,\qquad \Omega=\omega_{2n}/2+\epsilon\Lambda,\qquad T_1=\epsilon t,\qquad T_2=\epsilon^2 t, \tag{5.1}$$

其一阶解为

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 = {}& A_2\left(T_1,T_2\right)\hat{\mathbf{q}}_1^{A_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)}+B_2\left(T_1,T_2\right)\hat{\mathbf{q}}_1^{B_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}\\ &+\frac{1}{2}F\hat{\mathbf{q}}_1^{F}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t-\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1}+\frac{1}{2}F\hat{\mathbf{q}}_1^{F}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t+\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1}+c.c..\end{aligned} \tag{5.2}$$

在（5.2）中，$\hat{}\mathbf{q}_1^{A_2}=\hat{}\mathbf{q}_1^{B_2}$，而 A_2 和 B_2 是未知的慢时间振幅调制，此处是两个时间尺度 T_1 和 T_2的函数。二阶线性化受迫问题

为

$$(\partial_t \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}_m)\,\mathbf{q}_2 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2^{ij} - \left(\frac{\partial A_2}{\partial T_1}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{A_2} e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)} + \frac{\partial B_2}{\partial T_1}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{B_2} e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)} + c.c.\right)$$
$$-\mathrm{i}\Lambda F\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{F} e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t-\theta)} e^{\mathrm{i}\Lambda T_1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{F} e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t+\theta)} e^{\mathrm{i}\Lambda T_1} + c.c.\right). \quad (5.3)$$

一阶解确实由 8 个不同的贡献组成（包括复共轭），总共会产生 36 个不同的二阶强迫项，这些强迫项在此隐含地汇总于 F_2^{ij} 中，每一项都具有特定的振荡频率和方位周期性。为简洁起见，使用指标 (i, j) 表示每个强迫项都正比于主阶振幅的某种二次组合。例如， $A_2\,(T_1, T_2)\,\hat{}\mathbf{q}_1^{A_2} e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)}$ 与自身的二次相互作用，其指标为 $(i = A_2, j = A_2)$，并会产生一个正比于 A_2^2 的强迫项，即 $\mathrm{F}_2^{A_2A_2}$。式 (5.3) 中出现的另外八个强迫项及其复共轭，源自对一阶解 (5.2) 关于一阶慢时间尺度 T_1求时间导数。式 (5.3) 中没有任何强迫项是共振的，因为它们的振荡频率或方位波数与主阶齐次解不同；例外的是由主阶特解的二次谐波产生的两个项，即 $\mathrm{F}_2^{FF} = \frac{1}{4}F^2\hat{}\mathrm{F}_2^{FF} e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)}\, e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + \frac{1}{4}F^2\hat{}\mathrm{F}_2^{FF} e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}\, e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + c.c.$。为避免世俗项，需施加二阶相容条件，要求满足以下正规形方程

$$\frac{\partial A_2}{\partial T_1} = \mathrm{i}\,\frac{\mu_{DC}}{4}F^2 e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1}, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial T_1} = \mathrm{i}\,\frac{\mu_{DC}}{4}F^2 e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1}. \quad (5.4)$$

单独来看，由方程组（5.4）所得到的动力学仍然意义不大，因为可以证明波振幅 A_2 和 B_2 按 $\sim \frac{1}{\Lambda}$的比例变化，因此在没有任何恢复项的情况下，即在负责有限振幅饱和的非线性机制尚未发挥作用时，它们会关于 $\Lambda \to 0$ （$\Omega \to \omega_{2n}/2$）对称地发散至无穷大；该非线性机制只有在 ϵ^3阶才会起作用。因此，必须将展开推进到下一阶，从而求解二阶解（Fujimura 1989, 1991）。

通过代入 式（5.2）和（5.4）到强迫表达式中，方程（5.3）可改写为

$$(\partial_t \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}_m)\,\mathbf{q}_2 = \mathcal{F}_{2_{NRT}}^{ij} + \mathcal{F}_{2_{RT}}^{ij} = \mathcal{F}_{2_{NRT}}^{ij} + c.c. + \quad (5.5)$$
$$\frac{1}{4}F^2\left(\hat{\mathcal{F}}_2^{FF} - \mathrm{i}\,\mu_{DC}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{A_2}\right) e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)} e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + c.c. +$$
$$\frac{1}{4}F^2\left(\hat{\mathcal{F}}_2^{FF} - \mathrm{i}\,\mu_{DC}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{B_2}\right) e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)} e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + c.c.,$$

其中，下标 $_{NRT}$ 和 $_{RT}$ 分别表示非共振项和共振项。注意，(5.3) 中与 ΛF 成正比的项已计入非共振强迫项，而共振项则明确写出。现在相容条件得以满足，这意味着新的共振强迫项按构造与伴随模态 $\hat{}\mathbf{q}^{A_2\dagger 1} = \hat{}\mathbf{q}_1^{A_2}$ 正交。因此，根据 Fredholm 择一定理，可以求得非平凡的唯一解。于是，二阶解可写为

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_2 = &\left(|A_2|^2\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2\bar{A}_2} + \frac{1}{4}|F|^2\hat{\mathbf{q}}_2^{F\bar{F}}\right) + \\
&\left(A_2^2\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2A_2}e^{\mathrm{i}(2\omega_{2n}t-4\theta)} + \frac{1}{2}\Lambda F\hat{\mathbf{q}}_2^{\Lambda F}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t-\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1} + c.c.\right) + \\
&\left(\frac{1}{2}A_2F\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2F}e^{\mathrm{i}((3\omega_{2n}/2)t-3\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1} + \frac{1}{2}A_2\overline{F}\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2\overline{F}}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t-\theta)}e^{-\mathrm{i}\Lambda T_1} + c.c.\right) + \\
&\left(|B_2|^2\hat{\mathbf{q}}_2^{B_2\bar{B}_2} + \frac{1}{4}|F|^2\hat{\mathbf{q}}_2^{F\bar{F}}\right) + \\
&\left(B_2^2\hat{\mathbf{q}}_2^{B_2B_2}e^{\mathrm{i}(2\omega_{2n}t+4\theta)} + \frac{1}{2}\Lambda F\hat{\mathbf{q}}_2^{\Lambda F}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t+\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1} + c.c.\right) + \\
&\left(\frac{1}{2}B_2F\hat{\mathbf{q}}_2^{B_2F}e^{\mathrm{i}((3\omega_{2n}/2)t+3\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1} + \frac{1}{2}B_2\overline{F}\hat{\mathbf{q}}_2^{B_2\overline{F}}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t+\theta)}e^{-\mathrm{i}\Lambda T_1} + c.c.\right) + \\
&\left(A_2B_2\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2B_2}e^{\mathrm{i}2\omega_{2n}t} + A_2\overline{B}_2\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2\overline{B}_2}e^{-\mathrm{i}4\theta} + c.c.\right) + \\
&\left(\frac{1}{4}F^2\hat{\mathbf{q}}_2^{FF}e^{\mathrm{i}\omega_{2n}t}e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + \frac{1}{4}F\overline{F}\hat{\mathbf{q}}_2^{F\overline{F}}e^{-\mathrm{i}2\theta} + c.c.\right) + \\
&\left(\frac{1}{2}A_2F\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2F}e^{\mathrm{i}((3\omega_{2n}/2)t-\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1} + \frac{1}{2}A_2\overline{F}\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2\overline{F}}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t-3\theta)}e^{-\mathrm{i}\Lambda T_1} + c.c.\right) + \\
&\left(\frac{1}{2}B_2F\hat{\mathbf{q}}_2^{B_2F}e^{\mathrm{i}((3\omega_{2n}/2)t+\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1} + \frac{1}{2}B_2\overline{F}\hat{\mathbf{q}}_2^{B_2\overline{F}}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t+3\theta)}e^{-\mathrm{i}\Lambda T_1} + c.c.\right) + \\
&\left(\frac{1}{4}F^2\hat{\mathbf{q}}_2^{FF}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)}e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + \frac{1}{4}F^2\hat{\mathbf{q}}_2^{FF}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + c.c.\right).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

(5.6) 中所有非共振响应的处理方式相同，即在 Matlab 中使用标准 LU 求解器进行简单的矩阵求逆。正如上文所述，尽管与共振强迫项相关的算子，即 $(\mathrm{i}\omega_{2n}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}_2)$，是奇异的，但正规形系数 μ_{DC} 确保了 $\hat{\mathbf{q}}_2^{F^2}$ 存在非平凡解。计算这一响应可以采用多种方法；本文使用奇异算子的伪逆矩阵进行计算（Orchini 等，2016）。我们还要指出，由于不变变换（3.8），只需计算（5.6）中出现的部分空间结构。最后，在 ϵ的三阶下，问题可写为

$$\begin{aligned}
(\partial_t\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}_m)\,\mathbf{q}_3 = \mathcal{F}_3 \quad &(5.7)\\
= -\frac{\partial A_2}{\partial T_2}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{A_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)} - \frac{\partial B_2}{\partial T_2}\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{B_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}&\\
-\mathrm{i}\frac{1}{4}2\Lambda F^2\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_2^{F^2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)}e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} - \mathrm{i}\frac{1}{4}2\Lambda F^2\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_2^{F^2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1}&\\
+|A_2|^2A_2\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|A_2|^2A_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)} + |B_2|^2B_2\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|B_2|^2B_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}&\\
+|B_2|^2A_2\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|B_2|^2A_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)} + |A_2|^2B_2\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|A_2|^2B_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}&\\
+\frac{1}{4}F^2A_2\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|F|^2A_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)} + \frac{1}{4}F^2B_2\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|F|^2B_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}&\\
+\frac{1}{4}\Lambda F^2\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{\Lambda F^2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)}e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + \frac{1}{4}\Lambda F^2\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{\Lambda F^2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + \mathrm{N.R.T.} + c.c.\,,&
\end{aligned}$$

其中，前两个强迫项分别来自一阶解关于二阶慢时间尺度的时间导数 T_2 以及二阶解关于一阶慢时间尺度的时间导数 T_1（完整表达式见 Bongarzone等人（2022*a*）的附录D，$\mathcal{F}_2$ 和$\mathcal{F}_3$）。再次强调，式（5.7）中明确写出的所有项都是共振项，因为它们与一阶齐次解具有相同的一对（ω_{2n}，± 2），因此必须施加三阶相容条件，从而得到以下正规形

$$\frac{\partial A_2}{\partial T_2} = \mathrm{i}\,\frac{\zeta_{DC}}{4}\Lambda F^2 e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + \mathrm{i}\,\frac{\chi_{DC}}{4}A_2F^2 + \mathrm{i}\,\nu_{DC}|A_2|^2A_2 + \mathrm{i}\,\xi_{DC}|B_2|^2A_2, \tag{5.8a}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial T_2} = \mathrm{i}\,\frac{\zeta_{DC}}{4}\Lambda F^2 e^{\mathrm{i}2\Lambda T_1} + \mathrm{i}\,\frac{\chi_{DC}}{4}B_2F^2 + \mathrm{i}\,\nu_{DC}|B_2|^2B_2 + \mathrm{i}\,\xi_{DC}|A_2|^2B_2. \tag{5.8b}$$

系数的定义见附录A。

作为推导双波峰（DC）波最终振幅方程的最后一步，为消去隐含的小参数 ϵ，我们将系统（5.4）和（5.8*a*）–（5.8*b*）合并为一个方程组，并用物理时间$t = T_1/\epsilon = T_2/\epsilon^2$、物理强迫控制参数 $f = \epsilon F$，$\lambda = \epsilon\Lambda$ 以及总振幅$A = \epsilon A_2 e^{-\mathrm{i}2\lambda t}$ 和 $B = \epsilon B_2 e^{-\mathrm{i}2\lambda t}$来重新表示。具体做法是将（5.4）与（5.8*a*）和（5.8*b*）分别乘以权重 ϵ^2 和 ϵ^3后求和，从而得到

$$\frac{dA}{dt} = -\mathrm{i}\left(2\lambda - \frac{\chi_{DC}}{4}f^2\right)A + \mathrm{i}\,\frac{\left(\zeta_{DC}\lambda + \mu_{DC}\right)}{4}f^2 + \mathrm{i}\,\nu_{DC}|A|^2A + \mathrm{i}\,\xi_{DC}|B|^2A, \tag{5.9a}$$

$$\frac{dB}{dt} = -\mathrm{i}\left(2\lambda - \frac{\chi_{DC}}{4}f^2\right)B + \mathrm{i}\,\frac{\left(\zeta_{DC}\lambda + \mu_{DC}\right)}{4}f^2 + \mathrm{i}\,\nu_{DC}|B|^2B + \mathrm{i}\,\xi_{DC}|A|^2B. \tag{5.9b}$$

我们注意到，在（5.6）中没有计入二阶齐次解，例如与振幅$C_2(T_1,T_2)$和 $D_2(T_1,T_2)$成正比的解，因为它们的存在将产生两个三阶共振项，即$\frac{\partial C_2}{\partial T_1}\mathrm{B}\,\hat{}\mathrm{q}_2^{C_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t-2\theta)}$ ($\hat{}\mathrm{q}_2^{C_2} = \hat{}\mathrm{q}_2^{A_2}$)和 $\frac{\partial D_2}{\partial T_1}\mathrm{B}\,\hat{}\mathrm{q}_2^{D_2}e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t+2\theta)}$ ($\hat{}\mathrm{q}_2^{C_2} = \hat{}\mathrm{q}_2^{A_2}$)；通过简单地定义 $A = \epsilon$ ($A_2 + \epsilon C_2$) $e^{-\mathrm{i}2\lambda t}$和 $B = \epsilon(B_2 + \epsilon D_2)\,e^{-\mathrm{i}2\lambda t}$，便可将这两个项并入最终振幅方程（5.9a）—（5.9b）中。

与第4节一样，我们首先转到极坐标，$A = |A|e^{\mathrm{i}\Phi_A}$ 和 $B = |B|e^{\mathrm{i}\Phi_A}$，并将（5.9*a*）—（5.9*b*）分解为模和相位部分。随后，我们寻找定常解，$d/dt = 0$其中 $|A|$，$|B| \neq 0$（$\Phi_A = \Phi_B = \Phi = 0,\ \pi$，见第4节）。对（5.9*a*）和（5.9*b*）求和与作差，并引入辅助振幅 $|a| = |A| + |B|$ 和 $|b| = |A| - |B|$，可得到以下隐式关系：

$$f^2 = |a|\left(2\lambda - \frac{\nu_{DC} + \xi_{DC}}{4}|a|^2 - \frac{3\nu_{DC} - \xi_{DC}}{4}|b|^2\right)\frac{4}{\left(|a|\chi_{DC} \pm 2\left(\zeta_{DC}\lambda + \mu_{DC}\right)\right)}, \tag{5.10a}$$

$$0 = |b|\left(\frac{\chi_{DC}}{4}f^2 - \left(2\lambda - \frac{\nu_{DC} + \xi_{DC}}{4}|b|^2 - \frac{3\nu_{DC} - \xi_{DC}}{4}|a|^2\right)\right), \tag{5.10b}$$

其中 $f = a_x\Omega^2$ 和 $\lambda = \Omega - \omega_{2n}/2$。类比谐波强迫条件，存在两种可能的（超谐波）解，即针对 $|b| = 0$的平面波解，

$$f = \sqrt{|a|\left(2\lambda - \frac{\nu_{DC} + \xi_{DC}}{4}|a|^2\right)\frac{4}{\left(|a|\chi_{DC} \pm 2\left(\zeta_{DC}\lambda + \mu_{DC}\right)\right)}}, \tag{5.11}$$

以及针对 $|b| \neq 0$定义的旋涡解，

$$|b|^2 = \left(2\lambda - \frac{\chi_{DC}}{4} f^2 - \frac{3\nu_{DC} - \xi_{DC}}{4}|a|^2\right)\left(\frac{4}{\nu_{DC} + \xi_{DC}}\right), \tag{5.12a}$$

$$f = \sqrt{2|a|\left(\frac{\xi_{DC} - \nu_{DC}}{\nu_{DC} + \xi_{DC}}\right)\left(2\lambda - \nu_{DC}|a|^2\right)\frac{4}{\left(2|a|\frac{(\xi_{DC} - \nu_{DC})}{(\nu_{DC} + \xi_{DC})}\chi_{DC} \pm 2\left(\zeta_{DC}\lambda + \mu_{DC}\right)\right)}}, \tag{5.12b}$$

其中仅保留与 $f = a_x\Omega^2 > 0$ 对应的实解，因为组合$a_x\Omega^2 < 0$ 在物理上没有意义。

通过引入小振幅和相位扰动 ($\ll$ 1)，并采用如下形式 $\mathrm{y}_s = (|A|, \Phi_A, |B|, \Phi_B) = (|A_p|, \Phi_{A,p}, |B_p|, \Phi_{B,p})\, e^{st}$，(5.9a)-(5.9b) 中的 $\mathrm{y}_p(t)$，即可计算此类定常解的稳定性。随后在 y_0, 附近进行线性化，从而在复特征值 $s = s_R + \mathrm{i}s_I$ 下得到一个特征值问题。对于每个 $(|A|, \Phi_A, |B|, \Phi_B)$，可得到四个特征值 s；如果这些特征值中至少有一个的实部 s_R 为正，则该构型被视为不稳定。对于 §4 中讨论的谐波共振，也采用了类似的步骤。

一旦计算出 $|a|$ 和 $|b|$ 随 $\tau = \Omega/\omega_{2n}$ 变化且在无量纲摇动振幅 a_x 固定时的各个分支，并确定其稳定性后，将振幅 A 和 B 代入（5.2）和（5.6），从而重构 WNL 对双峰波预测的总流场解：

$$\mathbf{q}_{DC} = \{\Phi, \eta\}^T = \epsilon\mathbf{q}_1 + \epsilon^2\mathbf{q}_2. \tag{5.13}$$

5.1. 分支图与超谐波稳定性图

正如 Bongarzone等人在 (2022*a*) 关于旋转晃荡的研究中所述，尽管外部控制参数（即驱动振幅和频率）对系统的定量影响与 SC 情形不同，例如使用 f^2 而不是 f，但系统（5.9*a*）-（5.9*b*）本质上与（4.7*a*）-（4.7*b*）中的系统类似。事实上，方程（5.9*a*）-（5.9*b*）包含四个主要贡献：

$$\lambda \leftrightarrow \left(2\lambda - \frac{\chi_{DC}}{4} f^2\right), \quad \mu_{SC} f \leftrightarrow \frac{\zeta_{DC}\lambda + \mu_{DC}}{4} f^2, \quad \nu_{SC} \leftrightarrow \nu_{DC}, \quad \xi_{SC} \leftrightarrow \xi_{DC}, \tag{5.14}$$

它们分别对应于失谐项（依赖于激励振幅）、加性（二次）强迫项（依赖于驱动频率）、经典三次恢复项，以及最后决定两个反向传播行波之间非线性相互作用的三次项。基于这些原因，图 5展示了$|a| = |A| + |B|$和 $|b| = |A| - |B|$的非线性振幅饱和；这些结果令人联想到 Faltinsen 等人 (2016) 在图7中针对谐波系统响应所讨论和展示的结果，尽管与各个超谐波分支相关的相位相较于对应的谐波情形存在 π移。

图中所示分岔图的更详细描述5（a）和（b）见 Faltinsen 等人（2016）。这里仅指出，分支图中包含三个分岔点，即 U（折返点）、H（Hopf 分岔）和 P（庞加莱分岔），它们的位置决定了理论上预期出现稳定平面（驻波）、旋涡运动波或不规则波的频率范围。跟踪这三个分岔点在（Ω/ω_{21}, $|a|$）平面中的位置，随着激励振幅 a_x变化，便可绘制（Ω/ω_{21}, a_x）平面内的超谐波稳定性图，类似于图3 中谐波共振的稳定性图；该图见图6。

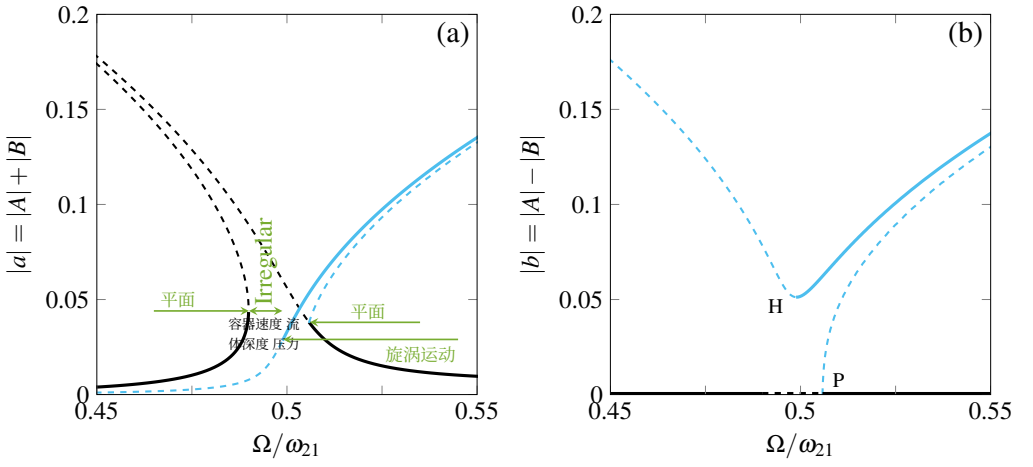

图 5：流体深度为 $H = 1.5$、纵向超谐波激励振幅为 $a_x = 0.2$ 时，a 和 b 的典型响应曲线。面板 (a) 展示了三维分支结构（Ω/ω_{21}，$|a|$，$|b|$）在（Ω/ω_{21}，$|a|$）平面上的投影；面板 (b) 则展示了相同的投影，但投影在（Ω/ω_{21}，$|b|$）平面上。黑色实线表示稳定的平面稳态波，浅蓝色实线表示稳定的旋转稳态波。虚线表示相应的不稳定分支。U：折返点。H：Hopf 分岔。P：庞加莱分岔。为完整起见，面板 (a) 中给出了与各分支相关的相位值 $\Phi_A = \Phi_B = \Phi = 0$ 或 π。

与图2 中的谐波稳定性图相比，最显著的区别是不同超谐波状态之间的稳定性边界曲率方向相反。如上所述，这是由于系统（5.9*a*）-（5.9*b*）中的加性强迫项定量依赖于驱动振幅；此处该项关于 f 呈二次关系，因此方程（5.11）（平面双峰波）和（5.12*b*）（旋转双峰波）中会出现平方根。

此外，自由表面图案方面也存在显著差异。正如一阶解（5.2）的形式所示，支配纵向激励下超谐波系统响应的主导阶动力学，是由一个以频率$\Omega \approx \omega_{2n}/2$ 作谐波振荡的稳定平面（或驻立）单峰波（SC）与一个由两个振幅相等的 $m = \pm 1$ 反向旋转行波产生的波叠加而成；同时还存在以约 $\omega_{2n} \approx 2\Omega$ 频率振荡（周期减半）的超谐波双峰（DC）波动力学。当两个具有 $m = \pm 2$ 的行波振幅相等，即 $|A| = |B|$（或 $|b| = 0$）时，DC 动力学表现为平面运动，而整体解呈现为平面波（平面 SC+DC，图 6中的浅蓝色阴影区域）。相反，当 $|A| \neq |B| \neq 0$时，两个 $m = \pm 2$ 波中的一个占主导，形成稳定的旋转运动，并导致系统对称性破缺。在这种情况下，总解由一个谐波平面 SC 波与一个超谐波旋转双峰波组成（旋转 DC+平面 SC，图 6中的绿色阴影区域）。图 6 中的白色点状区域和浅红色阴影区域分别对应超谐波不规则运动状态（详见 §6）以及多解区间；在该区间内，两种运动均可能发生，具体取决于初始条件，即滞后区域。

6. 实验

本节介绍我们为研究纵向超谐波激励下晃荡波的产生与特性而设计的实验装置，其中驱动

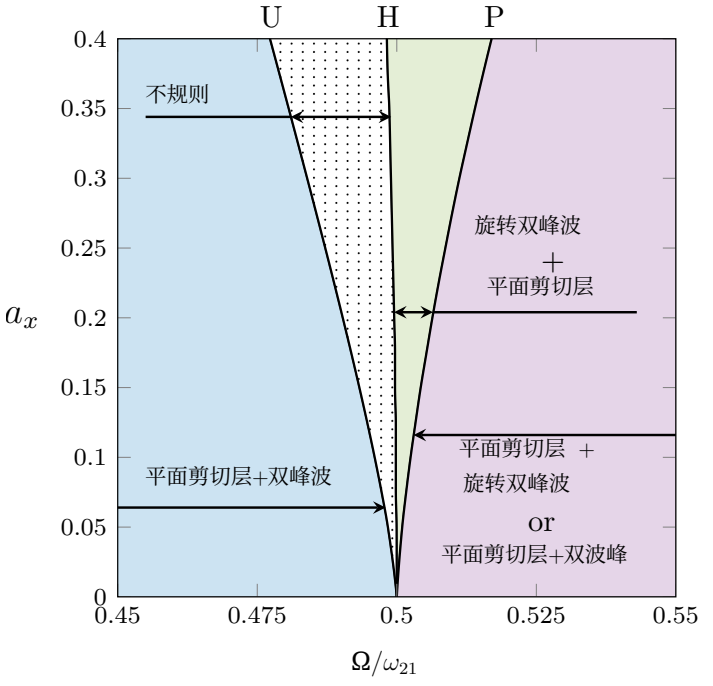

图6：估算平面（Ω/ω_{21}，a_x）平面上平面波、不规则波和旋涡波出现的频率范围边界；此时，容器以驱动频率 $\Omega \approx \omega_{21}/2$进行纵向超谐运动。在这一频率范围内，理论预测，无条件稳定的平面单波峰（SC）波（$m = \pm 1$）以驱动频率作简谐振荡，并与超谐双峰（DC）动力学（$m = \pm 2$）叠加，后者可表现为平面、旋涡或不规则波动。稳定性边界（黑色实线）按液深 $H = 1.5$计算，与 Royon-Lebeaud等人（2007）中的情况相同。式（5.9*a*）-（5.9*b*）中出现的相应正规形系数见表1。

（无量纲）频率 $\Omega \approx \omega_{21}/2$。我们通过实验测定了不同晃荡波状态之间的边界，并将其表示为驱动振幅和频率的函数，再与理论估算进行比较。最后，我们测量了超谐共振附近的波幅饱和，并将其与理论弱非线性预测（5.13）进行比较。

6.1. 实验装置

用于在圆柱形容器中产生晃荡波并观测由此产生的自由液面运动的实验装置如图7所示。一个高 50 cm、内径为 $D = 2R = 17.2$ cm 的有机玻璃圆柱形容器中，部分装有高度为$h = 11$ cm 的蒸馏水，该容器固定在单轴直线运动执行器（AEROTECH PRO165LM）上。通过使容器受到角频率为¯、振幅为 Ω 的纵向正弦强迫，产生晃荡波。使用数码相机（NIKON D850）搭配尼康 60mm f/2.8D 镜头，以慢动作模式拍摄流体自由液面的运动，采集频率为每秒 120 帧。相机光轴与容器运动轴对齐。放置在储罐后方的 LED 面板（图7中未示出）对流体自由液面进行背光照明，以提高光学对比度。

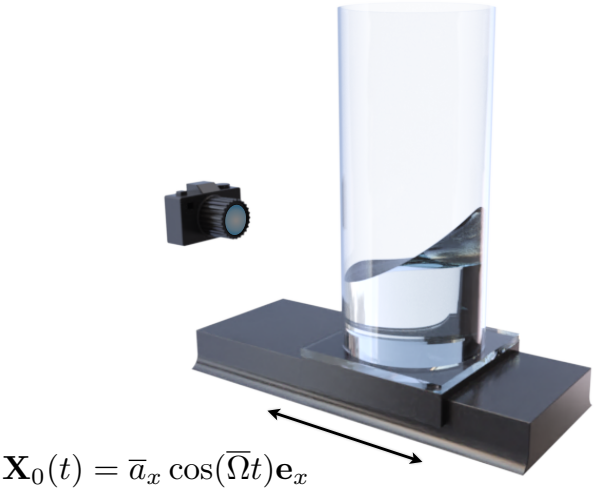

图7：实验装置。

移动台的驱动以及用于视频记录的相机触发，均通过自编的 Labview 程序进行设置和控制。在典型实验中，容器以固定振幅进行简谐运动，振幅范围为 4 mm $\leqslant \bar{a}_x \leqslant$ 34mm（即 $a_x = \bar{a}_x/R \in$ [0.05,0.40]）；同时，在¯频率范围 $\Omega/2\pi \in$ [1.35 Hz, 1.58 Hz]（对应无量纲范围$\Omega/\omega_{21} \in$ [0.45, 0.53]）内扫描驱动频率。每个频率步长持续 100 个振荡周期，相邻步长之间的频率增量通常为 10 mHz。扫描过程中，¯每组（$\bar{a}_x, \Omega$）参数都会记录一段视频。为确保记录的自由液面动力学在每个频率步长下均达到稳态振幅状态，相机仅在经过一定数量的周期后才触发，通常为 50 个周期，见附录 C。

6.2. 自由液面动力学分析

6.2.1. 定性观察

在保持激励振幅不变、扫描驱动频率的过程中，我们观察到超谐共振附近存在三种不同的运动形式，即平面运动、不规则运动和旋涡运动，其出现取决于激励振幅和频率。例如，参见图8 所示的快照，或补充材料中的视频：（链接）。

对于给定的（且足够大的）振幅，从高于某个依赖于振幅的阈值的频率开始 $\Omega_P(a_x)$，自由液面会对纵向简谐激励作出响应，呈现出如图 8(c) 所示的平面动力学。当达到临界频率 $\Omega = \Omega_P(a_x)$ 时，运动发生分岔，转变为沿容器壁传播、振幅定常的旋涡波，见图 8(b)。波可以顺时针或逆时针旋转（实验中观察到了这两种旋转方向）。当驱动频率进一步降低至低于临界频率 $\Omega = \Omega_H(a_x) \approx \omega_{21}/2 < \Omega_P(a_x)$时，自由液面呈现不规则动力学，其特征是在平面运动和旋转运动之间切换（图 8中未示出）。当驱动频率低于某个阈值 $\Omega < \Omega_U(a_x)$时，自由液面运动稳定为如图 8(a) 所示的稳态平面波。总而言之，这些

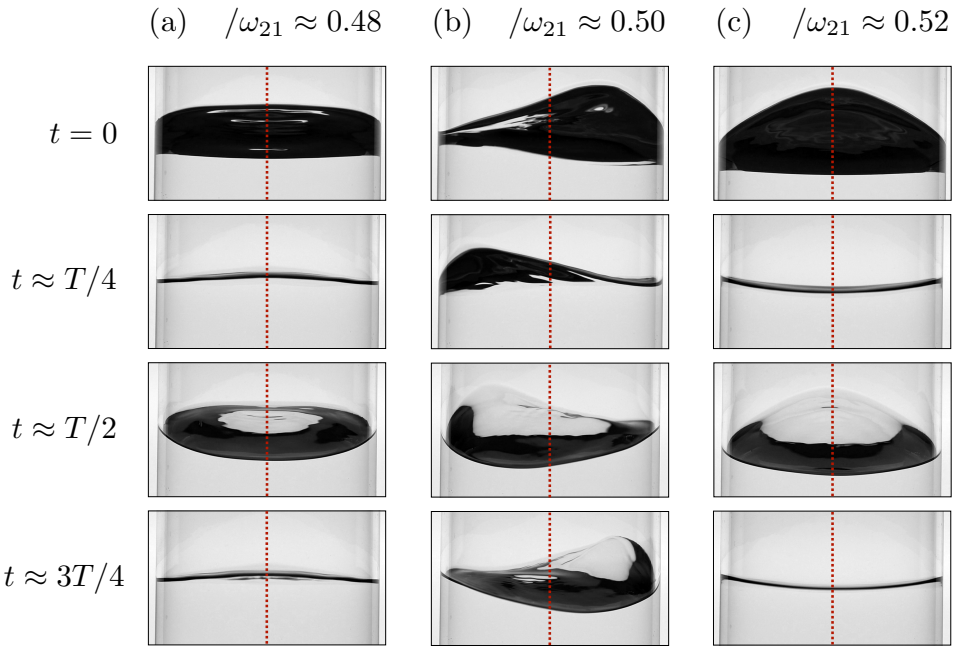

图 8：当容器受到振幅为 $a_x = \bar{a}_x/R \approx 0.23$ 的纵向简谐激励时，在接近 $\omega_{21}/2$ 的不同驱动角频率 Ω 下拍摄的流体自由液面图像。沿着与容器运动方向一致的方向观察流体自由液面。对于每个驱动频率 (a)–(c)，两张快照之间的时间间隔约为 $T/4$，其中 $T = 2\pi/\Omega$ 为相应的振荡周期。每张快照中，垂直中轴以红色点线表示。当驱动频率为 $\Omega \approx 0.48\omega_{21}$ (a) 和 $\Omega \approx 0.52\omega_{21}$ (c) 时，每个时刻 t 的自由液面图像均关于中轴镜面对称，这是平面运动的特征；而当驱动频率为 $\Omega \approx 0.50\omega_{21}$ 时，对称性被打破，呈现出行进旋涡波。.

观察结果在定性上与第 5 节弱非线性分析的结果一致；该分析预测，在纵向激励频率接近 $\omega_{21}/2$ 时存在三种不同的动力学状态——即平面运动、不规则运动和旋转运动。本实验研究的主要目的之一，是确定这些不同状态的依赖振幅的频率界限，并将其与我们对分岔点位置的理论预测进行比较：U（折返点）、H（Hopf 分岔）和 P（庞加莱分岔）（见图 5 和 6）。

6.2.2. 步骤

由于相机光轴与容器运动方向对齐，我们注意到，平面波的特征是相对于容器图像的垂直中轴呈镜面对称，而旋涡波则会打破这种对称性，并沿容器壁顺时针或逆时针行进，见图8。

我们利用这些观察结果，对自由液面动力学进行更定量的描述，旨在识别超谐共振附近的各种晃荡波类型。为此，可以利用容器图像中自由液面响应图像相对于垂直中轴的对称性，并根据激励参数表征这些波的规律性，从而识别不规则状态。为此，时间演化

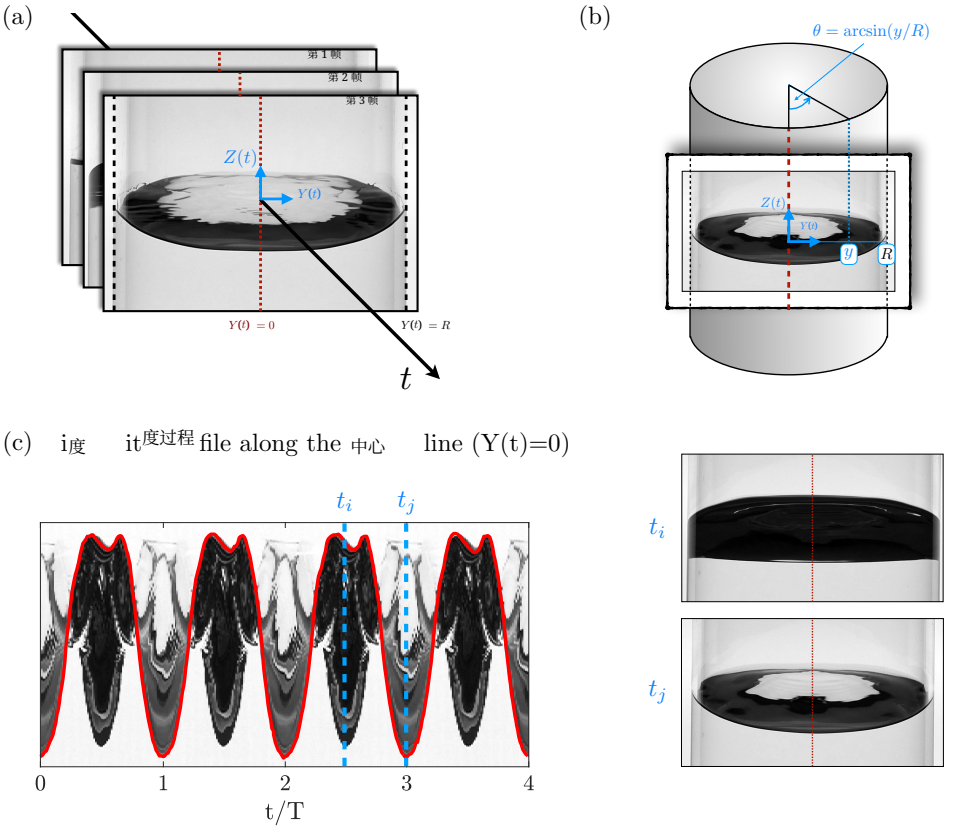

图9：自由液面动力学分析的一般流程。(a) 在每一帧中，检测容器的边缘（黑色点线），并将竖直 $Z(t)$ 轴设为两条边缘之间的中线，同时根据两条边缘之间的距离确定水平方向 $Y(t)$ 的尺度。(b) 容器示意图，展示附着于每一帧的笛卡尔坐标系（$Y(t)$，$Z(t)$)与容器参考坐标系中的柱坐标之间的关系。(c) 左图，测量每一帧上坐标为 $(Y(t) = y)$ 的竖直线上的强度剖面，其中 $y \in [-R, R]$，t 并将其绘制为时间的函数（此处为 $y = 0$）。前接触线在方位角坐标 $\theta = \arcsin(y/R) = 0$ 处的位置随时间的变化以红色标出。右图，左侧图像中时间为 t_i 和 t_j 的帧；从中提取沿线 $(Y(t) = 0)$（以红色点线表示）的强度分布。在 t_i，波正沿容器前壁（相对于相机位置）爬升；而在 t_j，波已到达罐体后部。

是从视频中沿着相对于容器图像垂直中轴镜面对称的垂直方向提取自由液面动力学的。通过相互比较所得的时间信号，可以区分平面运动和旋涡运动，并研究波的规律性。

第一步是为给定视频的每一帧 t 附加一个笛卡尔参考系（$Y(t)$，$Z(t)$)，使 $Y(t) = 0$ 对应于容器图像的垂直中轴，而 $Y(t) = R$ 表示容器图像的右侧边缘。为此，我们使用专门的 Matlab 程序自动检测容器的边缘。随后，将对应于时间 t 的帧上的垂直 $Z(t)$ 轴（$Y(t) = 0$）设为

这两条边缘之间的中线，而两条边缘之间的距离则确定水平方向 x 的尺度。请注意，我们忽略容器壁的 4 毫米厚度。

选取一个方向 $y \in [-R, R]$，以便从对应于时间 t_i 的每一帧中提取沿竖直线 $x(t_i) = y$ 的强度剖面 $I_{t_i}(y)$。随后将所得强度分布绘制为时间的函数，从而构建图像 $I(y)$，其构成为 $I(y) = [I_{t_1}(y),\ I_{t_2}(y),\ \ldots\ldots]$ 如图 图9(c) 所示。

注意，在每个时间 t，强度剖面 $I_t(y)$ 都包含前接触线图像与竖直轴的交点（$x(t) = y$），该交点对应于容器的运动柱坐标系中的坐标点（$R, \theta, \eta(R, \theta, t)$），其中 $\theta = \arcsin(y/R)$（见图9(b)）。因此，最终图像 $I(y)$ 也包含前接触线沿方位方向 θ 的动力学。

所得图像 $I(y)$ 呈现出周期性的暗色图案，代表自由液面对谐波强迫的响应，示例见图9(c)，其中 $y = 0$。事实上，在视频的每一帧中，自由液面都是最暗的特征，因此，沿给定直线（$x(t) = y$）的强度剖面，实际上表示了时间 t 沿该方向自由液面的垂直延伸；当晃荡波沿方位方向 $\theta = \arcsin(y/R)$（相对于相机位置，位于容器前方，对应于 $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$）或沿 $\theta = \pi - \arcsin(y/R)$（位于容器后方）达到最大高度 $\max_t \eta(R, \theta, t)$ 时，该延伸达到最大值。此外，当接触线在容器前方达到最大高度时，自由液面是从下方成像的，因此看起来比其在后方达到最大高度时更暗；后者是从上方对自由液面成像，见图9(c)中的快照。根据这些观察，我们可以在图像 $I(y)$ 中确定前接触线 $\eta(R, \theta, t)$ 随时间变化的位置，其中 $\theta = \arcsin(y/R)$，如图9(c)中红色标示所示。

请注意，该过程无法定量获取前接触线振荡的实际振幅，因为构成图像 $I(y)$ 的强度剖面 $I_{t_i}(y)$ 只是彼此并置，并未对垂直方向上的像素宽度进行重新缩放。然而，从图像中坐标为 $\eta(R、\ \pm\theta、\ t)$ 的点的 $I(y)$ 提取出的位置随时间的变化，仍然包含自由液面响应的对称性、规则性及其频率成分，而这些正是识别波动状态所需的唯一量。

6.3. 自由液面响应的规则性和频率成分

所得图像 $I(y)$ 揭示了自由液面动力学 $\eta(r, \theta, t)$，尤其是其在前壁处的动力学 $\eta(r = R, \theta = \arcsin(y/R), t)$。图10(a)–(d) 显示了在相同激励振幅下、接近超谐共振的不同激励频率所对应的 $I(0)$。这些图像表明，自由液面振荡（深色周期性图案）取决于激励频率，可以是规则的（a）、（c）和（d）——即振荡被包络在恒定振幅的包络内——也可以是不规则的（b），其振幅包络随时间发生调制。因此，剖面 $I(0)$ 可用于表征晃荡波的规则性，尤其是识别不规则状态。后者将在第6.6节中进行更详细的描述，但要确定不规则状态的边界，并不需要这些细节，因为分析 $I(0)$ 图案的规则性即可。因此，下面我们将重点讨论规则的平面运动和旋涡运动；仅凭剖面 $I(0)$ 无法明确区分这两种运动。

图 10(e) 显示了从剖面 $\eta(R,\ \theta = 0,\ t)$ 中提取的前接触线动力学的（归一化）功率谱密度 $I(0)$ (a)-(d)。显然，在所有情况下，晃荡波的能量都大量分布在其第一（谐波）和第二（超谐波）分量上，而高阶模态的贡献则相当可以忽略。

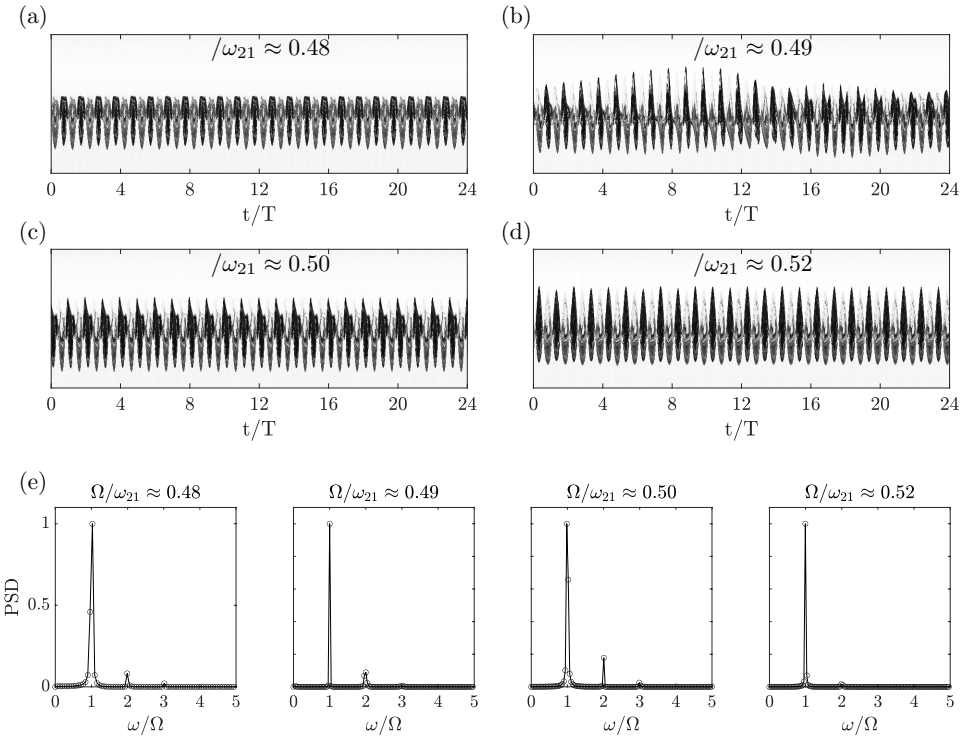

图10：面板(a)和(d)：沿垂直中轴($Y = 0$)（记为 $I(0)$）随时间变化的强度分布， Ω 在超谐共振 $\Omega \approx \omega_{21}/2$ 附近的不同激励频率 $\tilde{a}_x/R \approx 0$。23，且激励振幅相同。每种情况下，剖面 $I(0)$ 均取自一段视频；在每次改变激励频率后，经过约50个振荡周期才开始录制，以确保滤除初始瞬态（另见附录C）。(e) 功率谱密度（PSD），按最大峰值振幅归一化，对应于从面板(a)和(d)所示剖面 $I(0)$ 中提取的前接触线动力学。

这也意味着，规则波的对称性特征与这两个最低阶振荡模态的对称性特征直接相关。

换言之，平面动力学必然由两种平面波叠加而成：一个以驱动频率 Ω 作谐振荡的平面单波峰（SC）波，以及一个以 $\omega = 2\Omega \approx \omega_{21}$振荡的超谐平面双波峰（DC）波。另一方面，旋涡动力学必须至少包含一个对称性破缺（旋涡运动）分量；正如当前的弱非线性分析所预测的，该分量应对应于超谐 ω_{21} 分量。

6.4. 规则状态的对称性：平面波与旋转波

现在我们关注规则状态，即稳态平面运动和旋涡运动。如前所述，剖面 $I(0)$ 无法区分平面动力学与旋涡动力学，只能提供有关其规则性和频率成分的信息。为区分平面运动与旋转运动，我们比较容器图像垂直中轴两侧对称的两个（$Y \neq 0$）方向上的剖面。图 11(b)、(d) 和 (f) 展示了合成图像；每幅图像均通过对一对 $I(R/2)$ 和 $I(-R/2)$应用 Matlab 函数 imshowpair 生成，分别对应三种不同的激励频率。

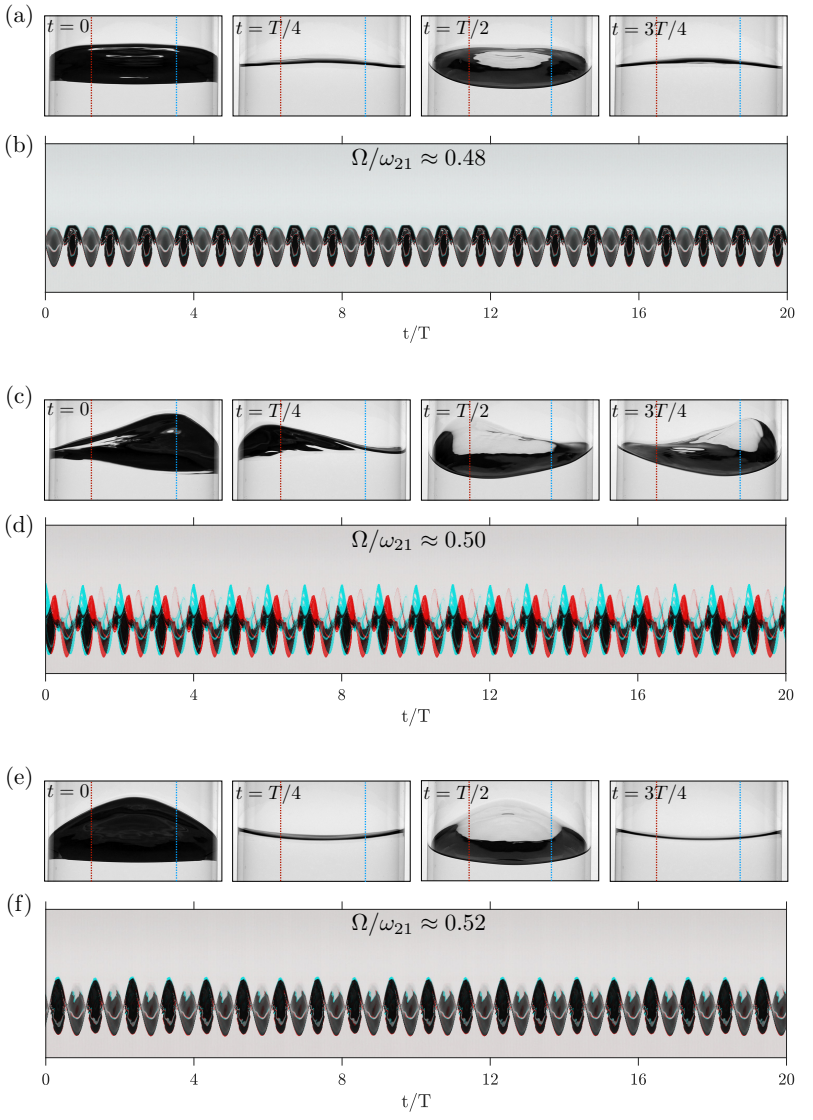

图11：驻波的对称性。(a)、(c)和(e)：容器受到振幅为 $\bar{a}_x/R \approx 0$的纵向简谐激励时，流体自由液面的图像；驱动角频率 Ω 接近 $\omega_{21}/2$：(a) $\Omega \approx 0.48\,\omega_{21}$，(c) $\Omega \approx 0.50\,\omega_{21}$ 和(e) $\Omega \approx 0.52\,\omega_{21}$（激励参数与图10(a)、(c)和(d)相同）。对于每个驱动频率（a、c、e），两张快照之间的时间间隔约为 $T/4$，其中 $T = 2\pi/\Omega$ 为相应的振荡周期。在每张快照中，竖直轴（$Y = R/2$）和（$Y = -R/2$）分别用蓝色和红色点线表示。当驱动频率为 $\Omega = 0.48\omega_{21}$（a）和 $\Omega = 0.52\omega_{21}$（e）时，每个时刻 t 的自由液面图像均关于中间竖直轴镜面对称，而在 $\Omega = 0.50\,\omega_{21}$时，对称性被打破。(b)、(d)和(f)：沿竖直轴（$Y = R/2$）和（$Y = -R/2$）的强度剖面随时间的叠加，分别记为 I（$R/2$）（蓝色）和 I（$-R/2$）（红色）；激励参数与图10(a)、(c)和(e)相同。灰色区域表示 I（$R/2$）和 I（$-R/2$）的强度相同。

两者都会产生规则运动（激励参数与图10(a)、(c)和(d)中的相同）。简而言之，imshowpair(A, B)根据一对灰度图像 A 和 B生成一幅RGB图像，其中每个像素由一个RGB三元组表示：R强度是 A中对应像素的强度，而G和B强度均等于 B中对应像素的强度。对于 A 和 B 具有相同强度的像素，其RGB三元组将表示为 $[a, a, a]$，其中 $a \in [0, 255]$，即显示为灰色。相反，如果该像素在 A （相对于 B）中的强度远大于其在 B （相对于 A）中的强度，则其在生成的合成图像中将显示为红色（相对于青色）。因此，图11(b)、(d)和(f)中显示的合成图像分别突出显示了 I（R/2）与 I（$-R$/2）之间的差异。它们随后直接体现了自由液面动力学相对于垂直中轴（$Y = 0$）的对称性，并揭示了两种不同的运动形式：(i) 平面运动，此时由于波的镜像对称性， I（R/2）与 I（$-R$/2）彼此完全重合；(ii) 旋转运动，其特征是右侧和左侧自由液面动力学之间存在对称性破缺：沿 $\theta = \arcsin(1/2) = \pi/6$的波峰相对于沿 $\theta = -\pi/6$的波峰发生了相移，从而揭示出沿容器壁传播的行波。

为确定旋转运动引发的对称性破缺是由哪个 ω 分量导致的，我们从 $I(R/2)$ 和 $I(-R/2)$ 中提取前接触线的位置，作为时间 $\eta(R, \theta, t)$ 的函数，其中 $\theta = \pm\pi/6$，见图 12(b)、(e)。这样便可以计算这两个信号的功率谱，以及其频谱第一峰和第二峰对应频率处振荡分量的相位角之间的相位差（见图 12(c-f)）。频率为 ω 的平面波，其 $\eta(R, \pi/6, t)$ 和 $\eta(R, -\pi/6, t)$ 的 ω 分量彼此同相；而旋涡波的特征是这些信号的 ω 分量之间存在 $m\pi/3$ 的相位差，其中 m 表示旋涡波的方位波数（谐振荡单峰波为 $m = 1$ ，超谐双峰波为 $m = 2$ ）。

对信号 $\eta(R, \pi/6, t)$ 和 $\eta(R, -\pi/6, t)$ 进行傅里叶分析后发现，当激励频率 Ω 接近 $\omega_{21}/2$ 时，自由液面运动主要由两部分构成：以驱动频率 $\Omega \approx \omega_{21}/2$ 作谐振荡的单峰波，以及以频率 $2\Omega \approx \omega_{21}$ 振荡的超谐双峰波。从图 12(c) 和 (f) 可以看出，无论是平面动力学（图 12(c)）还是旋涡动力学（图 12(f)），单峰波都是平面波；这一点可由两种情况下信号 $\eta(R, \pi/6, t)$ 和 $\eta(R, -\pi/6, t)$ 谐波分量之间的相移为零看出。另一方面，在平面动力学情况下，超谐分量之间的相移为零；而在旋涡动力学情况下，相移接近 $2\pi/3$，这是双峰旋涡波的特征。本研究考察的整个激励频率和振幅范围内，均普遍存在这些现象：在超谐共振附近，无论是平面动力学还是旋涡动力学，单峰波始终是平面波；这一点可由两种情况下信号 $\eta(R, \pi/6, t)$ 和 $\eta(R, -\pi/6, t)$ 的谐波分量之间相移为零看出（不规则状态下也是如此，详见后文第 6.6 节）。在规则动力学情况下，双峰波可以是平面波（对应分量之间的相移为零），也可以是旋涡波（其右侧和左侧信号的 ω_{21} 分量之间存在 $2\pi/3$ 的相移）；具体取决于 Ω 与 ω_{21} 之间的确切比值，以及激励振幅 $\bar{a}_x/R$。

6.5. 状态边界的实验估计

根据上述分析，与弱非线性理论分析的预测一致，由纵向

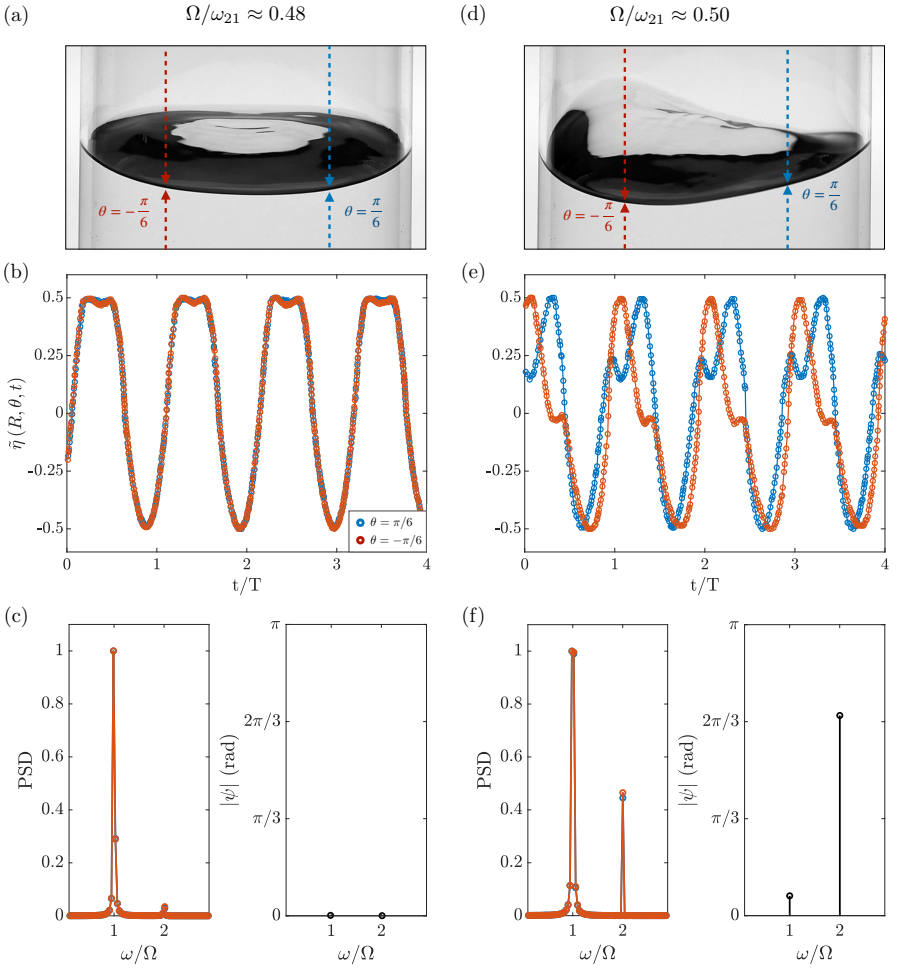

图 12：在振幅为 $a_x = 0.23$、频率为 (a)-(c) $\Omega/\omega_{21} \approx 0.48$ 和 (d)-(f) $\Omega/\omega_{21} \approx 0.50$ 的谐波强迫下，对稳态自由液面动力学的分析。(a) 和 (d) 移动容器参考系中的自由液面图像，竖直线与前接触线图像相交于坐标点（$(R, \pi/6, \eta(R, \pi/6, t))$（蓝色箭头）和（$R, -\pi/6, \eta(R, -\pi/6, t)$）（红色箭头）。(b) 和 (e) 从相应剖面 $I(R/2)$ 和 $I(-R/2)$（此处未显示）提取的前接触线归一化高度 $\tilde{\eta}(R, \pi/6, t)$（蓝色圆点）和 $\tilde{\eta}(R, -\pi/6, t)$（红色圆点）。$\tilde{\eta}$-函数定义为 $\tilde{\eta}(R, \theta, t) = (\eta(R, \theta, t) - \sigma)/\delta$，其中 $\sigma = (\min_t(\eta(R, \theta, t)) + \max_t(\eta(R, \theta, t)))/2$，且 $\delta = \max_t(\eta(R, \theta, t)) - \min_t(\eta(R, \theta, t))$。(c) 和 (f) 左：$\tilde{\eta}(R, \pi/6, t)$（蓝色圆点）和 $\tilde{\eta}(R, -\pi/6, t)$（红色圆点）的功率谱密度。右：$\tilde{\eta}(R, \pi/6, t)$ 与 $\tilde{\eta}(R, -\pi/6, t)$ 的分量之间的相位差绝对值；这些分量以对应于功率谱第一峰（$\omega = \Omega$）和第二峰（$\omega = 2\Omega$）的频率振荡。

在频率为 $\Omega \approx \omega_{21}$ 时对容器施加超谐波强迫所产生的晃荡波，由一个以 $\omega = \Omega$ 频率随强迫谐波振荡的平面单峰波与一个双峰波叠加而成；后者可能呈现平面、不规则或旋涡运动动力学。

确定了超谐共振附近自由液面动力学的三种不同状态后，我们现在可以通过实验确定它们的稳定区域

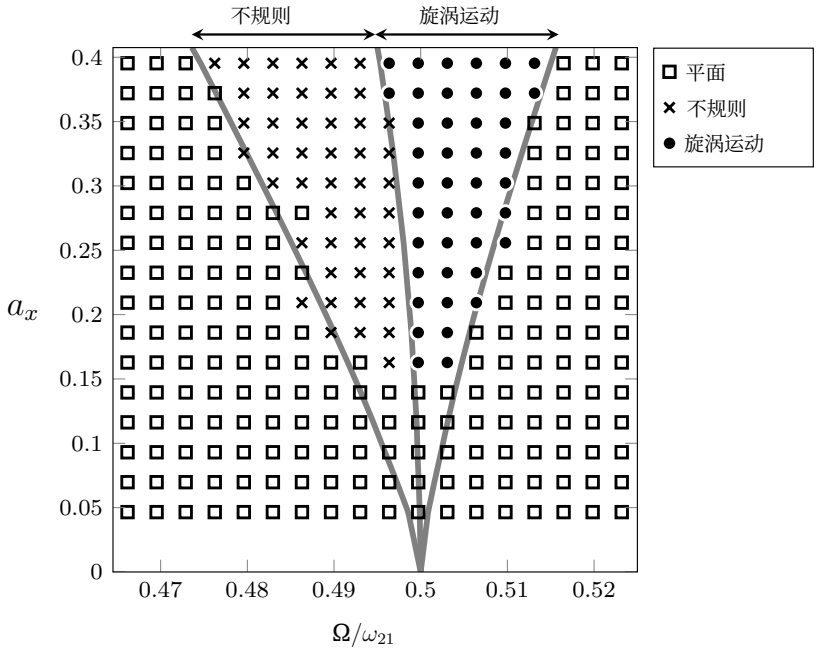

图 13：容器直径为 $D = 0.172$m、液深为 $H = 1.3$ 时，纵向驱动并以频率 $\Omega \approx \omega_{21}/2$ 进行超谐波驱动的容器在 $(\Omega/\omega_{21}, a_x)$ 平面上的状态边界估计：理论预测（实线）与实验测量（标记）的比较。粗灰色实线：本文的理论预测。黑色空心方块：超谐平面运动。黑色叉号：不规则状态。黑色实心圆：超谐波旋涡运动。

在（Ω/ω_{21}，a_x）空间中。为此，我们固定激励振幅，并在范围 $\Omega/\omega_{21} \in [0。45，0。53]$, 内，将频率从高到低扫描，每次递减 10mHz。请注意，向下扫描频率能够确定超谐平面运动状态与旋涡运动状态之间的稳定性边界，因为沿此方向的转变恰好发生在阈值频率 $\Omega_P(a_x)$ 处；低于该频率时，超谐平面运动变得不稳定。相反，由于超谐旋涡波在频率高于 $\Omega_P(a_x)$ 时仍保持稳定（滞后），向上扫描频率会使系统响应维持在旋涡分支上，因此不适合通过实验检测分岔点 P。向下扫描频率还能够检测不规则状态与稳定平面运动（$\Omega = \Omega_U(a_x)$）及旋涡运动（$\Omega = \Omega_H(a_x)$）之间的边界。

对于不同的驱动振幅，我们采用这一方法 $a_x \in [0。05、0。4]$, 从而绘制出图13所示的稳定区域图。总体而言，实验测量结果与 $a_x > 0。15$条件下的理论状态边界在定量上非常吻合；低于该值时，超谐波不规则状态和旋涡状态似乎会受到耗散机制的抑制，例如流体主体、侧壁和自由液面边界层中的黏性耗散（Case & Parkinson 1957；Miles 1967；Raynovskyy & Timokha 2020；Bongarzone 等人，2022*b*），以及运动接触线附近的耗散（Keulegan 1959；Dussan 1979；Hocking 1987；Cocciaro 等人，1993；Viola & Gallaire 2018）。请注意，基于无黏模型的理论渐近分析并未考虑黏性耗散。

6.6. 不规则状态

本节将更详细地描述不规则状态。当驱动频率固定在略低于 $\omega_{21}/2$ 的位置，并逐步增大驱动振幅时，在驱动振幅足够低的情况下，自由液面响应起初十分规则，呈现平面动力学。超过阈值振幅后，运动变得不规则；而在振幅足够大时，响应再次变得规则，但呈现旋转运动。图14（a）展示了固定驱动频率下，垂直中轴处的自由液面响应 $Y = 0$ 随驱动振幅增大时的变化 $\Omega \approx 0.496\omega_{21}$。规则状态（顶部和底部面板）的特征是自由液面振荡的振幅恒定。相比之下，在中间驱动振幅下（第二和第三个面板），自由液面振荡被一个准周期包络所围绕，其频率随驱动振幅线性增大（见图14（b））。这与 Royon-Lebeaud等人（2007）在纵向激励下观察到的谐振附近不规则状态十分相似。

为了进一步了解这种不规则动力学，我们在每个时间点 t_i 计算 $I_{t_i}(R/2)$ 与 $I_{t_i}(-R/2)$ 之间的空间相关性，并将其记为 $\mathrm{corr}(t_i)$

$$\mathrm{corr}(t_i) = \frac{\sum_n \left(I_{t_i,n}(R/2) - \bar{I}_{t_i}(R/2)\right)\left(I_{t_i,n}(-R/2) - \bar{I}_{t_i}(-R/2)\right)}{\sqrt{\sum_n \left(I_{t_i,n}(R/2) - \bar{I}_{t_i}(R/2)\right)^2 \sum_n \left(I_{t_i,n}(-R/2) - \bar{I}_{t_i}(-R/2)\right)^2}}, \tag{6.1}$$

其中 $n \in [1, N]$，且 N 为竖直方向上的像素数，$I_{t_i}(y)$ 表示 N 元素向量 $I_{t_i}(y)$的均值。相关性高且恒定是稳态平面运动的特征，而相关性较低但仍保持恒定则是稳态旋转态的特征。在中等激励振幅下——即不规则状态下——相关性是时间的准周期函数，其准周期与包络相同，见图14(c)。

比较 $I(R/2)$ 和 $I(-R/2)$ 在相关函数最大值和最小值对应的时间区间内的表现可以发现：在信号高度相关的时间区间内，运动近似呈平面运动（尽管是不规则的）；而在信号相关性较低的时间区间内，右侧和左侧信号的峰值彼此存在相移，从而反映出旋涡波的存在，见图 14(d)。

进一步通过前接触线动力学沿方位角方向 $\theta = \pm\pi/6$ 的功率谱证实了这一点。这些功率谱取自 $I(R/2)$ 和 $I(-R/2)$，涵盖了这些信号高度相关和相关性较弱的时间区间，见图 14(e-f)。在这两种情况下，晃荡波都包含一个平面单峰波，这可从 $\eta(R, \pi/6, t)$ 和 $\eta(R, -\pi/6, t)$ 的谐波分量之间相移消失看出。该波还包含一个超谐波分量，它导致运动在类平面运动（ ω_{21}-分量之间相移消失的$\eta(R, \pi/6, t)$ 和 $\eta(R, -\pi/6, t)$ 信号，图 14(e)）与旋涡动力学（旋转的对称性破缺波，以 $\omega \approx \omega_{21}$的超谐波频率振荡，图 14(f)）之间切换。

这再次与 Royon-Lebeaud 等（2007）所描述的谐振附近不规则状态的特征十分相似：他们将自由表面振荡振幅的“突发”与旋涡波的准周期性出现联系起来。然而，在超谐共振的情况下，此处的不规则状态由稳定的平面单峰波与超谐双峰波叠加而成

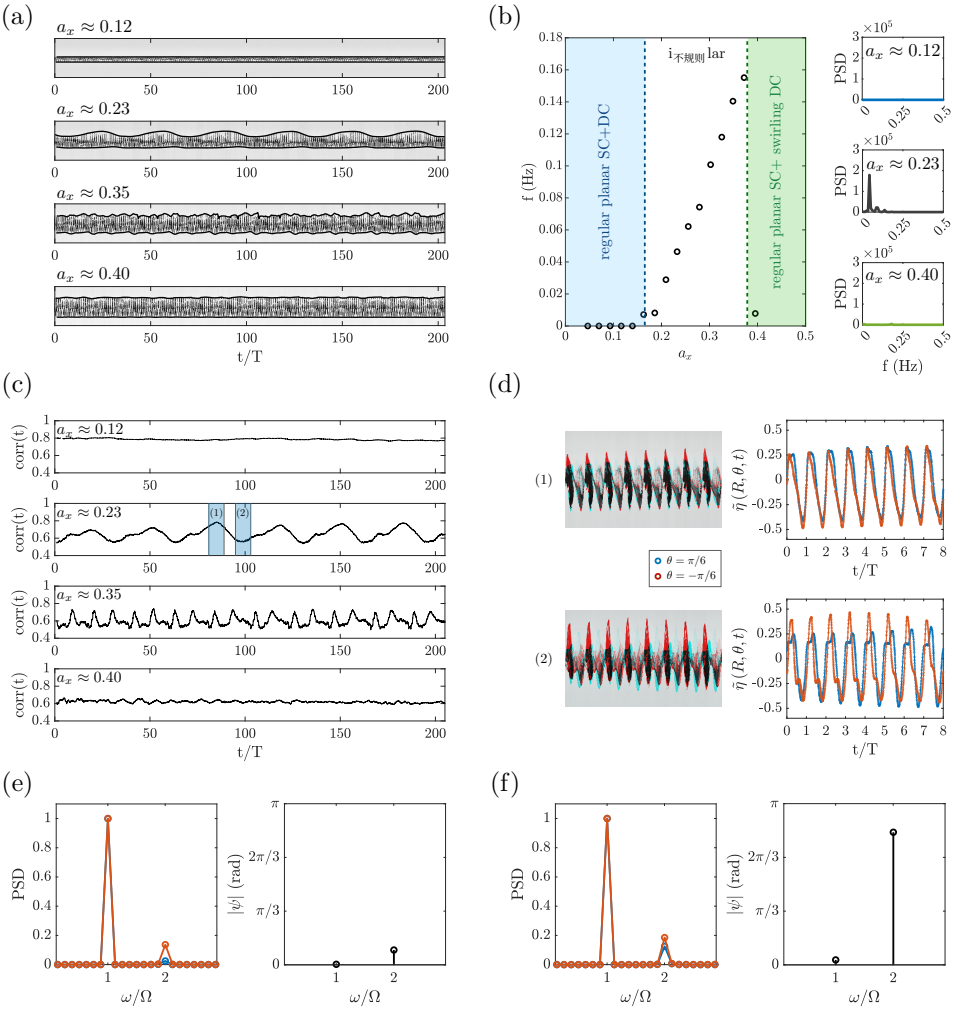

图 14：（a）不同驱动振幅下、相同驱动频率 $\Omega \approx 0.496\omega_{21}$ 对应的强度剖面 $I(0)$。自由液面的振荡被包络线包围，该包络线以黑色绘制在图像上方。（b）右侧，相同驱动频率 $\Omega \approx 0.496\omega_{21}$ 下，功率谱中包络线主峰的频率随驱动振幅 a_x 的变化。当包络线为直线时（如这里的 $a_x < 0.15$ 所示，此时自由液面呈现规则平面动力学），功率谱为平坦谱，我们将对应频率设为零。对于 $a_x \approx 0.40$，包络线的功率谱受低振幅、低频率噪声主导，导致“爆发”频率骤降，表明系统从不规则旋涡运动向规则旋涡运动转变。左侧，$a_x \approx 0.12$、$a_x \approx 0.23$ 和 $a_x \approx 0.40$ 时包络线的功率谱。（c）在与（a）相同的激励参数下，相关性 $I(R/2)$ 与 $I(-R/2)$ 随时间的变化。（d）左侧，叠加

其中 $I(R/2)$（蓝色）和 $I(-R/2)$（红色）；右侧，前接触线的位置$\eta(R,\ \pm\pi/6,\ t)$随时间的变化，取自 $I(-R/2)$（红色曲线）和 $I(R/2)$（蓝色曲线）。(d) 中所示的信号取自用于计算 (c) 中相关性的完整信号，针对 $a_x \approx 0$。23，在蓝色标出的时间区间内，分别记为 (1)（相关性最大值）和 (2)（相关性最小值）。(e)-(f) $\eta(R,\ -\pi/6,\ t)$（红色曲线）和 $\eta(R,\ \pi/6,\ t)$（蓝色曲线）的归一化功率谱，以及其谐波分量与超谐波分量之间相移的绝对值；其中，$\eta(R,\ \pm\pi/6,\ t)$ 的动力学在 (e) 中取时间区间 (1)，在 (f) 中取时间区间 (2)。

动力学。后者通过准周期性地在超谐平面运动和旋转运动之间切换，导致整体动力学呈现不规则性。

6.7. 波幅饱和：理论预测与实验

在最后一节中，我们根据（5.13），就波幅饱和对理论预测与实验¯测量结果进行更定量的比较。在这方面，通过固定激励振幅并沿两个方向进行频率扫描，实验测量有量纲波幅 $\Delta\delta = \max_{\theta,t}\eta(r=R,\theta,t) - \min_{\theta,t}\eta(r=R,\theta,t)$。采用向后扫描，以沿右侧下方的平面分支前进，直至发生亚临界跃升转变并进入旋涡运动（P：庞加莱分岔）（$\Omega = \Omega_P(a_x)$）。另一方面，进行向上扫描，以便从分岔点 $H(\Omega = \Omega_H(a_x))$ 起，并在阈值频率 $\Omega = \Omega_P(a_x)$ 以上，维持稳定的超谐旋转响应；高于该频率后，超谐平面运动和旋转运动均为稳定解（图 13 稳定性图的右侧区域）。

对于每组激励参数（a_x，Ω/ω_{21}），从相应视频中手动提取前壁上波峰和波谷的像素高度，并与静止流体的高度进行比较（容器上的黑色标记既用于标示该高度，也用作刻度），从而得到前部接触线高程的最大值和最小值。使用黑色刻度所提供的换算因子，将这些数值转换为米。随后对所得差值$\Delta\delta$ 取3至5个振荡周期的平均值，并用容器半径 R进行归一化。

¯实验测得的无量纲波幅 $\Delta\delta = \Delta\delta/R$ 随驱动频率变化的关系（对应不同的激励振幅）显示于图15中，同时给出了理论弱非线性预测（5.13）（浅蓝色实线）以及线性势流解（3.4）（黑色虚线）以供比较。

与两个平面分支相关的实验数据总体上与本文的弱非线性预测吻合良好，不过在旋涡状态下，WNL理论略微低估了波幅。回顾§5.1可知，在最低阶近似下，这两个分支中的波解由两个平面波叠加而成，即一个谐波平面单峰分量，其在空间和时间上的振荡形式为$\cos(\Omega t)\cos\theta$；以及一个超谐波平面双峰分量，其形式为$\cos(2\Omega t+\Phi)\cos 2\theta$，左侧分支中的相位为 $\Phi = \pi$，右侧分支中的相位为 $\Phi = 0$。相位Φ 的信息无法从图15的振幅图中直接辨认，但包含在图11(a)中 $\Omega/\omega_{21} < 0.5$以及图11(e)中 $\Omega/\omega_{21} > 0.5$所示的快照序列里。由于单峰波具有时间周期性，在 $t = T/4 = \pi/2\Omega$ 和$t = 3T/4 = 3\pi/2\Omega$ 时刻拍摄的快照对应于谐波分量的时间节点，因此，在一阶近似下，瞬时仅剩下双峰分量，其方位空间结构为$\cos(\pi+\Phi)\cos 2\theta$。由此可清楚看出，对于 $\Omega/\omega_{21} < 0.5$和$\Phi = \pi$，自由表面最大值出现在方位角坐标 $\theta = 0$ 和 π处，而最小值位于 $\theta = \pm\pi/2$处（对于 $\Omega/\omega_{21} > 0.5$和 $\Phi = 0$则相反）。这分别使图11(a)和(e)所示的瞬时自由液面呈现凹形和凸形。

与图中的稳定性图一致13，通过反向频率扫描得到的阈值频率 $\Omega_H(a_x)$，即旋涡分支从较低的驱动频率开始变得稳定的频率 Ω，得到了正确检测。此外，向上扫描还使我们能够检测到从旋涡分支跳转至右下平面分支的向下跳跃转变。

向下跳跃转变的发生是意料之中的，因为它由耗散机制引起（另见 §6.5），而这些机制在当前的无黏分析中被忽略了。相关阻尼取决于波幅和激励

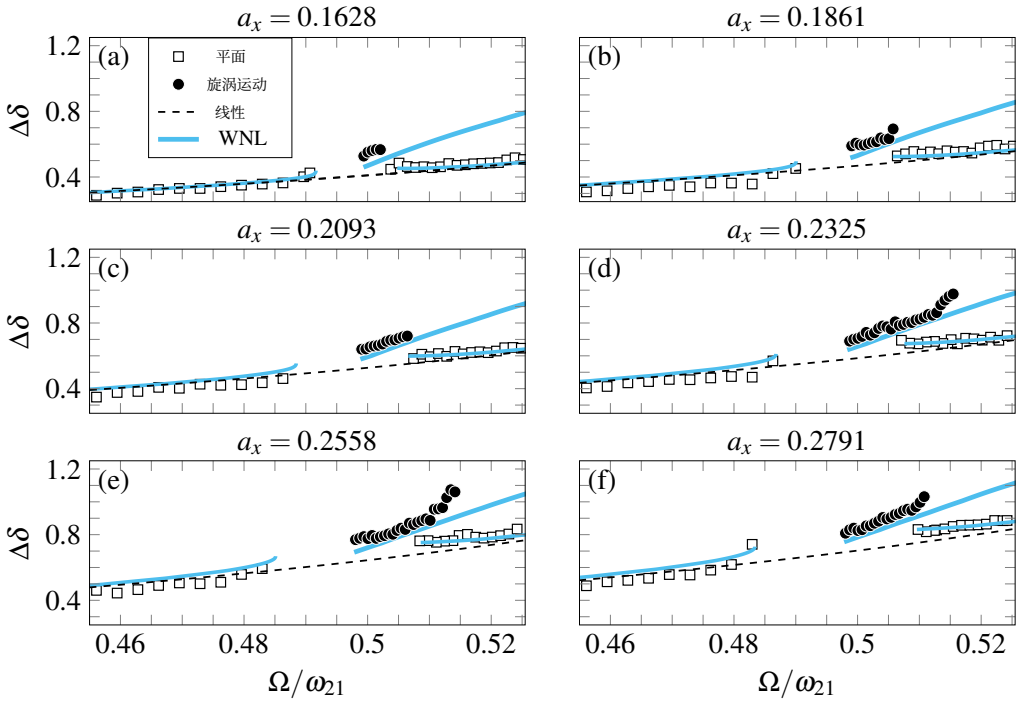

图15：针对不同无量纲强迫振幅，将有限振幅饱和与实验测量进行定量比较，$a_{x\circ}$。黑色点线：根据（3.4）和（3.5）得到的线性势流解。浅蓝色实线：根据（5.13）由本文弱非线性模型预测的稳定平面波和旋涡波分支。标记：实验测量。黑色空心方块表示平面运动，黑色实心圆表示旋涡动力学。

加速度振幅（见 Raynovskyy & Timokha（2018*b*）、Raynovskyy & Timokha（2020），以及 Bongarzone 等人（2022*a*）附录A中的讨论）会调制外部驱动与波响应之间的相位滞后。Bäuerlein & Avila（2021）指出（针对矩形容器中的单向晃荡波），这种调制对于准确预测跳降频率至关重要。

阻尼系数可尝试通过实验拟合，并在事后以现象学方式引入 振幅方程（5.9*a*）-（5.9*b*）中，做法与 Bongarzone等人（2022*a*）附录A中的做法相同。然而，本节所考察案例中的向下跳跃转变（见图15）对频率扫描速率极其敏感。将频率步长从 5 mHz 减小到 1 mHz（图15中用于生成旋涡分支的步长）后，观察到跳降频率有所不同。已有文献指出，在多解区间内，响应特征主要取决于扫描速率（Park等人2011；Bourquard & Noiray 2019；Yu等人2020），因此这一现象也在预料之中。由于我们没有尝试小于 1 mHz 的频率增量，图15所示的跳降频率预测并不能完全可靠地用于拟合实验中的阻尼。

尽管存在这些局限，弱非线性模型仍能较好地描述实验中观测到的旋涡分支，直至测得的跳降频率。在较大的驱动振幅下，随着波频率升高，旋涡响应通常会与理论预测出现较小偏差。与先前的研究一致

(Dodge 等 1965；Ibrahim 2005；Bäuerlein & Avila 2021)，我们的实验揭示，这是由于容器壁附近的波峰逐渐变陡、波谷逐渐变宽所致。最终，这种非线性机制会变得足够强，使弱非线性模型不再准确。

7. 结论

本文研究了圆柱形容器在驱动振幅为 a_x 、角频率为 Ω 的纵向周期激励下的晃荡波行为。以往关于这种激励条件和几何形状的研究，大多聚焦于谐振附近的自由液面响应，即 $\Omega/\omega_{1n} \approx 1$；而本文的核心则是探讨最重要的次级超谐共振 $\Omega/\omega_{2n} \approx 1/2$，其特征是在频率为 $\omega = 2\Omega \approx \omega_{2n}$ 时出现双波峰（DC）动力学。

Reclari（2013）和 Reclari 等人 （2014）首次通过实验观测到容器旋转运动下的这种超谐共振，但在其他激励条件（例如纵向激励）下对此现象的研究似乎尚未见报道。

为在这一方向上进一步推进研究，我们采用多重时间尺度法开展弱非线性分析（WNL），并进行了专门的实验，以探究稳态自由液面动力学，以及超谐共振附近双波峰旋涡波出现所导致的对称性破缺。

与 Bongarzone等（2022*a*）类似，首先对 WNL 分析进行形式化，以处理较简单的谐波共振情形。我们将模型结果与先前的实验测量结果，以及基于 Narimanov–Moiseev 多模态晃荡理论的既有理论预测进行了比较（Faltinsen等 2016；Raynovskyy & Timokha 2020）。总体而言，我们针对单波峰（SC）波动力学所开展的分析，与此前报告的实验和理论结果一致。尤其是，WNL 模型成功捕捉了单峰平面波、旋涡波和不规则波之间的状态边界，并准确描述了共振附近的非线性行为，从而验证了这一理论方法的适用性。

随后，WNL 分析扩展至更复杂的超谐共振情形。我们专门开展了一项实验室规模实验，以观测并表征纵向激励下的超谐响应。实验研究结果与 WNL 模型的结果高度吻合，表明超谐共振附近的自由液面动力学由永久存在的一阶受迫谐波平面单波峰波与超谐双峰波叠加而成；后者可呈现平面、不规则或旋涡动力学，其中旋涡动力学会使系统响应发生对称性破缺，并形成发生概率相同的顺时针或逆时针旋转波。实验测得了 $(a_x,\ \Omega/\omega_{21})$ 平面内三个不同状态之间的边界，结果与 WNL 预测在定量上高度吻合；但这一结论仅适用于高于某一激励振幅阈值的情况，低于该阈值时，旋涡和不规则动力学似乎会受到耗散机制的抑制，而当前的无黏分析并未考虑这些机制。最后，我们通过重构总流场解计算出预测的波幅饱和，并将其与实验测得的稳态波幅进行了比较；结果表明，该预测能够准确描述超谐共振附近稳定的平面波和旋涡波分支。

理论预测与实验结果相当吻合，这验证了弱非线性方法在成功描述非线性谐波和超谐波相互作用所产生的晃荡波动力学方面的适用性。

H =液深/R	μ_{SC}	ν_{SC}	ξ_{SC}	μ_{DC}	ν_{DC}	ξ_{DC}	ζ_{DC}	χ_{-}	χ_{+}
1.10	-0.279	1.414	-7.487	0.118	9.821	-32.077	0.104	2.697	-3.257
1.20	-0.280	1.407	-7.914	0.108	9.812	-32.110	0.067	2.692	-3.159
1.30	-0.281	1.406	-8.101	0.101	9.813	-32.128	0.046	2.687	-3.089
1.40	-0.282	1.407	-8.211	0.096	9.812	-32.138	0.035	2.682	-3.040
1.50	-0.283	1.409	-8.281	0.093	9.811	-32.143	0.029	2.678	-3.006
1.60	-0.283	1.410	-8.328	0.091	9.811	-32.146	0.028	2.675	-2.982
1.70	-0.283	1.411	-8.359	0.089	9.810	-32.148	0.029	2.673	-2.965
1.80	-0.284	1.412	-8.381	0.089	9.810	-32.149	0.032	2.672	-2.953
1.90	-0.284	1.412	-8.395	0.088	9.810	-32.149	0.035	2.671	-2.945
2.00	-0.284	1.413	-8.405	0.087	9.810	-32.150	0.040	2.670	-2.940

表1：在不同液深下计算的正规形系数，分别出现在式（4.7*a*）—（4.7*b*）（SC）和式（5.9*a*）—（5.9*b*）（DC）中 H = 液深/R 并与模态 $(m,\ n) = (1,\ 1)$ 相关。注意，在式（5.9*a*）—（5.9*b*）中，$\chi_{DC} = \chi_{-} + \chi_{+}$。

波动力学，源于非线性谐波和超谐波相互作用。正如附录B所述，本分析并不局限于纵向激励，而且无需进一步计算即可直接推广至任意椭圆轨迹，从而涵盖 Bongarzone 等人 (2022*a*)研究的旋转晃荡极限。就此而言，Faltinsen 等人 (2016)关于椭圆容器运动的理论颇有启发性地预测了反向旋转涡旋波的出现，即波的传播方向与容器运动方向相反。本文所述谐波与超谐波系统行为之间的定性类比表明，在超谐波双峰共振附近激励系统，也可能触发此类反向传播涡旋波，因此有必要开展新的实验研究。

附录A. 正规形系数的计算

谐波单峰（SC）动力学中出现在式（4.7*a*）—（4.7*b*）中的正规形系数计算如下

$$\mathrm{i}\,\mathcal{I}_{SC}\,\mu_{SC} = <\hat{\mathbf{q}}_1^{A_1\dagger}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{F}> = \int_0^1 (r/2)\,\overline{\hat{\eta}}_1^{A_1\dagger}\, r\mathrm{d}r, \tag{A 1a}$$

$$\mathrm{i}\,\mathcal{I}_{SC}\,\nu_{SC} = <\hat{\mathbf{q}}_1^{A_1\dagger}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|A_1|^2A_1}> = \int_0^1 \left(\overline{\hat{\eta}}_1^{A_1\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{dyn}}}^{|A_1|^2A_1} + \overline{\hat{\Phi}}_1^{A_1\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{kin}}}^{|A_1|^2A_1}\right) r\mathrm{d}r, \tag{A 1b}$$

$$\mathrm{i}\,\mathcal{I}_{SC}\,\xi_{SC} = <\hat{\mathbf{q}}_1^{A_1\dagger}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_3^{|B_1|^2A_1}> = \int_0^1 \left(\overline{\hat{\eta}}_1^{A_1\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{dyn}}}^{|B_1|^2A_1} + \overline{\hat{\Phi}}_1^{A_1\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{kin}}}^{|B_1|^2A_1}\right) r\mathrm{d}r. \tag{A 1c}$$

其中 $\mathcal{I}_{SC} = <\hat{\mathbf{q}}^{A_1}\dagger 1,\ \mathrm{B}\,\hat{\mathbf{q}}_1^{A_1}> = \int_0^1 \left(\hat{\eta}_1^{A_1}\dagger\,\hat{\Phi}_1^{A_1} + \overline{\hat{\Phi}}^{A_1}\dagger 1\,\hat{\eta}_1^{A_1}\right) r\mathrm{d}r$。这里 $\left(\hat{\mathbf{q}}^{A_1}\dagger 1,\ \hat{\mathbf{q}}_1^{B_1}\right) = \dagger\left(\hat{\mathbf{q}}_1^{A_1},\ \hat{\mathbf{q}}_1^{B_1}\right)$，因为无黏问题关于厄米内积 $<\mathrm{a},\mathrm{b}> = \int_\Sigma \mathrm{a}\cdot\mathrm{b}\,\mathrm{d}V$ 是自伴的，其中 a 和 b 是两个任意向量（关于伴随问题的详细讨论和推导，参见 Viola 等人（2018））。

表达式（A 1*a*）和（A1*b*）已在 Bongarzone 等人(2022*a*）中给出。

这些表达式的左侧误打成了错误形式，因为分子中不应出现质量矩阵$\boldsymbol{B}$。本版本则已正确写出。

在 ϵ^3 阶计算振幅方程系数时，只有共振项才有意义。这些项及其相应的振幅，对于单峰波与 $e^{\mathrm{i}((\omega_{1n}t\pm\theta)}$ 成正比，对于双峰波与 $e^{\mathrm{i}(\omega_{2n}t\pm2\theta)}$ 成正比。例如，$\hat{\mathrm{T}}_{3_{kin}}^{|A|^2A}$ 的表达式（单峰波对应 $A=A_1$，双峰波对应 $A=A_2$）见Bongarzone等 （2022*a*）的附录D。共振项的提取借助符号计算工具完成，例如 Wolfram Mathematica 软件。

类似地，超谐双波峰（DC）动力学的式（5.9*a*）-（5.9*b*）中出现的正规形系数计算如下

$$\mathrm{i}\,\mathcal{I}_{DC}\,\mu_{DC}=\int_0^1\left(\overline{\hat{\eta}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{2_{\mathrm{dyn}}}^{F^2}+\overline{\hat{\Phi}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{2_{\mathrm{kin}}}^{F^2}\right)r\mathrm{d}r,\tag{A 2a}$$

$$\mathrm{i}\,\mathcal{I}_{DC}\,\zeta_{DC}=\int_0^1\left(\overline{\hat{\eta}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{dyn}}}^{\Lambda F^2}+\overline{\hat{\Phi}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{kin}}}^{\Lambda F^2}\right)r\mathrm{d}r,\tag{A 2b}$$

$$\mathrm{i}\,\mathcal{I}_{DC}\,\chi_{DC}=\int_0^1\left(\overline{\hat{\eta}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{dyn}}}^{A_2|F|^2}+\overline{\hat{\Phi}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{kin}}}^{A_2|F|^2}\right)r\mathrm{d}r,\tag{A 2c}$$

$$\mathrm{i}\,\mathcal{I}_{DC}\,\nu_{DC}=\int_0^1\left(\overline{\hat{\eta}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{dyn}}}^{|A_2|^2A_2}+\overline{\hat{\Phi}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{kin}}}^{|A_2|^2A_2}\right)r\mathrm{d}r,\tag{A 2d}$$

$$\mathrm{i}\,\mathcal{I}_{DC}\,\xi_{DC}=\int_0^1\left(\overline{\hat{\eta}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{dyn}}}^{|B_2|^2A_2}+\overline{\hat{\Phi}}_1^{A_2\dagger}\hat{\mathcal{F}}_{3_{\mathrm{kin}}}^{|B_2|^2A_2}\right)r\mathrm{d}r,\tag{A 2e}$$

其中 $\mathrm{I}_{DC}=<\hat{\mathbf{q}}^{A_2\dagger 1},\ \boldsymbol{B}\hat{\mathbf{q}}_1^{A_2}>=\int_0^1\left(\hat{\eta}_1^{A_2\dagger}\overline{\Phi}_1^{A_2}+\hat{\Phi}^{A_2\dagger 1}\overline{\hat{\eta}_1^{A_2}}\right)r\mathrm{d}r$。所有积分均在自由液面 $z=0$ 处计算。

我们注意到，正规形系数 χ_{DC} 包含两个不同的贡献。事实上，它可以方便地改写为 $\chi_{DC}=\chi_-+\chi_+$，其中 χ_- 和 χ_+ 的值列于表1中。χ_- 恰好对应于 Bongarzone χ_{DC} 等人（*2022*a）计算的系数；采用本文形式体系，例如对于模态 A_2（模态 B_2亦然），该系数由二阶响应与

$$(1/2)\,A_2F\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2F}e^{\mathrm{i}((3\omega_{2n}/2)t-3\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1}+(1/2)\,A_2\overline{F}\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2\overline{F}}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t-\theta)}e^{-\mathrm{i}\Lambda T_1},\tag{A 3}$$

方程（5.6）中的项，与由 $m=-1$ 在（5.2）中表征的主阶特解的复共轭相互作用而产生。相反，贡献 χ_+ 则由二阶响应之间的相互作用产生

$$(1/2)\,A_2F\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2F}e^{\mathrm{i}((3\omega_{2n}/2)t-\theta)}e^{\mathrm{i}\Lambda T_1}+(1/2)\,A_2\overline{F}\hat{\mathbf{q}}_2^{A_2\overline{F}}e^{\mathrm{i}((\omega_{2n}/2)t-3\theta)}e^{-\mathrm{i}\Lambda T_1},\tag{A 4}$$

方程（5.6）中的项与$m=+1$ 在（5.2）中对应的主阶特解的复共轭相互作用。

附录B. 推广至椭圆轨道

在本附录中，我们将展示，如何将本文针对容器纵向运动所概述的分析，直接推广到任意类似椭圆的振荡。对于

椭圆　水平面上的圆形轨道（x，y），方程（2.1）修改如下

$$\dot{\mathbf{X}}_0 = \begin{cases} \left(-a_x\Omega\sin(\Omega t)\cos\theta + a_y\Omega\cos(\Omega t)\sin\theta\right)\mathbf{e}_r \\ \left(\ a_x\Omega\sin(\Omega t)\sin\theta + a_y\Omega\cos(\Omega t)\sin\theta\right)\mathbf{e}_\theta \end{cases}, \tag{B 1}$$

其中，a_x 和a_y 分别为无量纲长轴和短轴强迫振幅分量，Ω 为无量纲驱动角频率。在这些激励条件下，$z=\eta$ 处的非定常强迫伯努利方程为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + \eta = r\left(f_x\cos(\Omega t)\cos\theta + f_y\sin(\Omega t)\sin\theta\right), \tag{B 2}$$

其中 $f_x = a_x\Omega^2$ 和 $f_y = a_y\Omega^2$。引入长宽比 $\alpha = a_y/a_x = f_y/f_x$，使得 $f_x = f$和 $f_y = \alpha f$，方程（B2）可方便地改写为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + \eta = r\frac{f}{2}\left(\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)e^{\mathrm{i}(\Omega t-\theta)} + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)e^{\mathrm{i}(\Omega t+\theta)}\right) + c.c.. \tag{B 3}$$

$0<\alpha<1$ 的取值意味着椭圆轨道，而两个极限情形 $\alpha=0$ （$a_x\neq 0$、$a_y=0$）和 $\alpha=1$ （$a_x=a_y\neq 0$）分别对应纵向摇动（如本文所研究的情形）和旋转摇动条件（Bongarzone等 2022a）。为方便起见，我们还引入辅助变量

$$\alpha_- = \frac{1+\alpha}{2}, \qquad \alpha_+ = \frac{1-\alpha}{2}, \tag{B 4}$$

其中 $1/2\leqslant\alpha_-\leqslant 1$ 和 $0\leqslant\alpha_+\leqslant 1/2$。将两个辅助长宽比$\alpha_-$ 和 α_+ 计入强迫项的表达式后，整个推导过程可以重复进行，从而无需任何进一步计算，即可得到谐波单峰波的以下振幅方程组

$$\frac{dA}{dt} = -\mathrm{i}\lambda A + \mathrm{i}\,\mu_{SC}\alpha_- f + \mathrm{i}\,\nu_{SC}|A|^2A + \mathrm{i}\,\xi_{SC}|B|^2A, \tag{B 5a}$$

$$\frac{dB}{dt} = -\mathrm{i}\lambda B + \mathrm{i}\,\mu_{SC}\alpha_+ f + \mathrm{i}\,\nu_{SC}|B|^2B + \mathrm{i}\,\xi_{SC}|A|^2B. \tag{B 5b}$$

以及超谐波双波峰（DC）波

$$\frac{dA}{dt} = -\mathrm{i}\left(2\lambda - \left(\alpha_-^2\chi_- + \alpha_+^2\chi_+\right)f^2\right)A + \mathrm{i}\left(\zeta_{DC}\lambda + \mu_{DC}\right)\alpha_-^2 f^2 + \mathrm{i}\,\nu_{DC}|A|^2A + \mathrm{i}\,\xi_{DC}|B|^2A, \tag{B 6a}$$

$$\frac{dB}{dt} = -\mathrm{i}\left(2\lambda - \left(\alpha_+^2\chi_+ + \alpha_-^2\chi_-\right)f^2\right)B + \mathrm{i}\left(\zeta_{DC}\lambda + \mu_{DC}\right)\alpha_+^2 f^2 + \mathrm{i}\,\nu_{DC}|B|^2B + \mathrm{i}\,\xi_{DC}|A|^2B, \tag{B 6b}$$

其中正规形系数的取值仍列于表 1。

我们注意到，在 $\alpha=0$（纵向）极限下，可得到 $\alpha_-=\alpha_+=1/2$ 以及方程 (4.7a)-(4.7b) 和 (5.9a)-(5.9b)。相反，在 $\alpha=1$（旋转）极限下，有 $\alpha_-=1$和 $\alpha_+=0$，因此方程 (B5a) 和 (B 6a) 对应于 Bongarzone 等人（2022a）的方程 (4.6) 和 (4.22)，其中 $A\neq 0$ 和 $B=0$ 是方程 (B 6a) 和 (B 6b) 唯一可能的稳定定常解。

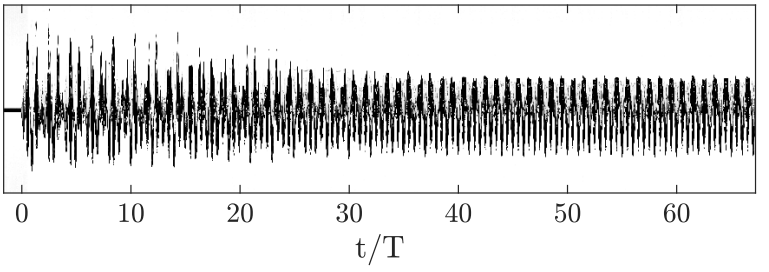

图16：容器中轴上的强度剖面随时间的变化。自由液面最初处于静止状态（$t < 0$），随后受到来自 $t = 0$ 的强迫简谐振荡。

附录C. 瞬态阶段持续时间的估算

在本研究中，我们仅考虑自由液面对受迫振荡的稳态响应。为确保在分析自由液面动力学时排除瞬态阶段，我们首先通过记录不同¯驱动振幅 $\bar{a}_x$ 和角频率 Ω下自由液面的完整动力学过程来估算瞬态时间：液面最初静止，随后开始振荡。从视频中提取的容器中轴沿线强度剖面的时间演化，是¯晃荡波振幅随时间变化的直接表征，并表明，对于所有已研究的（$\bar{a}_x$， Ω）参数组合，自由液面动力学通常在经历 50 个振荡周期后即可认为已达到稳态，见图16。

补充材料与视频

补充视频展示了实验观测到的自由液面动力学随驱动频率递增的演变过程，激励振幅固定为 $\bar{a}_x/R = 20$ 毫米，对应的无量纲值为 $a_x = \bar{a}_x/R = 0$。2325。补充视频可在 (LINK) 查看。

资助

我们感谢　感谢瑞士国家科学基金会提供的第178971号和第200341号资助

利益声明

作者声明不存在利益冲突。

作者贡献

A. M.、F. G. 和 A. B. 制定了研究计划。A. B. 建立了解析与数值模型。A. M. 和 A. B. 主导了模型求解。A. M. 设计并完成了所有实验。A. M.、F. G. 和 A. B. 撰写了论文。

参考文献

Abramson, H. N. 1966年 运动容器中液体的动态行为及其在航天器技术中的应用。 *NASA*技术报告 SP-106。NASA，华盛顿。 Abramson, H. N., Chu, W.-H. & Kana, D. D. 1966年 刚性容器中非线性横向晃荡的若干研究。 *NASA*承包商报告NASA CR-375。NASA。 Bäuerlein, B. & Avila, K. 2021 相位滞后可预测液体晃荡实验中的非线性响应最大值。《流体力学杂志》**925**。

Bongarzone, A., Bertsch, A., Renaud, P. & Gallaire, F. 2021a 平面冲击射流：滞后行为及自持振荡的起源。《流体力学杂志》913。Bongarzone, A., Guido, M. & Gallaire, F. 2022a 描述轨道摇荡圆柱容器中双峰旋涡的振幅方程。《流体力学杂志》943, A28。Bongarzone, A., Viola, F., Camarri, S. & Gallaire, F. 2022b 近满液圆柱中的次谐波参数不稳定性：弱非线性分析。《流体力学杂志》947, A24。Bongarzone, A., Viola, F. & Gallaire, F. 2021b 接触线非线性导致的毛细重力波弛豫：投影法。《混沌》31 (12), 123124。Bourquard, Claire & Noiray, Nicolas 2019 关于“缓慢穿越共振”的评论。《物理评论E》100 (4), 047001。Bouvard, J., Herreman, W. & Moisy, F. 2017 轨道摇荡圆柱容器中的平均质量输运。《物理评论：流体》2 (8), 084801。Büchs, J. 2001 摇荡培养物的优势与问题简介。《生化工程杂志》7 (2), 91–98。Büchs, J., Maier, U., Milbradt, C. & Zoels, B. 2000a 旋转摇床上摇瓶的功耗：I. 低液体黏度下无挡板摇瓶的功耗测量。《生物技术与生物工程》68 (6), 589–593。Büchs, J., Maier, U., Milbradt, C. & Zoels, B. 2000b 旋转摇床上摇瓶的功耗：II. 高液体黏度下无挡板摇瓶比功耗和流动状态的无量纲描述。《生物技术与生物工程》68 (6), 594–601。Case, K. M. & Parkinson, W. C. 1957 不可压缩液体中表面波的阻尼。《流体力学杂志》2 (2), 172–184。Chu, W.-H. 1968 轴向激励下任意形状储槽中的次谐波振荡。《美国机械工程师学会汇刊：应用力学杂志》35, 148–154。Cocciaro, B., Faetti, S. & Festa, C. 1993 非润湿边界条件下毛细效应对表面重力波影响的实验研究。《流体力学杂志》246, 43–66。Dodge, F. T., Kana, D. D. & Abramson, H. N. 1965 纵向激励刚性圆柱容器中的液体表面振荡。美国航空航天学会 3 (4), 685–695。Dussan, E. B. 1979 液体在固体表面的铺展：静态与动态接触线。《流体力学年度评论》11 (1), 371–400。Faltinsen, O. M. 1974 矩形储槽中晃荡的非线性理论。《船舶研究杂志》18 (04), 224–241。Faltinsen, O. M., Lukovsky, I. A. & Timokha, A. N. 2016 直立环形储槽中的共振晃荡。《流体力学杂志》 804, 608–645。Faltinsen, O. M., Rognebakke, O. F. & Timokha, A. N. 2005 方形底面水池中的共振三维非线性晃荡。第二部分：高阶模态的影响。《流体力学杂志》523, 199–218。Faltinsen, O. M. & Timokha, A. N. 2009 晃荡。剑桥大学出版社。Friedrichs, K. O. 2012 希尔伯特空间中的算子谱理论。施普林格科学与商业媒体。Fujimura, K. 1989 平行剪切流弱非线性稳定性理论中两种扰动方法的等价性。《伦敦皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》424 (1867), 373–392。Fujimura, K. 1991 流体运动弱非线性稳定性理论中的中心流形法与多重尺度法。《伦敦皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》434 (1892), 719–733。Hocking, L. M. 1987 179, 253 266 刚性边界处毛细重力波的阻尼。《流体力学杂志》– 。Hopfinger, E. J. & Baumbach, V. 2009 1, 279 292 圆柱形燃料箱中的液体晃荡。《推进物理进展》– 。Horstmann, G. M., Anders, S., Kelley, D. H. & Weier, T. 2021 轨道激励下圆柱容器中螺旋波的形成。《流体力学杂志》925。Horstmann, G. M., Herreman, W. & Weier, T. 2020 轨道摇荡直立圆柱中的线性阻尼界面波理论。《流体力学杂志》891。Hutton, R. E. 1963 对圆柱容器中流体非线性非平面振荡的研究。NASA技术报告 NASA；D-1870。Hutton, R. E. 1964 旋转晃荡期间的流体质点运动。《美国机械工程师学会汇刊：应用力学杂志》31 (1), 145–153。Ibrahim, R. A. 2005 液体晃荡动力学：理论与应用。剑桥大学出版社。Keulegan, G. H. 1959 矩形水池驻波中的能量耗散。《流体力学杂志》6 (1), 33–50。Klöckner, W. & Büchs, J. 2012 摇荡技术的进展。《生物技术趋势》30 (6), 307–314。

Lamb, H. 1993《流体动力学》。剑桥大学出版社。Lukovsky, I. 2015《含液体刚体的数学模型》。Lukovsky, I. & Timokha, A. 2011 将 Narimanov–Moiseev 和 Lukovsky–Miles 方案相结合以研究非线性液体晃荡。《数值与应用数学杂志》105 (2), 69–82。Lukovsky, I. & Timokha, A. 2015 晃荡的多模态方法。《非线性振荡》18 (3), 295–312。Lukovsky, I. A. 1990《含液体腔体固体的非线性动力学导论》。基辅：Naukova dumka（俄文）。Maier, U., Losen, M. & Büchs, J. 2004 摇瓶中气液传质的理解与建模进展。《生化工程杂志》17 (3), 155–167。McDaniel, L. E. & Bailey, E. G. 1969 摇荡速度和封口类型对摇瓶培养物的影响。《应用微生物学》17 (2), 286–290。Micheletti, M., Barrett, T., Doig, S. D., Baganz, F., Levy, M. S., Woodley, J. M. & Lye, G. J. 2006 摇摆式生物反应器中的流体混合：对微升规模微生物和哺乳动物细胞培养放大预测的影响。《化学工程科学》61 (9), 2939–2949。Miles, J. W. 1967 297, 459 475 封闭盆地中的表面波阻尼。《英国皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》–。Miles, J. W. 1984a 圆柱体中的内部共振表面波。《流体力学杂志》149, 1–14。Miles, J. W. 1984b 圆柱体中的共振受迫表面波。《流体力学杂志》149, 15–31。Moiseev, N. N. 1958 有限体积液体非线性振动理论。《应用数学与力学杂志》22 (5), 860–872。Moisy, F., Bouvard, J. & Herreman, W. 2018 轨道摇摆啤酒杯中的反向旋转。《欧洲物理快报》122 (3), 34002。Muller, N., Girard, P., Hacker, D. L., Jordan, M. & Wurm, F. M. 2005 用轨道摇床技术悬浮培养哺乳动物细胞。《生物技术与生物工程》89 (4), 400–406。Narimanov, G. S. 1957 部分充液储罐的运动：考虑振幅非小量性。《应用数学与力学》（俄文）21, 513–524。Narimanov, G. S., Dokuchaev, L. V. & Lukovsky, I. A. 1977 含液体飞行器的非线性动力学。莫斯科：Mashinostroenie（俄文）。Orchini, A., Rigas, G. & Juniper, M. P. 2016 Rijke管中热声分岔的弱非线性分析。《流体力学杂志》805, 523–550。Park, Youngyong, Do, Younghae & Lopez, Juan M 2011 缓慢穿越共振。《物理评论E》84 (5), 056604。Raynovskyy, I. & Timokha, A. N. 2018a 执行圆周轨道运动的直立圆柱容器中的稳态共振晃荡。《数学问题工程》。Raynovskyy, I. A. & Timokha, A. N. 2018b 圆形底面容器中的阻尼稳态共振晃荡。《流体动力学研究》50 (4), 045502。Raynovskyy, I. A. & Timokha, A. N. 2020《直立圆形容器中的晃荡：理论、解析解与应用》。CRC出版社。Reclari, M. 2013 轨道摇摆式生物反应器的流体动力学。技术报告。EPFL。Reclari, M., Dreyer, M., Tissot, S., Obreschkow, D., Wurm, F. M. & Farhat, M. 2014 轨道摇摆圆柱容器中的表面波动力学。《流体物理》26 (5), 052104。Royon-Lebeaud, A., Hopfinger, E. J. & Cartellier, A. 2007 圆形和方形底面圆柱容器中的液体晃荡与破波。《流体力学杂志》577, 467–494。Takahara, H. & Kimura, K. 2012 受俯仰激励的环形圆柱罐中晃荡的频率响应。《声音与振动杂志》331 (13), 3199–3212。Tan, R.-K., Eberhard, W. & Büchs, J. 2011 摇瓶中混合时间的测量与表征。《化学工程科学》66 (3), 440–447。Tissot, S., Farhat, M., Hacker, D. L., Anderlei, T., Kühner, M., Comninellis, C. & Wurm, F. M. 2010 根据轨道摇摆式生物反应器混合时间研究确定放大因子。《生化工程杂志》52 (2-3), 181–186。Tissot, S., Oberbek, A., Reclari, M., Dreyer, M., Hacker, D. L., Baldi, L., Farhat, M. & Wurm, F. M. 2011 无需探头和控制器即可实现高效、可重现的哺乳动物细胞生物工艺？《新生物技术》28 (4), 382–390。Viola, F., Brun, P.-T. & Gallaire, F. 2018 晃荡动力学中的毛细滞后：弱非线性分析。《流体力学杂志》837, 788–818。

Viola, F. & Gallaire, F. 2018 分析表面张力和黏度对晃荡波阻尼率综合影响的理论框架。《物理评论：流体》**3**(9), 094801。Wurm, F. M. 2004 培养的哺乳动物细胞中重组蛋白治疗药物的生产。《自然·生物技术》**22** (11), 1393–1398。Yu, Liuding, Tang, Lihua, Xiong, Liuyang & Yang, Tiejun 2020 利用时变参数捕获杜芬振子的高能轨道。《混沌：非线性科学跨学科期刊》**30** (2), 023106。Zhang, X., Bürki, C., Stettler, M., Sanctis, D. De, Perrone, M., Discacciati, M., Parolini, N., DeJesus, M., Hacker, D. L., Quarteroni, A. & Wurm, F. M. 2009 在振荡圆柱容器中通过表面曝气高效传递氧气，以支持体积规模最大达1000 l的哺乳动物细胞培养。《生化工程杂志》**45** (1), 41–47。